E-Book ISBN 978-987-1676-25-5.
Fecha de catalogación: 19/12/2014.

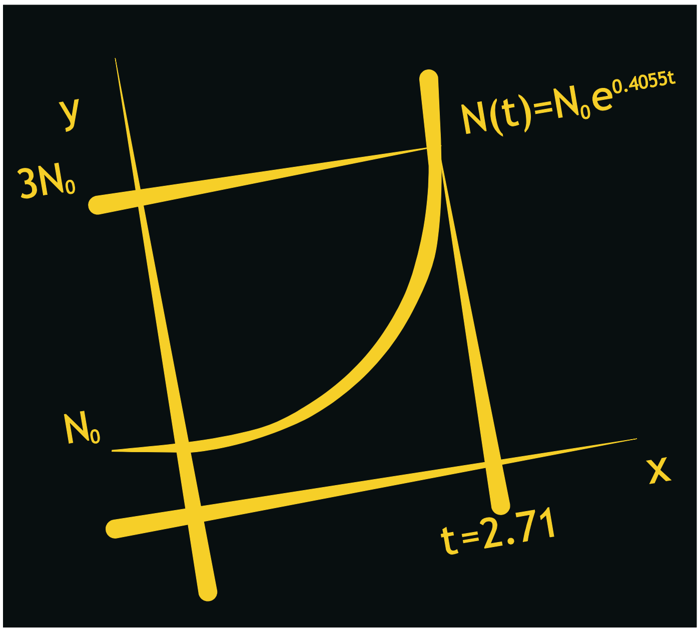
Serie Didactica Nro. 11

Facultad de Ciencias Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SANTIAGO DEL ESTERO

CÁTEDRA DE
CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
MATEMATICA II

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BASICAS

ECUACIONES DIFERENCIALES



Equipo docente:

Lic. Elsa Ibarra de Gómez
Lic. Josefa Sanguedolce
Lic Silvia Nabarro de Ger

Febrero 2005

EQUIPO DOCENTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE LA FACULTAD DE CIENCIAS FORESTALES

Lic. Elsa Ibarra de Gomez

Lic Josefa Sanguedolce

Lic. Silvia Ger

Aytes. Estudiantiles: Zulma Lima

Paola Marozzi

agradecimientos

A:

Las Ayudantes Estudiantiles
Zulma Lima y Paola Marozzi
por haber colaborado en el tipeado del trabajo

Las estudiantes de Comunicación Social de la UCSE:
Luciana Barchini y Alejandra Cavallotti
por haber colaborado en el diseño

Ing. Gustavo Nassif por su inestimable colaboración
en la publicación de la serie

introducción

Esta Serie Didáctica ha sido elaborada con el propósito de que sirva de guía a los alumnos de todas las carreras de grado de la Facultad de Ciencias Forestales que necesiten estudiar Ecuaciones Diferenciales.

En ella los mismos encontrarán las nociones fundamentales de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden y una gran variedad de problemas.

El aspecto más importante de este material se centra en la consideración de las ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos.

Con este propósito se desarrollan varios modelos relacionados específicamente con las temáticas de las distintas carreras que se cursan en nuestra facultad.

Esto último hace de la serie una alternativa de consulta apropiada también para egresados de nuestra facultad.

Esperamos que la misma sea de gran utilidad para todos ellos.

Lic. Elsa Ibarra de Gómez
Responsable de Cálculo Diferencial e Integral
Febrero de 2005

Índice

I- NOCIONES GENERALES

- Considérese una población que aumenta P (t) personas (o animales, bacterias o cualquier especie de organismos) en el tiempo t.

- Supóngase que esta población tiene una tasa de natalidad constante β y una tasa de mortalidad σ .

-En líneas generales, esto significa que, durante un período de un año, ocurrirán βP nacimientos y σ P muertes.

- Como P varía en el transcurso del año, pensaremos en un breve intervalo de tiempo; de t a t+Δt

- Para valores muy pequeños de Δt , el valor de P=P(t) cambiará en una cantidad tan pequeña durante el intervalo de tiempo $\left[t;t+\Delta t\right]$, que se puede considerar a P como si fuera "casi" constante.

- El número de nacimientos se aproximará a, $\beta P\left(t\right)\Delta t$ **(1)**; y el número de muertes a $\sigma P\left(t\right)\Delta t$.

- Al decir que la tasa de natalidad es β y la de mortalidad es σ, queremos significar lo siguiente:

- Las razones a Δt de los errores, en las aproximaciones anteriores tienden a cero cuando Δt tiende a cero.

- Usamos l información dada en **(1)** para deducir, de ser posible, la forma de la función P(t) que describe nuestra población.

- Para ello: buscaremos "la razón de cambio con respecto al tiempo" de P.

- Consideremos por lo tanto el incremento:

$$\Delta P=P\left(t+\Delta t\right)-P\left(t\right); \qquad \text{en el intervalo } \left[t;t+\Delta t\right]$$

- Puesto que ΔP no es más que el número de nacimientos menos el número de defunciones, se encuentra a partir de (1), que:

$$\boxed{\Delta P = P\left(t+\Delta t\right) - P\left(t\right) \approx \beta P\left(t\right)\Delta t - \sigma P\left(t\right)\Delta t \qquad \textbf{(2)}}$$

En consecuencia: $$\boxed{\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P\left(t+\Delta t\right) - P\left(t\right)}{\Delta t} \approx \left(\beta - \sigma\right) P\left(t\right) \qquad \textbf{(3)}}$$

- Cuando $\Lambda t \to 0$; el cociente del 2° miembro se acerca a la derivada P'(t), y por supuesto, también se acerca al 2° miembro $\left(\beta - \sigma\right) P\left(t\right)$.

- Simbólicamente:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \lim_{t \to 0} \frac{P\left(t+\Delta t\right) - P\left(t\right)}{\Delta t} = P'\left(t\right) \qquad \textbf{(4)}$$

Y por **(3),** $\quad$ P'(t)=$\left(\beta - \sigma\right) P\left(t\right)$ $\quad$ **(5)**

- Y si designamos k = $\left(\beta - \sigma\right)$, quedará:

$$\boxed{P'(t) = k\,P(t) \qquad \textbf{(6)}}$$

O bien:

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP\left(t\right) \qquad \textbf{(7)}}$$

La expresión (7) **es una *ecuación diferencial*** que puede ser considerada como ***modelo matemático*** de la población cambiante.

- La ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = kx,$ con k constante (7)**,** sirve como modelo matemático de una gran variedad de fenómenos naturales.

- Esta **ecuación diferencial** es de fácil resolución.

- Pongámosla así: $\frac{1}{x}.\frac{dx}{dt} = k$ o bien $\frac{1}{x} dx = kdt$

- Observamos que esta ecuación representa lo siguiente:

$$\boxed{D_x\left[\ln x\right] = D_t\left[kt\right] \qquad \textbf{(8)}}$$

-Si integramos, nos queda:

$$\int \frac{dx}{x} = \int kdt \qquad \textbf{(9)}$$

Lo que nos permite obtener:

ln x =kt + C

- y si despejamos x, tendremos: $\boxed{x = e^{xk+C} \Rightarrow x = e^{kx} + e^{C} \quad \textbf{(10)}}$

e^{C} es una constante que puede llamarse A, así si reemplazamos en (10), obtendremos:

$$\boxed{x = Ae^{kx} \quad \textbf{(11)}}$$

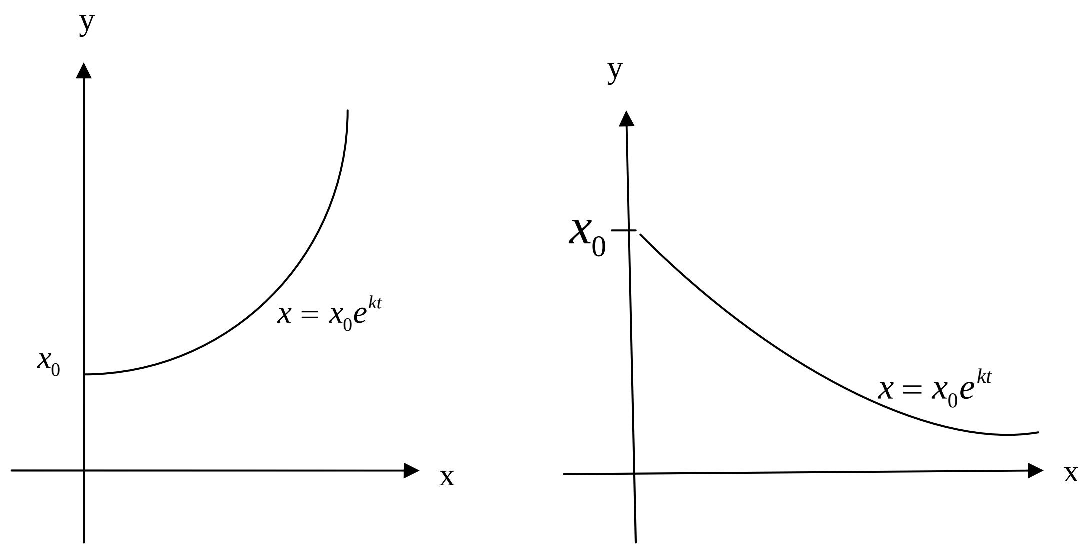
- Observamos que A no es más que el valor de x cuando t=0, o sea A= $x_{(0)}=x_0$. Sustituyendo en (11) obtendremos la **solución de la ecuación diferencial** (7) con el valor inicial $x_{(0)}=x_0$:

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{kt} \qquad \textbf{(12)}}$$

- La ecuación (7) suele llamarse “ecuación **de crecimiento exponencial**, o ecuación de crecimiento natural”.

- En (12), se advierte que para $x_0 \rangle 0,$ la solución x(t) es una función creciente si k$\rangle 0$.

- Observamos las gráficas de la solución de una ecuación diferencial tal, para los casos en que $k \rangle 0$ y $k \langle 0$.



$k \rangle 0$ $\qquad\qquad$ $k \langle 0$

- Así como este, podemos proponer muchos ejemplos de fenómenos naturales para los cuales, ésta ecuación sirve de modelo matemático.

Antes daremos algunas definiciones que nos permitirán introducirnos en la teoría de las ecuaciones diferenciales. [i]

Definición

Una ecuación que contiene la derivada de una o más funciones que dependen de una o más variables, es una ecuación diferencial (ED).

Es decir, una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función (no conocida) y sus derivadas.

Son ejemplos de ED; las siguientes:

I) $\frac{dN}{dt}=k\left(P-N\right)$, ecuación de crecimiento poblacional.

II) $F_R=-R\frac{dy}{dt}$ fuerza de la resistencia del aire.

III) $\frac{dT}{dt}=-k\left(T-A\right)$ ecuación del enfriamiento (o calentamiento de un cuerpo).

IV) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$

V) $y''+ky''+by-senx=0$

I.1 Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales **se clasifican** de acuerdo con su **tipo, orden y linealidad**.

I.1.1 Clasificación según su tipo

Definición

> **Si una ecuación diferencial solo contiene derivadas de una o más funciones con respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una E.D. ordinaria (E.D.O).**

Por ejemplo:

I) $\frac{dy}{dx} + y = e^{x}$ II) $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 10y = 0$

Definición

Una ecuación diferencial que contiene las derivadas parciales de una o más funciones respecto de dos o más variables independientes, se llama E.D. en derivadas parciales.

Ejemplos:

I) $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ **II)** La ecuación de onda es un ejemplo de esta tipo.

En este curso estudiaremos **exclusivamente ecuaciones diferenciales ordinarias**.

I.1.2 Clasificación según el orden

Para poder efectuar esta clasificación necesitaremos incorporar previamente el concepto de orden de una ecuación diferencial.

Definición

El orden de una E.D (ordinaria o en derivadas parciales) es el orden de la derivada de mayor orden en la ecuación.

Por ejemplo:

I) $\frac{d^2y}{dx^2}+5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-4y=e^x$ es una E.D.O de 2° orden.

II) $4x\frac{dy}{dx}+y=x$ es une E.D.O de 1° orden.

