PUBLICACIONES HACKYONEL

Ecuaciones Diferenciales

- E. D. L. Homogéneas de Coeficientes Constantes.
- E.D.L. No Homogéneas de Coeficientes Constates.
- Sistema de Ecuaciones Diferencias de Coeficientes Constantes.
- La Transformada de Laplace.
- Aplicaciones de la Transformada de Laplace.

Huánuco - Perú

2011

"AÑO DE UNION NACIONAL FRENTE A LA CRISIS EXTERNA"

UNIVERSIDAD NACIONAL "HERMILIO VALDIZÁN"

E. A. P. INGENIERÍA DE SISTEMAS

CURSO	:	**ECUACIONES DIFERENCIALES**
DOCENTE	:	**ING. ELMER CHUQUIYAURI SALDIVAR**
ALUMNO	:	**CALIXTO CARMEN, Yonel Orlando**
CICLO	:	**V**

HUANUCO- PERÚ

2011

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN n

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}+2y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0$$

$$P(t)=t^2-3t+2=(t-2)(t-1)=0$$

De donde: $t=1, \quad t=2$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y=c_1e^x+c_2e^{2x}$$

Rpta: $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+4y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=0$$

$$P(t)=t^2-4t+4=(t-2)^2=0$$

De donde: $t=2$ de multiplicidad 2

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}=e^{2x}(c_1+c_2x)$$

Rpta: $y=e^{2x}(c_1+c_2x)$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=0$$

$$P(t)=t^2+1=0$$

De donde: $t=i, \quad t=-i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x$$

Rpta: $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x$

4. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=0$$

$$P(t)=t^2+t+1=0$$

De donde: $t=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ t=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y=c_1e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$y=e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Rpta: $e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

5. $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2y=0$$

$$P(t)=t^2+2t+2=0$$

De donde: $t=-1+i,\qquad t=-1-i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y=c_1e^{-x}\cos x+c_2e^{-x}\operatorname{sen}x$$

$$y=e^{-x}\left(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x\right)$$

Rpta: $e^{-x}\left(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x\right)$

6. $y'''-2y''-y'+2y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$y'''-2y''-y'+2y=0$$

$$P(t)=t^3-2t^2-t+2=(t-1)(t+1)(t-2)=0$$

De donde: $t=1,\quad t=-1,\quad t=2$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}$

Rpta: $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}$

7. $y''' + 3y'' - 3y' + y = 0$

RESOLUCIÓN

$y''' + 3y'' - 3y' + y = 0$ Ecuación irresoluble excepto si:

$y''' - 3y'' - 3y' + y = 0$

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''' - 3y'' - 3y' + y = 0$

$P(t) = t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = (t+1)(t^2 - 4t + 1) = 0$

De donde: $t = -1, \quad t = 2+\sqrt{3}, \quad t = 2-\sqrt{3}$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1e^{-x} + c_2e^{(2+\sqrt{3})x} + c_3e^{(2+\sqrt{3})x}$

Rpta: $y = c_1e^{-x} + c_2e^{(2+\sqrt{3})x} + c_3e^{(2+\sqrt{3})x}$

8. $y''' - y'' + y' - y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''' - y'' + y' - y = 0$

$P(t) = t^3 - t^2 + t - 1 = (t-1)(t^2+1) = 0$

De donde: $t = 1, \quad t = i, \quad t = -i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1e^{x} + c_2\cos x + c_3 \operatorname{sen} x$

Rpta: $y = c_1e^{x} + c_2\cos x + c_3 \operatorname{sen} x$

9. $y''' - y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''' - y = 0$

$P(t) = t^3 - 1 = (t-1)(t^2+t+1) = 0$

De donde: $t = 1, \quad t = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad t = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$y = c_1 e^{x} + e^{-\frac{x}{2}}\left(c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$$

Rpta: $y = c_1 e^{x} + e^{-\frac{x}{2}}\left(c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$

10. $y^{iv} - y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iv} - y = 0$

$P(t) = t^4 - 1 = (t+1)(t-1)(t^2+1) = 0$

De donde: $t = 1, \quad t = -1, \quad t = i, \quad t = -i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$

Rpta: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$

11. $y^{iv} - y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iv} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$

$P(t) = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 = (t-1)^4 = 0$

De donde: $t = 1$ de multiplicidad 4

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 x^2 e^{x} + c_4 x^3 e^{x}$

$y = e^{x}\left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3\right)$

Rpta: $y = e^{x}\left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3\right)$

12. $6y''' - y'' - 6y' + y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$6y''' - y'' - 6y' + y = 0$

$P(t) = 6t^3 - t^2 - 6t + 1 = (t-1)(t+1)(6t-1) = 0$

De donde: $t = 1, \quad t = -1, \quad t = \frac{1}{6}$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3e^{\frac{x}{6}}$

Rpta: $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3e^{\frac{x}{6}}$

13. $y''' - y'' - 3y' - y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$y''' - y'' - 3y' - y = 0$

$P(t) = t^3 - t^2 - 3t - 1 = (t+1)(t^2 - 2t - 1) = 0$

De donde: $t = -1,\ \ t = 1+\sqrt{2},\quad t = 1-\sqrt{2}$
Luego el sistema fundamental de soluciones:
$y = c_1e^{-x} + c_2e^{(1+\sqrt{2})x} + c_3e^{(1-\sqrt{2})x}$

Rpta: $y = c_1e^{-x} + c_2e^{(1+\sqrt{2})x} + c_3e^{(1-\sqrt{2})x}$

14. $y^{vi} - y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$y^{vi} - y = 0$

$P(t) = t^6 - 1 = (t-1)(t^2+t+1)(t+1)(t^2-t+1) = 0$

De donde: $t = 1,\quad t = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad t = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad t = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad t = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
Luego el sistema fundamental de soluciones:
$$y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + e^{-\frac{x}{2}}\left(c_5\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_6\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Rpta:
$$y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + e^{-\frac{x}{2}}\left(c_5\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_6\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

15. $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = 0$$
$P(t) = t^3 - 2t^2 - 3t = t(t^2 - 2t - 3) = 0$

De donde: $t=0,\quad t=3,\quad t=-1$
Luego el sistema fundamental de soluciones:
$y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}$

Rpta: $y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}$

16. $\dfrac{d^3y}{dx^3}+4\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$\dfrac{d^3y}{dx^3}+4\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}=0$
$P(t)=t^3+4t^2+4t=t(t+2)^2=0$
De donde: $t=-2,$ de multiplicidad 2; $t=0,$
Luego el sistema fundamental de soluciones:
$y=c_1+c_2e^{-2x}+c_3xe^{-2x}$
$y=c_1+e^{-2x}(c_2+c_3x)$

Rpta: $y=c_1+e^{-2x}(c_2+c_3x)$

17. $\dfrac{d^4y}{dx^4}=y$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$\dfrac{d^4y}{dx^4}-y=0$
$P(t)=t^4-1=(t+1)(t-1)(t^2+1)=0$
De donde: $t=1,\quad t=-1,\quad t=i,\quad t=-i$
Luego el sistema fundamental de soluciones:
$y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\operatorname{sen} x$

Rpta: $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\operatorname{sen} x$

18. $\dfrac{d^4y}{dx^4}+2\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^4y}{dx^4}+2\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

$$P(t)=t^4+2t^2+1=(t^2+1)^2=0$$

De donde: $t=i$, de multiplicidad 2, $t=-i$ de multiplicidad 2

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x+c_3x\cos x+c_4x\operatorname{sen} x$$

$$y=(c_1+c_3x)\cos x+(c_2+c_4x)\operatorname{sen} x$$

Rpta: $y=(c_1+c_3x)\cos x+(c_2+c_4x)\operatorname{sen} x$

19. $\dfrac{d^4y}{dx^4}+3\dfrac{d^2y}{dx^2}-4y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^4y}{dx^4}+3\frac{d^2y}{dx^2}-4y=0$$

$$P(t)=t^4+3t^2-4=(t+1)(t-1)(t^2+4)=0$$

De donde: $t=-1,\quad t=1,\quad t=2i,\quad t=-2i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos 2x+c_4\operatorname{sen} 2x$$

Rpta: $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos 2x+c_4\operatorname{sen} 2x$

20. $\dfrac{d^4y}{dx^4}-2\dfrac{d^3y}{dx^3}+\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^4y}{dx^4}-2\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

$$P(t)=t^4-2t^3+t^2=t^2(t-1)^2=0$$

De donde: $t=0$, de multiplicidad 2, $t=1$, de multiplicidad 2

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y=c_1+c_2x+c_3e^x+c_4xe^x$$

$$y=c_1+c_2x+(c_3+c_4x)e^x$$

Rpta: $y=c_1+c_2x+(c_3+c_4x)e^x$

21. $2\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$2\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=0$$

$$P(t)=2t^3-t^2-2t+1=(t-1)(t+1)(2t-1)=0$$

De donde: $t=1,\quad t=-1,\quad t=\frac{1}{2}$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{\frac{x}{2}}$$

Rpta: $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{\frac{x}{2}}$

22. $2\frac{d^3y}{dx^3}-7\frac{d^2y}{dx^2}+2y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$2\frac{d^3y}{dx^3}-7\frac{d^2y}{dx^2}+2y=0$$

$$P(t)=2t^3-7t^2+2=(t+2)(2t^2-4t+1)=0$$

De donde: $t=-2,\quad t=1+\frac{\sqrt{2}}{2},\quad t=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x}+c_3e^{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x}$$

Rpta: $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x}+c_3e^{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x}$

23. $\frac{d^4y}{dx^4}-14\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^4y}{dx^4}-14\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

$$P(t)=t^4-14t^2+1=(t^2+4t+1)(t^2-4t+1)=0$$

De donde: $t=-2+\sqrt{3},\quad t=-2-\sqrt{3},\quad t=2+\sqrt{3},\quad t=2-\sqrt{3}$

Luego el sistema fundamental de soluciones:
$y = c_1 e^{(2+\sqrt{3})x} + c_2 e^{(2-\sqrt{3})x} + c_3 e^{(-2+\sqrt{3})x} + c_4 e^{(-2-\sqrt{3})x}$

Rpta: $y = c_1 e^{(2+\sqrt{3})x} + c_2 e^{(2-\sqrt{3})x} + c_3 e^{(-2+\sqrt{3})x} + c_4 e^{(-2-\sqrt{3})x}$

24. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$\dfrac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0$
$P(t) = t^2 + k^2 = 0$
De donde: $t = ki, \quad t = -ki$
Luego el sistema fundamental de soluciones:
$y = c_1 \cos \mathrm{k}\, x + c_2 \operatorname{sen} \mathrm{k}\, x$

Rpta: $y = c_1 \cos \mathrm{k}\, x + c_2 \operatorname{sen} \mathrm{k}\, x$

25. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$
$P(t) = t^2 - 2t + 4 = 0$
De donde: $t = 1 + \sqrt{3}i, \quad t = 1 - \sqrt{3}i$
Luego el sistema fundamental de soluciones:
$y = c_1 e^x \cos\sqrt{3}x + c_2 e^x \operatorname{sen}\sqrt{3}x$
$y = e^x \left(c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{3}x\right)$

Rpta: $y = e^x \left(c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{3}x\right)$

26. $4\dfrac{d^4y}{dx^4} + 5\dfrac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$4\frac{d^4y}{dx^4}+5\frac{d^2y}{dx^2}-9y=0$$

$$P(t)=4t^4+t^2-9=(t-1)(t+1)(4t^2+9)=0$$

De donde: $t=1,\quad t=-1,\quad t=\frac{3}{2}i,\quad t=-\frac{3}{2}i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos\frac{3}{2}x+c_4\operatorname{sen}\frac{3}{2}x$$

Rpta: $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos\frac{3}{2}x+c_4\operatorname{sen}\frac{3}{2}x$

27. $\frac{d^4y}{dx^4}+4y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^4y}{dx^4}+4y=0$$

$$P(t)=t^4+4=(t^2-2t+2)(t^2+2t+2)=0$$

De donde: $t=1+i,\quad t=1-i,\quad t=-1+i,\quad t=-1-i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y=c_1e^x\cos x+c_2e^x\operatorname{sen}x+c_3e^{-x}\cos x+c_4e^{-x}\operatorname{sen}x$$

$$y=e^x(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x)+e^{-x}(c_3\cos x+c_4\operatorname{sen}x)$$

Rpta: $y=e^x(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x)+e^{-x}(c_3\cos x+c_4\operatorname{sen}x)$

28. $\frac{d^4y}{dx^4}-2\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-2y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^4y}{dx^4}-2\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-2y=0$$

$$P(t)=t^4-2t^3+t^2+2t-2=(t-1)(t+1)(t^2-2t+2)=0$$

De donde: $t=1,\quad t=-1,\quad t=1+i,\quad t=1-i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^x\cos x+c_4e^x\operatorname{sen}x$$

$$y=y=c_1e^x+c_2e^{-x}+e^x(c_3\cos x+c_4\operatorname{sen}x)$$

Rpta: $y=y=c_1e^x+c_2e^{-x}+e^x(c_3\cos x+c_4\operatorname{sen}x)$

29. $\frac{d^5y}{dx^5}+2\frac{d^3y}{dx^3}+10\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+10y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^5y}{dx^5}+2\frac{d^3y}{dx^3}+10\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+10y=0$$

$$P(t)=t^5+2t^3+10t^2+t+10=(t+2)(t^2+1)(t^2-2t+5)=0$$

De donde: $t=-2,\quad t=i,\quad t=-i,\quad t=1+2i,\quad t=1-2i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y=c_1e^{-2x}+c_2\cos x+c_3\operatorname{sen} x+c_4e^x\cos 2x+c_5e^x\operatorname{sen} 2x$$

$$y=c_1e^{-2x}+c_2\cos x+c_3\operatorname{sen} x+e^x(c_4\cos 2x+c_5\operatorname{sen} 2x)$$

Rpta: $y=c_1e^{-2x}+c_2\cos x+c_3\operatorname{sen} x+e^x(c_4\cos 2x+c_5\operatorname{sen} 2x)$

30. $2y''-3y'+y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$2y''-3y'+y=0$$

$$P(t)=2t^2-3t+1=(t-1)(2t-1)=0$$

De donde: $t=1,\quad t=\frac{1}{2}$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y=c_1e^{\frac{x}{2}}+c_2e^x$$

Rpta: $y=c_1e^{\frac{x}{2}}+c_2e^x$

31. $y''-9y'+9y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$y''-9y'+9y=0$$

$$P(t)=t^2-9t+9=0$$

De donde: $t=\frac{9+3\sqrt{5}}{2},\quad t=\frac{9-3\sqrt{5}}{2}$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y=c_1e^{\left(\frac{9-3\sqrt{5}}{2}\right)x}+c_2e^{\left(\frac{9+3\sqrt{5}}{2}\right)x}$$

Rpta: $y=c_1e^{\left(\frac{9-3\sqrt{5}}{2}\right)x}+c_2e^{\left(\frac{9+3\sqrt{5}}{2}\right)x}$

32. $y''+y'-2y=0, \quad y(0)=1,\ y'(0)=1$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$y''+y'-2y=0$

$P(t)=t^2+t-2=(t+2)(t-1)=0$

De donde: $t=-2, \quad t=1$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y=c_1e^x+c_2e^{-2x} \qquad ...(1)$

$y=c_1e^x+c_2e^{-2x} \quad =c_1+c_2=1$

$y'=c_1e^x-2c_2e^{-2x}=c_1-2c_2=1$

$c_1=1, \quad c_2=0 \qquad ...(2)$

$(2)\,en\,(1)$

$y=e^x$

Rpta: $y=e^x$

33. $y''-6y'+9y=0, \quad y(0)=0,\ y'(0)=2$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$y''-6y'+9y=0$

