# Algebra Lineal

LADE - www.urjc.es

curso 2006-2007 versión 3.1

## 1. MATRICES

Matriz de orden m x n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{ó}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}_{m\cdot n} \quad \text{ó} \quad A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad A = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

Matriz cuadrada: n=m

Diagonal principal: $a_{ij}$ con $i = j$

Traza: Suma de los elementos de la diagonal principal $\sum\limits_{i=j} a_{ij}$

Matriz Triangular:

Subtriangular: Todos los elementos bajo la diagonal principal son cero

Supertriangular: Todos los elementos sobre la diagonal principal son cero

Matriz Diagonal: Todos los elementos por encima y por debajo de la diagonal principal son cero

Matriz Fila: $A_{1\cdot n}$

Matriz Columna: $A_{m\cdot 1}$

### 1.1 OPERACIONES CON MATRICES

#### 1.1.1 Suma de Matrices

Al sumar dos matrices del mismo orden (mxn) se obtiene otra matriz que resulta de sumar los elementos que ocupan el mismo lugar.

$$\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}_{m\cdot n} + \begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix}_{m\cdot n} = \begin{pmatrix} a_{ij} + b_{ij} \end{pmatrix}_{m\cdot n}$$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

### 1.1.2 Producto de número real por matriz

Es el resultado de multiplicar el número real por cada elemento de la matriz
$k\left(\begin{array}{c} a_{ij} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} ka_{ij} \end{array}\right)$

Ejemplo

$3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

### 1.1.3 Producto Matricial

$A_{m \cdot n} B_{n \cdot p} = C_{m \cdot p}$ donde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j+}a_{i2}b_{2j} + .... + a_{in}b_{nj}$
suma de los productos de los elementos de la fila i de A por los de la columna j de B

Ejemplo

$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}_{3 \cdot 2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2 \cdot 3} = \begin{pmatrix} -1 & -14 & -2 \\ 0 & 8 & 1 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}_{3 \cdot 3}$
El producto matricial no es conmutativo $AB \neq BA$

**Nota**

Algunas reglas válidas al operar con números reales dejan de serlo al operar con matrices
Cuadrado de un binomio

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$$

Suma por diferencia

$$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$$

Sacar factor común

$$AB + AC = A(B + C)$$

$$AB + CA \neq A(B + C)$$

Si se cumple:
La propiedad Asociativa
$A_{m \cdot n} \cdot B_{n \cdot p} \cdot C_{p \cdot q} = (A \cdot B)_{m \cdot p} \cdot C_{p \cdot q} = A_{m \cdot n} \cdot (B \cdot C)_{n \cdot q}$
La propiedad Distributiva respecto a la suma
$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

## 1.2 Expresión de sistemas lineales

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\cdot n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\cdot 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\cdot 1} \qquad \boxed{A\cdot X=B}$$

## 1.3 Transposición matricial. Matrices Simétricas

Definición

Matriz Transpuesta de $A_{m\cdot n}$ es la matriz $A^t_{n\cdot m}$ | $(a_{ij})^t=a_{ji}$

Ejemplo

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{2\cdot 3} \qquad A^t=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}_{3\cdot 2}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Si la matriz A es cuadrada} \\ \text{y además } a_{ij}=a_{ji} \end{array}\right\} \Longrightarrow A=A^t \text{ y se denomina matriz Simétrica}$$

## 1.4 PROPIEDADES

1. Propiedad involutiva $\quad (A^t)^t=A$
2. $(A+B)^t=A^t+B^t$
3. $(A\cdot B)^t=B^tA^t$

# 2. DETERMINANTES

A toda matriz cuadrada se le asocia un determinante, que es un número. $|A|$ ó $\det(A)$

- Si el $\det(A)=0$ los vectores son l.d.
- Si el $\det(A)\neq 0$ los vectores son l.i.