Observación: Una E.D.O general de orden n, se suele representar simbólicamente de la siguiente manera:

$$F\left(x,y,y',\ldots,y^n\right)=0$$

Si es posible despejar la derivada de orden n de la ecuación diferencial ordinaria de orden n, obtendríamos:

$$\boxed{y^n=f\left(x,y,y',\ldots,y^{n-1}\right) \quad \textbf{(14)}}$$

I.1.3 Clasificación según la linealidad

Definición

Se dice que una E.D de la forma $y^n=f\left(x,y,y',\ldots,y^{n-1}\right)$ **es lineal, cuando f es una función lineal de** $y,y',\ldots,y^{n-1}$

Esto significa que una **E.D es lineal** si puede escribirse en la forma:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \quad \textbf{(15)}$$

Donde a_0, a_1,...,a_n, g son funciones de x o constantes y $a_n \neq 0$

- A partir de esta ecuación podemos deducir las dos propiedades más importantes de una E.D. Lineal:

I) la variable dependiente y todas sus derivadas son de 1° grado, esto es, la potencia de todo término donde aparece *y* es 1.

II) cada coeficiente sólo depende de x que es la variable independiente.

- Las funciones de *y*, como sen *y*, o las funciones de las derivadas de *y*, como $e^{y'}$, no pueden aparecer en una E.D lineal.
- Cuando una E.D no es lineal, se dice que "**no es lineal**".

Las siguientes son ejemplos de E.D. lineales:

$$(y-x)\,dx+4xdy=0$$

$$y''-2y'+y=0$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{dy}{dx}+6y=e^x$$

Las que siguen ejemplifican a las E.D. no lineales:

$(1+y)y'+2y=e^x$ (el coeficiente 1+y, depende de y)

$\frac{d^2y}{dx^2}+seny=0$ (el sen y es una función no lineal de y).

y= *f(x)* $\frac{d^4y}{dx^4+y^2}=0$ (tiene potencia de y distinta de uno (y^2)).

I.2 Solución de una ecuación diferencial

Definición

Decimos que una función *y*= f(x) es una solución de una E.D si ésta se satisface cuando *y* y sus derivadas se reemplazan por f(x) y sus correspondientes derivadas.

La función *y= f(x)* se llama solución o integral de la ecuación diferencial.

Ejemplos:

1) Si c_1 y c_2 son constantes cualesquiera, entonces y = $c_1$cosx + $c_2$senx, es una solución de la E.D: $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.

2) La función $y = xe^x$ es solución de la E.D. lineal: $y'' - 2y' + y = 0$ en el intervalo $(-\infty;\infty)$.

Para demostrarlo, sustituimos

$y' = xe^x + e^x$ $\qquad$ $y'' = xe^x + 2e^x$ y vemos que:

$$y'' + 2y' + y = \left(xe^x + 2e^x\right) - 2\left(xe^x + e^x\right) + xe^x$$

I.2.1 Soluciones explícitas e implícitas

Definición

Una solución en la que la variable dependiente se expresa tan sólo en términos de la variable independiente y constantes, se llama solución explícita.

Los ejemplos 1 y 2 corresponden a soluciones explícitas.

Definición

Una relación G(x,y)=0 es una solución implícita de una ecuación diferencial ordinaria como la ecuación (14) en un intervalo I, si existe al menos una función ϕ que satisfaga la relación y la E.D, en I. (G(x,y)=0 define implícitamente a la función ϕ)

I.2.2 Soluciones generales y particulares de una E.D.

-A veces a una solución de una ecuación diferencial se la llama integral de la ecuación y a su gráfica, *curva integral.*

- En Cálculo, al evaluar una antiderivada o una integral independiente empleamos una sola constante de integración: C.
- En forma parecida, al resolver una ecuación diferencial de 1° orden F(x,y,z)=0, por lo general, obtenemos una solución con una constante arbitraria o parámetro C.
- Una solución con una constante arbitraria representa un conjunto G(x,y,c)= de soluciones y se llama *familia monoparamétrica de soluciones*.
- Al resolver una E.D de orden n, $F\left(x, y, y', ..., y^n\right) = 0$ se busca una familia n-paramétrica de soluciones G(x,y,c_1,c_2,...,c_n)=0.
- Esto solo quiere decir que una sola E.D puede tener una cantidad infinita de soluciones que corresponde a las elecciones ilimitadas del parámetro o parámetros.

Definición

Solución particular de una E.D.
Una solución de una E.D que no tiene parámetros arbitrarios se llama solución particular.

Ejemplo: La función $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ es una familia biparámetrica de soluciones de la E.D lineal de 2° orden y''- y = 0.

Algunas soluciones particulares son y = 0 (cuando $c_1 = c_2 = 0$).

$y = e^x$ (cuando $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$).

$y = 5e^x - 2e^{-x}$ (cuando $c_1 = 5$ y $c_2 = 0$).

Definición

Se llama solución general de una E.D.O de orden n,
$F(x, y, y', ..., y^n) = 0$ **en un intervalo I a la familia n-paramétrica**
$G(x,y,c_1,c_2,...,c_n)=0$ que la satisface.

Definición

Toda función θ $(x,c_1,c_2,...,c_n)$ *es una solución particular una E.D.O. de orden n*, si se deduce de la solución general , dando a las constantes valores determinados.

Definición

Una función $y = \phi(x)$ es una solución singular de una E.D, si la misma no se puede obtener de la solución general de la ecuación dándole valores a los parámetros.

Ejemplo:

$y = \left(\dfrac{x^2}{y} + c \right)^2$ proporciona una familia monoparamétrica de soluciones de la ecuación $y' = xy^{1/2}$.

En este caso y = 0 es una solución singular de la ecuación, porque no se pudo obtener de la familia; dándole a c valores adecuados.

I.2.3 Ejercicios sugeridos

Establezca si cada ecuación diferencial es lineal o no lineal. Indique el orden de cada ecuación.

$$a)\left(1-x\right)y''-4xy'+5y=\cos x$$

$$b)\,xy'''-2\left(y\right)^{4}+y=0$$

$$c)\,\frac{dy}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{d^{2}y}{dx^{2}}\right)^{2}}$$

$$d)\,\frac{d^{2}y}{dx^{2}}+9y=seny$$

I.2.4 Problemas de valor Inicial

A menudo nos interesa resolver una E.D sujetas a condiciones prescriptas, que son las condiciones que se imponen a *y*(x) o a sus derivadas.

En algún intervalo I que contenga a x_0, el problema:

Resolver: $$\frac{d^{n}y}{dx^{n}}=f\left(x,y,y',\ldots,y^{\left(n-1\right)}\right)$$

sujeta a $$\boxed{y(x_0)=y_0;\quad y'\left(x_0\right)=y_1,\ldots,y^{\left(n-1\right)}\left(x_0\right)=y_{n-1} \qquad \textbf{(16)}}$$

donde $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes reales especificadas arbitrariamente, se identifica como un **problema de valor inicial.**

Los valores dados de la función desconocida *y*(x) y de sus primeras n-1 derivadas en un solo punto x_0: $y'(x_0)=y_1,\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$, se llaman *condiciones iniciales.*

Problemas de valor inicial de 1° orden.

Sea por ejemplo el siguiente problema:

Encontrar la solución particular de la E.D *y' = y,* si se da la condición inicial siguiente y(0)=3.

$y' = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx$, de donde si integramos, nos queda:

$$\int \frac{dy}{y} = \int xdx + C$$

$$\ln|y| = x + C$$

$$y = e^{x+C}$$

$$y = Ce^{x}, donde C = e^{C}$$

Y es la solución general de la ecuación diferencial.

Si damos a x el valor 0 y a *y* el valor 3 en la solución general, obtendremos:

$3 = Ce^0$ de donde C = 3 y la solución particular que corresponde a la condición inicial y(0) = 3, es:

$$\boxed{y = 3e^{x}}$$

II- ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN.

II.1 Generalidades

Se dice que una E.D de la forma $y^n = f\left(x, y, y', \ldots, y^{n-1}\right)$ **es lineal, cuando f es una función lineal de** $y, y', \ldots, y^{n-1}$

La **ecuación diferencial ordinaria de primer orden** tiene la forma:

$$F(x,y,y')=0$$

Si esta ecuación se resuelve respecto a ***y***, se puede escribir en la forma:

$$y'=f(x,y)$$

En este caso se dice que la ED está solucionada respecto de la derivada.

Para tal ecuación es válido el siguiente teorema acerca de la existencia y la unicidad de la solución de una ED.

Teorema

Si en la ecuación $y'=f(x,y)$ **la función** $f(x,y)$ **y su derivada parcial** $\frac{\partial f}{\partial y}$ **respecto a** y **son continuas en cierto dominio D del plano** oxy **, y si** (x_0, y_0) **es un punto de este dominio, entonces existe la única solución de esta ecuación,** $y=\varphi(x)$**, que satisface la condición** $y=y_0$**, para** $x=x_0$**.**

Nos referiremos ahora a algunos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias de 1° orden:

II.1.2 Ecuaciones diferenciales con variables separadas y separables

1º caso:

Una E.D de 1° orden puede resolverse por integración, si es posible reunir todos los términos en *y* con d*y* y todos los términos en *x* con d*x*. Es decir, si es posible escribir la ecuación en la forma:

$$\boxed{f(y)dy+g(x)dx=0 \quad \textbf{(17)}}$$

entonces la solución general es:

$\int f(y)dy+\int g(x)dx=C$, donde C es una constante arbitraria.

Ejemplo 1:

Revuélvase la ecuación: $\left(x^2+1\right)\frac{dy}{dx}=x\left(y^2+1\right)$

Solución:

Pasando a la forma diferencial, separando variables e integrando obtenemos:

$$\left(x^2+1\right)dy=x\left(y^2+1\right)dx$$

$$\frac{dy}{y^2+1}=\frac{xdx}{x^2+1}$$

$$tg^{-1}y=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C$$

Ejemplo 2:

- Algunos modelos de crecimiento de población suponen que la razón de cambio de la población en el intervalo t, es proporcional al número *y* de individuos presentes en ese momento. Esto conduce a la ecuación $\frac{dy}{dt}=ky$.

Donde k es una constante positiva si la población crece, y negativa si la población decrece.

Para resolver esta ecuación, separamos variables e integramos:

$$\int \frac{dy}{y} = \int k dt$$

o sea $\ln|y| = kt + C.$

(y > 0)

Resulta que $y = e^{kt+C_1} = Ce^{kt}$ donde $C = e^{C_1}$

Si denotamos por y_0 a la población cuando $t = 0$, entonces C = y_0 y $y = y_0 e^{kt}$

Esta ecuación se conoce como la ley de crecimiento exponencial.

Definición

Se dice que una ecuación diferencial de 1° orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(y)h(x)$$

es separable o de variables separables.

Para resolverla la transformamos del modo siguiente:

$$\boxed{\frac{1}{g(y)} dy = h(x)dx \quad \textbf{(18)}}$$

Integrando el primer miembro respecto de y y el segundo miembro respecto de x, obtenemos.

$$\boxed{\int \frac{y}{g(y)} dy = \int h(x)dx + C \quad \textbf{(19)}}$$

Hemos obtenido una expresión que relaciona la solución *y*, la variable independiente *x* y la constante arbitraria C, es decir, hemos obtenido la integral general de la ecuación.

Definición

La ecuación de la forma

$M_1(x)\, N_1(y)\, dx + M_2(x)\, N_2(y)\, dy=0$ (20)

Se llama ecuación con variables separables

Podemos transformar esta ecuación a una ecuación con variables separadas dividiendo ambos miembros por la expresión $N_1(y)\ M_2(x)$: (Suponiéndolas distintas de cero)

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)}dx+\frac{M_2(x)N_2(y)}{N_1(y)M_2(x)}dy=0 \qquad O \qquad \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0$$

Y esta es una ecuación de la forma **(17)**

Ejemplos:

1) **Sea la ecuación**

(1+x) *y* d*x* + (1-*y*) x d*y* =0

Separando variables, encontramos:

$$\frac{1+x}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0$$

$$\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=0$$

Integrando, obtenemos

ln $|x|+x+\ln|y|-y=C$ *O* ln $|xy|+x-y=C$,

siendo esta última relación la solución general de la ecuación diferencial.