$P(t)=t^2-6t+9=(t-3)^2=0$

De donde: $t=3,$ de multiplicidad 2

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x} \qquad ...(1)$

$y(0)=c_1=0$

$y'(0)=3c_1+c_2=2$

$c_1=0, \quad c_2=2 \qquad ...(2)$

$(2)\,en\,(1)$

$y=2xe^{3x}$

Rpta: $y=2xe^{3x}$

34. $y''+8y'-9y=0, \quad y(1)=1,\ y'(1)=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''+8y'-9y=0$

$P(t)=t^2+8t-9=(t+9)(t-1)=0$

De donde: $t=-9, \quad t=1$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y=c_1e^{-9x}+c_2e^{x}$

Rpta: $y=$

35. $y''+4y=0, \quad y(0)=1, \; y'(0)=1$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''+4y=0$

$P(t)=t^2+4=0$

De donde: $t=2i, \quad t=-2i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y=c_1\cos 2x+c_2\operatorname{sen} 2x \qquad \ldots(1)$

$y(0)=c_1=1$

$y(0)'=2c_2=1$

$c_1=1, \; c_2=\dfrac{1}{2} \qquad \ldots(2)$

(2) *en* (1)

$y=\cos 2x+\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$

Rpta: $y=\cos 2x+\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$

36. $y''+4y'+5y=0, \quad y(0)=1, \; y'(0)=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''+4y'+5y=0$

$P(t)=t^2+4t+5=0$

De donde: $t=-2+i, \quad t=-2-i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y = c_1 e^{-2x} \cos x + c_2 e^{-2x} \operatorname{sen} x \qquad \ldots(1)$$

$$y(0) = c_1 = 1$$

$$y'(0) = -2c_1 + c_2 = 0$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 2 \qquad \ldots(2)$$

(2) *en* (1)

$$y = e^{-2x} \cos x + 2e^{-2x} \operatorname{sen} x$$

Rpta: $y = e^{-2x} \cos x + 2e^{-2x} \operatorname{sen} x$

37. $y''' - 4y'' - y' + y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$y''' - 4y'' - y' + y = 0$$

$$P(t) = t^3 - 4t^2 - t + 1 = (t+1)(t-1)^2 = 0$$

De donde: $t = 1$, de multiplicidad 2, $t = -1$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_1 e^{-x}$$

Rpta: $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 e^{-x}$

38. $y^{iv} - 5y^{ii} + 4y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$y^{iv} - 5y^{ii} + 4y = 0$$

$$P(t) = t^4 - 5t^2 + 4 = (t+1)(t+2)(t-1)(t-2) = 0$$

De donde: $t = -1, \quad t = -2, \quad t = 1, \quad t = 2$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$$

Rpta: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$

39. $y^{vi} - 3y^{iv} + 3y^{ii} - y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$y^{vi} - 3y^{iv} + 3y^{ii} - y = 0$$

$$P(t) = t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1 = (t-1)^3 (t+1)^3 = 0$$

De donde: $t = 1$, de multiplicidad 3, $t = -1$, de multiplicidad 3.

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1 e^x + c_2 xe^x + c_3 x^2 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 xe^{-x} + c_6 x^2 e^{-x}$

Rpta: $y = c_1 e^x + c_2 xe^x + c_3 x^2 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 xe^{-x} + c_6 x^2 e^{-x}$

40. $y^v - 3y^{iv} + 3y^{iii} - 3y^{ii} + 2y^i = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^v - 3y^{iv} + 3y^{iii} - 3y^{ii} + 2y^i = 0$

$P(t) = t^5 - 3t^4 + 3t^3 - 3t^2 + 2t = t(t-1)(t-2)(t^2+1) = 0$

De donde: $t = 0,\quad t = 1,\quad t = 2,\quad t = i,\quad t = -i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + c_4 \cos x + c_5 \operatorname{sen} x$

Rpta: $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + c_4 \cos x + c_5 \operatorname{sen} x$

41. $y^{iv} - 8y^i = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iv} - 8y^i = 0$

$P(t) = t^4 - 8t = t(t-2)(t^2 + 2t + 4) = 0$

De donde: $t = 0,\quad t = 2,\quad t = -1 + \sqrt{3}i,\quad t = -1 - \sqrt{3}i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-x} \cos \sqrt{3}x + c_4 e^{-x} \operatorname{sen} \sqrt{3}x$

Rpta: $y = c_1 + c_2 e^{2x} + e^{-x}\left(c_3 \cos \sqrt{3}x + c_4 \operatorname{sen} \sqrt{3}x\right)$

42. $y^{viii} + 8y^{iv} + 16y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{viii} + 8y^{iv} + 16y = 0$

$P(t) = t^8 - 8t^4 + 16 = (t^2 - 2t + 2)^2 (t^2 + 2t + 2)^2 = 0$

De donde: $t = 1 + i$, de multiplicidad 2; $t = 1 - i$, de multiplicidad 2; $t = -1 + i$, de multiplicidad 2; $t = -1 - i$, de multiplicidad 2;

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = e^x \left[(c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\operatorname{sen} x\right] + e^{-x}\left[(c_5 + c_6 x)\cos x + (c_7 + c_8 x)\operatorname{sen} x\right]$

Rpta:

$y = e^x \left[(c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\operatorname{sen} x\right] + e^{-x}\left[(c_5 + c_6 x)\cos x + (c_7 + c_8 x)\operatorname{sen} x\right]$

43. $y^{iv}+6y^{iii}+9y^{ii}=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$y^{iv}+6y^{iii}+9y^{ii}=0$
$P(t)=t^4+6t^3+9t^2=t^2(t+3)^2=0$
De donde: $t=0,$ de multiplicidad 2, $t=-3,$ de multiplicidad 2.
Luego el sistema fundamental de soluciones:
$y=c_1+c_2x+c_3e^{-3x}+c_4xe^{-3x}$
$y=c_1+c_2x+(c_3+c_4x)e^{-3x}$

Rpta: $y=c_1+c_2x+(c_3+c_4x)e^{-3x}$

44. $4y^{iii}-3y^{i}+y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$4y^{iii}-3y^{i}+y=0$
$P(t)=4t^3-3t+1=(t+1)(2t-1)^2=0$
De donde: $t=\frac{1}{2},$ de multiplicidad 2, $t=-1.$
Luego el sistema fundamental de soluciones:
$y=c_1e^{-x}+c_2e^{\frac{x}{2}}+c_3xe^{\frac{x}{2}}$
$y=c_1e^{-x}+(c_2+c_3x)e^{\frac{x}{2}}$

Rpta: $y=c_1e^{-x}+(c_2+c_3x)e^{\frac{x}{2}}$

45. $4y^{iv}-4y^{iii}-23y^{ii}+12y^{i}+36y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$4y^{iv}-4y^{iii}-23y^{ii}+12y^{i}+36y=0$
$P(t)=4t^4-4t^3-23t^2+12t+36=(t-2)^2(2t+3)^2=0$
De donde: $t=2,$ de multiplicidad 2, $t=-\frac{3}{2}$ de multiplicidad 2.
Luego el sistema fundamental de soluciones:
$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3e^{-\frac{3}{2}x}+c_3xe^{-\frac{3}{2}x}$
$y=(c_1+c_2x)e^{2x}+(c_3+c_3xe)^{-\frac{3}{2}x}$

Rpta: $y=(c_1+c_2x)e^{2x}+(c_3+c_3xe)^{-\frac{3}{2}x}$

46. $y^{v}-y^{iii}=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$y^{v}-y^{iii}=0$
$P(t)=t^5-t^3=t^3(t-1)(t+1)=0$
De donde: $t=0$, de multiplicidad 3; $t=1$, $t=-1$
Luego el sistema fundamental de soluciones:
$y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{x}+c_5e^{-x}$

Rpta: $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{x}+c_5e^{-x}$

47. $y^{iv}-2y^{iii}-3y^{ii}+4y^{i}+4y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$y^{iv}-2y^{iii}-3y^{ii}+4y^{i}+4y=0$
$P(t)=t^4-2t^3-3t^2+4t+4=(t-2)^2(t+1)^2=0$
De donde: $t=2$, de multiplicidad 2; $t=-1$, de multiplicidad 2.
Luego el sistema fundamental de soluciones:
$y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+c_3e^{2x}+c_4xe^{2x}$
$y=(c_1+c_2x)e^{-x}+(c_3+c_4x)e^{2x}$

Rpta: $y=(c_1+c_2x)e^{-x}+(c_3+c_4x)e^{2x}$

48. $y^{iv}+2y^{iii}-6y^{ii}-16y^{i}-8y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$y^{iv}+2y^{iii}-6y^{ii}-16y^{i}-8y=0$
$P(t)=t^4+2t^3-6t^2-16t-8=(t+2)^2(t^2-2t-2)=0$
De donde: $t=-2$, de multiplicidad 2; $t=1+\sqrt{3}$, $t=1-\sqrt{3}$
Luego el sistema fundamental de soluciones:
$y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+c_3e^{(1+\sqrt{3})x}+c_4e^{(1-\sqrt{3})x}$
$y=(c_1+c_2xe)^{-2x}+c_3e^{(1+\sqrt{3})x}+c_4e^{(1-\sqrt{3})x}$

Rpta: $y=(c_1+c_2xe)^{-2x}+c_3e^{(1+\sqrt{3})x}+c_4e^{(1-\sqrt{3})x}$

49. $y^{iii} - 3y^{i} - 2y = 0 \quad cuando\, x = 0, \quad y = 0, \quad y' = 9, \quad y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iii} - 3y^{i} - 2y = 0$

$P(t) = t^3 - 3t - 2 = (t+1)^2 (t-2) = 0$

De donde: $t = -1$, de multiplicidad 2; $t = 2$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 e^{2x} \qquad ...(1)$

$y = c_1 + c_3 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_3$

$y'(0) = -c_1 + c_2 + 2c_3 = 9$

$y''(0) = c_1 - 2c_2 + 4c_3 = 0$

$c_1 = -2, \quad c_2 = 3, \quad c_3 = 2 \qquad ...(2)$

$(2)\, en\, (1)$

$y = 2e^{2x} + (3x-2)e^{-x}$

Rpta: $y = 2e^{2x} + (3x-2)e^{-x}$

50. $y^{iv} + 3y^{iii} + 2y^{ii} = 0 \quad cuando\, x = 0, \quad y = 0, \quad y' = 4, \quad y'' = -6$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iv} + 3y^{iii} + 2y^{ii} = 0$

$P(t) = t^4 + 3t^3 + 2t^2 = t^2 (t+1)(t+2) = 0$

De donde: $t = 0$ de multiplicidad 2; $t = -1, \quad t = -2$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + c_4 e^{-2x} \qquad ...(1)$

$y(0) = c_1 + c_3 + c_4 = 0$

$$\left.\begin{aligned} y'(0) &= c_2 - c_3 - 2c_4 = 4 \\ y''(0) &= c_3 + 4c_4 = -6 \end{aligned}\right\} c_2 + 2c_4 = -2$$

$c_1 = 0, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 2, \quad c_4 = -2 \quad ....(2)$

$(2)\, en\, (1)$

$y = 2x + 2e^{-x} + -2e^{-2x}$

$y = 2\left(x + e^{-x} - e^{-2x}\right)$

Rpta: $y = 2\left(x + e^{-x} - e^{-2x}\right)$

51. $y''' + y'' - y' - y = 0,\ cuando\ x = 0,\ \ y = 1,\ cuando\ \ x = 2,\ \ y = 0\ \ y\ tambien\ cuando\ x \to -\infty\ \ y \to 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''' + y'' - y' - y = 0$

$P(t) = t^3 + t^2 - t - 1 =$

De donde: $t =$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y =$

Rpta: $y =$

52. $y''' - 6y' + 25 = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''' - 6y' + 25 = 0$

$P(t) = t^3 - 6t + 25 = 0$

De donde: $t = 3 + 4i,\quad t = 3 - 4i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1 e^{3x} \cos 4x + c_2 e^{3x} \operatorname{sen} 4x$

Rpta: $y = e^{3x}\left(c_1 \cos 4x + c_2 \operatorname{sen} 4x\right)$

53. $y'' - y = 0,\ \ cuando\ \ x = 0,\ \ y = y_0,\ \ y' = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'' - y = 0$

$P(t) = t^2 - 1 = (t-1)(t+1) = 0$

De donde: $t = 1,\quad t = -1$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} \qquad \ldots(1)$

$y(0) = c_1 + c_2 = y_0$

$y'(0) = c_1 - c_2 = 0$

$$c_1 = \frac{y_0}{2}, \quad c_1 = \frac{y_0}{2} \qquad ...(2)$$

(2) *en* (1)

$$y = \frac{y_0}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

Rpta: $y = \frac{y_0}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$

54. $y'' + y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'' + y = 0$

$P(t) = t^2 + 1 = 0$

De donde: $t = i, \quad t = -i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x \qquad ...(1)$$

$y(0) = c_1 = y_0$

$y'(0) = c_2 = 0$

$$c_1 = y_0, \quad c_2 = 0 \qquad ...(2)$$

$y = y_0 \cos x$

Rpta: $y = y_0 \cos x$

55. $y''' + 5y'' + 17y' + 13y = 0, \quad cuando\, x = 0, \quad y = 0, \quad y' = 1, \quad y'' = 6$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''' + 5y'' + 17y' + 13y = 0$

$P(t) = t^3 + 5t^2 + 17t + 13 = (t+1)(t^2 + 4t + 13) = 0$

De donde: $t = -1, \quad t = -2 + 3i, \quad t = -2 - 3i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} \cos 3x + c_3 e^{-2x} \operatorname{sen} 3x \qquad ...(1)$$

$y(0) = c_1 + c_2 = 0$

$y'(0) = -c_1 - 2c_2 - 2c_3 = -1$

$y'(0) = c_1 - 5c_2 = 5$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = 0 \qquad ...(2)$$

(2) *en* (1)

$y = e^{-x} - c_2 e^{-2x} \cos 3x$

Rpta: $y = e^{-x} - c_2 e^{-2x} \cos 3x$

56. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0, \quad k \ real \ cuando \ t = 0, \quad x = 0, \quad y \dfrac{dx}{dt} = v_0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0$$

$$P(z) = z^2 + k^2 = 0$$

De donde: $z = ki, \quad z = -ki$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \operatorname{sen} kt \qquad ...(1)$$

$$x(0) = c_1 = 0$$

$$x'(0) = kc_2 = v_0$$

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{v_0}{k} \qquad ...(2)$$

(2) *en* (1)

$$x = \left(\frac{v_0}{k}\right) \operatorname{sen} kt$$

Rpta: $x = \left(\dfrac{v_0}{k}\right) \operatorname{sen} kt$

57. $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0 \quad cuando \ x = 0, \quad y = 0, \quad y' = -1, \quad y'' = 5$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$P(t) = t^3 + t^2 + 4t + 4 = (t+1)(t^2+4) = 0$$

De donde: $t = -1, \quad t = 2i, \quad t = -2i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 \cos 2x + c_3 \operatorname{sen} 2x \qquad ...(1)$$

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0$$

$$y'(0) = -c_1 + 2c_3 = -1$$

$$y''(0) = c_1 - 4c_2 = 5$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = 0 \qquad ...(2)$$

(2) *en* (1)

$$y = e^{-x} - \cos 2x$$

Rpta: $y=e^{-x}-\cos 2x$

58. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+2b\dfrac{dx}{dt}+k^2x=0,\qquad k>b>0\ \ cuando\ t=0,\quad x=0,\quad y\dfrac{dx}{dt}=v_0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+k^2x=0$$

$$P(z)=z^2+2bz+k^2=0$$

De donde: $z=-b+\sqrt{k^2-b^2}\,i,\quad z=-b-\sqrt{k^2-b^2}\,i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$x=c_1e^{-bt}\cos\left(\sqrt{k^2-b^2}\,t\right)+c_2e^{-bt}\operatorname{sen}\left(\sqrt{k^2-b^2}\,t\right)\qquad ...(1)$$

$$x(0)=c_1=0$$

$$\frac{dx}{dt}(0)=c_2\left(\sqrt{k^2-b^2}\right)=v_0$$

$$c_1=0,\qquad c_2=\frac{v_0}{\sqrt{k^2-b^2}}\qquad ...(2)$$

$(2)\ en\ (1)$

$$x=\left(\frac{v_0}{a}\right)e^{-bt}\operatorname{sen} at$$

Rpta: $x=\left(\dfrac{v_0}{a}\right)e^{-bt}\operatorname{sen} at\ \ donde:\ a=\sqrt{k^2-b^2}$