Determinante de una matriz 2x2

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

Determinante de una matriz 3x3. Regla de Sarrus

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}$$

Determinante de una matriz triangular

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i=j} a_{ij}$$

### 2.0.1 Propiedades de los determinantes

1. $\det(A) = \det(A^t)$

2. Si una de las columnas (o filas) de la matriz es nula, el determinante vale cero.

3. Si se intercambian entre si dos columnas (o filas) el determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

4. Si la matriz tiene dos columnas (o filas) iguales (o proporcionales) el det=0

5. Si se multiplica una fila (o columna) por un escalar el determinante queda multiplicado por ese escalar.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Si se multiplican todas las filas (o columnas) por dicho escalar el determinante quedaría multiplicado por $k^n$

6. Si una matriz tiene dos filas (o columnas) proporcionales el det=0

7. Si una columna (o fila) se escribe en forma de suma, el determinante se puede descomponer en suma de la siguente forma:

$$\begin{vmatrix} a & b & c+d \\ a' & b' & c'+d' \\ a'' & b'' & c''+d'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}$$

8. No se altera el valor de un determinante sumando a los elementos de una fila (o columna) los de otra paralela previamente multiplicados por un mismo factor

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -10 \\ -2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -10 \\ 0 & -6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & -17 \end{vmatrix} = 51$$

*Primer paso: 2 ª=2 ª+1 ª(-3)*
*Segundo paso: 3 ª=3 ª+1 ª(2)*
*Tercer paso: 3 ª=3 ª+2 ª(2)*

Generalizando esta propiedad , se puede enunciar de la siguiente forma:

El determinante de una matriz no cambia al sumar a una fila (o columna) una c.l. de las demás.

$\det\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} c_1 + k_2c_2 + k_3c_3 + \cdots + k_nc_n & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$

9. Desarrollo por los elementos de una fila o columna cualquiera. ADJUNTO.

Llamamos menor complementario de un determinante y se simboliza por $|A_{ij}|$ al determinante que resulta de suprimir la fila $i$ y la columna $j$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad |A_{13}| = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Llamamos **adjunto** de un elemento a su menor complementario provisto del signo $(-1)^{i+j}$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Un determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) culquiera por sus adjuntos

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 29 & 5 \\ 3 & 11 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 29 & 5 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 4 & 29 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = -5\,(8-15) = 35$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ 14 & 7 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 14 & 7 & 5 & 14 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$=(-1)^{3+1}(-1)\begin{vmatrix} 14 & 7 & 14 \\ 4 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 8 \end{vmatrix} = (-7)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 8 \end{vmatrix} = (-7)\,(16+24+24-12-24-32) =$$
28

10. Si en una matriz cuadrada de orden $n \cdot n$ los $n$ vectores columna son l.d. el determinante de la matriz vale cero y si son l.i. el determinante es distinto de cero

11. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

12. La suma de los elementos de una fila (o columna) multiplicados por los adjuntos de los lugares de una paralela a ella vale cero.

Ejemplo: Se un determinante que tiene la filas $3^a$ y $1^a$ iguales.

$$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{31}A_{11} - a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} = 0$$

Ejemplo de cálculo de un determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & 7 & -3 \\ 2 & 7 & -5 & 4 \\ -3 & 2 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -10 & 15 & -23 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 11 & -8 & 22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -83 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 88 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & -83 \\ 0 & 0 & 3 & 88 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -83 \\ 3 & 88 \end{vmatrix} = -689$$

# 3. RANGO DE UNA MATRIZ

Los determinantes solo nos permiten estudiar la dependencia o independencia de los vectores de una matriz cuadrada.

Necesitamos un concepto más general para este estudio que es el de rango.

**Definición**: RANGO

Se llama rango de un conjunto de vectores a la dimensión del subespacio engendrado por dichos vectores.

**Propiedades** $C \to$ Conjunto de vectores cualquiera

1. El rango de $C$ es igual al máximo número de vectores l.i. de $C$.
2. Para que un conjunto de vectores sea l.i. es necesario y suficiente que su rango sea igual al número de vectores.
3. En una matriz $m \cdot n$ hay $m$ vectores fila y $n$ vectores columna, y se puede hablar del rango por filas y el rangopor columnas. ”El rango por filas es igual al rango por columnas”.
4. Se dice que una matriz es escalonada por filas cuando en cada fila el número de ceros que preceden al primer elemento no nulo es mayor que en la fila anterior.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_3' & a_4' & a_5' \\ 0 & 0 & 0 & a_4'' & a_5'' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

”El rango de una matriz escalonada es igual al número de filas no nulas”

**Calculo del Rango por el método de GAUSS** Al transformar una matriz por el método de Gauss (aplicado a sus filas) el rango de la matriz se conserva.