2) Un problema de valor inicial

Resolver el problema de valor inicial $\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}; y(4)=3$

Solución: separamos variables $ydy=-xdx$, integramos:

$$\int ydy=\int -xdx$$

$$\frac{y^2}{2}=\frac{-x^2}{2}+C_1$$

Esta solución puede escribirse en la forma $x^2 + y^2 = C^2$, si sustituimos la constante $2C_1$ con C^2. La solución representa una familia de círculos concéntricos cuando x = 4 y y = 3.

$$19 + 9 = 25 = C^2$$

Así el problema de valor inicial determina que $x^2 + y^2 = 25$.

3) Problema de la desintegración del radio.

Se sabe que la velocidad de la de la desintegración del radio es directamente proporcional a su masa en cada instante dado. Determinar la ley de variación de la masa del radio en función del tiempo, si para t=0 la masa del radio fue m_0

Según la hipótesis $\boxed{\frac{dm}{dt}=-km, \quad \textbf{(21)}}$

Ésta es una ecuación con variables separables**.**
Donde k es un coeficiente de proporcionalidad (k>0).

Ponemos el signo menos, porque a medida que transcurre el tiempo la masa del radio disminuye y, por eso $\frac{dm}{dt} < 0$.

Separemos las variables.

$$\boxed{\frac{dm}{dt} = -kdt \quad \textbf{(22)}}$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos:

$$\ln m = -kt + \ln C,$$

de donde

$$\ln \frac{m}{C} = -k$$

$$m = C e^{-kt} \qquad \textbf{(23)}$$

Sea m_0 la masa del radio en el instante t=0, entonces C debe satisfacer la relación:

$$m_0 = C e^{-k.0} = C.$$

Introduciendo el valor de C en la ecuación (23), obtenemos la dependencia buscada de la masa del radio en función del tiempo.

$$\boxed{m = m_0 e^{-kt} \quad \textbf{(24)}}$$

El coeficiente k se determina de manera experimental de la manera siguiente:
Sea a el % de la masa inicial del radio desintegrada durante el tiempo t_0. Por lo tanto cumple la correlación:

$$(1 - \frac{a}{100}) m_0 = m_0 e^{-kt},$$

de donde:

$$-kt_0 = \ln (1 - \frac{a}{100})$$

$$k = -\frac{1}{t_0} \ln (1 - \frac{a}{100})$$

para k= 0.00044 (la unidad de medida del tiempo en el año).

Poniendo este valor en la fórmula **(**24), tenemos

$$m= m_0 e^{-0.00044t}$$

Hallaremos el período de semi desintegración del radio, o sea el intervalo de tiempo durante el cual se desintegra la mitad de la masa del radio.

Sustituyendo m en la última fórmula por el valor $\frac{m_0}{2}$, obtenemos la ecuación para determinar el período T de semidesintegración:

$$\frac{m_0}{2} = m_0\, e^{-0.00044T},$$

De donde: $-0.00044T = -\ln 2$

O sea, $T = \frac{\ln 2}{0.00044} = 1590$ años.

Ejercicios sugeridos

1) Resuelva las ecuaciones diferenciales por separación de variables.

$1.1)\ \frac{dy}{dx} = sen5x$

$1.2)\ dx - x^2 dy = 0$

$1.3)\ xy' = 4y$

$1.4)\ \frac{y'}{y} - \frac{1}{x+2} = 0$

$1.5)\ \frac{ds}{dr} = ks$

$1.6)\ \frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x}$

2) En los siguientes problemas, resuelva la E.D, sujeta a la condición inicial respectiva.

$2.1)\ \frac{dy}{dx} + ty = y;\ y(1) = 3$

$2.2)\ 4y\,dx - x(y-3)dy = 0;\ y(2) = 1$

$2.3)\ y' + 2y = 1;\ y(0) = 5/2$

$2.4)\ \frac{dx}{dy} = 4\left(x^2+1\right);\ x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

3) En los siguientes problemas, determine una solución de la ecuación diferencial dada que pase por los puntos indicados.

$3.1)\ \frac{dy}{dx} - y^2 = 9$, a) (0,0) b) (0,3) c) $\left(\frac{1}{3},1\right)$

$3.2)\ x\frac{dy}{dx} = y^2 - y$, a) (0,1) b) (0,0) c) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Problemas

Una mañana de enero comienza a nevar y sigue nevando a razón constante. Una máquina quitanieves se pone a trabajar a medio día, limpiando a razón constante (volumen por unidad de tiempo). Entre la una y las dos avanzó solo la mitad de lo que avanzó entre el mediodía y la una. ¿A qué hora empezó a nevar?

$$\frac{dv}{dt} = k \Rightarrow dv = kdt$$

$$v = kt + C$$

Ley de enfriamiento de Newton.

Suponga que la temperatura T de un pequeño objeto caliente situado en un medio de temperatura T_α decrece a razón proporcional $T - T_\alpha$. Si el objeto se enfría de 100°C a 80°C en 20 minutos cuando la temperatura circulante es de 2°C. ¿Cuánto tardará en enfriarse de 100°C a 60°C?

II.2 Ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden

II. 2.1 Generalidades

Veamos antes de desarrollar el tema el concepto que nos será de utilidad.

Definición

Una función *f* que tiene la propiedad:

$f\left(tx,ty\right) = t^{\alpha} f\left(x,y\right)$ **para un número real α, se dice que es una función homogénea de grado α.**

Por ejemplo: $f\left(x,y\right) = x^3 + y^3$ es una función homogénea de grado 3, pues

$$f\left(tx,ty\right) = \left(tx\right)^3 + \left(ty\right)^3$$

$$= t^3\left(x^3 + y^3\right)$$

$$= t^3 f\left(x,y\right)$$

Definición

La ecuación de 1° orden $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ **(25), se llama homogénea respecto de *x* e *y* si la función *f*(x,y) es homogénea de grado cero respecto de *x* e *y*.**

II.2.2 Solución de una ecuación diferencial homogénea

Por ser homogénea de grado cero: $f\left(\lambda x, \lambda y\right) = f\left(x,y\right)$, haciendo $\lambda = \frac{1}{x}$, tendremos:

$f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, es decir, la función homogénea de grado cero solo depende de la razón de los argumentos.

En este caso, la ecuación **(25)** toma la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad \textbf{(25')}$$

Efectuaremos la sustitución $u = \frac{y}{x}$, de aquí $y = ux$

Derivando: $\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx} x$

Sustituyendo este valor de la derivada en **(25')** obtenemos:

$u + x\frac{du}{dx} = f\left(1, u\right)$, que es una ecuación de variables separables.

Separando variables e integrando, nos queda: $\int \frac{du}{f(1,u)-u} = \int \frac{dx}{x} + C$

Sustituyendo u por la razón $\frac{y}{x}$, después de integrar, obtenemos la integral de la ecuación **(1').**

Ejemplo:

Sea la ecuación: $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ **(1)**

Verificamos que la función *f* (x,y) es homogénea de grado cero:

$$f(tx,ty) = \frac{txty}{t^2x^2 - t^2y^2}$$

$$= \frac{t^2 xy}{t^2\left(x^2 - y^2\right)}$$

$$= f(x,y)$$

Por lo tanto la ecuación **(1)** es homogénea.

Realizamos la sustitución $\frac{y}{x} = u$ de donde y = ux.

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-u^2}$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-u^2}-u$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{u-u+u^3}{1-u^2}$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{u^3}{1-u^2}$$

$$\left(\frac{1-u^2}{u^3}\right)du=\frac{dx}{x}$$

$$\left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u}\right)du=\frac{dx}{x},\text{int}\,egrando$$

$$-\frac{1}{2u^2}-\ln\left|u\right|=\ln\left|x\right|+\ln\left|C\right|,ó$$

$$-\frac{1}{2u^2}=\ln uxC$$

Sustituyendo u=$\frac{y}{x}$; de donde la solución general de la ecuación será:

$$-\frac{x^2}{2y^2}=\ln\left|Cy\right|$$

Observación

La ecuación de la forma M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 **(26)**, será homogénea sólo en el caso en que M y N sean funciones homogéneas del mismo grado.

Ejercicios

1) Pruebe que la EDO $\left(x^2+y^2\right)dx+2xydy=0$ es homogénea y resuélvala.

2) Idem para:

$a)\left(x^2+y^2\right)dx+xydy=0$

$b)x^2dy+\left(y^2-xy\right)dx=0$

$c)\left(x+y\right)dy+\left(x-y\right)dx=0$

II. 3 Ecuaciones lineales de 1° orden

II.3.1 Generalidades

La complejidad de una E.D depende primordialmente de la manera en que se presentan la variable dependiente y sus derivadas. De particular importancia son las ecuaciones lineales, en las que cada término es de grado uno o cero, siendo el grado de un término la suma de los exponentes de la variable dependiente y de las derivadas que aparecen en él.

Definición

> **La ecuación que es lineal respecto a la función desconocida y su derivada, se llama ecuación lineal de 1° orden.**

La ecuación lineal tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx}+P\left(x\right)y=Q\left(x\right) \qquad \textbf{(27)}$$

donde P(x) y Q(x) son funciones continuas dadas de x (o constantes).

II.3.2 Resolución de ecuaciones lineales de primer orden

En la resolución de una EDO de primer orden, lineal podemos encontrar los casos siguientes:

a) Q(x)=0 y **b)** Q(x)$\neq$0

Caso a)

Si Q(x)=0, la ecuación lineal suele llamarse incompleta y puede resolverse separando variables.

Caso b)

Busquemos la solución de la ecuación (28), en la forma de un producto de dos funciones de x. Esto es, busquemos una función de la siguiente forma:

$$\boxed{y = u(x)\, v(x) \quad \textbf{(29)}}$$

Se puede tomar arbitrariamente una de estas funciones, la otra se determinará entonces según la ecuación **(28)**.

Derivando los dos miembros de la igualdad **(29)**, encontramos:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Reemplazando en (28), tenemos: $u\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{du}{dx}v + Puv = Q$

Sacando factor común u: $u\left(\dfrac{dv}{dx} + Pv\right) + v\dfrac{du}{dx} = Q$ **(29)**

Elijamos la función v de tal manera que: $\dfrac{dv}{dx} + Pv = 0$ **(30)**

Separando las variables en esta ecuación diferencial respecto a la función v, encontramos:

$$\frac{dv}{v} = -P\,dx \quad \textbf{(31)}$$

Integrando, obtenemos: $-\ln C_1 + \ln v = -\int P dx$ ó $v = C_1 e^{-\int P\,dx}$

Puesto que es suficiente tener una solución cualquiera, distinta de cero, de la ecuación (32), tomamos la función v(x): $v(x) = e^{-\int P dx}$, donde $\int P dx$ es una función primitiva cualquiera. Es evidente que $v(x) \neq 0$.

Sustituyendo el valor encontrado de v(x) en la ecuación **(29)**, obtenemos (teniendo en cuanta que $\frac{dv}{dx} + Pv = 0$):

$$v(x)\frac{du}{dx} = Q(x)$$

o sea que

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)}$$

de donde.

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (29), obtenemos en definitiva:

$$y = v(x)\left[\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C\right] \text{ ó } y = v(x)\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + Cv(x) \quad \textbf{(32)}$$

Ejemplo 1

Halle la solución general de la ecuación: $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3$ **(1)**

Para ello:

Hacemos: y = uv

Entonces $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

Introduciendo la expresión $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación lineal, tenemos:

$$u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3$$

$$u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v\right) + v\frac{du}{dx} = (x+1)^3 \quad \textbf{(2)}$$

Para determinar v, obtenemos la ecuación: $\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v = 0$, es decir:

$\frac{dv}{v} = \frac{2}{x+1}dx$, de donde

$\ln v = 2\ln(x+1)$ o sea v = $(x+1)^2$.

Introduciendo la expresión de la función v en la ecuación (2) obtenemos la ecuación para determinar u: $(x+1)^2\frac{du}{dx} = (x+1)^3$ ó $\frac{du}{dx} = x+1$, de donde

$$u = \frac{x^2}{2} + x + C$$

Por consiguiente, la integral general de la ecuación dada tendrá la forma:

$y = \left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)(x+1)^2$, la familia obtenida es la solución general.

