Matrices y Determinantes

Prof. Nilsa I. Toro
Catedrática
Recinto Universitario de Mayagüez
Residencial - AFAMaC

Origen y Usos

- Las matrices aparecen por primera vez hacia el año 1850, introducidas por J.J. Sylvester.
  El desarrollo inicial de la teoría se debe al matemático W.R. Hamilton en 1853.
  En 1858, A. Cayley introduce la notación matricial como una forma abreviada de escribir un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas.

  Luego Olga Taussky-Todd fue una de las precursoras en el desarrollo de aplicaciones de la teoría de matrices. Se le describe como “amante de todo lo que pueden hacer las matrices”.

- La teoría de matrices, introducida en 1858, tiene hoy aplicaciones en campos diversos como el control de inventarios en las fábricas; teoría cuántica, en física; análisis de costos en transportes y de otras industrias; problemas de estrategias en las operaciones militares y análisis de datos, en psicología y sociología.

  Las matrices se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de las ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales. Además de su utilidad para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, las matrices aparecen de forma natural en geometría, estadística, economía, informática, etc...

La utilización de matrices constituye actualmente una parte esencial de los lenguajes de programación, ya que la mayoría de los datos se introducen en los ordenadores como tablas organizadas en filas y columnas : hojas de cálculo, bases de datos,...

Definición

- Se llama **<u>matriz</u>** de orden *"m × n"* a un conjunto rectangular de elementos a_{ij} dispuestos en *m* filas y en *n* columnas. El orden de una matriz también se denomina dimensión o tamaño, siendo *m* y *n* números naturales.
- Las matrices se denotan con letras mayúsculas: A, B, C, ... y los elementos de las mismas con letras minúsculas y subíndices que indican el lugar ocupado: a, b, c, ... Un elemento genérico que ocupe la fila *i* y la columna *j* se escribe a_{ij} . Si el elemento genérico aparece entre paréntesis también representa a toda la matriz : A = $\left(a_{ij}\right)$.

- $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- El número total de elementos de una matriz A de dimensión $m \times n$ es $m \cdot n$

Ejemplo

- Determinar la dimensión de cada matriz:

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

2. $B=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$

3. $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

4. $D=\begin{pmatrix}2 & 6 & -2\\ 3 & -1 & 4\\ 1 & 6 & 5\end{pmatrix}$

Igualdad de Matrices

- Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales si:

i. Tienen el mismo tamaño.

ii. Sus elementos correspondientes son iguales.

Esto es, $a_{ij} = b_{ij}$, para toda i y para toda j

Ejemplo

- Determinar si los siguientes pares de matrices son iguales.

1. $\begin{pmatrix} \sqrt{4} & 2^2 & e^0 \\ .5 & 1 & 1-1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Algunos tipos de matrices

- Una matriz fila de dimensión *n* $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ es una matriz de tamaño $1xn$.
- Una matriz columna de dimensión *n* $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ es una matriz de tamaño $nx1$.

❖ Estos también son llamados vector fila y vector columna respectivamente.

- Una matriz que tiene distinto número de filas que de columnas, siendo su orden m×n es llamada una **matriz rectangular**.

- Una matriz que tiene igual número de filas que de columnas, *m* = *n*, diciéndose que la matriz es de orden n, es llamada una **matriz cuadrada**.

  Diagonal principal : son los elementos $a_{11},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{nn}$

- La **matriz triangular** si todos los elementos encima o debajo de la diagonal son ceros.

- La **matriz opuesta** de una dada es la que resulta de sustituir cada elemento por su opuesto. La opuesta de *A* es *-A.*

- Si todos sus elementos son cero. Se denomina **matriz cero** ó **matriz nula** y se denota por 0_{mxn} .

- Dada una matriz *A*, se llama **traspuesta** de *A* a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas. Se representa por A^t ó A^T .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

- Una **matriz simétrica** es una matriz cuadrada que es igual a su traspuesta.

$$A = A^t \quad a_{ij} = a_{ji}$$

- La **<u>matriz identidad</u>** es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales a 1. También se denomina matriz unidad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones de matrices

- Suma de matrices.

  Sean $A=\left(a_{ij}\right)$ y $B=\left(b_{ij}\right)$ dos matrices mxn .
  La suma de *A* y *B* es la matriz *A+B,* también de dimensión mxn dada por:

  $$A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)$$

- Resta o diferencia de matrices.

  Sean $A=\left(a_{ij}\right)$ y $B=\left(b_{ij}\right)$ dos matrices mxn .
  La suma de *A* y *B* es la matriz *A-B,* también de dimensión mxn dada por:

  $$A+B=\left(a_{ij}-b_{ij}\right)$$

- En otras palabras, sumamos o restamos los elementos correspondientes de las matrices.