En una matriz escalonada obtenida de la inicial por el método de Gauss, el número de filas no nulas nos da el rango.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -8 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -8 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 10 \\ 0 & 3 & 9 & 6 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -8 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$r(A) = 2$

En la segunda matriz vemos que las filas $3^a$ y $4^a$ son proporcionales a la $2^a$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$r(A) = 3$

En la segunda matriz vemos que la $3^a$ fila es proporcional a la $2^a$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{escalonada} \quad r(A)=3$$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 6 & 5 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow r(A)=3$$

### 3.0.2 CALCULO DEL RANGO

$A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix}$

Pasos:

$1^o$ Elegir las 2 primeras columnas y buscar un menor de orden 2 no nulo.

Si lo hay, $C_1$ y $C_2$ son l.i. y el rango de la matriz es al menos 2.

Si no lo hay, $C_2$ es múltiplo de $C_1$ , se suprime $C_2$ y se elige la siguiente columna en su lugar.

$2^o$ Partiendo del menor no nulo de orden 2 se elige una nueva columna y se van calculando solamente los menores de orden 3 que sean orlados del de orden 2 no nulo hasta encontrar uno no nulo. Si lo hay, las 3 columnas son l.i. y el rango al menos es 3.

Si no los hay, la $3^a$ columna es c.l. de las 2 primeras y puede suprimirse.

$3^a$ Se reitera el procedimiento partiendo del menor de orden 3 no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \left\{ C_1 \quad C_2 \right\}$ son l.i.$\Longrightarrow r(A) \geqslant 2$

Eligiendo $C_3$ y calculando los menores de orden 3 ampliados del anterior de orden 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

y por anularse los dos únicos menores, $C_3$ es c.l. de $\left\{ C_1 \quad C_2 \right\}$. Se suprime $C_3$

Eligiendo $C_4$ y calculando los menores de orden 3 ampliados del de orden 2 no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

y por anularse los dos únicos menores de orden 3, $C_4$ es c.l. de $\left\{ C_1 \quad C_2 \right\}$. Se suprime $C_4$

El rango es: $r(A) = 2$

Ejemplo

$$Rango\begin{pmatrix} 1 & -1 & -8 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \{\ C_1 \quad C_2\ \}$ son l.i. $\qquad r\,(A) \geqslant 2$

$$\left.\left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 7-3+8-12=0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-3+8-6=0 \end{array}\right.\right\} \to \begin{array}{c} C_3 \text{ es c.l.de} \{\ C_1 \quad C_2\ \} \\ \text{se puede eliminar } C_3 \end{array}$$

$$\left.\left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right.\right\} \to \begin{array}{c} C_4 \text{ es c.l.de} \{\ C_1 \quad C_2\ \} \\ \text{se puede eliminar } C_4 \end{array}$$

$$\left.\left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right.\right\} \to \begin{array}{c} C_5 \text{ es c.l.de} \{\ C_1 \quad C_2\ \} \\ \text{se puede eliminar } C_5 \end{array} \longmapsto \text{Por tanto } r(A)=2$$

Por columnas son independientes las 2 primeras
Por filas son independientes las 2 primeras

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \{\ C_1 \quad C_2\ \} \text{ son l.i.} \\ \text{ó} \\ \{\ f_1 \quad f_2\ \} \text{ son l.i.} \end{array}\right\} \Longrightarrow r\,(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \{\ C_1 \quad C_2 \quad C_3\ \} \text{ son l.i.} \\ \text{concretamente } C_3 \text{ es c.l. de } \{\ C_1 \quad C_2\ \} \end{array}\right\} \Longrightarrow r\,(A) = 2$$

Ejemplo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 - 2 + 8 \neq 0 \Longrightarrow r\left(B\right) = 3$$

Ejemplo

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array} \right\} \text{ son c.l.} \\ \text{concretamente multiplicando} \\ \text{por -2 } C_1 \text{ obtenemos } C_2 \end{array} \longrightarrow \text{se puede eliminar } C_2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{c} C_3 \text{ es c.l. de } C_1 \\ \text{concretamente} \\ -3C_1 = C_3 \end{array} \longrightarrow \text{se puede eliminar } C_3 \Longrightarrow$$

$r(C) = 1$

Ejemplo

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 8 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow r\left(D\right) \geqslant 2$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow C_3 \text{ es c.l. de } \left\{ \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array} \right\} \longrightarrow \text{se puede eliminar } C_3$$