Ejemplo 2

Resuelva los siguientes problemas:

$$a)\ \frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}$$

$$b)\ 2\frac{dy}{dx} - y = e^{x/2}$$

$$c)\ x\frac{dy}{dx} + 3y = \frac{senx}{x^2}$$

$$d)\ xdy + ydx = senxdx$$

II.4 La ecuación de Bernoulli

Definicion

Sea la ecuación: $$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad \textbf{(33)}$$

Donde P(x) y Q(x) son funciones de x (o constantes),

n $\neq 0$ **; n** $\neq 1$ **(en el caso contrario resulta una ecuación lineal).**

La ecuación dada recibe el nombre de ecuación de Bernoulli

y puede reducirse a una ecuación lineal con una sustitución adecuada.

Para resolverla dividamos la ecuación **(1)** por y^n:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{-n+1} = Q \quad \textbf{(34)}$$

Efectuemos ahora la siguiente sustitución:

$$z = y^{-n+1}$$

Entonces: $\frac{dz}{dx}=\left(-n+1\right)y^{-n}\frac{dy}{dx}$

Sustituyendo en la ecuación (35), obtendremos: $\frac{dz}{dx}+\left(-n+1\right)Pz=\left(-n+1\right)Q$, que es una ecuación lineal.

Al encontrar su integral general y sustituyendo z por su expresión y^{-n+1}, obtenemos la integral general de la ecuación de **Bernoulli.**

Ejemplo

Encuentre la solución general de $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$

Respuesta: la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1+Ce^{xc^2}}}$$

II.5 Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden exactas

II.5.1 Generalidades

Definición

Una ecuación que puede escribirse en la forma:

M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 (35)

y tiene la propiedad $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ **, se dice que es exacta,**

debido a que su 1° miembro es una diferencial exacta.

M y N son funciones continuas y derivables.

Solución:

Si el 1° miembro de (1) resulta ser la diferencial de una función *f*(x,y), entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M\left(x,y\right)\wedge\frac{\partial f}{\partial y}=N\left(x,y\right)$$

La ecuación (35) se transforma en: df = 0 y su solución general es *f*(x,y) = c (36) . Esta puede considerarse como una solución de la ecuación general:

$$M\left(x,y\right)+N\left(x,y\right)\frac{dy}{dx}=0 \quad \textbf{(37).}$$

En el sentido de que la ecuación f(x,y) = C define totalmente a *y* como una o más funciones diferenciables de *x* que resuelva la ecuación (37). Para comprobarlo diferenciemos ambos miembros de f(x,y) = C respecto de *x,* tratamos a *y* como una función diferenciable de *x* y aplicamos la regla de la cadena y tenemos:

F(x,y) = C

$$\frac{d}{dx}f\left(x,y\right)=\frac{d}{dx}C$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{dx}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dx}=0$$

y volviendo a la notación original: $M\left(x,y\right)+N\left(x,y\right)\frac{dy}{dx}=0$.

Así cualquier función diferenciable *y* = *y*(x) definida implícitamente por la ecuación (36) satisface la ecuación (37).

Ejemplo:

Hállese la solución general f(x,y) = C de la E.D: $\left(x^2+y^2\right)+\left(2xy+1\right)\frac{dy}{dx}=0$.

Hállese luego la solución particular cuya gráfica pase por el punto (0,1).

Resolución:

De no ser posible separar las variables en la ecuación dada, entonces lo ponemos en la forma: $\left(x^2+y^2\right)dx+\left(2xy+1\right)dy=0$

Buscamos entonces una función f(x,y) cuya diferencial df sea el 1° miembro de esta ecuación

$$df=\left(x^2+y^2\right)dx+\left(2xy+1\right)dy$$

De aquí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=x^2+y^2\wedge\frac{\partial f}{\partial y}=2xy+1$$

La derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}=x^2+y^2$ se ha calculado manteniendo y constante, y diferenciando respecto a x. Por lo tanto podemos encontrar *f* manteniendo *y* en un valor constante e integrando respecto a x, al hacerlo obtenemos:

$$f\left(x,y\right)=\int\left(x^2+y^2\right)dx=\frac{x^3}{3}+y^2x+k\left(y\right) \quad (4)$$

donde la constante (*y* cte) de integración k(*y)* se ha escrito como función de y porque su valor puede cambiar con cada nuevo y.

Para determinar k(*y*), calculamos $\frac{\partial f}{\partial x}$, a partir de (4) e igualamos el resultado a la derivada parcial dada, 2xy +1:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3}+y^2x+k\left(y\right)\right)=2xy+1$$

$$2xy+k'\left(y\right)=2xy+1$$

$$k'\left(y\right)=1$$

Eso muestra que: k (y) = y + C,   y

$$\boxed{f\left(x,y\right)=\frac{x^{3}}{3}+xy^{2}+y+C}$$

que es la solución general de la E.D (1).

III. LAS ECUACIONES DIFERENCIALES COMO MODELOS MATEMÁTICOS

Con frecuencia se desea describir el comportamiento de algún sistema o fenómeno de la vida real en términos matemáticos. Dicho sistema puede ser físico, sociológico o hasta económico.

La descripción matemática de un sistema o fenómeno se llama modelo matemático y se forma con ciertos objetivos de mente; por ejemplo, podríamos aprender los mecanismos de ciertos ecosistemas estudiando el crecimiento de las poblaciones de animales.

Pasos a seguir para la formulación de un modelo matemático de un sistema:

1) Se debe identificar las variables causantes del cambio del sistema. Podemos elegir no incorporar todas las variables en el modelo desde el comienzo. En este caso especificamos el nivel de resolución del modelo.
2) Se establece un conjunto de hipótesis razonables acerca del sistema que tratamos de describir. Esas hipótesis también incluyen todas las leyes empíricas aplicables al sistema.

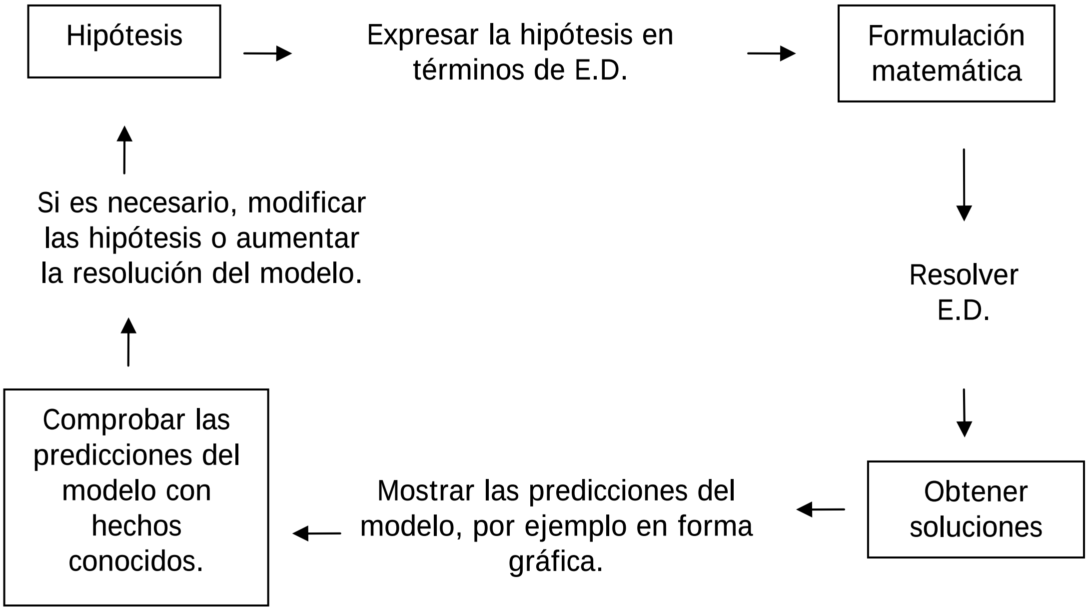
Cuando las hipótesis acerca del sistema implican, con frecuencia la razón o tasa de cambio de una o más variables; el enunciado matemático de todos estas hipótesis es una o más ecuaciones donde intervienen derivadas. En otras palabras, el modelo matemático es una ecuación o sistema de Ecuaciones Diferenciales.

Una vez formulado el modelo matemático, llegamos al problema de resolverlo.

Una vez resuelto comprobamos que el modelo sea razonable si su solución es consistente con los datos experimentales o los hechos conocidos acerca del comportamiento del sistema.

Si las predicciones que se basan en las soluciones son deficientes, podemos aumentar el nivel de resolución del modelo o elaborar hipótesis alternativas sobre los mecanismos del cambio del sistema; entonces se repite los pasos del proceso de modelado.

Al aumentar la resolución, aumentamos la complejidad del modelo matemático y la probabilidad de que debamos conformarnos con una solución aproximada.



III.1 Algunos modelos matemáticos que se corresponden con ecuaciones diferenciales

III.1.1 Crecimiento y Decrecimiento

Uno de los primeros intentos de modelar el crecimiento demográfico humano lo hizo Thomas Malthus, economista ingles en 1798. En esencia, la idea del modelo maltusiano es la hipótesis de que la tasa de crecimiento de la población de un país crece en forma proporcional a la población total, P(t) de ese país en cualquier momento t. En otras palabras, mientras más personas hayan en el momento t, habrá más en el futuro. En términos matemáticos, esta hipótesis se puede expresar:

$$\frac{dP}{dt} \propto P \quad \text{o sea} \quad \frac{dP}{dt} = kP \quad (1)$$

donde k es una constante de proporcionalidad. A pesar de que este sencillo modelo no tiene en cuenta muchos factores (por ejemplo la inmigración y emigración) que pueden influir en las poblaciones humanas, haciéndolas crecer o disminuir, predijo con mucha exactitud la población de EE.UU. desde 1790 hasta 1860. La E.D (1) aún se utiliza con mucha frecuencia para modelar poblaciones de bacterias y de animales pequeños durante

ciertos intervalos. El problema de valor inicial $\frac{dx}{dt} = kx, x\left(t_0\right) = x_0$ donde k es constante de proporcionalidad, se emplea como modelo de distintos fenómenos donde interviene crecimiento o decrecimiento.

Veamos algunos problemas de crecimiento:

III.1.2 Crecimiento bacteriano [ii]

Un cultivo tiene una cantidad inicial N_0 de bacterias, cuando t = 1h. La cantidad medida de bacterias es $\frac{3}{2}N_0$. Si la razón de reproducción es proporcional a la cantidad de bacterias presentes, calcule el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de los microorganismos.

Solución

Se resuelve la E.D: $\frac{dN}{dt} = kN$ (1) sujeta a $N(0) = N_0$.

A continuación se define la condición empírica $N(1)= \frac{3}{2}N_0$ para hallar k.

Tomemos (1) $\frac{dN}{dt} = kN$

Pasando términos $\frac{dN}{dt} - kN = 0$, que es una ecuación lineal con q(x) = 0.

Separando variables:
$$\frac{dN}{dt} = kN$$
$$\frac{dN}{N} = kdt$$

Integramos
$$\int \frac{dN}{N} = \int kdt + C$$
$$\ln N = kt + C, donde$$
$$N(t) = e^{kt + C_1}$$

O bien $N(t) = Ce^{kt}$ con C = e^{C_1}

Cuando t = 0 $\Rightarrow N(0) = Ce^{k0}$

$N(0) = C$ y como N(0) = N_0 $\Rightarrow$ C = N_0

y por consiguiente $N(t) = N_0 e^{kt}$.