- Nota:

  La suma y diferencia de dos matrices NO está definida si sus dimensiones son distintas. **!!**

- Multiplicación de una matriz por un escalar.

  Si $A=\left(a_{ij}\right)$ es una matriz mxn .

  El producto escalar kA es la matriz de la misma dimensión que *A* dado por:

  $$kA = ka_{ij}.$$

Ejemplos

1. Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -7 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$,

   hallar $-2A+3B$.

2. $5\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -6 & 1 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

- Producto de dos matrices.

  Para hallar el producto, **el número de columnas de la primera matriz *A* tiene que ser igual al número de filas de la matriz *B***, entonces definiremos el <u>*producto interior*</u> de una fila de *A* por una columna de *B* para luego describir el procedimiento para calcular los elementos de AB.

$$\text{Si } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \text{ es una fila de } A \text{ y si } \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ es una columna de } B$$

entonces su *producto interior* es el número $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$.

- Si *A* es una matriz mxn y si *B* es una matriz nxk, entonces *C*= *AB* es una matriz mxk, donde c_{ij} es el producto interior de la *i*- ésima fila de *A* por la j-ésima columna de *B*.

Ejemplos

1. Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$,

   hallar AB y BA.

2. $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicios

1. $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

Propiedades de la Multiplicación de Matrices

- Sean *A, B, C*, y *D* matrices para las cuales están definidos los siguientes productos. Entonces,

$$A(BC) = (AB)C \qquad \text{Propiedad Asociativa}$$

$$\left.\begin{aligned} A(B+C) &= AB + AC \\ (B+C)D &= BD + CD \end{aligned}\right\} \quad \text{Propiedad distributiva}$$

Determinantes

- Los determinantes se utilizan para resolver sistemas de ecuaciones lineales, para determinar si una matriz tiene inversa y hallar la inversa de una matriz entre otros.

Definición:

- Si una matriz es cuadrada, se le puede asignar un número, llamado su **determinante**.

  Representaremos el determinante de una matriz cuadrada *A* por $|A|$ ó $\det(A)$.

- **Determinante de una matriz** $1x1$

  Tiene un solo elemento.

  Si $A=[a]$, entonces $|A|=a$.

- **Determinante de una matriz** $2x2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

El determinante de *A* se define por:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- Ejemplo: Evalué $|A|$ para $\text{A}=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

- Para definir el concepto de determinante para una matriz arbitraria nxn, primero introducimos la siguiente terminología:

Sea *A* una matriz nxn

1. El **menor** M_{ij} del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz obtenida eliminando de la matriz *A* la *i*-ésima fila y la *j*-ésima columna.
2. El **cofactor** A_{ij} del elemento es a_{ij} es

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Ejemplos

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Hallar $M_{11},\ M_{23},\ A_{11},$ y A_{23}

Determinante de una matriz $n \ x \ n$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

El determinante de *A* se define por:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

- Ejemplo: Evalué $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

Ejercicios

- Hallar el determinante.

1. $$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix}$$

2. $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

Regla de Sarrus

- Paso 1 Escriba la matriz A y enseguida las primeras dos columnas de A como se muestra a continuación

$$\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

- Paso 2 Calcule los productos indicados por las flechas (que a continuación se indican). Los productos correspondientes a las flechas que se dirigen hacia abajo se toman con signo positivo, mientras los productos correspondientes a las flechas que se dirigen hacia arriba se toman con signo negativo.

  \+ + + - - - $\searrow$ $\nearrow$

- Paso 3 Sume los productos con los signos adecuados según se determinó en el paso 2.

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Ejemplo

- Calcular el determinante usando la Regla de Sarrus.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

❖ Nota:

La Regla de Sarrus solamente se utiliza para hallar determinantes de orden $3x3$.

Propiedades de los determinantes

1. Si cualquier fila o columna de la matriz *A* es el vector cero(o sea todos sus elementos son cero), entonces $|A| = 0$.
2. Si se intercambian dos filas (o columnas) cualesquiera de *A*, es como si se multiplicara $|A|$ por -1.
3. Si A tiene dos filas o columnas iguales, entonces $|A| = 0$.
4. Si una fila (columna) de A es un múltiplo constante de otra fila (columna), entonces $|A| = 0$.

5. Si un múltiplo de una fila (columna) de *A* se suma a otra fila (columna) de *A*, el determinante no cambiará.
6. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal.

Ejercicios

- Hallar el determinante.

1. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} -10 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 7 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & 7 \\ -4 & 6 & -10 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

FIN