$\rightarrow r\left(D\right) \geqslant 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \right\} \text{ son l.i.} \rightarrow r\left(D\right) \geqslant 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0 \text{ ya que } f_4 = f_1 + f_2 + f_3 \rightarrow C_5 \text{ es c.l. de } \left\{ \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$r\left(D\right) = 3$

Ejemplo

$$E=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\1&2&1&2&1\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&2\end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}\neq 0\rightarrow\left\{\begin{array}{cc}C_1&C_2\end{array}\right\}$ l.i.$\rightarrow r\left(E\right)\geqslant 2$

$\left.\begin{cases}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\0&1&0\end{vmatrix}=0\\\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&0&1\end{vmatrix}=0\end{cases}\right\}$ $\rightarrow$Lógico $C_3=C_1$ $\rightarrow$se suprime $C_3$

$\left.\begin{cases}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&2\\0&1&1\end{vmatrix}=0\\\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&0&0\end{vmatrix}=0\end{cases}\right\}$ $\rightarrow$se suprime $C_4$

$\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&1\\0&1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=-(1-2)=1\neq 0\rightarrow\left\{\begin{array}{ccc}C_1&C_2&C_5\end{array}\right\}$ son l.i.$\rightarrow$
$r\left(E\right)=3$

**Ejercicios** Determinar el rango

$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2&4\\1&6\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&-3&2\\4&2&1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}4&20&31\\6&-5&-6\\2&-11&-16\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2&-3&1\\5&10&6\\8&-7&5\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-2&-4&4&5\\3&6&-6&-4\\-2&-4&4&9\end{pmatrix}$ ver si el rango es 2

$\begin{pmatrix}2&4&-3&-6\\7&14&-6&-3\\-2&-4&1&-2\\2&4&-2&-2\end{pmatrix}$ ver si el rango es 2

# 4. INVERSION MATRICIAL

Matriz unidad de orden $n$ $\quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

cumple que: $I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$

Definición

Inversa de una matriz $A$ es otra matriz $A^{-1}$ tal que: $A \cdot A^{-1} = I_n$

Propiedades

1. Solo admiten inversa las matrices cuadradas cuyo determinante sea distinto de cero. Se lleman matrices inversibles o regulares.
2. La inversa si existe es única
3. El determinante de la inversa es igual al inverso del determinante.
$\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$
4. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
5. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
6. $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$ La inversa de la transpuesta es la transpuesta de la inversa.

## 4.1 CALCULO DE LA INVERSA

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ se forma con los adjuntos de la transpuesta

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 1 - 2 - 4 + 1 = -2$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

# 5. EXPRESIONES Y ECUACIONES MATRICIALES

Simplificar la expresión:

a. $\left(AB^{-1}\right)^{-1}\left(AB^{-1}\right) = \left(B^{-1}\right)^{-1}A^{-1}AB^{-1} = I_n$

b. $(A+B)^2 - (A-B)^2 = \left(A^2 + AB + BA + B^2\right) - \left(A^2 - AB - BA + B^2\right) = 2AB + 2BA$

Despejar $X$, supuesto que existe conformidad de órdenes y que $A$ y $B$ son regulares:

a. $AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$

b. $XA = B \rightarrow X = BA^{-1}$

c. $AX^{-1} = B \rightarrow X^{-1} = A^{-1}B \rightarrow X = \left(A^{-1}B\right)^{-1} = B^{-1}\left(A^{-1}\right)^{-1} = B^{-1}A$

d. $A(B+X) = A^{-1} \rightarrow AB + AX = A^{-1} \rightarrow X = \left(A^{-1}\right)^2 - B$

# 6. MÉTODOS MATRICIALES PARA LOS ANÁLISIS LINEALES DE COMPATIBILIDAD

## 6.1 DISCUSIÓN DE UN SISTEMA LINEAL

Analizar un sistema lineal supone:

1. Compatibilidad del sistema $\rightarrow$ Averiguar si existe solución, y en caso afirmativo, si es única.
2. El cálculo de las soluciones en caso de que existan.

Estudiaremos si el vector columna $b$ es o no c.l. de los $n$ vectores columna formados por los coeficientes de cada incógnita $\{c_1, \ldots, c_n\}$

$$x_1c_1 + x_2c_2 + \cdots + x_nc_n = b$$

La forma de averiguarlo es comparando la matriz de los coeficientes $A$ con la ampliada $(A \mid b) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n & b \end{pmatrix}$

Si los rangos de ambas matrices coinciden el vector b es c.l. de los vectores $c_i$ y el sistema es compatible, en caso contrario es incompatible al no ser $b$ c.l. de los $c_i$

En caso de compatibilidad, la solución puede ser única o pueden existir infinitas soluciones.