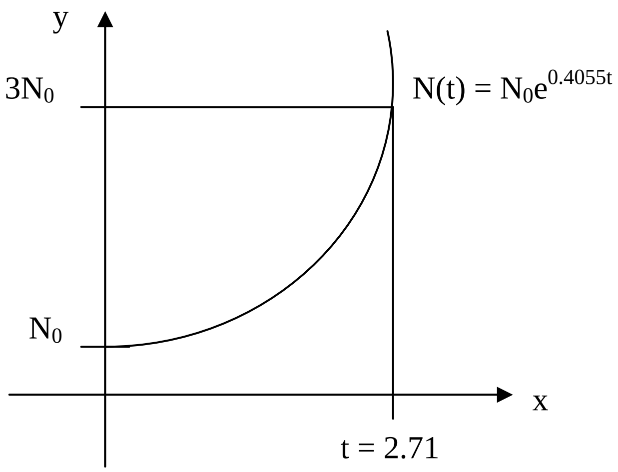
Cuando t = 1 $\Rightarrow \frac{3}{2}N_0 = N_0e^k$ o bien $e^k = \frac{3}{2}$, de aquí que $k = \ln\frac{3}{2} = 0,4055$ Así:

$$N(t) = N_0 e^{0,4055t}$$

Para establecer el momento en que se triplica la cantidad de bacterias, despejamos t de:

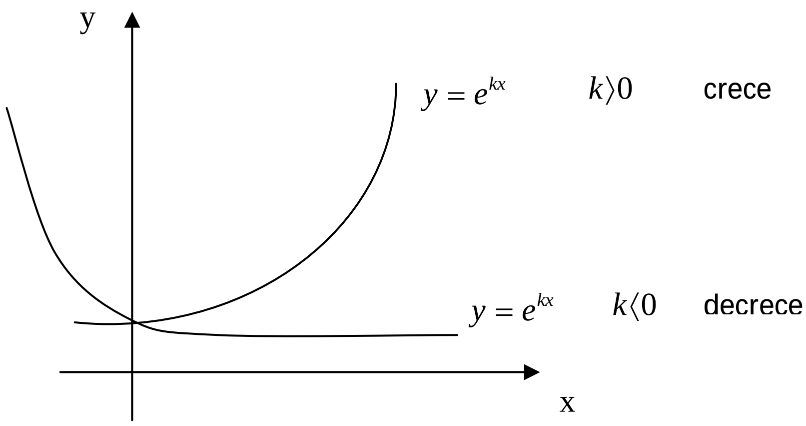
$3N_0 = N_0 e^{0.4055t}$; por consiguiente, 0.4055t = ln 3, y

así: $t = \frac{\ln 3}{0.4055} \approx 2.71$ hs



En este ejemplo observamos que la cantidad real N_0 de bacterias presentes en el momento
t = 0, no influyó para la definición del tiempo necesario para que el cultivo se triplicara. El tiempo requerido para aumentar una población inicial de 100 a 1.000.000 bacterias siempre es de alrededor de 2.71 hs.

III.1.3 Relación del crecimiento con la función exponencial



Si se observa el gráfico de la función exponencial, se ve que la misma crece (al aumentar t) cuando $k\rangle 0$ y decrece (al aumentar t) cuando $k\langle 0$.

Por esta razón los problemas de crecimiento (de poblaciones) se caracterizan por considerar un valor positivo de la constante. Mientras que cuando interviene decrecimiento, se tiene en valor negativo de k.

III.1.4 Crecimiento de una célula

Comencemos suponiendo que una célula tiene una masa m_0 y en un medio ideal crece. De este modo vemos que su masa variará en función del tiempo. Esto se expresa de la siguiente manera: m=m(t)
Supondremos además, que los compuestos químicos pasan rápidamente la pared de la célula, en este caso su crecimiento sólo está determinado por la velocidad del metabolismo dentro de la célula. Como el metabolismo depende de la masa de las moléculas participantes, podemos pensar que la velocidad de crecimiento es proporcional a la masa en cada instante.
Podemos expresar este hecho de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{dm}{dt} = am(t)}$$

a= cte. de proporcionalidad a>0

Esta ecuación corresponde a la ecuación de crecimiento (1), sin embargo esta ecuación tiene una restricción: $m<m_1$
Por cuanto si la masa de la célula alcanza cierto tamaño, la célula se dividirá en lugar de seguir creciendo.

III.1.5 Proceso de nacimiento-muerte

Los cambios en el número de integrantes de una población dependen de un balance entre el número de nacimientos y muertes.
De esta forma podemos escribir:

$$\frac{dN}{dt} = BN - MN$$

donde *B* representa el número de nacimientos por individuo y por unidad de tiempo y *M* es lo mismo, pero en términos de mortalidad.
Podemos escribir, por tanto:

$$\frac{dN}{dt} = (B - M)N = rN \quad \text{siendo r = B-M}$$

Es decir, la tasa intrínseca de crecimiento r resulta del balance entre las tasas intrínsecas de nacimientos y muertes. Por tanto r puede ser un número negativo, por lo que si

r>0 $\Rightarrow \frac{dN}{Dt} > 0$ la población aumenta

r<0 $\Rightarrow \frac{dN}{Dt} < 0$ la población disminuye

r=0 $\Rightarrow \frac{dN}{Dt} = 0$ N permanece constante

Por tanto, la asunción básica del modelo de crecimiento exponencial (r constante) se traduce en que las tasas intrínsecas de nacimiento y muertes tienen que permanecer constantes.

Problema

A mediados de 1984, la población mundial era de 4,76 miles de millones y aumentaba entonces con una razón de 220 millares de personas diarias. Supóngase que las tasas de natalidad y mortalidad son constantes.
Encontrar:

i) La tasa de crecimiento anual (k).
ii) El tiempo que tardará la población en duplicarse.
iii) La población mundial en el año 2000.
iv) El tiempo en que la población llegará a 50 mil millones.

Solución

Mediremos la población en millares de millones y el tiempo t en años.

Sea t = 0 el año correspondiente a 1984. por lo tanto P_0 = 4,76. El hecho de que P está aumentando 220 millares o sea 0.00022 miles de millones de personas por día en el momento t = 0, significa que son:

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

$$P'(t) = P_0 ke^{kt}$$

$$P'(0) = P_0 k$$

$P'(0) = (0.00022)(365.25) \approx 0.0804$ miles de millones por año.

De la ecuación $\frac{dP}{dt} = kP$ donde $k = \beta - \sigma$, ahora:

$$k = \left| \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} \right|_{t=0} = \frac{P'(0)}{P(0)} = \frac{0.0804}{4,76} \approx 0.0169$$

Por lo tanto la población está creciendo a razón de 1.69% al año.

Usaremos ese valor de k para calcular el valor de la población mundial en el momento t.

$$P(t) = (4,76)e^{(0.0169)t}$$

Por ejemplo para t = 16 se tiene:

$$P(16) = (4,76)e^{(0.0169)(16)} \approx 6.24$$ (mil millones).

como población para el año 2000.

Para hallar cuando será la población de 9.52 miles de millones, se resuelve la ecuación:

$$9.52 = (4,76)e^{(0.0169)t}$$

(tomando logaritmos naturales en ambos miembros) para obtener:

$t = \frac{\ln 2}{0.0169} \approx 41(\text{años.})$, lo que corresponde al año 2025.

La población mundial será de 50 mil millones cuando:

$$50 = (4,76)e^{(0.0169)t}$$

$$t = \frac{\ln\left(50 \diagup 4,76 \right)}{0.0169} \approx 139$$

III.1.6 Crecimiento restringido

La población en general, o un organismo en particular, no crecen indefinidamente. Hay limitaciones como la escasez de alimento, vivienda, espacio, condiciones físicas intolerables, etc.

Supongamos que existe un límite superior fijo para el tamaño de una población, individuo, tejido etc., donde el tamaño puede ser: un número (cantidad), el volumen, el peso, el diámetro, etc..

Llamamos B al límite superior de N(t) entonces podemos aproximar N(t) asintóticamente a B.

La velocidad de crecimiento $\frac{dN}{dt}$ tiende a cero cuando N tiende a B, es decir B-N(t)→0

k>0 y k=cte.

Si N es pequeño en relación a B, tenemos aproximadamente:

$$\frac{dN}{dt} = y' \cong kB = cte$$

Entonces N(t) $\cong (kB)t$, es decir que N crece como función lineal de t.

La ecuación $\frac{dN}{dt} = kB - kN$ es lineal con coeficientes constantes y su solución general tiene la forma $y = Ce^{-kt} + B$.

III.1.7 Determinación de la edad de materiales

El punto clave en la determinación de la edad de una pintura u otros materiales tales como rocas y fósiles es el fenómeno de la radioactividad, descubierto a principios de siglo XX.

El físico Rutherford y sus colaboradores mostraron que los átomos de ciertos elementos radiactivos son inestables y que, en un intervalo de tiempo dado, una fracción fija de los átomos se desintegra espontáneamente para formar un nuevo elemento. Ya que la radiactividad es una propiedad del átomo, Rutherford mostró que la radioactividad de una sustancia es directamente proporcional al número de átomos presentes en la misma. De modo que si N(t) denota el número de átomos existentes en el tiempo t, entonces $\frac{dN}{dt}$, el número de átomos que se desintegra por unidad de tiempo es proporcional a N, es decir,

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (1)$$

la constante λ, que es positiva, se conoce como constante de decaimiento o decrecimiento de la sustancia. Cuando mayor sea λ, obviamente la sustancia decrecerá más rápidamente. Una medida de la rapidez de desintegración de una sustancia es su *semivida* (o vida media), la cual se define como el tiempo necesario para que se desintegre la mitad de los átomos iniciales de una sustancia radioactiva. Para calcular la semivida de una sustancia en términos de λ, supóngase que en una tiempo t_0, $N(t_0)=N_0$.

Entonces, la solución al problema de valor inicial es

$$N(t)= N_0 e^{-\lambda \int_{t0}^{t} ds} = N_0 e^{-\lambda(t-t0)}$$

O bien, $N/N_0= e^{-\lambda(t-t0)}$.

Tomando logaritmos en ambos lados se obtiene

$$-\lambda(t-t_0) = \ln\frac{N}{N_0} \qquad (2)$$

De modo que si $\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2}$, entonces $-\lambda(t-t_0) = \ln\frac{1}{2} - \ln 2$, así que

$$((t-t_0) = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.6931}{\lambda}$$

En consecuencia, la semivida de una sustancia es ln 2 dividido entre la constante de decaimiento λ.

Ahora bien, la base de la determinación de edades por medio de material radioactivo es la siguiente: de la ecuación (2) se puede despejar $t - t_0 = \frac{-1}{\lambda}\ln(\frac{N}{N_0})$. La constante de decaimiento se conoce o puede calcularse en la mayoría de los casos. Mas aún, usualmente es posible calcular N con facilidad. Así pues, si se conociera N_0 podría calcularse la edad de la sustancia. Esto claramente representa un problema, ya que por lo común no se conoce N_0. En algunos casos, sin embargo, es factible calcular a N_0 indirectamente o al menos algún intervalo confiable en que se deba encontrar.

III.1.8 Antigüedad de un fósil

Alrededor de 1950, el químico Willard Libby inventó un método que emplea el carbono radiactivo para determinar las edades aproximadas de fósiles.

La teoría de la datación con radio carbono se basa en que el isótopo de carbono 14 se produce en la atmósfera por acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno.

La razón de la cantidad de C-14 al carbono ordinario en la atmósfera parece ser constante y, en consecuencia, la cantidad proporcional del isótopo presente en todos los organismos vivos es igual que la de la atmósfera. Cuando muere un organismo la absorción del C-14 sea por respiración cesa. Así, si se compara la

cantidad proporcional de C-14 presente, por ejemplo en un fósil, con la relación constante que existe en la atmósfera, es posible obtener una estimación razonable de su antigüedad. El método se basa en que se sabe que el período medio del C-14 radiactivo es, aproximadamente, 5600 años.
El método de Libby se usó para fechar los muebles de madera en las tumbas egipcias y las envolturas de lino de los rollos del Mar Muerto.

Problema
Se analizó un hueso fosilizado y se encontró que contenía la centésima parte de la cantidad original de C^{14}. Determinar la edad del fósil. [iii]

Solución
El punto de partida es de nuevo $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$.