59. $y'''+6y''+12y'+8y=0,\quad cuando\ x=0,\quad y=1,\quad y'=-2,\quad y''=2$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$y'''+6y''+12y'+8y=0$$

$$P(t)=t^3+6t^2+12t+8=(t+2)^3=0$$

De donde: $t=-2$ de multiplicidad 3

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y = c_1 + c_2 x e^{-2x} + c_3 x^2 e^{-2x}$$
$$y = c_1 + \left(c_2 x + c_3 x^2\right) e^{-2x} \qquad \ldots(1)$$
$$y(0) = c_1 = 0$$
$$y'(0) = c_2 = -2$$
$$y''(0) = -4c_2 + 2c_3 = 2$$
$$c_1 = 0, \quad c_2 = -2, \quad c_3 = -3 \qquad \ldots(2)$$
(2) *en* (1)
$$y = -\left(2x + 3c_3 x^2\right) e^{-2x}$$

Rpta: $y = -\left(2x + 3c_3 x^2\right) e^{-2x}$

60. $y^{iv} + 2y^{iii} + 4y^{ii} - 2y^{i} - 5y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$$y^{iv} + 2y^{iii} + 4y^{ii} - 2y^{i} - 5y = 0$$
$$P(t) = t^4 + 2t^3 + 4t^2 - 2t - 5 = (t-1)(t+1)\left(t^2 + 2t + 5\right) = 0$$
De donde: $t = 1, \quad t = -1, \quad t = -1 + 2i, \quad t = -1 - 2i$
Luego el sistema fundamental de soluciones:
$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-x}\cos 2x + c_4 e^{-x}\operatorname{sen} 2x$$

Rpta: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-x}\cos 2x + c_4 e^{-x}\operatorname{sen} 2x$

61. $y^{iii} - 2y^{ii} + 2y^{i} = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$$y^{iii} - 2y^{ii} + 2y^{i} = 0$$
$$P(t) = t^3 - 2t^2 + 2t = t\left(t^2 - 2t + 2\right) = 0$$
De donde: $t = 0, \quad t = 1 + i, \quad t = 1 - i$
Luego el sistema fundamental de soluciones:
$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{x}\cos x + c_3 e^{x}\operatorname{sen} x$$

Rpta: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{x}\cos x + c_3 e^{x}\operatorname{sen} x$

62. $y^{viii} + 8y^{iv} + 16y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{viii}+8y^{iv}+16y=0$

$P(t)=t^8+8t^4+16=\left(t^2-2t+2\right)^2\left(t^2+2t+2\right)^2=0$

De donde: $t=-1+i$ de multiplicidad 2; $t=-1-i$, de multiplicidad 2; $t=1+i$, de multiplicidad 2; $t=1-i$, de multiplicidad 2.

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y=c_1e^x\cos x+c_2xe^x\cos x+c_3e^x\operatorname{sen}x+c_4xe^x\operatorname{sen}x+c_5e^{-x}\cos x+c_6xe^{-x}\cos x+c_7e^{-x}\operatorname{sen}x+c_8xe^{-x}\operatorname{sen}x$$

Rpta:

$$y=e^x\left[(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\operatorname{sen}x\right]+e^{-x}\left[(c_5+c_6x)\cos x+(c_7+c_8x)\operatorname{sen}x\right]$$

63. $y^{iv}-4y^{iii}+4y^{ii}=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iv}-4y^{iii}+4y^{ii}=0$

$P(t)=t^4-4t^3+4t^2=t^2(t-2)^2=0$

De donde: $t=0$, de multiplicidad 2; $t=2$, de multiplicidad 2.

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y=c_1+c_2x+c_3e^{2x}+c_4xe^{2x}$

Rpta: $y=c_1+c_2x+c_3e^{2x}+c_4xe^{2x}$

64. $y^{iv}-y^{ii}=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iv}-y^{ii}=0$

$P(t)=t^4-t^2=t^2(t-1)(t+1)=0$

De donde: $t=0$, de multiplicidad 2; $t=1$, $t=-1$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y=c_1+c_2x+c_3e^x+c_4e^{-x}$

Rpta: $y=c_1+c_2x+c_3e^x+c_4e^{-x}$

65. $y^{iv}-8y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iv}-8y=0$

$P(t)=t^4-t^2=t(t-2)\left(t^2+2t+4\right)=0$

De donde: $t=0, \quad t=2, \quad t=-1+\sqrt{3}i, \quad t=-1-\sqrt{3}i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y=c_1+c_2e^{2x}+c_3e^{-x}\cos\sqrt{3}x+c_4e^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{3}x$

Rpta: $y=c_1+c_2e^{2x}+e^{-x}\left(c_3\cos\sqrt{3}x+c_4\operatorname{sen}\sqrt{3}x\right)$

66. $2y'''-4y''-2y'+4y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$2y'''-4y''-2y'+4y=0$

$P(t)=2t^3-4t^2-2t+4=2(t-1)(t-2)(t+1)=0$

De donde: $t=1, \quad t=2, \quad t=-1$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+c_3e^{-x}$

Rpta: $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+c_3e^{-x}$

67. $y'''-3y'-y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'''-3y'-y=0$

$P(t)=t^3-3t-1=t\left(t^2-3t-1\right)=0$

De donde: $t=0, \quad t=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}, \quad t=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y=c_1+c_2e^{\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)x}+c_3e^{\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)x}$

Rpta: $y=c_1+c_2e^{\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)x}+c_3e^{\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)x}$

68. $y^{iv}-5y^{ii}+4y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iv}-5y^{ii}+4y=0$

$P(t)=t^4-5t^2+4=(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)=0$

De donde: $t=1, \quad t=-1, \quad t=2, \quad t=-2$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x} + c_4e^{-2x}$

Rpta: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x} + c_4e^{-2x}$

69. $y'' - 3y''' + 3y' - y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$y'' - 3y''' + 3y' - y = 0$

$P(t) = t^2 - 3t^2 + 3t - 1 = -t(t-1)(3t-1)(t+1) = 0$

De donde: $t = 0, \quad t = 1, \quad t = \dfrac{1}{3}, \quad t = -1$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{\frac{x}{3}} + c_4e^{-x}$

Rpta: $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{\frac{x}{3}} + c_4e^{-x}$

70. $y^{vi} + y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$y^{vi} + y = 0$

$P(t) = t^6 + 1 = (t^4 - t^2 + 1)(t^2 + 1) = 0$

De donde: $t = i, \quad t = -i, \quad t = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}, \quad t = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}, \quad t = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}, \quad t = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}\left(c_3 \cos \dfrac{x}{2} + c_4 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}\right) + e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}\left(c_5 \cos \dfrac{x}{2} + c_6 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}\right)$

Rpta: $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}\left(c_3 \cos \dfrac{x}{2} + c_4 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}\right) + e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}\left(c_5 \cos \dfrac{x}{2} + c_6 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}\right)$

71. $y^v - 3y^{iv} + 3y^{iii} - 3y^{ii} + 2y^i = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$y^v - 3y^{iv} + 3y^{iii} - 3y^{ii} + 2y^i = 0$

$P(t) = t^5 - 3t^4 + 3t^3 - 3t^2 + 2t = t(t-1)(t-2)(t^2+1) = 0$

De donde: $t = 0, \quad t = 1, \quad t = 2, \quad t = i, \quad t = -i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + c_4 \cos x + c_5 \operatorname{sen} x$

Rpta: $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + c_4 \cos x + c_5 \operatorname{sen} x$

72. $y^{iii} + y^{i} = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iii} + y^{i} = 0$

$P(t) = t^3 + t = t(t^2 + 1) = 0$

De donde: $t = 0, \quad t = i, \quad t = -i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x \qquad ...(1)$

$y(0) = c_1 + c_2 = 0$

$y'(0) = c_3 = 1$

$y''(0) = -c_2 = 1$

$c_1 = 1, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = 1 \qquad ...(2)$

(2) *en* (1)

$y = 1 - \cos x + \operatorname{sen} x$

Rpta: $y = 1 - \cos x + \operatorname{sen} x$

73. $y^{iii} - y^{ii} + y^{i} - y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iii} - y^{ii} + y^{i} - y = 0$

$P(t) = t^3 - t^2 + t - 1 = (t-1)(t^2 + 1) = 0$

De donde: $t = 1, \quad t = i, \quad t = -i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x$

Rpta: $y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x$

74. $y^{iii} + y^{i} = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iii} + y^{i} = 0$

$P(t) = t^3 + t = t(t^2 + 1) = 0$

De donde: $t = 0, \quad t = i, \quad t = -i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:
$y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x$

Rpta: $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x$

75. $y^{iii} - y^{ii} - y^{i} + y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$y^{iii} - y^{ii} - y^{i} + y = 0$
$P(t) = t^3 - t^2 - t + 1 = (t+1)(t-1)^2 = 0$
De donde: $t = 1$, de multiplicidad 2; $t = -1$
Luego el sistema fundamental de soluciones:
$y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 e^{-x}$

Rpta: $y = (c_1 + c_2 x) e^{x} + c_3 e^{-x}$

76. $y^{iii} - 6y^{ii} + 12y^{i} - 8y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$y^{iii} - 6y^{ii} + 12y^{i} - 8y = 0$
$P(t) = t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = (t-2)^3 = 0$
De donde: $t = 2$, de multiplicidad 3.
Luego el sistema fundamental de soluciones:
$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x}$

Rpta: $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{2x}$

77. $y^{iii} - 6y^{ii} + 11y^{i} - 6y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$y^{iii} - 6y^{ii} + 11y^{i} - 6y = 0$
$P(t) = t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = (t-1)(t-2)(t-3) = 0$
De donde: $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$
Luego el sistema fundamental de soluciones:
$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$

Rpta: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$

78. $y^{ii} - 12y^{i} + 35y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{ii} - 12y^{i} + 35y = 0$

$P(t) = t^2 - 12t + 35 = (t-5)(t-7) = 0$

De donde: $t = 5$, $t = 7$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{7x}$

Rpta: $y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{7x}$

79. $y^{iv} - 8y^{iii} + 42y^{ii} - 104y^{i} + 169y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iv} - 8y^{iii} + 42y^{ii} - 104y^{i} + 169y = 0$

$P(t) = t^4 - 8t^3 + 42t^2 - 104t + 169 = \left(t^2 - 4t + 13\right)^2 = 0$

De donde: $t = 2 + 3i$, de multiplicidad 2; $t = 2 - 3i$, de multiplicidad 2;

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1 e^{2x}\cos 3x + c_2 x e^{2x}\cos 3x + c_3 e^{2x}\operatorname{sen} 3x + c_4 x e^{2x}\operatorname{sen} 3x$

$y = e^{2x}\left[(c_1 + c_2 x)\cos 3x + (c_3 + c_4 x)\operatorname{sen} 3x\right]$

Rpta: $y = e^{2x}\left[(c_1 + c_2 x)\cos 3x + (c_3 + c_4 x)\operatorname{sen} 3x\right]$

80. $9y^{ii} - 30y^{i} + 25y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$9y^{ii} - 30y^{i} + 25y = 0$

$P(t) = 9t^2 - 30t + 25 = (3t-5)^2 = 0$

De donde: $t = \dfrac{5}{3}$, de multiplicidad 2

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1 e^{\frac{5}{3}x} + c_2 x e^{\frac{5}{3}x}$

Rpta: $y = (c_1 + c_2 x)e^{\frac{5}{3}x}$

81. $y^{iv} - 6y^{iii} + 7y^{ii} + 6y^{i} - 8y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iv} - 6y^{iii} + 7y^{ii} + 6y^{i} - 8y = 0$

$P(t) = t^4 - 6t^3 + 7t^2 + 6t - 8 = (t+1)(t-1)(t-2)(t-4) = 0$

De donde: $t = -1, \quad t = 1, \quad t = 2, \quad t = 4$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{4x}$

Rpta: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{4x}$

82. $y''' - 4y' + 2y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'' - 4y' + 2y = 0$

$P(t) = t^2 - 4t + 2 = 0$

De donde: $t = 2 + \sqrt{2}, \quad t = 2 - \sqrt{2}$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1 e^{(2+\sqrt{2})x} + c_2 e^{(2-\sqrt{2})x}$

Rpta: $y = c_1 e^{(2+\sqrt{2})x} + c_2 e^{(2-\sqrt{2})x}$

83. $y^{iii} - 2y^{ii} + 3y^{i} - 6y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iii} - 2y^{ii} + 3y^{i} - 6y = 0$

$P(t) = t^3 - 2t^2 + 3t - 6 = (t-2)(t^2+3) = 0$

De donde: $t = 2, \quad t = \sqrt{3}i, \quad t = -\sqrt{3}i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y = c_1 e^{2x} + c_2 \cos\sqrt{3}x + c_3 \operatorname{sen}\sqrt{3}x$

Rpta: $y = c_1 e^{2x} + c_2 \cos\sqrt{3}x + c_3 \operatorname{sen}\sqrt{3}x$

84. $y^{iv} - 4y^{iii} + 5y^{ii} - 4y^{i} + 4y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iv}-4y^{iii}+5y^{ii}-4y^{i}+4y=0$

$P(t)=t^4-4t^3+5t^2-4t+4=(t-2)^2(t+1)^2=0$

De donde: $t=2,$ de multiplicidad 2; $t=i,\quad t=-i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3\cos x+c_4\operatorname{sen}x$

Rpta: $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3\cos x+c_4\operatorname{sen}x$

85. $y'''+9y'=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'''+9y'=0$

$P(t)=t^3+9t=t(t^2+9)=0$

De donde: $t=0,\quad t=3i,\quad t=-3i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y=c_1+c_2\cos 3x+c_3\operatorname{sen}3x$

Rpta: $y=c_1+c_2\cos 3x+c_3\operatorname{sen}3x$

86. $y^{iv}-13y^{ii}+36y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iv}-13y^{ii}+36y=0$

$P(t)=t^4-13t^2+36=(t-2)(t+2)(t-3)(t+3)=0$

De donde: $t=2,\quad t=-2,\quad t=3,\quad t=-3$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-3x}$

Rpta: $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-3x}$

87. $y^{iv}+2y^{iii}+y^{ii}=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iv}+2y^{iii}+y^{ii}=0$

$P(t)=t^4+2t^3+t^2=t^2(t+1)^2=0$

De donde: $t=0,$ de multiplicidad 2; $t=-1,$ de multiplicidad 2.

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y=c_1+c_2x+c_3e^{-x}+c_4xe^{-x}$

Rpta: $y=c_1+c_2x+c_3e^{-x}+c_4xe^{-x}$

88. $y^{iv} = 8y^{ii} - 16y$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$y^{iv} - 8y^{ii} + 16y = 0$$

$$P(t) = t^4 - 8t^2 + 16 = (t^2 - 4)^2 = 0$$

De donde: $t = 2$, de multiplicidad 2; $t = -2$, de multiplicidad 2.