El teorema de unicidad de coordenadas garantiza que si el vector $b$ es c.l. de los vectores $c_i$ estos últimos son l.i. las coordenadas son únicas.

Si $r(A) = r = n$ la solución es única (sistema determinado).

Si $r(A) = r < n$ hay infinitas soluciones (sistema indeterminado) con $n - r$ grados de libertad.

## 6.2 TEOREMA DE ROUCHE-FROBENIUS (resumen)

$r(A) \neq r(A \mid b) \Longrightarrow$ incompatible

$r(A) = r(A \mid b) = n \Longrightarrow$ compatible determinado

$r(A) = r(A \mid b) < n \Longrightarrow$ compatible indeterminado con $n - r$ grados de libertad

Ejemplo

Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7 \end{array} \right\}$$

Solución

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow \{c_1, c_2\}$ l.i.$\Longrightarrow r(A) \geqslant 2$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow c_3$ es c.l. de $\{c_1, c_2\} \Longrightarrow r(A) = 2$

$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ $c_3$ se puede eliminar pq es c.l. de $\{c_1, c_2\}$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow b$ es c.l. de $\{c_1, c_2\} \Longrightarrow r(A \mid b) = 2$

Por ser $r(A) = r(A \mid b) = r(A \mid b) = 2 < 3 \rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado con 3-2=1 grado de libertad.

## 6.3 CÁLCULO DE LAS SOLUCIONES

Distinguimos$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sistemas Cramer} \\ \text{Sistemas No Cramer} \end{array} \right\}$

### 6.3.1 SISTEMAS CRAMER

Son aquellos cuya matriz de los coeficientes $A$ es regular ($\exists A^{-1}$: cuadrada y $|A| \neq 0$)

$$AX = b \qquad |A| \neq 0$$

Tienen solución única. $X = A^{-1}b$

**REGLA DE CRAMER** $X = A^{-1}b$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{i1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{i2} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1i} & A_{2i} & \cdots & A_{ii} & \cdots & A_{ni} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{11} & A_{in} & & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Despejando $x_i$

$$x_i = \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n}{|A|} = \frac{\left| \begin{array}{ccccc} c_1 & c_2 & \cdots & b & \cdots & c_n \end{array} \right|}{|A|} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Ejemplo

Estudie el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \end{array} \right\}$$

Solución

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \{c_1, c_2\} \text{ l.i.} \Longrightarrow r(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Longrightarrow \{c_1, c_2, c_3\} \text{ l.i.} \Longrightarrow r(A) = 3$$

$r(A) = 3 = r(A \mid b)$ Sistema Cramer compatible determinado

**Resolución por matriz inversa**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Resolución por Cramer**

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-10}{-5} = 2$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-15}{-5} = 3$$

**Resolución por triangulación**

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -5x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_3 = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow x_1 = x_3 - 2x_2 + 2 = 3 - 4 + 2 = 1 \\ \rightarrow x_2 = \frac{-(2-4x_3)}{5} = \frac{-(2-12)}{5} = 2 \end{array} \quad \begin{bmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[1^a \equiv 1^a + 2^a(2/5)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/5 & 14/5 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[1^a \equiv 1^a + 3^a(-3/5)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2^a \equiv 2^a + 3^a(-4)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

### 6.3.2 SISTEMAS NO CRAMER

$A$ no es regular (no admite inversa) 2 Motivos$\left\{ \begin{array}{l} \text{No es cuadrada} \\ \text{Por ser } |A| = 0 \end{array} \right\}$

Estudiemos $\left\{ \begin{array}{l} \text{Redundancia} \\ \text{Variables Libres (si } \exists) \end{array} \right\}$

**REDUNDANCIA**

Existe redundancia cuando alguna ecuación es c.l. de las restantes. $\Rightarrow$ la fila correspondiente de la matriz ampliada es c.l. de las restantes filas.

Esto se detecta viendo si el rango de la matriz ampliada es menor que el n$^o$ de ecuaciones, que es $m$.

Si $r\,(A \mid b) = r < m \Rightarrow$ hay $m - r$ ecuaciones redundantes.