Aquí deberemos calcular la constante de decaimiento (decrecimiento). Para ello aplicamos el hecho de que: $\frac{A_0}{2} = A(5600)$ o sea:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{5600k} \Rightarrow 5600k = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2, \text{ de donde } k = \frac{-\ln 2}{5600} = -0.000123$$

por consiguiente:

$$A(t) = A_0 e^{-0.00012378t} .$$

Tenemos para $A(t) = \frac{A_0}{1000}, que \frac{A_0}{1000} = A_0 e^{-0.00012378t}$, de modo que:

$$-0.00012378t = \ln\frac{1}{1000} = -\ln 1000. \text{ Así } t = \frac{\ln 1000}{0.00012378} \cong 55{,}800\, años.$$

Veamos algunos problemas que se corresponden con este modelo.

1) Cierta ciudad tenía una población de 25000 habitantes en 1960 y 30000 en 1970. Supongamos que la población de esta ciudad continúa con una tasa constante de crecimiento exponencial. ¿Qué población pueden esperar los planificadores para el año 2000?

2) En cierto cultivo, el número de bacterias se sextuplica cada 10 hs. ¿Qué tiempo tardarán en duplicarse sus números? Resp: = 3.8685.

3) Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta con una razón proporcional a la cantidad de personas que tiene en cualquier momento. Si la población se duplicó en 5 años. ¿En cuanto tiempo se triplicará a cuadruplicará? Resp: 7.9.

4) La población de una comunidad crece con una tasa proporcional a la población en cualquier momento. Su población inicial es 500 y aumenta 15 % en 10 años. ¿Cuál será la población pasados 30 años? Resp: 760.

v) En cualquier momento dado la cantidad de bacterias en un cultivo crece a una tasa proporcional a las bacterias presentes. Al cabo de 3 hs. Se observa que hay 100 individuos. Pasados 10 hs, hay 2000 especímenes. ¿Cuál es la cantidad inicial de bacterias?

vi) De acuerdo con una teoría cosmológica existieron isótopos de Uranio U^{235} y U^{238}, cuando la gran explosión creó el universo. En la actualidad hay 137,7 átomos de U^{238} por cada uno de U^{235}. Usando como vida media: 4,51 millones de años para el U^{238}, 0,71 millones de años para el U^{235}, calcule la edad del universo.

Solución

Sean $N_8(t)$ y $N_5(t)$ el número de átomos de N^{238} y N^{235} respectivamente en el tipo t (miles de millones de años después de la creación del universo). Entonces:

$N_5(t) = N_0 e^{-kt}$ y $N_8(t) = N_0 e^{-kt}$, donde N_0 es el número original de átomos de isótopos.

Las constantes son: $k = \dfrac{\ln 2}{4.51}$ y $c = \dfrac{\ln 2}{0.71}$, en la ecuación (8) $\left(\tau = \dfrac{\ln 2}{k}\right)$.

Dividiéndose la ecuación de N_8 entre la ecuación N_5 para encontrar que cuando t tiene el valor correspondiente a “ahora”, entonces:

$$137,7 = \frac{N_8}{N_5} = e^{(c-k)t}$$

Para terminar, resuélvase la ecuación siguiente para llegar a:

$$t = \frac{\ln 13{,}7}{\left[\left(\frac{1}{0{,}71}\right) - \left(\frac{1}{4{,}51}\right)\ln 2\right]} \approx 5.99$$

Por lo tanto nuestra estimación de la edad del universo es alrededor de 6 millones de años. (Recientes estimaciones = a 15 millones de años).

1) El carbono extraído de un cráneo antiguo contiene solo 1/6 del isótopo C^{14} que el que se extrajo de un hueso de la actualidad. ¿Cuál es la edad del cráneo?

2) (Fechado por radiocarbonos) El carbono recogido de una reliquia sagrada de los tiempos de Cristo contenía 4,6 x 10^{10} átomos de C^{14} por gramo. El carbón obtenido de un espécimen actual de la misma sustancia contiene 5,0 x 10^{10} átomos de C^{14} por gramo. Calcule la edad aproximada de la reliquia. ¿Cuál es su opinión sobre la autenticidad? Rpta : la muestra tiene alrededor de 686 años de antigüedad.

III.1.9 Ley de Newton del enfriamiento

Según la ley empírica de Newton acerca del enfriamiento, la rapidez con que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y el medio que lo rodea, que es la temperatura ambiente. Si T(t) representa la temperatura del objeto en el momento t, Tm es la temperatura constante del medio que lo rodea y $\frac{dT}{dt}$ es la rapidez con que se enfría el objeto, la ley de Newton del enfriamiento se traduce en el enunciado matemático

$$\frac{dT}{dt} \propto T - Tm \text{ o sea } \frac{dT}{dt} = k(T - Tm),$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Como supusimos que el objeto se enfría, se debe cumplir que $T \rangle Tm$, en consecuencia, lo lógico es que $k \langle 0$.

En el siguiente ejemplo supondremos que Tm es constante.

Enfriamiento de un pastel

Al sacar un pastel del horno, su temperatura es 300°F. Después de 3 minutos, 200°F.

¿En cuanto tiempo se enfriará a la temperatura ambiente de 70°F? [iv]

Solución

En la ecuación $\frac{dT}{dt} = k\left(T - Tm\right),$ vemos que Tm = 70. por consiguiente, debemos resolver el problema de valor inicial: $\frac{dT}{dt} = k\left(T - 70\right),$ T(0) = 300 (4)

Y determinar el valor de k de tal modo que T(3) = 200.

La ecuación (4) es lineal y separable, a la vez. Al separar variables:

$$\frac{dT}{T-70} = kdt \cdot$$

Cuyo resultado es $\ln\left|T - 70\right| = kt + C_1$ y así $T = 70 + C_2e^{kt}$.

Cuando t = 0, T = 300, de modo que $300 = 70 + C_2$ define a $C_2 = 230$.

Entonces $T = 70 + 230e^{kt}$.

Por último, la determinación T(3) =200 conduce a $e^{kt} = \frac{13}{23}$; o sea,

$k = \frac{1}{3}\ln\frac{13}{23} = -0{,}19018.$ Así:

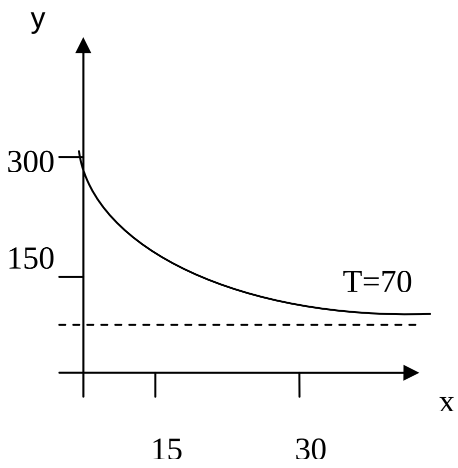
$$T\left(t\right) = 70 + 230e^{-0{,}19018t} \quad (5)$$

Observamos que la ecuación (5) no tiene una solución finita a T(t) = 70 porque:

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = 70,$$

no obstante, en forma intuitiva esperamos que el pastel se enfríe al transcurrir un intervalo razonablemente largo.

La figura muestra que el pastel a la temperatura ambiente pasada una media hora.



Problema

Un termómetro se saca de un recinto donde la temperatura del aire es de 70°F y se lleva al exterior, donde la temperatura es de 10°F. Pasado $\frac{1}{2}$ minuto el termómetro indica 50°F. ¿Cuál es la lectura cuando t = 1 minuto? ¿Cuanto tiempo se necesita para que el termómetro llegue a 10°F? **Rpta**: T(1)= 36.67°; aproximadamente 3.06 minutos.

III.1.10 Eliminación de drogas

En muchos casos la cantidad A(t) de cierta droga en el torrente sanguíneo, medida por el exceso sobre el nivel natural de la droga, disminuye a una razón proporcional a la cantidad excedente. Es decir:

$$\frac{dA}{dt} = -\lambda A, \text{ así que } A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

El parámetro λ se llama constante de eliminación de la droga y $T = \frac{1}{\lambda}$ se llama "tiempo de eliminación".

Ejemplo

a) El tiempo de eliminación del alcohol varía de una persona a otra. Si el tiempo "para ponerse sobrio" de una persona es $T = \frac{1}{\lambda}$ =2.5 hs. ¿Cuánto tardará en que el exceso de concentración del alcohol en el torrente sanguíneo se reduzca del 0.10% al 0.02%? [v]

Solución

- Supongamos que la concentración normal de alcohol en la sangre es cero, por lo que cualquier cantidad es un excedente. En este problema, tenemos $\lambda = \frac{1}{2.5} = 0.4,$ así que de la ecuación $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$ se produce: $0.02 = (0.10)e^{-(0.4)t}$.

Entonces: $t = -\frac{\ln(0.2)}{0.4} \approx 4.02hs.$

Problema

Supóngase que se usa una droga para anestesiar un perro. El perro es anestesiado cuando su corriente sanguínea contiene 4.5 mg de pentobarbitol sódico por cada Kg del peso del perro. Suponga también que el pentobarbitol sódico se elimina en forma exponencial de la sangre del perro, con una vida media de $5\,{}^1\!/_2\,hs.$ ¿Qué dosis simple debe administrarse para anestesiar 1hora a un perro de 50 Kg?

III.1.11 Decaimiento radiactivo

Consideremos una muestra de material que contenga N(t) átomos de cierto isótopo radiactivo en el momento t.

Se puede observar que una fracción constante de esos átomos radiactivos decae espontáneamente (transformándose en átomos de otro elemento o en otro isótopo del mismo) durante cada unidad de tiempo.

Por consiguiente la muestra se comporta tal como una población con tasa de mortalidad constante y en la que no ocurren nacimientos.

Para obtener un modelo de N(t), plantearemos la E.D: $\frac{dN}{dt} = -kN$; $k \rangle 0$.

Sabemos que su solución es $N(t) = N_0 e^{-kt}$, donde $N_0 = N(0)$, el número de átomos radiactivos presentes en la muestra cuando t = 0.

El valor de la constante de decaimiento k depende del isótopo particular que se esta manejado. Si k es grande, el isótopo decae con rapidez, mientras que si k está próximo a cero, el isótopo decae con lentitud y puede constituir un factor relativamente persistente sobre su ambiente.

Suele especificarse la constante de decaimiento en términos de otro parámetro, la vida media del isótopo, dado que este parámetro es más conveniente. La vida media τ de un isótopo radiactivo es el tiempo requerido para que decaiga la mitad de la masa.

Para encontrar la relación entre k y τ , se pone:

t = τ y N = $\frac{1}{2}N_0$, en la ecuación $N(t) = N_0 e^{-kt}$, de modo que $\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-kt}$.

Cuando se despeja τ se encuentra que $\tau = \frac{\ln 2}{k}$. (8).

Ejemplo

La vida media del carbono radiactivo C^{14} es de alrededor de 5700 años. Una muestra de carbón encontrado en Stonehenge resultó tener el 63 % de C^{14} de una muestra de carbón contemporánea. ¿Cuál es la edad de la muestra? [vi]

Solución

Tomemos t_0 como el momento de la muerte del árbol que produjo el carbono.

Por la ecuación (8) sabemos que $k = \frac{\ln 2}{\tau} = \frac{\ln 2}{5700} \approx 0.0001216$

Luego N = (0.63)N_0 ahora por lo que resolvamos la ecuación: $(0.63)N_0 = N_0 e^{-kt}$,

con este valor de k y por lo tanto encontramos que $t = -\frac{\ln(0.63)}{0.0001216} \approx 3800$ años.

Así que la muestra tiene alrededor de 3800 años de modo que data del año 1800 A.C. aproximadamente.

III.2 Problemas a modo de ejemplo

1) Si la población de un país se duplica en 50 años ¿En cuántos años será el triple suponiendo que la velocidad de aumento sea proporcional al número de habitantes?

Solución

Sea N la población en t años y No la población en el tiempo t=0.

Se puede escribir $\frac{dN}{dt} = kN$ o bien $\frac{dN}{N} = kdt$; siendo k el factor de proporcionalidad.