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{-2x} + c_4 x e^{-2x}$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{2x} + (c_3 + c_4 x) e^{-2x}$$

Rpta: $y = (c_1 + c_2 x) e^{2x} + (c_3 + c_4 x) e^{-2x}$

89. $y''' - 13y' - 12y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$y''' - 13y' - 12y = 0$$

$$P(t) = t^3 - 13t - 12 = (t+1)(t+3)(t-4) = 0$$

De donde: $t = -1, \quad t = -3, \quad t = 4,$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + c_3 e^{4x}$$

Rpta: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + c_3 e^{4x}$

90. $y^{iv} + y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$y^{iv} + y = 0$$

$$P(t) = t^4 + 1 = 0$$

De donde: $t = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad t = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad t = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad t = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y = c_1 e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + c_2 e^{\frac{x}{\sqrt{2}}x} \operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}} + c_3 e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + c_4 e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}x} \operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}x}\left(c_1 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + c_2 \operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}x}\left(c_3 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + c_4 \operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Rpta: $y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}x}\left(c_1 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + c_2 \operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}x}\left(c_3 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + c_4 \operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

91. $64y^{viii}+48y^{vi}+12y^{iv}++y^{ii}=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$64y^{viii}+48y^{vi}+12y^{iv}+y^{ii}=0$

$P(t)=64t^8+48t^6+12t^4+t^2=t^2\left(4t^2+1\right)^3=0$

De donde: $t=0$, de multiplicidad 2; $t=\frac{i}{2}$, de multiplicidad 3; $t=-\frac{i}{2}$, de multiplicidad 3.

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y=c_1+c_2x+\left(c_3+c_4x+c_5x^2\right)\cos\frac{x}{2}+\left(c_6+c_7x+c_8x^2\right)\operatorname{sen}\frac{x}{2}$

Rpta: $y=c_1+c_2x+\left(c_3+c_4x+c_5x^2\right)\cos\frac{x}{2}+\left(c_6+c_7x+c_8x^2\right)\operatorname{sen}\frac{x}{2}$

92. $y^{(n)}+\frac{n}{1}y^{(n-1)}+\frac{n(n-1)y^{(n-2)}}{1.2}+\ldots\frac{n}{1}y^{i}+y=0$

RESOLUCIÓN

Rpta: $y=$

93. $y'''=y',\quad y(0)=2,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=-1$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'''-y'=0$

$P(t)=t^3-t=t(t-1)(t+1)=0$

De donde: $t=0,\quad t=1,\quad t=-1$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y=c_1+c_2e^x+c_3e^{-x}\qquad\ldots(1)$

$y(0)=c_1+c_2+c_3=2$
$y'(0)=c_2-c_3=0$
$y''(0)=c_2+c_3=-1$

$$c_1=3,\quad c_2=-\frac{1}{2},\quad c_3=-\frac{1}{2}\qquad ...(2)$$

(2) *en* (1)

$y=3-\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$

Rpta: $3-\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$

94. $4\frac{d^2x}{dt^2}-20\frac{dx}{dt}+25x=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$4\frac{d^2x}{dt^2}-20\frac{dx}{dt}+25x=0$

$P(z)=4z^2-20z+25=(2z-5)^2=0$

De donde: $z=\frac{5}{2}$, de multiplicidad 2;

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y=c_1e^{\frac{5}{2}t}+c_2te^{\frac{5}{2}t}$

$y=(c_1+c_2t)e^{\frac{5}{2}t}$

Rpta: $y=(c_1+c_2t)e^{\frac{5}{2}t}$

95. $y^{vi}+8y^{iv}+16y^{ii}=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{vi}+8y^{iv}+16y^{ii}=0$

$P(t)=t^6+8t^4+16t^2=t^2\left(t^2+4\right)^2=0$

De donde: $t=0$ de multiplicidad 2; $t=2i$ de multiplicidad 2; $t=-2i$ de multiplicidad 2.

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y=c_1+c_2x+(c_3+c_4x)\cos 2x+(c_5+c_6x)\operatorname{sen} 2x$

Rpta: $y=c_1+c_2x+(c_3+c_4x)\cos 2x+(c_5+c_6x)\operatorname{sen} 2x$

96. $y^{iv}+8y^{iii}+5y^{ii}+4y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iv}+8y^{iii}+5y^{ii}+4y=0$

$P(t)=t^4+8t^3+5t^2+4=0$

De donde: $t=$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$y=$

Rpta: $y=$

97. $y^{vi}+4y^{iii}+5y^{ii}+4y^{i}+y=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{vi}+4y^{iii}+5y^{ii}+4y^{i}+y=0$

$P(t)=t^6+4t^3+5t^2+4t+1=(t^2+3t+1)(t^2+t+1)=0$

De donde: $t=\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\quad t=\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\quad t=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad t=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Luego el sistema fundamental de soluciones:

$$y=c_1e^{\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)x}+c_2e^{\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)x}+c_3e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_4e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Rpta: $y=c_1e^{\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)x}+c_2e^{\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)x}+c_3e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_4e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$

98. $y^{vi}+4y^{iv}+4y^{ii}=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{vi}+4y^{iv}+4y^{ii}=0$

$P(t)=t^6+4t^4+4t^2=t^2\left(t^2+2\right)^2=0$

De donde: $t=0$ de multiplicidad 2; $t=\sqrt{2}i$ de multiplicidad 2; $t=-\sqrt{2}i$ de multiplicidad 2;

Luego el sistema fundamental de soluciones:
$y = c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x)\cos\sqrt{2}x + (c_5 + c_6x)\operatorname{sen}\sqrt{2}x$

Rpta: $y = c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x)\cos\sqrt{2}x + (c_5 + c_6x)\operatorname{sen}\sqrt{2}x$

99. $y^{iii} - 2y^{ii} + 4y^{i} - 8y = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$y^{iii} - 2y^{ii} + 4y^{i} - 8y = 0$
$P(t) = t^3 - 2t^2 + 4t - 8t = (t-2)(t^2+4) = 0$
De donde: $t = 2, \quad t = 2i, \quad t = -2i$
Luego el sistema fundamental de soluciones:
$y = c_1e^{2x} + c_2\cos 2x + c_3\operatorname{sen} 2x$

Rpta: $y = c_1e^{2x} + c_2\cos 2x + c_3\operatorname{sen} 2x$

100. $y''' + 2y'' = 0, \quad cuando\, x = 0, \quad y = -3, \quad y' = 0, \quad y'' = 12$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:
$y''' + 2y'' = 0$
$P(t) = t^3 + 2t^2 = t^2(t+2) = 0$
De donde: $t = 0$ de multiplicidad 2; $t = -2$
Luego el sistema fundamental de soluciones:
$y = c_1 + c_2x + c_3e^{-2x} \qquad ...(1)$
$y(0) = c_1 + c_3 = -3$
$y'(0) = c_1 - 2c_3 = 0$
$y''(0) = 4c_3 = 12$
$c_1 = -6, \quad c_2 = 6, \quad c_3 = 3 \qquad ...(2)$
$(2)\ en\ (1)$
$y = -6 + 6x + 3e^{-2x}$

Rpta: $y = -6 + 6x + 3e^{-2x}$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGENEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES

I. Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

1. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = x^2$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = x^2$

$P(t) = t^2 - t = t(t-1) = 0$

De donde: $t = 0, \qquad t = 1$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = c_1 + c_2 e^x$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = x\left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx, \quad y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y_p'' = 6Ax + 2Bx$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$6Ax + 2B - 3Ax^2 - 2Bx - C = x^2$

$$\left.\begin{array}{l} -3A = 1 \\ 6A - 2B = 0 \\ 2B - C = 0 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A = -1/3 \\ B = -1 \\ C = -2 \end{array}\right.$$

Luego $y_p = -\frac{x^3}{3} - x^2 - 2x$ y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1 + c_2 e^x - \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x$

Rpta: $y = c_1 + c_2 e^x - \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - 5y = 5x$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}-5y=5x$$

$$P(t)=t^2-4t-5=(t-5)(t+1)=0$$

De donde: $t=5,\qquad t=-1$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1e^{5x}+c_2e^{-x}$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=Ax+B$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Ax+B,\quad y_p^{'}=A,\quad y_p^{''}=0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$$-4A-5Ax-5B=5x$$

$$\left.\begin{array}{l}-5A=5\\-4A-5B=0\end{array}\right\}de\ donde\begin{cases}A=-1\\B=4/5\end{cases}$$

Luego $y_p=-x+\dfrac{4}{5}$ y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$$y=c_1e^{5x}+c_2e^{-x}-x+\frac{4}{5}$$

Rpta: $y=c_1e^{5x}+c_2e^{-x}-x+\dfrac{4}{5}$

3. $\dfrac{d^3y}{dx^3}-\dfrac{dy}{dx}=x+1$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{dy}{dx}=x+1$$

$$P(t)=t^3-t=t(t-1)(t+1)=0$$

De donde: $t=0,\quad t=1,\quad t=-1$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1+c_2e^x+c_3e^{-x}$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=x(Ax+B)=Ax^2+Bx$$

De donde derivando la ecuación particular:

$$y_p=Ax^2+Bx,\quad y_p^{'}=2Ax+B,\quad y_p^{''}=2A,\quad y_p^{'''}=0$$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$$-2Ax-B=x+1$$

$$\left.\begin{array}{l}-2A=1\\-B=1\end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l}A=-1/2\\B=-1\end{array}\right.$$

Luego $y_p=-\dfrac{x^2}{2}-x$ y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$$y=c_1+c_2e^x+c_3e^{-x}-\frac{x^2}{2}-x$$

Rpta: $y=c_1+c_2e^x+c_3e^{-x}-\dfrac{x^2}{2}-x$

4. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+4y=4(x-1)$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=4x-4$

$P(t)=t^2-4t+4=(t-2)^2=0$

De donde: $t=2$ de multiplicidad 2

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=Ax+B$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Ax+B,\quad y_p'=A,\quad y_p''=0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$-4A+4Ax+4B=4x-4$

$\left.\begin{array}{l}4A=4\\4B-4A=-4\end{array}\right\}de\ donde\left\{\begin{array}{l}A=1\\B=0\end{array}\right.$

Luego $y_p=x$ y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+x$

$$\text{Rpta: } y=e^{2x}(c_1+c_2x)+x$$

5. $\frac{d^2y}{dx^2}2\frac{dy}{dx}+2y=2(x+1)^2$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2}2\frac{dy}{dx}+2y=2x^2+4x+2$$

$P(t)=t^2+2t+2=0$

De donde: $t=-1+i,\quad t=-1-i$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=e^{-x}\left(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x\right)$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=Ax^2+Bx+C$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Ax^2+Bx+C,\quad y_p^{'}=2Ax+B,\quad y_p^{''}=2A$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$2A+4Ax+2B+2Ax^2+2Bx+2C=2x^2+4x+2$

$$\left.\begin{array}{l}2A=2\\4A+2B=4\\2A+2B+2C=2\end{array}\right\}de\ donde\left\{\begin{array}{l}A=1\\B=0\\C=1\end{array}\right.$$

Luego $y_p=x^2+1$ y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$y=e^{-x}\left(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x\right)+x^2+1$

Rpta: $y=e^{-x}\left(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x\right)+x^2+1$

6. $y'''+y''+y'+y=x^2+2x-2$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'''+y''+y'+y=x^2+2x-2$

$P(t)=t^3+t^2+t+1=(t+1)(t^2+1)=0$

De donde: $t=-1,\quad t=i,\quad t=-i$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1e^{-x}+c_2\cos x+c_3\operatorname{sen}x$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=Ax^2+Bx+C$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Ax^2+Bx+C,\quad y_p^{'}=2Ax+B,\quad y_p^{''}=2A,\quad y_p^{'''}=0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$2A+2Ax+B+Ax^2+Bx+C=x^2+2x-2$

$$\left.\begin{array}{l} A=1 \\ 2A+B=2 \\ 2A+B+C=-2 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A=1 \\ B=0 \\ C=-4 \end{array}\right.$$

Luego $y_p = x^2 - 4$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x + x^2 - 4$

Rpta: $y = c_1e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x + x^2 - 4$

7. $y^{iv} + 4y^{ii} = 8\left(6x^2 + 5\right)$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iv} + 4y^{ii} = 48x^2 + 40$

$P(t) = t^4 + 4t^2 = t^2\left(t^2 + 4\right) = 0$

De donde: $t = 0$ de multiplicidad 2, $t = 2i$, $t = -2i$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = c_1 + c_2x + c_3 \cos 2x + c_4 \operatorname{sen} 2x$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = x^2\left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$, $y_p' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx$, $y_p'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$,

$y_p''' = 24Ax + 6B$, $y_p^{iv} = 24A$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$24A + 48Ax^2 + 24Bx + 8C = 48x^2 + 40$

$$\left.\begin{array}{l} 48A=48 \\ 24B=0 \\ 24A+8C=40 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A=1 \\ B=0 \\ C=2 \end{array}\right.$$

Luego $y_p = x^2\left(x^2 + 2\right)$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1 + c_2x + c_3 \cos 2x + c_4 \operatorname{sen} 2x + x^2\left(x^2 + 2\right)$

Rpta: $y = c_1 + c_2x + c_3 \cos 2x + c_4 \operatorname{sen} 2x + x^2\left(x^2 + 2\right)$

8. $y''' - 3y'' + 3y' - y = (2 + x)(2 - x)$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'''-3y''+3y'-y=(2+x)(2-x)$

$P(t)=t^3-3t^2+3t-1=(t-1)^3=0$

De donde: $t=1$ de multiplicidad 3

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=e^x\left(c_1+c_2x+c_3x^2\right)$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=Ax^2+Bx+C$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Ax^2+Bx+C,\quad y_p'=2Ax+B,\quad y_p''=2A,\quad y_p'''=0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$-6A+6Ax+3B-Ax^2-Bx-C=4-x^2$

$$\left.\begin{array}{l}-A=-1\\6A-B=0\\3B-6A-C=4\end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l}A=1\\B=6\\C=8\end{array}\right.$$

Luego $y_p=x^2+6x+8,$ y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$y=e^x\left(c_1+c_2x+c_3x^2\right)+x^2+6x+8$

Rpta: $y=e^x\left(c_1+c_2x+c_3x^2\right)+x^2+6x+8$

9. $2y''-9y'3y'-y=18x-4x^2$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$2y''-9y'3y'-y=18x-4x^2$

$P(t)=2t^2-9t+4=(t-4)(2t-1)=0$

De donde: $t=1/2,\quad t=4$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1e^{\frac{x}{2}}+c_2e^{4x}$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=Ax^2+Bx+C$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Ax^2+Bx+C,\quad y_p'=2Ax+B,\quad y_p''=2A$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$4A-18Ax-9B+4Ax^2+4Bx+4C=18x-4x^2$

$$\left.\begin{array}{l}4A=-4\\-18A+4B=18\\4A-9B+4C=0\end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l}A=-1\\B=0\\C=1\end{array}\right.$$

Luego $y_p=-x^2+1$, y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$y=c_1e^{\frac{x}{2}}+c_2e^{4x}-x^2+1$

Rpta: $y=c_1e^{\frac{x}{2}}+c_2e^{4x}-x^2+1$

10. $y^{iv}-2y^{ii}+y=x^2-5$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iv}-2y^{ii}+y=x^2-5$

$P(t)=t^4-2t^2+1=(t+1)^2(t-1)^2=0$

De donde: $t=1$ de multiplicidad 2, $t=-1$ de multiplicidad 2

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=e^x(c_1+c_2x)+e^{-x}(c_3+c_4x)$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=Ax^2+Bx+C$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Ax^2+Bx+C,\quad y_p^{'}=2Ax+B,\quad y_p^{''}=2A,\quad y_p^{'''}=y_p^{iv}=0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$-4A+Ax^2+Bx+C=x^2-5$

$$\left.\begin{array}{l}A=1\\B=0\\-4A+C=-5\end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l}A=1\\B=0\\C=-1\end{array}\right.$$

Luego $y_p=x^2-1$, y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$y=e^x(c_1+c_2x)+e^{-x}(c_3+c_4x)+x^2-1$

Rpta: $y=e^x(c_1+c_2x)+e^{-x}(c_3+c_4x)+x^2-1$

11. $y^{iv}-3y^{ii}+2y^{i}=6x(x-3)$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iv} - 3y^{ii} + 2y^{i} = 6x(x-3)$