**VARIABLES LIBRES**

Existen variables libres cuando los vectores columna de la matriz $A$ no sean l.i.
Esto se observa viendo si el rango de $A$ es menor que el n$^o$ de columnas de $A$, que es $n$.

Si $r < n \Rightarrow$ hay $n - r$ variables libres.

Dando valores arbitrarios a las variables libres se obtienen infinitas soluciones.
Cuando no hay variables libres $(r = n)$ la solución es única.
Ejemplo
Estudiar el sistema lineal siguiente

$$\left\{\begin{array}{r} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 = 3 \end{array}\right\}$$

Solución

Diagonalizando

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[1^a=1^a/2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{2^a=2^a+1^a \\ 3^a=3^a+1^a(-3)}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 9/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[3^a=3^a+2^a(-3)]{} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[2^a=2^a/(3/2)]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[1^a=1^a+2^a(1/2)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 + \quad + \frac{1}{3}x_3 = 1 \\ \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{c} x_1 = 1 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_3 \end{array} \qquad \boxed{\begin{array}{c} x_1 = 1 - \frac{t}{3} \\ x_2 = \frac{t}{3} \\ x_3 = t \end{array}}$$

`Estudio de la Compatibilidad`

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} 4 - 1 = 3 \neq 0 \Longrightarrow \left\{ c_1 \quad c_2 \right\} \text{ l.i.} \Longrightarrow r(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 3 - 6 + 6 = 0 \Longrightarrow c_3 \text{ es c.l. de} \left\{ c_1 \quad c_2 \right\} \Longrightarrow r(A) = 2$$

$$\left| c_1 \quad c_2 \quad b \right| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow r(A \mid b) = 2$$

$r(A) = r(A \mid b) = 2 < n \Longrightarrow$ compatible indeterminado con $n - r = 3 - 2 = 1$ grados de libertad

Calculo de las Soluciones

La $3^a$ ecuación es redundante $\rightarrow$ se suprime

$$\left\{\begin{array}{r} 2x_1 - x_2 = 2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 = x_3 - 1 \end{array}\right\} \text{ se pasa la variable libre al término derecho}$$

Resolviendo por matriz inversa

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 - x_3 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 - x_3 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_3/3 \\ x_3/3 \end{pmatrix}$$

Infinitas soluciones al dar valores a $x_3$

# 7. SISTEMAS HOMOGÉNEOS

$$A_{m.n}X_{n.1} = 0_{m.1}$$

Todos los términos independientes son cero.

Al ser $b = 0$ $r(A) = r(A|b) = r \Rightarrow \exists$ Compatibilidad

Al menos siempre está la solución:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \quad\vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

Si $A$ es regular ($|A| \neq 0$) $\Rightarrow m = n = r(A) \Rightarrow \begin{cases} \text{No hay redundancia } m = r(A) \\ \text{No hay variables libres } n = r(A) \end{cases}$

Si $A$ no es regular $\Rightarrow \begin{cases} m - r(A) \rightarrow \text{es el n mero de ecuaciones redundantes} \\ n - r(A) \rightarrow \text{el el n mero de variables libres} \end{cases}$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{rrrrr} x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \\ -x_1 & +x_2 & -2x_3 & & = 0 \\ 3x_1 & -5x_2 & +4x_3 & -2x_4 & = 0 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \{c_1, c_2\} \text{ l.i. } \Rightarrow r(A) \geq 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow c_3 \text{ es c.l. de } \{c_1, c_2\} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow c_4 \text{ es c.l. de } \{c_1, c_2\} \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow c_4 \text{ es c.l. de } \{c_1, c_2\} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$r(A) = 2$

Caso en el que $A$ no es regular y $r(A) = 2$

$m - r(A) = 3 - 2 = 1 \rightarrow$ Una ecuación redundante $\rightarrow$ la $3^a$

$n - r(A) = 4 - 2 = 2 \rightarrow$ Dos variables libres $\rightarrow x_3$ y $x_4$

Eliminando la redundancia y pasando al lado derecho las variables libres

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 + x_4 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -x_3 + x_4 \\ 2x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_3 + x_4 \\ 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_3 - x_4 \\ -x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

Solución por Triangularización

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{rrr} x_1 = & -3x_3 & -x_4 \\ x_2 = & -x_3 & -x_4 \end{array}\right\}$$