Integrando entre los límites t=0; N=No; t=50; N=2No

$$\int_{N_0}^{2N_0} \frac{dN}{N} = k\int_0^{50} dt$$

$$\ln 2N_0 - \ln N_0 = 50k$$

$$\ln 2 = 50k$$

Integrando $\frac{dN}{N} = kdt$ entre los límites t = 0, N = No, N=3No

$$\int_{N_0}^{3N_0} \frac{dN}{N} = k\int_0^t dt;\ y \ln 3 = kt$$

Entonces 50 ln3 =50kt =tln2 y $t = \frac{50\ln 3}{\ln 2} = 79 \textit{años}$

Otra solución

Integrando 1) $\int \frac{dN}{N} = kdt$;

se tiene 2) ln N =kt+lnC, de donde $N = Ce^{kt}$

Para t=0; N=No y de 2) C=No; luego 3) $N = N_0 e^{kt}$

Para t=50; N=2No; de 3) $2N_0 = N_0 e^{50k}$ de donde $e^{50k} = 2$

Si N=3No; 3) da $3 = e^{kt}$.Entonces

$3^{50} = e^{50kt} = (e^{50k})^t = 2^t ; \Rightarrow t = 79 años$

2) En cierto cultivo de bacterias la velocidad de aumento es proporcional al número presente.

a) Si se ha hallado que el número se duplica e 4 horas ¿Que número se debe esperar al cabo de 12 horas?

b) Si hay 10^4 al cabo de 3 horas y 4.10^4 al cabo de 5 horas. ¿Cuántas habría en un principio?

Solución

a) Sea x el número de bacterias en t hs. Entonces

1) $\frac{dx}{dt} = kx; o bien, \frac{dx}{x} = kdt$

Integrando 1) se tiene 2) lnx= kt+lnC ; luego $x = ce^{kt}$ suponiendo que x = x_0 para t=0, C=x_0 y $x = x_0 e^{kt}$

Para t= 4, x=2x_0. Entonces $2x_0 = x_0 e^{4k} y, e^{4k} = 2$

Si t=12 , $x = x_0 e^{12k} = x_0 (e^{4k})^3 = x_0 (2^3) = 8x_0$, es decir, hay 8 veces el número original.

b) Cuando t=3, $x=10^4$. Luego de 2) $10^4 = Ce^{3k}$, $y, C = \frac{10^4}{e^{3k}}$

Si t=5, $x = 4.10^4$ .Por tanto $4.10^4 = Ce^{5k}$, $y, C = \frac{4.10^4}{e^{5k}}$

Igualando los valores de C, $\frac{10^4}{e^{3k}} = \frac{4.10^4}{e^{5k}}$. Luego $e^{2k} = 4, y, e^k = 2$

Luego el número original es $C = \frac{10}{e^{3k}} = \frac{10^4}{8}$ bacterias.

3) Según la ley de Newton de enfriamiento, la velocidad a que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia de temperatura de la sustancia a la del aire. Si la temperatura del aire es de 30 grados y la sustancia se enfría de 100 a 70 en 15 minutos. ¿Cuándo será 40 grados la temperatura de la sustancia?

Solución

Sea T la temperatura de la sustancia en t minutos

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-30), dedonde \frac{dT}{T-30} = -kdt$$

No es obligatorio poner –k. Se hallará que k es positivo.

Integrando entre los t=0, T=100, y t=15,T=70

$$\int_{100}^{70} \frac{dT}{T-30} = -k\int_0^{15} dt \ ;$$

ln40-ln70=-15k=ln4/7 y 15k =ln 7/4=0,56

Integrando entre los límites t = 0, T =100 y t = t, T =40

$$\int_{100}^{40} \frac{dT}{T-30} = -k\int_0^{t} dt,$$ ln10-ln70 =-k;15 kt=15ln7,

$$t = \frac{15\ln 7}{0{,}56} = 52\,\text{min}.$$

4) Cierto producto químico se disuelve en el agua a una velocidad proporcional al producto de la cantidad aún no disuelta y la diferencia entre la concentración en una solución saturada y la concentración en la solución real. Se sabe que en 100 g. de una solución saturada están disueltos 50 g. de la sustancia. Si se agitan 30 g. del producto químico con 100 g. de agua, en 2 hs. Se disuelven 10 g. ¿Cuántos se disolverán en 5 hs.?

Solución

Sea x el número de gramos del producto químico aún no disuelto después de t hs. En este tiempo la concentración de la solución real es $\frac{30-x}{100}$ y la de una solución saturada es 50/100.

Entonces

$$\frac{dx}{dt} = kx\left(\frac{50}{100} - \frac{30-x}{100}\right) = kx\frac{4+20}{100}, de\ donde, \frac{dx}{x} - \frac{dx}{x+20} = \frac{k}{5}dt$$

Integrando entre t = 0 , x = 30 y t = 2 , x = 30 - 10 = 20

$$\int_{30}^{20}\frac{dx}{x} - \int_{30}^{20}\frac{dx}{x+20} = \frac{k}{5}\int_0^2 dt, y, k = \frac{5}{2}\ln\frac{5}{6} = -0,46$$

Integrando entre t = 0, x = 30 y t = 5, x = x

$$\int_{30}^{x}\frac{dx}{x} - \int_{30}^{x}\frac{dx}{x+20} = \frac{k}{5}\int_0^5 dt; \ln\frac{5x}{3\left(x+20\right)} = k = -0,46$$

$$\frac{x}{x+20} = \frac{3}{5}e^{-0,46} = 0,38$$

de donde x=12.

Luego, la cantidad disuelta después de 5 hs es 30-12 =18 gramos.

IV.1 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

IV.1.1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden n

Recordemos que una ED de la forma $y^{(n)}= f(x,y,y´,y´´,....,y^{(n)})$ es lineal cuando f es una función lineal de $y,y´,y´´,....,y^{(n)}$.

Es decir: una ecuación diferencial es lineal si puede escribirse en la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (1)$$

En la que observamos las dos propiedades características de una ecuación diferencial lineal.

1. La variable dependiente y todas sus derivadas son de primer grado.
2. Cada coeficiente sólo depende de la variable independiente x.

IV.1.2 Problemas de valores iniciales

Un problema de valores iniciales para una ecuación diferencial lineal de orden n tiene la siguiente forma:

Resolver la ecuación diferencial

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

sujeta a las siguientes condiciones iniciales:

$y(x_0)=y_0$, $y´(x_0)= y_1$,...., $y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$ **(2)**

IV.1.3 Existencia y unicidad de las soluciones

Enunciaremos un teorema que determina las condiciones suficientes de existencia de solución única para un problema de valor inicial de orden n.

Teorema

Sean $a_n(x)$; $a_{n-1}(x)$;.....; $a_1(x)$; $a_0(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en un intervalo I y sean $a_n(x) \neq 0$ para toda x en el intervalo. Si $x=x_0$ es cualquier punto del intervalo, existe una solución en dicho intervalo $y(x)$ del problema de valores iniciales representado por la ecuación (1) que es única.

Ejemplo 1:

El problema de valores iniciales $3\,y''' + 5\,y'' - y' + 7y = 0$; $y(1)=0$, $y'(1)= 0$; $y''(1)=0$, tiene la solución trivial $y=0$.

Como esta ecuación es de 3º orden es lineal con coeficientes constantes, se satisfacen todas las condiciones del teorema anterior, en consecuencia $y=0$ es la única solución en cualquier intervalo que contenga $x=1$.

Ejemplo 2:

Se puede comprobar que la función $y= 3\,e^{2x}+e^{-2x}-3x$ es una solución del problema de valores iniciales

$y''-4y =12\,x$; $y(0)=4$; $y'(0)=1$.

La ecuación diferencial es lineal, los coeficientes y $g(x)$ son continuas y $a_2(x)=1 \neq 0$ (distinto de cero) en todo intervalo I que contenga a $x=0$.

En función del teorema, debemos concluir que la función dada es la única solución en I.

IV.2 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS Y NO HOMOGÉNEAS.

IV.2.1 Conceptos generales

Volvamos a la ecuación 1 y observemos la función g(x) (que está en el segundo miembro de la ecuación).

Si g(x) = 0; la ecuación lineal se llama homogénea (EDLH) y si $g(x) \neq 0$, la ecuación diferencial se dice que es no homogénea (EDL no H).

Una EDLH tiene la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots.. + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

Una EDL no H tiene la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots.. + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Ejemplo:

2y´´+3y´-5y=0 es una EDLH.

Mientras que $x^3 y'' + 6y' + 10\,y = e^x$ es una EDL no H.

Enunciaremos ahora algunas propiedades fundamentales de la EDLH limitándonos a las demostraciones de las ecuaciones de segundo orden.

IV.2.2 Teorema: Principio de superposición

Teorema:

> **Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluciones de la ecuación diferencial homogénea de orden n, donde x está en el intervalo I.**
> **La combinación lineal $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$; donde las $c_i, i=1,2,\ldots,n$ son constantes arbitrarias, también es una solución cuando x está en el intervalo**

Llevemos este resultado a una ecuación diferencial lineal homogénea de 2º orden.

> **Si y_1 Ĵ y_2 son dos soluciones particulares de la ecuación lineal homogénea de segundo orden:**
>
> $$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (3)$$
>
> **$y_1 + y_2$ también es solución de la ecuación (3)**

Demostración:

Si y_1 Ĵ y_2 son soluciones de la ED, entonces:

$y''_1 + a_1 y'_1 + a_2 y_1 = 0$

$y''_2 + a_2 y'_2 + a_2 y_2 = 0$ **(4)**

Poniendo esto en la ecuación (3) la suma $y_1 + y_2$ y tomando en consideración las identidades (4), tenemos

$(y_1 + y_2)'' + a_1 (y_1 + y_2)' + a_2 (y_1 + y_2) =$

$= (y''_1 + a_1 y'_1 + a_2 y_1) + (y'' + a_2 y'_2 + a_2 y_2) = 0 + 0 = 0$

Si y_1 es solución de la ecuación (3) y C es una constante, el producto de C y_1 es, también una solución de esta ecuación.

Demostración:

Introduciendo en la ecuación (3) la expresión C y_1, obtenemos:

$(Cy_1)'' + a_1(Cy_1)' + a_2(C\,y_1) = C\,(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) = C.0 = 0$

y el teorema queda demostrado.

IV.2.5 Dependencia e independencia lineal

Definición:

Se dice que un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x),....,f_n(x)$ es linealmente dependientes en un intervalo I si existen constantes, $C_1,C_2,....., C_n$ no todas cero, tales que

$$C_1\, f_1(x)+ C_2\, f_2(x+...+ C_n\, f_n(x) = 0$$

Para toda x en el intervalo I.

Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice que es linealmente independiente.

En otras palabras, un conjunto de funciones es linealmente independiente en un intervalo I, si las únicas constantes para las que se cumple

$C_1\, f_1(x)+ C_2\, f_2(x+...+ C_n\, f_n(x) = 0$ para todas las x en el intervalo son iguales a cero.

Si se trata de las funciones solución de la EDL de segundo orden podemos expresar:

Definición:

Dos soluciones $y_1 \vee y_2$, de la ecuación (3) se llaman linealmente independientes en el intervalo I, si su razón en este último no es constante, es decir, cuando

$$\frac{y_1}{y_2} \neq \textbf{cte.}$$

En caso contrario, las soluciones son linealmente dependientes.
En otras palabras, dos soluciones $y_1 \wedge y_2$, se llaman linealmente dependientes en el intervalo I, si existe un valor constante λ, tal que $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$, cuando $x \in$ I.

En este caso $y_1 = \lambda\ y_2.$

Definición

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funciones de x que poseen n-1 derivadas al menos.

El determinante

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} Y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots\ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(5)}$$

es el Wronskiano de las funciones.

En particular:

Si $y_1 \wedge y_2$ son funciones de x, entonces el determinante:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & y_2 \\ Y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \qquad \textbf{(6)}$$

se llama determinante de Wronski de una EDL en el intervalo I.

Entonces el conjunto solución es linealmente independiente en I si y solo si

$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \quad \forall x \in I$

IV.2.6 Conjunto fundamental de soluciones

Todos conjunto $y_1, y_2, \dots, y_n$ de n soluciones L.I. de la DELH de orden n , en un intervalo I, se llama conjunto fundamental de soluciones en el intervalo I.

Teorema:

IV.2.7 Existencia de un conjunto fundamental

Existe un conjunto fundamental de soluciones de la DELH de orden n, en el intervalo I.