$P(t) = t^4 - 3t^2 + 2t = t(t+2)(t-1)^2 = 0$

De donde: $t = 0$, $t = 1$ de multiplicidad 2, $t = -2$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = c_1 + e^x(c_2 + c_3 x) + c_4 e^{-2x}$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx,\quad y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C,\quad y_p'' = 6Ax + B,\quad y_p''' = 6A,\quad y_p^{iv} = 0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$-18Ax - 3B + 6Ax^2 + 2Bx + C = 6x^2 - 18x$

$$\left.\begin{array}{l} 6A = 6 \\ -18A + 2B = -18 \\ -3B + C = 0 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{array}\right.$$

Luego $y_p = x^3$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1 + e^x(c_2 + c_3 x) + c_4 e^{-2x} + x^3$

Rpta: $y = c_1 + e^x(c_2 + c_3 x) + c_4 e^{-2x} + x^3$

12. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 25x^2 + 12$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 25x^2 + 12$

$P(t) = t^2 - 2t + 5 = 0$

De donde: $t = 1 + 2i$, $t = 1 - 2i$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^2 + Bx + C, \quad y_p' = 2Ax + B, \quad y_p'' = 2A$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$2A - 4Ax - 2B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C = 25x^2 + 12$

$$\left.\begin{array}{l} 5A = 25 \\ -4A + 5B = 0 \\ 2A - 2B + 5C = 12 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A = 5 \\ B = 4 \\ C = 2 \end{array}\right.$$

Luego $y_p = 5x^2 + 4x + 2$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = e^x\left(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x\right) + 5x^2 + 4x + 2$

Rpta: $y = e^x\left(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x\right) + 5x^2 + 4x + 2$

13. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} = 12x - 10$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} = 12x - 10$

$P(t) = t^2 - 2t = t(t-2) = 0$

De donde: $t = 0, \quad t = 2$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = c_1 + c_2 e^{2x}$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^2 + Bx, \quad y_p' = 2Ax + B, \quad y_p'' = 2A$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$2A - 4Ax - 2B = 12x - 10$

$$\left.\begin{array}{l} -4A = 12 \\ 2A - 2B = -10 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A = -3 \\ B = 2 \end{array}\right.$$

Luego $y_p = -3x^2 + 2x$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1 + c_2 e^{2x} - 3x^2 + 2x$

Rpta: $y = c_1 + c_2 e^{2x} - 3x^2 + 2x$

14. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}-2y=2x, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=2x$$

$$P(t)=t^2+t-2=(t-1)(t+2)=0$$

De donde: $t=1, \quad t=-2$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1e^x+c_2e^{-2x}$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=Ax+B$$

De donde derivando la ecuación particular:

$$y_p=Ax+B, \quad y_p'=A, \quad y_p''=0$$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$$A-2Ax-2B=2x$$

$$\left.\begin{array}{l}-2A=2\\ A-2B=0\end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l}A=-1\\ B=-1/2\end{array}\right.$$

Luego $y_p=-x-\dfrac{1}{2}$, y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$$y=c_1e^x+c_2e^{-2x}-x-\frac{1}{2} \qquad ...(1)$$

$$y'(0)=c_1+c_2-\frac{1}{2}=0$$

$$y''(0)=c_1-2c_2-1=1$$

$$De\,donde: c_1=1, \quad c_2=-1/2 \qquad ...(2)$$

$$(2)\ en\ (1)$$

$$y=e^x-\frac{c_2e^{-2x}}{2}-x-\frac{1}{2}$$

Rpta: $y=e^x-\dfrac{c_2e^{-2x}}{2}-x-\dfrac{1}{2}$

15. $y'''+4y'=x, \quad y(0)=y'(0)=0, \quad y''(0)=1$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''' + 4y' = x$

$P(t) = t^3 + 4t = t(t^2 + 4) = 0$

De donde: $t = 0, \quad t = 2i, \quad t = -2i$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \operatorname{sen} 2x$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^2 + Bx, \quad y_p' = 2Ax + B, \quad y_p'' = 2A, \quad y_p''' = 0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$8Ax + 4B = x$

$\left.\begin{matrix} 8A = 1 \\ 4B = 0 \end{matrix}\right\} de\ donde \left\{\begin{matrix} A = 1/8 \\ B = 0 \end{matrix}\right.$

Luego $y_p = \dfrac{x^2}{8}$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \operatorname{sen} 2x + \dfrac{x^2}{8} \qquad \ldots(1)$

$y(0) = c_1 + c_2 = 0$

$y'(0) = 2c_3 = 0$

$y''(0) = -4c_2 + \dfrac{1}{4} = 1$

$De\ donde: c_1 = 3/16, \quad c_2 = -3/16, \quad c_3 = 0 \qquad \ldots(2)$

$(2)\ en\ (1)$

$y = \dfrac{3}{16}(1 - \cos 2x) + \dfrac{x^2}{8}$

Rpta: $y = \dfrac{3}{16}(1 - \cos 2x) + \dfrac{x^2}{8}$

16. $y^{iv} + 2y^{ii} + y = 3x + 4, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = y'''(0) = 1$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iv} + 2y^{ii} + y = 3x + 4$

$P(t) = t^4 + 2t^2 + 1 = (t^2 + 1)^2 = 0$

De donde: $t = i$ de multiplicidad 2, $\quad t = -i$ de multiplicidad 2

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = (c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\operatorname{sen} x$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = Ax + B$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax + B, \quad y_p' = A, \quad y_p'' = y_p''' = y_p^{iv} = 0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$Ax + B = 3x + 4$

$\left.\begin{array}{l} A = 3 \\ B = 4 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A = 3 \\ B = 4 \end{array}\right.$

Luego $y_p = 3x + 4$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = (c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\operatorname{sen} x + 3x + 4 \qquad ...(1)$

$y(0) = c_1 + 4 = 0$

$y'(0) = c_2 + c_3 + 3 = 0$

$y''(0) = -c_1 + 2c_4 = 1$

$y'''(0) = -3c_2 - c_3 = 1$

$De\,donde: c_1 = -4, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = -4, \quad c_4 = -3/2 \qquad ...(2)$

$(2)\ en\ (1)$

$$y = (x-4)\cos x - \left(\frac{3}{2}x + 4\right)\operatorname{sen} x + 3x + 4$$

Rpta: $y = (x-4)\cos x - \left(\frac{3}{2}x + 4\right)\operatorname{sen} x + 3x + 4$

17. $y^{vi} + y^{iii} = x$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{vi} + y^{iii} = x$

$P(t) = t^6 + t^3 = t^2(t+1)(t^2 - t + 1) = 0$

De donde: $t = 0$ de multiplicidad 3, $\quad t = -1, \quad t = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad t = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(c_5\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_6\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = x^3\left(Ax+B\right) = Ax^4 + Bx^3$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^4 + Bx^3, \quad y_p^{'} = 4Ax^3 + 3Bx^2, \quad y_p^{''} = 12Ax^2 + 6Bx, \quad y_p^{'''} = 24Ax + 6B$

$y_p^{iv} = 24A, \quad y_p^{v} = y_p^{vi} = 0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$24Ax + 6B = x$

$\left.\begin{array}{l} 24A = 1 \\ 6B = 0 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A = 1/24 \\ B = 0 \end{array}\right.$

Luego $y_p = \dfrac{x^4}{24}$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(c_5\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + c_6\,\text{sen}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \dfrac{x^4}{24}$

Rpta: $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(c_5\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + c_6\,\text{sen}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \dfrac{x^4}{24}$

18. $y'' + 2y' + 3y = 9x$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'' + 2y' + 3y = 9x$

$P(t) = t^2 + 2t + 3 = 0$

De donde: $t = -1 + \sqrt{2}i, \quad t = -1 - \sqrt{2}i$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = e^{-x}\left(c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\,\text{sen}\,\sqrt{2}x\right)$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = Ax + B$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax + B, \quad y_p^{'} = A, \quad y_p^{''} = 0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$2A + 3Ax + 3B = 9x$

$\left.\begin{array}{l} 3A = 9 \\ 2A + 3B = 0 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A = 3 \\ B = -2 \end{array}\right.$

Luego $y_p = 3x - 2$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = e^{-x}\left(c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\,\text{sen}\,\sqrt{2}x\right) + 3x - 2$

Rpta: $y=e^{-x}\left(c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\operatorname{sen}\sqrt{2}x\right)+3x-2$

19. $y''+y'-2y=14x+2x-2x^2$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''+y'-2y=14x+2x-2x^2$

$P(t)=t^2+t-2=(t-1)(t+2)=0$

De donde: $t=1,\quad t=-2$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=Ax^2+Bx+C$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Ax^2+Bx+C,\quad y_p'=2Ax+B,\quad y_p''=2A$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$2A+2Ax+B-2Ax^2-2Bx-2C=14x++2x-2x^2$

$$\left.\begin{array}{l}-2A=-2\\2A-2B=2\\2A+B-2C=14\end{array}\right\}de\ donde\left\{\begin{array}{l}A=1\\B=0\\C=-6\end{array}\right.$$

Luego $y_p=x^2-6,$ y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+x^2-6$

Rpta: $y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+x^2-6$

20. $y''+y=x^2+2,\quad y(0)=y'(0)=2$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''+y=x^2+2,\quad y(0)=y'(0)=2$

$P(t)=t^2+1=0$

De donde: $t=i,\quad t=-i$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^2 + Bx + C, \quad y_p^{'} = 2Ax + B, \quad y_p^{''} = 2A$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$2A + Ax^2 + Bx + C = x^2 + 2$

$$\left.\begin{array}{l} A = 1 \\ B = 0 \\ 2A + C = 2 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{array}\right.$$

Luego $y_p = x^2$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x^2 \qquad \ldots(1)$

$y(0) = c_1 = 2$

$y'(0) = c_2 = 2$

$De\ donde: \ c_1 = 2, \quad c_2 = 2 \qquad \ldots(2)$

$(2)\ en\ (1)$

$y = 2(\cos x + \operatorname{sen} x) + x^2$

Rpta: $y = 2(\cos x + \operatorname{sen} x) + x^2$

21. $y'' + y' + y = x^4 + 4x^3 + 12x^2$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'' + y' + y = x^4 + 4x^3 + 12x^2$

$P(t) = t^2 + 1 = 0$

De donde: $t = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \quad t = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = e^{-\frac{x}{2}} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E, \quad y_p^{'} = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D, \quad y_p^{''} = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$$12Ax^2+6Bx+2C+4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=x^4+4x^3+12x^2$$

$$\left.\begin{array}{l} A=1 \\ 4A+B=4 \\ 12A+3B+C=12 \\ 6B+2C+D=0 \\ 2C+D+E=0 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A=1 \\ B=0 \\ C=0 \\ D=0 \\ E=0 \end{array}\right.$$

Luego $y_p=x^4$, y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$$y=e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+x^4$$

Rpta: $y=e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+x^4$

22. $y'''-3y''+3y'-y=2x^2-3x-17$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'''-3y''+3y'-y=2x^2-3x-17$

$P(t)=t^3-3t^2+3t-1=(t-1)^3=0$

De donde: $t=1$ de multiplicidad 2

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=e^x\left(c_1+c_2x+c_3x^2\right)$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=Ax^2+Bx+C$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Ax^2+Bx+C,\quad y_p'=2Ax+B,\quad y_p''=2A,\quad y_p'''=0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$-6A+6Ax+3B-Ax^2-Bx-C=2x^2-3x-17$

$$\left.\begin{array}{l} -A=2 \\ 6A-B=-3 \\ -6A+3B-C=-17 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A=-2 \\ B=-9 \\ C=2 \end{array}\right.$$

Luego $y_p=-2x^2-9x+2$, y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$$y=e^x\left(c_1+c_2x+c_3x^2\right)-x^2-9x+2$$

Rpta: $y=e^x\left(c_1+c_2x+c_3x^2\right)-x^2-9x+2$

23. $y''-6y'+9y=2x^2-x+3$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''-6y'+9y=2x^2-x+3$

$P(t)=t^2-6t+9=(t-3)^2=0$

De donde: $t=3$ de multiplicidad 2

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=e^{3x}(c_1+c_2x)$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=Ax^2+Bx+C$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Ax^2+Bx+C,\quad y'_p=2Ax+B,\quad y''_p=2A$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$2A-12Ax-6B+9Ax^2+9Bx+9C=2x^2-x+3$

$$\left.\begin{array}{l} 9A=2 \\ -12A+9B=-1 \\ 2A-6B+9C=3 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A=2/9 \\ B=5/27 \\ C=11/27 \end{array}\right.$$

Luego $y_p=\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}+\frac{11}{27}$, y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$y=e^{3x}(c_1+c_2x)+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}+\frac{11}{27}$

Rpta: $y=e^{3x}(c_1+c_2x)+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}+\frac{11}{27}$

24. $y''+4y'-5y=1$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''+4y'-5y=1$

$P(t)=t^2+4t-5=(t-1)(t+5)=0$

De donde: $t=1,\quad t=-5$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1e^{x}+c_2e^{-5x}$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=A$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = A, \quad y_p^{'} = 0, \quad y_p^{''} = 0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$-5A = 1$

$-5A = 1\} \, de \; donde \{A = -1/5$

Luego $y_p = -\dfrac{1}{5}$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1 e^x + c_2 e^{-5x} - \dfrac{1}{5}$

Rpta: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-5x} - 0.2$

25. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$

$P(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = (t-2)(t-1)^2 = 0$

De donde: $t = 1$ de multiplicidad 2, $\quad t = 2$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = e^x (c_1 + c_2 x) + c_3 e^{2x}$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = Ax + B$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax + B, \quad y_p^{'} = A, \quad y_p^{''} = y_p^{'''} = 0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$5A - 2Ax - 2B = 2x + 3$

$$\left.\begin{array}{l} 2A = 2 \\ 5A - 2B = 3 \end{array}\right\} de \; donde \left\{\begin{array}{l} A = -1 \\ B = -4 \end{array}\right.$$

Luego $y_p = -x - 4$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = e^x (c_1 + c_2 x) + c_3 e^{2x} - x - 4$

Rpta: $y = e^x (c_1 + c_2 x) + c_3 e^{2x} - x - 4$

26. $y^{v} + y^{iii} = x^2 - 1$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{v}+y^{iii}=x^2-1$

$P(t)=t^5+t^3=t^3(t^2+1)=0$

De donde: $t=0$ de multiplicidad 3, $t=i$, $t=-i$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4\cos x+c_5\operatorname{sen} x$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=x^3\left(Ax^2+Bx+C\right)=Ax^5+Bx^4+Cx^3$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Ax^5+Bx^4+Cx^3,\quad y_p^{'}=5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2,\quad y_p^{''}=20Ax^3+12Bx^2+6Cx$

$y_p^{'''}=60Ax^2+24Bx+6C,\quad y_p^{iv}=120Ax+24B,\quad y_p^{v}=120A$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$120A+60Ax^2+24Bx+6C=x^2-1$

$$\left.\begin{array}{l}60A=1\\24B=0\\120A+6C=-1\end{array}\right\}de\ donde\left\{\begin{array}{l}A=1/60\\B=0\\C=-1/2\end{array}\right.$$

Luego $y_p=\dfrac{x^5}{60}-\dfrac{x^3}{2}$, y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4\cos x+c_5\operatorname{sen} x+\dfrac{x^5}{60}-\dfrac{x^3}{2}$

Rpta: $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4\cos x+c_5\operatorname{sen} x+\dfrac{x^5}{60}-\dfrac{x^3}{2}$

27. $y'''-y'=3(2-x)$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'''-y'=3(2-x)$

$P(t)=t^3-t=t(t-1)(t+1)=0$

De donde: $t=0$, $t=1$, $t=-1$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1+c_2e^x+c_3e^{-x}$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=x(Ax+B)=Ax^2+Bx$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^2 + Bx, \quad y_p' = 2Ax + B, \quad y_p'' = 2A, \quad y_p''' = 0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$-2Ax - B = 6 - 3x$

$$\left.\begin{array}{l} -2A = -3 \\ -B = 6 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A = 3/2 \\ B = -6 \end{array}\right.$$

