En este ejercicio se intentará ajustar una curva a los puntos que siguen

$$\begin{bmatrix} x & h(x) \\ 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$ generados por la función $h(x) = x^3 - 3x^2$

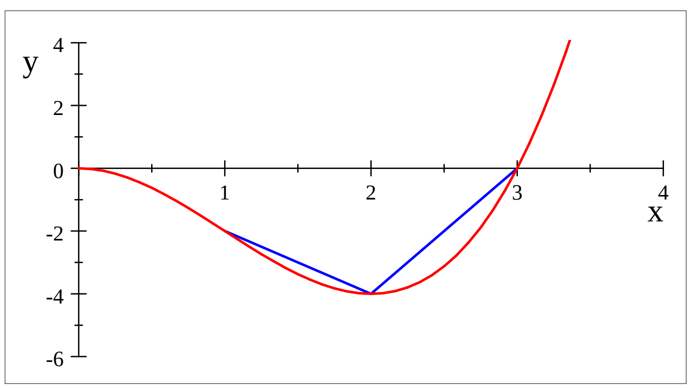
En primer lugar se realizará con splint lineales....
Procedimiento:
Determinamos los sub-intervalos sobre los cuales vamos a trabajar: $[1,3] = [1,2] \cup [2,3]$

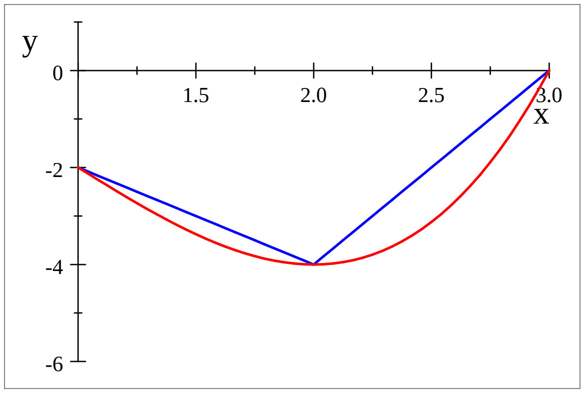
En $[1,2]$ $\begin{bmatrix} x & h(x) \\ 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ $\frac{y-(-2)}{x-1} = \frac{-4-(-2)}{2-1}$, Solution is: $y = -2x$, es la línea recta que procede graficar en dicho intervalo.

en $[2,3]$ $\begin{matrix} x & h(x) \\ 2 & -4 \\ 3 & 0 \end{matrix}$ $\frac{y-0}{x-3} = \frac{0-(-4)}{3-2}$, Solution is: $y = 4x - 12$, es la línea recta que procede graficar en dicho intervalo.

la función a trozos sería: $g(x) = \begin{cases} -2x & if \;\; 1 \leq x \leq 2 \\ 4x - 12 & if \;\; 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

en una observación más atenta de lo que acontece en el intervalo en estudio...





Se puede observar que la función obtenida es continua pero la primera derivada no existe en el punto x=2 , que es justamente el punto de subdivisión del intervalo. A estos puntos de subdivisión se les denomina "nodos"

Avanzamos un poco más e intentaremos una función splin con funciones de segundo grado.

Se requiere una función cuadrática por cada intervalo...

Sean ellas entonces:

$Q_1(x) = \alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2$ $\quad Q_2(x) = \alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 x^2$

Se requieren seis ecuaciones para poder determinar los seis valores de los coeficientes.

Deben coincidir en los puntos de la tabla de valores:	$Q_1(1) = -2$
Deben coincidir en los puntos de la tabla de valores:	$Q_1(2) = -4$
Deben coincidir en los puntos de la tabla de valores:	$Q_2(3) = 0$
Debe ser continua en los puntos intermedios(nodo)	$Q_1(2) = Q_2(2)$
Las primeras derivadas deben coincidir en los nodos	$Q_1'(2) = Q_2'(2)$
Las segundas derivadas deben coincidir en los nodos	$Q_1''(2) = Q_2''(2)$

$$\begin{bmatrix} x & f(x) \\ 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1(1) = -2 \\ Q_1(2) = -4 \\ Q_2(3) = 0 \\ Q_1(2) = Q_2(2) \\ Q_1'(2) = Q_2'(2) \\ Q_1''(2) = Q_2''(2) \end{bmatrix}$$, Solution is: $\{[\alpha_2 = 6.0, \alpha_1 = 6.0, \beta_2 = -11.0, \beta_1 = -11.0, \gamma_1 = 3.0, \gamma_2 = 3.0]\}$

$Q_1(1) = -2 = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = -2$

$Q_1(2) = -4 = \alpha_1 + 2\beta_1 + 4\gamma_1 = -4$

$Q_2(3) = 0 = \alpha_2 + 3\beta_2 + 9\gamma_2 = 0$

$Q_1(2) = Q_2(2) = \alpha_1 + 2\beta_1 + 4\gamma_1 = \alpha_2 + 2\beta_2 + 4\gamma_2$