IV.2.8 Solución general de una ecuación homogénea

Sea $y_1, y_2, \dots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n en un intervalo I. La solución general de la ecuación en el intervalo es

$$y = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x) \quad (7)$$

Donde C_i, i= 1,2,3,... ,n son constantes arbitrarias.

Ejemplos:

1.- Las funciones $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-3x}$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea

y''-9 y = 0 en el intervalo $(-\infty,+\infty)$. Estas soluciones son l.i. en todos los reales (Podemos corroborar eso calculando el Wronskiano y observando que es distinto de cero).

A partir de esto concluimos que $y_1 \wedge y_2$ forman un conjunto fundamental de soluciones y, en consecuencia

$y= C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$ es la solución general del intervalo. **(8)**

IV.3 ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES.

IV.3.1 Generalidades. Casos.

Sea la ecuación lineal homogénea de segundo orden:

$y''+ p\, y'+q\, y = 0$, **(9)** donde p y q son constantes reales.

Según lo vimos, para hallar la solución general de esta ecuación es suficiente encontrar dos soluciones particulares l.i.

Busquemos soluciones particulares en la forma

$y = e^{kx}$, donde k es constante

Entonces $y'= k\, e^{kx}$, $y''=k^2\, e^{kx}$

Introduciendo las expresiones obtenidas de las derivadas en la ecuación (9), hallamos

$$e^{kx}(k^2 + pk +q) =0$$

Como $e^{kx} \neq 0$, resulta que $k^2 + pk +q = 0$ (10)

Por consiguiente, si k satisface la ecuación anterior, e^{kx} será solución de la ecuación (9).

La ecuación (10) se llama ecuación auxiliar o ecuación característica respecto de la ecuación (9).

La ecuación característica es una ecuación de segundo orden que tiene raíces las cuales designamos por k_1 y k_2.

Entonces $k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ $\qquad$ $k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Examinaremos los tres casos posibles que pueden presentarse:

1. k_1 y k_2 son números reales distintos.
2. k_1 y k_2 son números reales e iguales.
3. k_1 y k_2 son números complejos conjugados.

Caso 1:

IV.3.2 Raíces reales y distintas

Si la ecuación (10) tiene dos raíces reales distintas m_1 y m_2, llegamos a dos soluciones
$y_1 = e^{m_1 x}$ *y* $y_2 = e^{m_2 x}$

Estas soluciones son l.i. en $(-\infty, +\infty)$ puesto que:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{m_2 x}}{e^{m_1 x}} = e^{(m_2 - m_1)x} \neq cte$$

por lo tanto forman un conjunto fundamental.

Entonces, la solución general de la ecuación diferencial, en ese intervalo es:

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$$

Caso 2:

IV.3.3 Raíces reales e iguales

Cuando $m_1=m_2$ llegamos, necesariamente solo a una solución exponencial $y_1=e^{m_1x}$

Según la formula cuadrática, $m_1=-\frac{b}{2a}$ porque la única forma de que $m_1=m_2$ es $b^2 - 4ac=0$

Así la segunda ecuación es $y_2= e^{m_2x}$

La solución general es, en consecuencia:

$$y= C_1e^{m_1x} + C_2xe^{m_1x}$$

Caso 3:

IV.3.4 Raíces complejas conjugadas

Si m_1 y m_2 son complejas, podemos escribir $m_1= a + ib$, donde $a,b>0$ y son reales e

$i^2=-1$.

No hay diferencia formal entre este caso y el primero; por ello:

$$y= C_1e^{(a+ib)x} + C_2^{(a-ib)x}$$

En la práctica, sin embargo, se prefiere trabajar con funciones reales y no con exponenciales complejas.

Con este objeto se usa la formula de Euler.

En consecuencia:

$$e^{ibx} = \cos bx + i sen bx$$

$e^{-ibx} = \cos bx - i\,sen\,bx$ (11)

Si sumamos y restamos las dos ecuaciones, obtenemos:

$$e^{ibx} + e^{-ibx} = 2\cos bx$$
$$e^{ibx} - e^{-ibx} = 2i\,sen\,bx$$

Como $y = C_1 e^{(a+ib)x} + C_2 e^{(a-ib)x}$ es una solución de la ecuación

$ay'' + by' + cy = 0$ para cualquier elección de las constantes C_1 y C_2

Si

$C_1 = C_2 = 1$

y $C_1 = 1$

$C_2 = -1$

Obtenemos las soluciones

$$y_1 = e^{(a+ib)x} + e^{(a-ib)x}$$
$$y_2 = e^{(a+ib)x} - e^{(a-ib)x}$$

Pero

$$y_2 = e^{ax}(e^{ibx} - e^{-ibx}) = 2ie^{ax}sen\,bx$$
$$y = C_1 e^{ax}\cos bx + C_2 e^{ax} sen\,bx$$

En consecuencia:
$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{ax}\cos bx + C_2 e^{ax} sen\,bx \\ &= e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 sen\,bx) \end{aligned}$$

Ejemplo 1:

Resolver $2y'' - 5y' - 3y = 0$

La ecuación característica tiene la forma:

$2m^2 - 5m - 3 = 0$

$(2m + 1)(m - 3) = 0$

$m_1 = -\frac{1}{2}$; $m_2 = 3$

luego:

$y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 e^{3x}$

Ejemplo 2:

Resolver:

$y'' - 10y' + 25y = 0$

$m^2 - 10m + 25 = 0$

$(m-5)^2 = 0$

y $m_1 = m_2 = 5$

luego $y = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}$

Ejemplo 3:

Resolver; $y'' + y' + y = 0$

$m^2 + m + 1 = 0$

y como $m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

IV.3.5. Ejercicios sugeridos

1) Resuelva las siguientes ecuaciones:

- $y'' + 2y + 5y = 0$
- $y'' - 4y' + 4y = 0$
- $4\, y'' + y = 0$
- $2y'' - 5y' = 0$
- $y'' - 6y = 0$
- $y'' - 3y' + 2y = 0$

Resuelva los problemas de valor inicial:

- $y'' - 4y' + 13y = 0$; $y(0) = -1,\ y'(0) = 2$
- $y'' - 10\, y' + 25\, y = 0$; $y(0) = 1,\ y'(1) = 0$

IV.3.6 Problemas

Ley de Torricelli [vii]

Supóngase que un tanque de agua tiene un agujero de área a en el fondo, por el cual escapa el agua. Denote como y(t) la profundidad del agua en el tanque para el instante t
y como V(t) el volumen del agua en ese instante.
Es plausible (y también es verdad en condiciones ideales) que la velocidad del agua que escapa a través del agujero sea

$$v = \sqrt{2gy} \qquad (1)$$

que es la velocidad que adquiriría una gota de agua en caída libre desde la superficie hasta el agujero. En condiciones reales, tomando en cuenta la constricción del chorro de agua en el orificio, v = c $\sqrt{2gy}$, donde c es una constante empírica entre 0 y 1. Para simplificar, tomemos c=1 en el siguiente análisis.

Como una consecuencia de la ecuación (1), se tiene

$$\frac{dv}{dt} = -av = -a\sqrt{2gy} \quad (2)$$

este es un enunciado de la Ley de Torricelli para un tanque que se vacía .

Si A(y) designa el área de la sección transversal horizontal del tanque a la altura y, entonces el método de volumen mediante secciones transversales da

$$V = \int_0^y A(y)dy$$

Así es que el teorema fundamental del cálculo implica que ; $\frac{dV}{dy} = A(y)$ y en consecuencia que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy}.\frac{dy}{dt} = A(y)\frac{dy}{dt} \qquad (3)$$

A partir de las ecuaciones (2) y (3) se obtiene finalmente

$$A(y)\,\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy} \quad (4)$$

Que es la forma más usual de la ley de Torricelli.

Problemas:

1).- Un tanque hemisférico tiene un radio en el toque de 4f y, en el tiempo t=0 esta lleno de agua. En un momento se agra un agujero circular de 1in de diámetro en el fondo del tanque. ¿Cuanto tardara en vaciarse?

2).- En el tiempo t=0, se remueve el tapón del fondo (en el vértice) de un tanque cónico lleno de agua de 16 ft de altura. Después de 1 hora, el agua de deposito tiene 9ft de profundidad. ¿Cuándo se vaciara el tanque?

IV.3.7 Ecuaciones diferenciales de las oscilaciones mecánicas

Supongamos una carga de masa Q que reposa sobre un resorte elástico. Designemos por y la desviación de la carga de posición de equilibrio. Consideremos la desviación hacia abajo como positiva y hacia arriba, como negativa. En la posición de equilibrio la fuerzas del peso es compensada por la elasticidad del resorte. Supongamos que la fuerza que tiende a volver la carga a la posición de equilibrio, llamada elástica, sea proporcional a la desviación, es decir, la fuerza elástica es igual a –ky, donde ka es una magnitud constante para el resorte dado (así llamada “rigidez del resorte”).

Supongamos que al movimiento de la carga Q se opone una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad del movimiento de la carga respecto al punto mas bajo del resorte, es decir; una fuerza $-l v = -l \frac{dy}{dt}$, donde l =constante >0 (amortiguador).

Formemos la ecuación diferencial del movimiento de la carga sobre el resorte.

En virtud de la segunda Ley de Newton, tenemos:

$$Q\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - l\frac{dy}{dt} \quad \textbf{(5)}$$

(aquí, k y l son números positivos)

Hemos obtenido una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes .

Escribámosla en la forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0 \quad \textbf{(6)}$$

donde

$$p = \frac{l}{Q}\,; \qquad q = \frac{k}{Q}$$

Supongamos, ahora, que el punto inferior del resorte efectúa movimientos verticales según la ley $z = j\,(t)$.

Este fenómeno puede tener lugar, por ejemplo, cuando el extremos inferior del resorte esta fijado a un rodillo que junto con el resorte y la carga se mueve a los largo de un camino de relieve desigual.

En este caso la fuerza elástica no es igual a –ky, sino a -k[y´+j (t)], y en lugar de la ecuación (5) obtenemos la ecuación:

$$Q\frac{d^2y}{dt^2} + l\frac{dy}{dt} + ky = -kj\,(t) - l\,j\,(t)$$

o

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(t) \quad \textbf{(7)}$$

donde f(t)=$\dfrac{kj\,(t) + l\,j\,'(t)}{Q}$

Hemos obtenido una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden.

La ecuación (6) se llama ecuación las oscilaciones libres y la ecuación (7) de las oscilaciones forzadas.

[i] Ref. Edwards y oenney. 1987
[ii] Ref. Dennis Zill. 2000
[iii] Ref. Dennis Zill, 2000
[iv] Ref. Dennis Zill. P. 76
[v] Ref. Edwards y Penney, 1987. p. 408
[vi] Ref. Edwards y Penney. P. 406
[vii] Ref. Edwards y Penney, 1987.

BIBLIOGRAFÍA

BOYCE, w, Richard, K. 1967. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores de Frontera*. Editorial Limusa.

BRADLEY, GERALD L – SMITH, KAD J. 1998. *Cálculo de una variable, volumen I y II*. Editorial Prentice Hall. 1º Edición.

FINNEY, THOMAS. 1984. *Cálculo con Geometría Analítica*. Editorial Addison Wesley.

KROYSZIEJ, EDWIN. 1982. *Matemáticas Avanzadas para la Ingeniería*. Edit Limusa. México.

LEITHOLD, LOUIS. 1987. *El Cálculo con Geometría Analítica*. Editorial Harla. 5ª Edición. México.

PISKUNOV, N. 1977. *Cálculo Diferencial e Integral, volumen I y II*. Editorial Mir Moscú. 6ª edición.

RABUFETTI, HEBE. 1983. *Introducción al Análisis Matemático*. Editorial El Ateneo. Tomo II.

ZILL, DENNIS G. 2000. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*. Editorial Internacional Thomson. 1º Edición.

APUNTES DE CÁTEDRA. Cálculo Diferencial e Integral I y II. Matemática II. Facultad de Ciencias Forestales.

GUÍAS TEÓRICO PRÁCTICAS . Cálculo Diferencial e Integral I y II. Facultad de Ciencias Forestales.