Luego $y_p = \frac{3}{2}x^2 - 6$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$$y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 - 6x \qquad ...(1)$$

$y(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 1$

$y'(0) = c_2 - c_3 - 6 = 1$

$y''(0) = c_2 + c_3 + 3 = 1$

$De\ donde: \ c_1 = 3, \quad c_2 = 5/2, \quad c_3 = -9/2 \qquad ...(2)$

$(2)\ en\ (1)$

$$y = 3 + \frac{5}{2}e^x - \frac{9}{2}c_3e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

Rpta: $y = 3 + \frac{5}{2}e^x - \frac{9}{2}c_3e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 - 6x$

28. $y''' - y' = x$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''' - y' = x$

$P(t) = t^3 - t = t(t-1)(t+1) = 0$

De donde: $t = 0, \quad t = 1, \quad t = -1$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x}$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^2 + Bx, \quad y_p' = 2Ax + B, \quad y_p'' = 2A, \quad y_p''' = 0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$-2Ax - B = x$

$$\left.\begin{array}{l} -2A = 1 \\ -B = 0 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A = -1/2 \\ B = 0 \end{array}\right.$$

Luego $y_p = -\dfrac{x^2}{2}$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - \frac{x^2}{2}$$

Rpta: $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - \dfrac{x^2}{2}$

29. $y'' - 2y' + y = -2$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'' - 2y' + y = -2$

$P(t) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 = 0$

De donde: $t = 1$ de multiplicidad 2

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = e^x (c_1 + c_2 x)$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = A$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = A, \quad y_p' = 0, \quad y_p'' = 0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$A = -2$

$A = -2\}\, de\ donde \{A = -2$

Luego $y_p = -2$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$$y = e^x (c_1 + c_2 x) - 2$$

Rpta: $y = e^x (c_1 + c_2 x) - 2$

30. $y'' + 9y + 9 = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'' + 9y + 9 = 0$

$P(t) = t^2 + 9 = 0$

De donde: $t = 3i, \quad t = -3i$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = A$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = A, \quad y_p' = 0, \quad y_p'' = 0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$9A - 9 = 0$

$9A - 9 = 0\} \, de \ donde \{A = 1$

Luego $y_p = 1$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x + 1$

Rpta: $y = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x + 1$

31. $y''' + y'' = 1$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''' + y'' = 1$

$P(t) = t^3 + t^2 = t^2(t+1) = 0$

De donde: $t = 0$ de multiplicidad 2, $\quad t = -1$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = x^2(A) = Ax^2$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^2, \quad y_p' = 2Ax, \quad y_p'' = 2A, \quad y_p''' = 0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$2A = 1$

$2A = 1\} \, de \ donde \{A = 1/2$

Luego $y_p = \dfrac{x^2}{2}$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \dfrac{x^2}{2}$

Rpta: $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \dfrac{x^2}{2}$

32. $5y''' - 7y'' - 3 = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$5y''' - 7y'' - 3 = 0$

$P(t) = 5t^3 - 7t^2 = t^2(5t - 7) = 0$

De donde: $t = 0$ de multiplicidad 2, $t = \dfrac{7}{5}$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{\frac{7}{5}x}$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = x^2(A) = Ax^2$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^2, \quad y_p' = 2Ax, \quad y_p'' = 2A, \quad y_p''' = 0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$-14A - 3 = 0$

$-14A - 3 = 0\}\ de\ donde\ \{A = -3/14$

Luego $y_p = -\dfrac{3}{14}x^2$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{\frac{7}{5}x} - \dfrac{3}{14}x^2$

Rpta: $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{\frac{7}{5}x} - \dfrac{3}{14}x^2$

33. $y^{iv} - 6y^{iii} + 6 = 0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iv} - 6y^{iii} + 6 = 0$

$P(t) = t^4 - 6t^3 + 6 = t^3(t - 6) = 0$

De donde: $t = 0$ de multiplicidad 3, $t = 6$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{6x}$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = x^3(A) = Ax^3$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^3,\quad y_p' = 3Ax^2,\quad y_p'' = 6Ax,\quad y_p''' = 6A,\quad y_p^{iv} = 0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$-36A + 6 = 0$

$-36A + 6 = 0\}\ de\ donde\{A = 1/6$

Luego $y_p = \dfrac{x^3}{6}$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{6x} + \dfrac{x^3}{6}$

Rpta: $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{6x} + \dfrac{x^3}{6}$

34. $3y^{iv} + y^{iii} = 2$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$3y^{iv} + y^{iii} = 2$

$P(t) = 3t^4 + t^3 = t^3(3t+1) = 0$

De donde: $t = 0$ de multiplicidad 3, $\quad t = -1/3$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-\frac{x}{3}}$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = x^3(A) = Ax^3$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^3,\quad y_p' = 3Ax^2,\quad y_p'' = 6Ax,\quad y_p''' = 6A,\quad y_p^{iv} = 0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$6A = 2$

$6A = 2\}\ de\ donde\{A = 1/3$

Luego $y_p = \dfrac{x^3}{3}$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-\frac{x}{3}} + \dfrac{x^3}{3}$

Rpta: $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-\frac{x}{3}} + \dfrac{x^3}{3}$

35. $y^{iv} - 2y^{iii} - 2y^{i} + y = 1$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iv} - 2y^{iii} - 2y^{i} + y = 1$

$P(t) = t^4 - 2t^3 - 2t + 1 = (t^2 + 1)(t-1)^2 = 0$

De donde: $t = 1$ de multiplicidad 2, $t = i$, $t = -i$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = e^x (c_1 + c_2 x) + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = A$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = A,\quad y_p' = 0,\quad y_p'' = 0,\quad y_p''' = 0,\quad y_p^{iv} = 0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$A = 1$

$\left. A = 1 \right\} \, de \; donde \left\{ A = 1 \right.$

Luego $y_p = 1$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = e^x (c_1 + c_2 x) + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x + 1$

Rpta: $y = e^x (c_1 + c_2 x) + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x + 1$

36. $y'' + 2y' + 2y = x + 1$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'' + 2y' + 2y = x + 1$

$P(t) = t^2 + 2t + 2 = 0$

De donde: $t = -1 + i$, $t = -1 - i$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = Ax + B$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax + B,\quad y_p' = A,\quad y_p'' = 0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$2A+2Ax+2B=x+1$

$\left.\begin{array}{l}2A=1\\2A+2B=1\end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l}A=1/2\\B=0\end{array}\right.$

Luego $y_p=\dfrac{x}{2}$, y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$y=e^{-x}\left(c_1\cos x+c_2\,\mathrm{sen}\,x\right)+\dfrac{x}{2}$

Rpta: $y=e^{-x}\left(c_1\cos x+c_2\,\mathrm{sen}\,x\right)+\dfrac{x}{2}$

37. $7y''-y'=14x$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$7y''-y'=14x$

$P(t)=7t^2-t=t(7t-1)=0$

De donde: $t=0,\quad t=\dfrac{1}{7}$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1+c_2e^{\frac{x}{7}}$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=x(Ax+B)=Ax^2+Bx$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Ax^2+Bx,\quad y_p'=2Ax+B,\quad y_p''=2A$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$2A-2Ax-B=14x$

$\left.\begin{array}{l}-2A=14\\2A-B=0\end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l}A=-7\\B=-14\end{array}\right.$

Luego $y_p=-7x^2-14x$, y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$y=c_1+c_2e^{\frac{x}{7}}-7x^2-14x$

Rpta: $y=c_1+c_2e^{\frac{x}{7}}-7x^2-14x$

38. $y'''-y''+y'=x^2+x$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'''-y''+y'=x^2+x$

$P(t)=t^3-t^2+1=t\left(t^2-t+1\right)=0$

De donde: $t=0,\quad t=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad t=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1+e^{\frac{x}{2}}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=x\left(Ax^2+Bx+C\right)=Ax^3+Bx^2+Cx$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Ax^3+Bx^2+Cx,\quad y_p'=3Ax^2+2Bx+C,\quad y_p''=6Ax+2B,\quad y_p'''=6A$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$6A-6Ax-2B+3Ax^2+2Bx+C=x^2+x$

$$\left.\begin{array}{l}3A=1\\-6A+2B=1\\6A-2B+C=0\end{array}\right\}de\ donde\left\{\begin{array}{l}A=1/3\\B=3/2\\C=1\end{array}\right.$$

Luego $y_p=\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+x,$ y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$y=c_1+e^{\frac{x}{2}}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+x$

Rpta: $c_1+e^{\frac{x}{2}}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+x$

39. $y''-4y'+4y=x^2$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''-4y'+4y=x^2$

$P(t)=t^2-4t+4=(t-2)^2=0$

De donde: $t=2$ de multiplicidad 2

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=e^{2x}\left(c_1+c_2x\right)$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^2 + Bx + C, \quad y_p^{'} = 2Ax + B, \quad y_p^{"} = 2A$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$2A - 8Ax - 4B + 4Ax^2 + 4Bx + 4C = x^2$

$\left.\begin{array}{l} 4A = 1 \\ -8A + 4B = 0 \\ 2A - 42B + 4C = 0 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A = 1/4 \\ B = 1/2 \\ C = 3/8 \end{array}\right.$

Luego $y_p = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8}$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = e^{2x}\left(c_1 + c_2 x\right) + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8}$

Rpta: $y = e^{2x}\left(c_1 + c_2 x\right) + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8}$

40. $y" + 4y' = 8x$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y" + 4y' = 8x$

$P(t) = t^2 + 8t = t(t + 8) = 0$

De donde: $t = 0, \quad t = -8$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = c_1 + c_2 e^{-8x}$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = x\left(Ax + B\right) = Ax^2 + Bx$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^2 + Bx, \quad y_p^{'} = 2Ax + B, \quad y_p^{"} = 2A$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$2A + 16Ax + 8B = 8x$

$\left.\begin{array}{l} 16A = 8 \\ 2A + 8B = 0 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = -1/8 \end{array}\right.$

Luego $y_p = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{8}$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1 + c_2 e^{-8x} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{8}$

Rpta: $y = c_1 + c_2 e^{-8x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{8}$

41. $y'' - 2y' + y = x^3$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'' - 2y' + y = x^3$

$P(t) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 = 0$

De donde: $t = 1$ de multiplicidad 2

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = e^x (c_1 + c_2 x)$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \quad y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y_p'' = 6Ax + 2B$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$6Ax + 2B - 6Ax^2 - 4Bx - 2C + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = x^3$

$$\left.\begin{array}{l} A = 1 \\ -6A + B = 0 \\ 6A - 4B + C = 0 \\ 2B - 2C + D = 0 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = 6 \\ C = 18 \\ D = 24 \end{array}\right.$$

Luego $y_p = x^3 + 6x^2 + 18x + 24$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = e^x (c_1 + c_2 x) + x^3 + 6x^2 + 18x + 24$

Rpta: $y = e^x (c_1 + c_2 x) + x^3 + 6x^2 + 18x + 24$

42. $y^{iv} + y^{ii} = x^2 + x$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iv} + y^{ii} = x^2 + x$

$P(t) = t^4 + t^2 = t^2(t^2 + 1) = 0$

De donde: $t = 0$ de multiplicidad 2, $\quad t = i, \quad t = -i$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = x^2\left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2,\quad y_p^{'} = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx,\quad y_p^{''} = 12Ax^2 + 6Bx + 2C,$

$y_p^{'''} = 24Ax + 6B,\quad y_p^{iv} = 24A$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$24A + 12Ax^2 + 6Bx + 2C = x^2 + x$

$$\left.\begin{array}{l} 12A = 1 \\ 6A = 1 \\ 24A + 2C = 0 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A = 1/12 \\ B = 1/6 \\ C = -1 \end{array}\right.$$

Luego $y_p = \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^3}{6} - x^2$, y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x + \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^3}{6} - x^2$

Rpta: $c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x + \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^3}{6} - x^2$

43. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3,\quad y(0) = \dfrac{4}{3},\quad y'(0) = \dfrac{1}{27}$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$

$P(t) = t^2 - 6t + 9 = (t-3)^2 = 0$

De donde: $t = 3$ de multiplicidad 2

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = e^{3x}\left(c_1 + c_2 x\right)$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^2 + Bx + C,\quad y_p^{'} = 2Ax + B,\quad y_p^{''} = 2A$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$$2A-12A-6B+9Ax^2+9Bx+9C=x^2-x+3$$

$$\left.\begin{array}{l}9A=1\\-12A+9B=-1\\2A-6B+9C=3\end{array}\right\}de\ donde\left\{\begin{array}{l}A=1/9\\B=1/27\\C=1/3\end{array}\right.$$

Luego $y_p=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{x}{27}+\dfrac{1}{3}$, y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$$y=e^{3x}\left(c_1+c_2x\right)+\frac{x^2}{9}+\frac{x}{27}+\frac{1}{3}\qquad ...(1)$$

$$y(0)=c_1=\frac{4}{3}$$

$$y'(0)=3c_1+c_2+\frac{1}{27}=\frac{1}{27}$$

$$De\,donde: c_1=4/3,\quad c_2=-4\qquad ...(2)$$

$$(2)\ en\ (1)$$

$$y=4e^{3x}\left(\frac{1}{3}-x\right)+\frac{x^2}{9}+\frac{x}{27}+\frac{1}{3}$$

Rpta: $y=4e^{3x}\left(\dfrac{1}{3}-x\right)+\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{x}{27}+\dfrac{1}{3}$

44. $y'''-y=2x$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$y'''-y=2x$$

$$P(t)=t^3-t=(t-1)\left(t^2+t+1\right)=0$$

De donde: $t=1,\quad t=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\quad t=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1e^x+e^{-\frac{x}{2}}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x+\right)$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=Ax+B$$

De donde derivando la ecuación particular:

$$y_p=Ax+B,\quad y_p'=A,\quad y_p''=0,\quad y_p'''=0$$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$Ax+2B=2x$

$\left.\begin{array}{l} A=2 \\ 2B=0 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A=2 \\ B=0 \end{array}\right.$

Luego $y_p=2x$, y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$$y=c_1e^x+e^{-\frac{x}{2}}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\,\text{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x+\right)+2x \qquad ...(1)$$

$y(0)=c_1+c_2=0$

$y'(0)=c_1-c_2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}c_3+2=0$

$y''(0)=c_1+\dfrac{1}{4}c_2-\dfrac{1}{2}c_3-\dfrac{\sqrt{3}}{2}c_3-\dfrac{3}{4}c_2=2$

$De\,donde: c_1=0,\quad c_2=0,\quad c_3=-\dfrac{4}{\sqrt{3}} \qquad ...(2)$

$(2)\ en\ (1)$

$y=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\text{sen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+2x$

Rpta: $y=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\text{sen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+2x$

45. $y''-4y'+4y=x^2$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''-4y'+4y=x^2$

$P(t)=t^2-4t+4=(t-2)^2=0$

De donde: $t=2$ de multiplicidad 2

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=e^{2x}(c_1+c_2x)$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=Ax^2+Bx+C$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Ax^2+Bx+C,\quad y_p'=2Ax+B,\quad y_p''=2A$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$2A-8Ax-4B+4Ax^2+4Bx+4C=x^2$

$$\left.\begin{array}{l}4A=1\\-8A+4B=0\\2A-4B+4C=0\end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l}A=1/4\\B=1/2\\C=3/8\end{array}\right.$$

Luego $y_p=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}$, y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$$y=e^{2x}\left(c_1+c_2x\right)+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}$$

Rpta: $y=e^{2x}\left(c_1+c_2x\right)+\frac{1}{8}\left(2x^2+4x+3\right)$

46. $y''-y'+y=x^3+6$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$$y''-y'+y=x^3+6$$

$$P(t)=t^2-t+1=0$$

De donde: $t=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\qquad t=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=e^{\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