$Q_1'(2) = Q_2'(2) = \beta_1 + 4\gamma_1 = \beta_2 + 4\gamma_2$

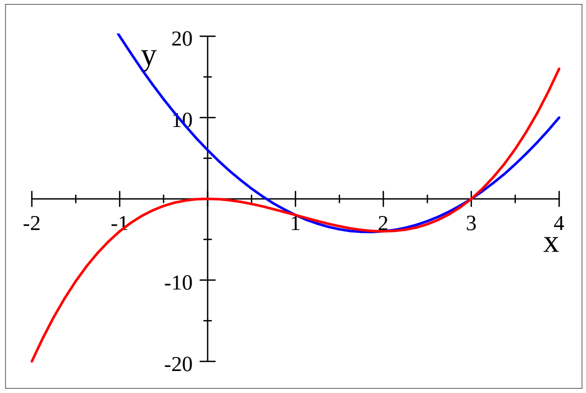
$Q_1''(2) = Q_2''(2) = 2\gamma_1 = 2\gamma_2$

....

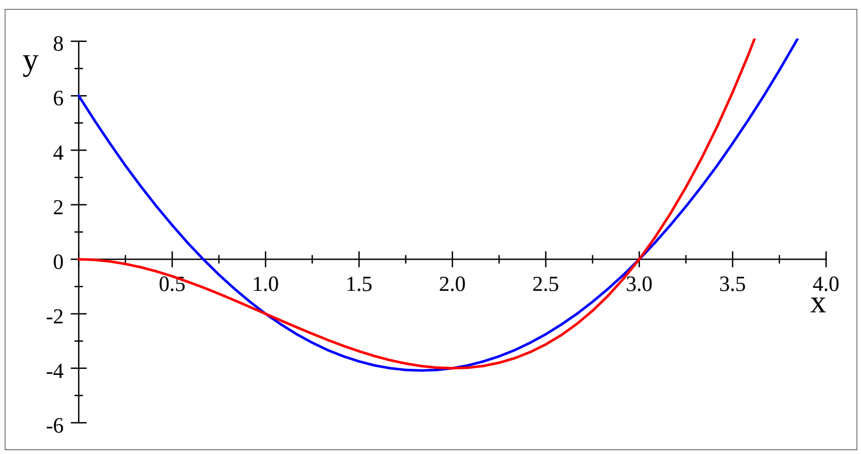
$\alpha_2 = 6.0 \quad \alpha_1 = 6.0 \quad \beta_2 = -11.0 \quad \beta_1 = -11.0 \quad \gamma_1 = 3.0 \quad \gamma_2 = 3.0$

$Q_1(x) = 3.0x^2 - 11.0x + 6.0$

$Q_2(x) = 3.0x^2 - 11.0x + 6.0$



en una visualización en el propio intervalo en estudio....



....

$$\begin{array}{c} S_1(1) = -2 \\ S_1(2) = -4 \\ S_2(2) = -4 \\ S_2(3) = 0 \\ S_1(2) = S_2(2) \\ S_1'(2) = S_2'(2) \\ S_1''(2) = S_2''(2) \end{array}, \text{ Solution is: } \left\{ \begin{bmatrix} a_2 = 6.0 \\ a_1 = 6.0 \\ b_2 = -11.0 \\ b_1 = -11.0 \\ c_1 = 3.0 \\ c_2 = 3.0 \end{bmatrix} \right\}$$

$S_1(1) = -2$, Solution is: $\{[c_1 = -1.0a_1 - 1.0b_1 - 2.0]\}$

$S_1'(2) = S_2'(2)$, Solution is: $\{[c_2 = 0.25b_1 - 0.25b_2 + c_1]\}$

$S_1''(2) = S_2''(2)$, Solution is: $\{[c_1 = c_2]\}$

serbachi@hormail.com

$S_2''(3) = 0$, Solution is: $\{[c_2 = 0.0]\}$

$$\begin{aligned}
S_1(x) &= a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3 \\
S_2(x) &= a_2 + b_2 x + c_2 x^2 + d_2 x^3 \\
S_1(x) &= S_2(x) \\
a_2 + b_2 x + c_2 x^2 + d_2 x^3 &= a_3 + b_3 x + c_3 x^2 + d_3 x^3 \\
b_1 + 2c_1 x + 3d_1 x^2 &= b_2 + 2c_2 x + 3d_2 x^2 \\
b_2 + 2c_2 x + 3d_2 x^2 &= b_3 + 2c_3 x + 3d_3 x^2 \\
2c_1 + 6d_1 x &= 2c_2 + 6d_2 x \\
2c_2 + 6d_2 x &= 2c_3 + 6d_3 x \\
2c_1 &= 0 \\
2c_3 + 12d_3 &= 0
\end{aligned}$$

$S_1(x) = 3.0x^2 - 11.0x + 6.0$ $\quad$ $S_2(x) = 3.0x^2 - 11.0x + 6.0$ $\quad$ $h(x) = x^3 - 3x^2$