De donde derivando la ecuación particular:

$$y_p=Ax^3+Bx^2+Cx+D,\quad y_p'=3Ax^2+2Bx+C,\quad y_p''=6Ax+2B$$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$$6Ax+2B-3Ax^2-2Bx-C+Ax^3+Bx^2+Cx+D=x^3+6$$

$$\left.\begin{array}{l}A=1\\-3A+B=0\\6A-2B+C=0\\2B-C+D=6\end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l}A=1\\B=3\\C=0\\D=0\end{array}\right.$$

Luego $y_p=x^3+3x^2$, y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$$y=e^{\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+x^3+3x^2$$

Rpta: $y=e^{\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+x^3+3x^2$

47. $y''-y=2-x^2, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=0$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''-y=2-x^2$

$P(t)=t^2-1=(t-1)(t+1)=0$

De donde: $t=1, \quad t=-1$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1e^x+c_2e^{-x}$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=Ax^2+Bx+C$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Ax^2+Bx+C, \quad y_p'=2Ax+B, \quad y_p''=2A$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$2A-Ax^2-Bx-C=2-x^2$

$2A-Ax^2-Bx-C=2-x^2$

$$\left.\begin{array}{l}-A=-1\\-B=0\\2A-C=2\end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l}A=1\\B=0\\C=0\end{array}\right.$$

Luego $y_p=x$, y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+x \qquad ...(1)$

$y(0)=c_1+c_2=2$

$y'(0)=c_1-c_2+1=0$

$De\,donde: c_1=1/2, \quad c_2=3/2 \qquad ...(2)$

$(2)\ en\ (1)$

$y=\dfrac{e^x}{2}+\dfrac{3}{2}e^{-x}+x$

Rpta: $y=\dfrac{e^x}{2}+\dfrac{3}{2}e^{-x}+x$

48. $y''+6y'+10y=x^4+2x^2+2$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''+6y'+10y=x^4+2x^2+2$

$P(t)=t^2+6t+10=0$

De donde: $t=-3+i,\quad t=-3-i$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=e^{-3x}\left(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x\right)$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E,\quad y_p'=4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D,\quad y_p''=12Ax^2+6Bx+2C$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$12Ax^2+6Bx+2C+24Ax^3+18Bx^2+12Cx+6D+10Ax^4+10Bx^3+$

$10Cx^2+10Dx+10E=x^4+2x^2+2$

$$\left.\begin{array}{l}10A=1\\24A+10B=0\\12A+18B+10C=2\\6B+12C+10D=0\\2C+6D+10E=2\end{array}\right\}de\ donde\left\{\begin{array}{l}A=1/10\\B=-6/25\\C=64/125\\D=-294/625\\E=1187/3125\end{array}\right.$$

Luego $y_p=\frac{x^4}{10}-\frac{6}{25}x^3+\frac{64}{125}x^2-\frac{294}{625}x+\frac{1187}{3125}$, y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$y=e^{-3x}\left(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x\right)+\frac{x^4}{10}-\frac{6}{25}x^3+\frac{64}{125}x^2-\frac{294}{625}x+\frac{1187}{3125}$

Rpta: $y=e^{-3x}\left(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x\right)+\frac{x^4}{10}-\frac{6}{25}x^3+\frac{64}{125}x^2-\frac{294}{625}x+\frac{1187}{3125}$

49. $y'''+3y''+3y'+y=x^4+4x^3+10x^2+20x+1$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'''+3y''+3y'+y=x^4+4x^3+10x^2+20x+1$

$P(t)=t^3+3t^2+3t+1=(t+1)^3=0$

De donde: $t=-1$ de mutiplicidad 3

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=e^{-x}\left(c_1+c_2x+c_3x^2\right)$$

De acuerdo al 1er caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E,\quad y_p' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D,\quad y_p'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C,$

$y_p''' = 24Ax + 6B$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$24Ax + 6B + 36Ax^2 + 18Bx + 6C + 12Ax^3 + 9Bx^2 + 6Cx + 3D +$

$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 20x + 1$

$$\left.\begin{array}{l} A = 1 \\ 12A + 9B = 4 \\ 36A + 9B + C = 10 \\ 24A + 18B + 6C + D = 20 \\ 6B + 6C + 3DD + E = 1 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = -8 \\ C = 46 \\ D = -136 \\ E = 181 \end{array}\right.$$

Luego $y_p = x^4 - 8x^3 + 46x^2 - 136x + 181,$ y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = e^{-x}\left(c_1 + c_2x + c_3x^2\right) + x^4 - 8x^3 + 46x^2 - 136x + 181$

Rpta: $y = e^{-x}\left(c_1 + c_2x + c_3x^2\right) + x^4 - 8x^3 + 46x^2 - 136x + 181$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGENEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES

II. Hallar la solución general de las ecuaciones diferenciales:

1. $y''-7y'+12y=-e^{x}$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''-7y'+12y=-e^{x}$

$P(t)=t^{2}-7t+12=(t-3)(t-4)=0$

De donde: $t=3,\quad t=4$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1e^{3x}+c_2e^{4x}$$

De acuerdo al 2do caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=x(A)e^{4x}=Axe^{4x}$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Axe^{4x},\quad y_p'=4Axe^{4x}+Ae^{4x},\quad y_p''=16Axe^{4x}+8Ae^{4x}$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$16Axe^{4x}+8Ae^{4x}-28Axe^{4x}-7Ae^{4x}+12Axe^{4x}=-e^{4x}$

$A=-1\}\ de\ donde\{A=-1$

Luego $y_p=-xe^{4x}$ y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$y=c_1e^{3x}+c_2e^{4x}-xe^{4x}$

Rpta: $y=c_1e^{3x}+c_2e^{4x}-xe^{4x}$

2. $y''-2y'+y=2e^{x}$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''-2y'+y=2e^{x}$

$P(t)=t^{2}-2t+1=(t-1)^{2}=0$

De donde: $t=1$ de multiplicidad 2

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=e^{x}(c_1+c_2x)$$

De acuerdo al 2do caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = x^2(A)e^x = Ax^2e^{4x}$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^2e^{4x}$, $\quad y_p' = Ax^2e^x + 2Axe^x$, $\quad y_p'' = Ax^2e^x + 4Axe^x + 2Ae^x$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$Ax^2e^x + 4Axe^x + 2Ae^x - 2Ax^2e^x - 4Axe^x + Ax^2e^{4x} = 2e^x$

$2A = 2\}$ *de donde* $\{A = 1$

Luego $y_p = x^2e^x$ y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = e^x(c_1 + c_2x) + x^2e^x$

Rpta: $y = e^x(c_1 + c_2x) + x^2e^x$

3. $y'' = xe^x + y$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'' = xe^x + y \quad \Rightarrow \quad y'' - y = xe^x$

$P(t) = t^2 - 1 = (t-1)(t+1) = 0$

De donde: $t = 1, \quad t = -1$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = c_1e^x + c_2e^{-x}$$

De acuerdo al 2do caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = x(Ax + B)e^x = Ax^2e^x + Bxe^x$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^2e^x + Bxe^x$, $\quad y_p' = Ax^2e^x + 2Axe^x + Bxe^x + Be^x$,

$y_p'' = Ax^2e^x + 4Axe^x + 2Ae^x + Bxe^x + 2Be^x$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$Ax^2e^x + 4Axe^x + 2Ae^x + Bxe^x + 2Be^x - Ax^2e^x - Bxe^x = xe^x$

$$\left.\begin{array}{l} 4A = 1 \\ 2A + 2B = 0 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A = 1/4 \\ B = -1/4 \end{array}\right.$$

Luego $y_p = \dfrac{(x^2 - x)}{4}e^x$ y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{(x^2 - x)}{4}e^x$$

Rpta: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + \dfrac{(x^2 - x)}{4}e^x$

4. $y''-4y'+4y=xe^{2x}$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''-y'+4y=xe^{2x}$

$P(t)=t^2-4t+4=(t-2)^2=0$

De donde: $t=2$ de multiplicidad 2

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=e^{2x}(c_1+c_2x)$$

De acuerdo al 2do caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=x^2(Ax+B)e^{2x}=Ax^3e^{2x}+Bx^2e^{2x}$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Ax^3e^{2x}+Bx^2e^{2x}, \quad y_p'=2Ax^3e^{2x}+3Ax^2e^{2x}+2Bx^2e^{2x}+2Bxe^{2x},$

$y_p''=4Ax^3e^{2x}+12Ax^2e^{2x}+6Axe^{2x}+4Bx^2e^{2x}+8Bxe^{2x}+2Be^{2x}$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$4Ax^3e^{2x}+12Ax^2e^{2x}+6Axe^{2x}+4Bx^2e^{2x}+8Bxe^{2x}+2Be^{2x}$

$-8Ax^3e^{2x}-12Ax^2e^{2x}-8Bx^2e^{2x}-8Bxe^{2x}+4Ax^3e^{2x}+4Bx^2e^{2x}=xe^{2x}$

$$\left.\begin{array}{l}6A=1\\2B=0\end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l}A=1/6\\B=0\end{array}\right.$$

Luego $y_p=\dfrac{x^3e^{2x}}{6}$ y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$y=e^{2x}(c_1+c_2x)+\dfrac{x^3e^{2x}}{6}$

Rpta: $y=e^{2x}(c_1+c_2x)+\dfrac{x^3e^{2x}}{6}$

5. $y''-6y'+9y=e^x$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''-6y'+9y=e^{x}$

$P(t)=t^{2}-6t+9=(t-3)^{2}=0$

De donde: $t=3$ de multiplicidad 2

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=e^{3x}(c_1+c_2x)$$

De acuerdo al 2do caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=Ae^{x}$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Ae^{x}$, $y_p'=Ae^{x}$, $y_p''=Ae^{x}$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$Ae^{x}-6Ae^{x}+9Ae^{x}=e^{x}$

$4A=1\}\ de\ donde\{A=1/4$

Luego $y_p=\dfrac{e^{x}}{4}$ y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$y=e^{3x}(c_1+c_2x)+\dfrac{e^{x}}{4}$

Rpta: $y=e^{3x}(c_1+c_2x)+\dfrac{e^{x}}{4}$

6. $y''-3y'-4y=30e^{x}$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''-3y'-4y=30e^{x}$

$P(t)=t^{2}-3t-4=(t-4)(t+1)=0$

De donde: $t=4,\quad t=-1$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1e^{4x}+c_2e^{-x}$$

De acuerdo al 2do caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=Ae^{x}$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Ae^{x},\quad y_p'=Ae^{x},\quad y_p''=Ae^{x}$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$Ae^{x}-3Ae^{x}-4Ae^{x}=30e^{x}$

$-6A=30\}\ de\ donde\{A=-5$

Luego $y_p=-5e^{x}$ y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$y=c_1e^{4x}+c_2e^{-x}-5e^{x}$

Rpta: $y=c_1e^{4x}+c_2e^{-x}-5e^{x}$

7. $y''-3y'-4y=30e^{4x}$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''-3y'-4y=30e^{4x}$

$P(t)=t^2-3t-4=(t-4)(t+1)=0$

De donde: $t=4, \quad t=-1$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1e^{4x}+c_2e^{-x}$$

De acuerdo al 2do caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=x(A)e^{4x}=Axe^{4x}$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Axe^{4x}, \quad y_p'=4Axe^{4x}+Ae^{4x}, \quad y_p''=16Axe^{4x}+8Ae^{x}$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$16Axe^{4x}+8Ae^{x}-12Axe^{4x}-3Ae^{4x}-4Axe^{4x}=3$

$5A=30\}\, de \; donde\{A=6$

Luego $y_p=6xe^{4x}$ y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$y=e^{4x}(c_1+6x)+c_2e^{-x}$

Rpta: $y=e^{4x}(c_1+6x)+c_2e^{-x}$

8. $y''-y=8xe^{x}$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''-y=8xe^{x}$

$P(t)=t^2-1=(t-1)(t+1)=0$

De donde: $t=1, \quad t=-1$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$$

De acuerdo al 2do caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=x(Ax+B)e^{x}=Ax^2e^{x}+Bxe^{x}$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^2e^x + Bxe^x$, $\quad y_p^{'} = Ax^2e^x + 2Axe^x + Bxe^x + Be^x$,

$y_p^{''} = Ax^2e^x + 4Axe^x + 2Ae^x + Bxe^x + 2Be^x$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$Ax^2e^x + 4Axe^x + 2Ae^x + Bxe^x + 2Be^x - Ax^2e^x - Bxe^x = 8xe^x$

$$\left.\begin{array}{l} 4A = 8 \\ 2A + 2B = 0 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A = 2 \\ B = -2 \end{array}\right.$$

Luego $y_p = 2x^2e^x - 2xe^x$ y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + 2x^2e^x - 2xe^x$

Rpta: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + 2x^2e^x - 2xe^x$

9. $y^{iv} - y = e^{-x}$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y^{iv} - y = e^{-x}$

$P(t) = t^4 - 1 = (t-1)(t+1)(t^2+1) = 0$

De donde: $t = 1, \quad t = -1, \quad t = i, \quad t = -i$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4 \operatorname{sen} x$$

De acuerdo al 2do caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = x(A)e^{-x} = Axe^{-x}$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Axe^{-x}$, $\quad y_p^{'} = -Axe^{-x} + Ae^{-x}$, $\quad y_p^{''} = Axe^{-x} - 2Ae^{-x}$, $\quad y_p^{'''} = -Axe^{-x} + 3Ae^{-x}$

$y_p^{iv} = Axe^{-x} - 4Ae^{-x}$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$Axe^{-x} - 4Ae^{-x} - Axe^{-x} = e^{-x}$

$-4A = 1\} \, de\ donde \{A = -1/4$

Luego $y_p = -\frac{1}{4}xe^{-x}$ y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4 \operatorname{sen} x - \frac{1}{4}xe^{-x}$

Rpta: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4 \operatorname{sen} x - \frac{1}{4}xe^{-x}$

10. $y''+y=10e^{2x}$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''+y=10e^{2x}$

$P(t)=t^2+1=0$

De donde: $t=i,\quad t=-i$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1\cos x+c_2\,\mathrm{sen}\,x$$

De acuerdo al 2do caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=Ae^{2x}$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Ae^{2x},\quad y_p'=2Ae^{2x},\quad y_p''=4Ae^{2x}$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$4Ae^{2x}+Ae^{2x}=10e^{2x}$

$5A=10\}\,de\ donde\,\{A=2$

Luego $y_p=2e^{2x}$ y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$y=c_1\cos x+c_2\,\mathrm{sen}\,x+2e^{2x}\qquad ...(1)$

$y(0)=c_1+2=0$

$y'(0)=c_2+4=0$

$De\,donde: c_1=-2,\quad c_2=-4\qquad ...(2)$

$(2)\ en\ (1)$

$y=2\left(e^{2x}-\cos x-2\,\mathrm{sen}\,x\right)$

Rpta: $y=2\left(e^{2x}-\cos x-2\,\mathrm{sen}\,x\right)$

11. $y''+3y'-10y=6e^{4x}$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''+3y'-10y=6e^{4x}$

$P(t)=t^2+3t-10=(t-2)(t+5)=0$

De donde: $t=2,\quad t=-5$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x}$$

De acuerdo al 2do caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = Ae^{4x}$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ae^{4x}, \quad y_p' = 4Ae^{4x}, \quad y_p'' = 16Ae^{4x}$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$16Ae^{4x} + 12Ae^{4x} - 10Ae^{4x} = 6e^{4x}$

$18A = 6\}\, de\ donde \{A = 1/3$

Luego $y_p = \dfrac{e^{4x}}{3}$ y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x} + \dfrac{e^{4x}}{3}$

Rpta: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x} + \dfrac{e^{4x}}{3}$

12. $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$

$P(t) = t^2 + 10t + 25 = (t+5)^2 = 0$

De donde: $t = -5$ de multiplicidad 2

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = e^{-5x}(c_1 + c_2 x)$$

De acuerdo al 2do caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = x^2 (A) e^{-5x} = Ax^2 e^{-5x}$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^2 e^{-5x}, \quad y_p' = -5Ax^2 e^{-5x} + 2Axe^{-5x}, \quad y_p'' = 25Ax^2 e^{-5x} - 20Axe^{-5x} + 2Ae^{-5x}$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$25Ax^2 e^{-5x} - 20Axe^{-5x} + 2Ae^{-5x} - 50Ax^2 e^{-5x} + 20Axe^{-5x} + 25Ax^2 e^{-5x} = 14e^{-5x}$

$2A = 14\}\, de\ donde \{A = 7$

Luego $y_p = 7x^2 e^{-5x}$ y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = e^{-5x}(c_1 + c_2 x) + 7x^2 e^{-5x}$

Rpta: $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-5x} + \dfrac{e^{4x}}{3}$

13. $y'' - y' - 6y = 20e^{-2x}$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'' - y' - 6y = 20e^{-2x}$

$P(t) = t^2 - t - 6 = (t-3)(t+2) = 0$

De donde: $t = 3, \quad t = -2$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$$

De acuerdo al 2do caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = x(A)e^{-2x} = Axe^{-2x}$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Axe^{-2x}, \quad y_p' = -2Axe^{-2x} + Ae^{-2x}, \quad y_p'' = 4Axe^{-2x} - 4Ae^{-2x}$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$4Axe^{-2x} - 4Ae^{-2x} + 2Axe^{-2x} - Ae^{-2x} - 6Axe^{-2x} = 20e^{-2x}$

$-5A = 20\} \, de \ donde \{A = -4$

Luego $y_p = -4xe^{-2x}$ y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x} - 4xe^{-2x}$

Rpta: $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x} - 4xe^{-2x}$

14. $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$

$P(t) = 2t^2 - 4t - 6 = (2t-6)(t+1) = 0$

De donde: $t = 3, \quad t = -1$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}$$

De acuerdo al 2do caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = Ae^{2x}$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ae^{2x}, \quad y_p^{'} = 2Ae^{2x}, \quad y_p^{"} = 4Ae^{2x}$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$8Ae^{2x} - 8Ae^{2x} - 6Ae^{2x} = 3e^{2x}$

$-6A = 3\}\, de\ donde \{A = -1/2$

Luego $y_p = -\dfrac{1}{2}e^{2x}$ y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - \dfrac{e^{2x}}{2}$

Rpta: $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - \dfrac{e^{2x}}{2}$

15. $2y"+y'-y=e^x$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$2y"+y'-y=e^x$

$P(t) = 2t^2 - t - 1 = (2t-1)(t+1) = 0$

De donde: $t = \dfrac{1}{2}, \quad t = -1$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = c_1e^{\frac{x}{2}} + c_2e^{-x}$$

De acuerdo al 2do caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = Ae^x$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ae^x, \quad y_p^{'} = Ae^x, \quad y_p^{"} = Ae^x$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$2Ae^x + Ae^x - Ae^x = 2e^x$

$2A = 2\}\, de\ donde \{A = 1$

Luego $y_p = e^x$ y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1e^{\frac{x}{2}} + c_2e^{-x} + e^x$

Rpta: $y = c_1e^{\frac{x}{2}} + c_2e^{-x} + e^x$

16. $y''+a^2y=e^x$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''+a^2y=e^x$

$P(t)=t^2+a^2=0$

De donde: $t=ai,\quad t=-ai$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1\cos ai+c_2\operatorname{sen} ai$$

De acuerdo al 2do caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=Ae^x$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Ae^x,\quad y_p'=Ae^x,\quad y_p''=Ae^x$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$Ae^x+a^2Ae^x=e^x$

$\left.Ae^x+a^2e^x=1-a^2\right\}\,de\ donde\left\{A=1-a^2\right.$

Luego $y_p=\left(1-a^2\right)e^x$ y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$y=c_1\cos ai+c_2\operatorname{sen} ai+\left(1-a^2\right)e^x$

Rpta: $y=c_1\cos ai+c_2\operatorname{sen} ai+\left(1-a^2\right)e^x$

17. $y''+4y'+2y=xe^{-2x}$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y''+4y'+2y=xe^{-2x}$

$P(t)=t^2+4t+2=0$

De donde: $t=-2+\sqrt{2},\quad t=-2-\sqrt{2}$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1e^{-2+\sqrt{2}}+c_2e^{-2-\sqrt{2}}$$

De acuerdo al 2do caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=\left(Ax+B\right)e^{-2x}=Axe^{-2x}+Be^{-2x}$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Axe^{-2x} + Be^{-2x}$, $\quad y_p' = -2Axe^{-2x} + Ae^{-2x} - 2Be^{-2x}$,

$y_p'' = 4Axe^{-2x} - 4Ae^{-2x} + 4Be^{-2x}$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$4Axe^{-2x} - 4Ae^{-2x} + 4Be^{-2x} - 8Axe^{-2x} + 4Ae^{-2x} - 8Be^{-2x} + 2Axe^{-2x} + 2Be^{-2x} = xe^{-2x}$

$$\left.\begin{array}{l} -2A = 1 \\ -2B = 0 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A = -1/2 \\ B = 0 \end{array}\right.$$

Luego $y_p = -\frac{x}{2}e^x$ y la solución general es: $y = y_h + y_p$

$y = c_1e^{-2+\sqrt{2}} + c_2e^{-2-\sqrt{2}} - \frac{x}{2}e^x$

Rpta: $y = c_1e^{-2+\sqrt{2}} + c_2e^{-2-\sqrt{2}} - \frac{x}{2}e^x$

18. $6y'' + 2y' - y = 7x(x+1)e^x$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$6y'' + 2y' - y = 7x(x+1)e^x$

$P(t) = 6t^2 + 2t - 1 =$

De donde: $t = \frac{-1+\sqrt{7}}{6}$, $\quad t = \frac{-1-\sqrt{7}}{6}$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h = c_1e^{\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{6}\right)x} + c_2e^{\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{6}\right)x}$$

De acuerdo al 2do caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^x = Ax^2e^x + Bxe^x + Ce^x$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ax^2e^x + Bxe^x + Ce^x$, $\quad y_p' = Ax^2e^x + 2Axe^x + Bxe^x + Be^x + Ce^x$,

$y_p'' = Ax^2e^x + 4Axe^x + 2Ae^x + Bxe^x + 2Be^x + Ce^x$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$6Ax^2e^x + 24Axe^x + 12Ae^x + 6Bxe^x + 12Be^x + 6Ce^x + 2Ax^2e^x + 4Axe^x +$

$2Bxe^x + 2Be^x + 2Ce^x - Ax^2e^x - Bxe^x - Ce^x = \left(7x^2 + 7x\right)e^x$

$$\left.\begin{array}{l} 7A = 7 \\ 28A + 7B = 7 \\ 12A + 14B + 7C = 0 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = -3 \\ C = 30/7 \end{array}\right.$$

Luego $y_p=\left(x^2-3x+\dfrac{30}{7}\right)e^x$ y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$$y=c_1e^{\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{6}\right)x}+c_2e^{\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{6}\right)x}+\left(x^2-3x+\frac{30}{7}\right)e^x$$

Rpta: $y=c_1e^{\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{6}\right)x}+c_2e^{\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{6}\right)x}+\left(x^2-3x+\dfrac{30}{7}\right)e^x$

19. $y'''-2y''+10y=3xe^x$

RESOLUCIÓN

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial:

$y'''-2y''+10y=3xe^x$

$P(t)=t^3-2t^2+10=t\left(t^2-2t+10\right)=0$

De donde: $t=0,\quad t=1+3i,\quad t=1-3i$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$y_h=c_1+e^x\left(c_2\cos 3x+c_3\operatorname{sen}3x\right)$$

De acuerdo al 2do caso la solución particular es de la forma:

$$y_p=\left(Ax+B\right)e^x=Axe^x+Be^x$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p=Axe^x+Be^x,\quad y_p'=Axe^x+Ae^x+Be^x,\quad y_p''=Ax^2e^x+2Ae^x+Be^x,$

$y_p'''=Ax^2e^x+3Ae^x+Be^x$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$Ax^2e^x+3Ae^x+Be^x-Ax^2e^x-4Ae^x-2Be^x+10Axe^x+10Ae^x+10Be^x=3xe^x$

$\left.\begin{array}{l}9A=3\\9A+9B=0\end{array}\right\}de\ donde\left\{\begin{array}{l}A=1/3\\B=-1/3\end{array}\right.$

Luego $y_p=\dfrac{(x-1)}{3}e^x$ y la solución general es: $y=y_h+y_p$

$$y=c_1+e^x\left(c_2\cos 3x+c_3\operatorname{sen}3x\right)+\frac{(x-1)}{3}e^x$$

Rpta: $y=c_1+e^x\left(c_2\cos 3x+c_3\operatorname{sen}3x\right)+\dfrac{(x-1)}{3}e^x$

20. $y''-y'+\dfrac{y}{4}=xe^{\frac{x}{2}}$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''-y'+\frac{y}{4}=0 \qquad t^2-t+1/4=0$$

$$\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 \begin{cases} t_1=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2xe^{\frac{x}{2}} \qquad y^p \Rightarrow x^2e^{\frac{x}{2}}(Ax+B)$$

$$e^{\frac{x}{2}}(6Ax+2B)=xe^{\frac{x}{2}}$$

$$A=1/6 \qquad B=0$$

$$y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2xe^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x^3}{6}\right)$$

21. $y''-y'=6x^5e^x$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''-y'=0 \qquad t^2-t=0$$

$$t\,(t-1)\begin{cases} t_1=0 \\ t_2=1 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1+C_2e^x$$

$$y^p \Rightarrow xe^x(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)$$

$$A=1 \quad B=-6 \quad C=30 \quad D=-102 \quad E=360 \quad F=-720$$

$$y=C_1+C_2e^x+xe^x(x^5-6x^4+30x^3-102x^2+360x-720)$$

22. $y''-y=2e^x$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''-y=0 \qquad t^2-1=0$$

$$(t+1)(t-1)\begin{cases} t_1=1 \\ t_2=-1 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1e^x+C_2e^{-x}$$

$$y^p \Rightarrow Axe^x$$

$$\left.\begin{array}{l} y' = Ae^x + Axe^x \\ y'' = Ae^x + Axe^x + Ae^x \end{array}\right\} \quad 2Ae^x = 2e^x$$

$$A = 1$$

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} \ + xe^x$$

23. $y'' - 4y' + 3y = 4e^{3x}$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y'' - 4y' + 3y = 0 \qquad t^2 - 1 = 0$$

$$(t-3)(t-1)\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 3 \end{cases}$$

$$\to y^h = C_1e^{3x} + C_2e^x$$

$$y^p \Rightarrow Axe^{3x}$$

$$A = 12$$

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^x \ + 2xe^{3x}$$

24. $y'' + 2y' + y = e^{-2x}$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y'' + 2y' + y = 0 \qquad t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)(t-1)\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

$$\to y^h = C_1e^x + C_2xe^x$$

$$y^p \Rightarrow Ae^{-2x}$$

$$A = 1$$

$$y = C_1e^x + C_2xe^x \ + e^{-2x}$$

25. $3y^{iv} + 8y''' + 6y'' = (x^3 - 6x^2 + 12x - 24)e^{-x}$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow 3y^{iv} + 8y''' + 6y'' = 0 \qquad 3t^4 + 8t^3 + 6t^2 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = 0 \ multiplicidad\ 2 \\ t_2 = \dfrac{-4 + i\sqrt{2}}{3} \\ t_3 = \dfrac{-4 - i\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 + C_2 x + C_3 e^{\frac{-4x}{3}} \cos\frac{\sqrt{2}}{3}x + C_4 e^{\frac{-4x}{3}} sen\frac{\sqrt{2}}{3}x$$

$$y^p \Rightarrow (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{-x}$$

$$A = 1 \quad B = -6 \quad C = 12 \quad D = 0$$

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{\frac{-4x}{3}} \cos\frac{\sqrt{2}}{3}x + C_4 e^{\frac{-4x}{3}} sen\frac{\sqrt{2}}{3}x + (x^3 - 6x^2 + 12x)e^{-x}$$

26. $y'' - 2y' + y = 2e^{2x}$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y'' - 2y' + y = 0 \qquad t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)^2 \ \{t_1 = 1 \ multiplicidad\ 2$$

$$\rightarrow y^h = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

$$y^p \Rightarrow Ae^{2x}$$

$$A = 2$$

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + 2e^{2x}$$

27. $y'' + 2y' = 3xe^x$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y'' + 2y' = 0 \qquad t^2 + 2t = 0$$

$$t(t+2) \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_1 = -2 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 + C_2 e^{-2x}$$

$$y^p \Rightarrow e^x (Ax + B)$$

$$A = 1 \qquad B = \frac{-4}{3}$$

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} + e^x (x + \frac{-4}{3})$$

28. $y'' - 2ky' + k^2 y = e^x$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y'' - 2ky' + k^2 y = 0 \qquad t^2 - 2kt + k^2 = 0$$

$$(t-k)^2 \begin{cases} t_1 = k \\ t_2 = k \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$$

$$y^p \Rightarrow Axe^x$$

$$A = \frac{1}{(t-k)^2}$$

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} + \frac{e^x}{(t-k)^2}$$

29. $y'' - 4y' + 3y = 9e^{-3x}$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y'' - 4y' + 3y = 0 \qquad t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-3)(t-1) \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 e^x + C_2 x e^{3x}$$

$$y^p \Rightarrow Ae^{-3x}$$

$$A = \frac{3}{8}$$

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^{3x} + \frac{3e^{-3x}}{8}$$

30. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''+3y'=0 \qquad t^2+3t=0$$

$$t(t+3)\begin{cases} t_1=0 \\ t_2=-3 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 + C_2 x e^{-3x}$$

$$y^p \Rightarrow xe^{-3x}(Ax+B)$$

$$A=\frac{-1}{2} \quad B=\frac{-1}{3}$$

$$y = C_1 + C_2 xe^{-3x} + xe^{-3x}(\frac{-x-1}{2})$$

31. $y''+5y'+6y=10(1-x)e^{-2x}$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''+5y'+6y=0 \qquad t^2+5t+6=0$$

$$(t+2)(t+3)\begin{cases} t_1=-2 \\ t_2=-3 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$$

$$y^p \Rightarrow xe^{-2x}(Ax+B)$$

$$A=5 \quad B=20$$

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + xe^{-2x}(5x+20)$$

32. $y''+y'+y=(x+x^2)e^x$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''+y'+y=0 \qquad t^2+t+1=0$$

$$\left(t+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(t+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\begin{cases} t_1=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ t_2=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} sen\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$y^p \Rightarrow e^x(Ax^2 + Bx + C)$$

$$A = 1/3 \quad B = -1/3 \quad C1/3$$

$$y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} sen\frac{\sqrt{3}}{2}x + e^x(\frac{x^2 - x + 1}{3})$$

33. $y'' - 3y' + 2y = xe^x$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$(t-1)(t-2)\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

$$y^p \Rightarrow xe^x(Ax + B)$$

$$A = -1/2 \quad B = -1$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^x(\frac{-x^2}{2} - x)$$

34. $y'' + y' - 2y = x^2 e^{4x}$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y'' + y' - 2y = 0 \qquad t^2 + t - 2 = 0$$

$$(t-1)(t+2)\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -2 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

$$y^p \Rightarrow e^{4x}(Ax^2 + Bx + C)$$

$$A = 1/18 \quad B = -1/18 \quad C = 7/324$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + e^{4x}(\frac{x^2 - x}{18} + \frac{7}{324})$$

35. $y''-3y'+2y=(x^2+x)e^{3x}$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''-3y'+2y=0 \qquad t^2-3t+2=0$$

$$(t-1)(t-2)\begin{cases} t_1=1 \\ t_2=2 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h=C_1e^x+C_2e^{2x}$$

$$y^p \Rightarrow e^{3x}(Ax^2+Bx+C)$$

$$A=1/5 \quad B=-1/5 \;\; C=2/5$$

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+e^{3x}\left(\frac{x^2-x}{5}+\frac{2}{5}\right)$$

36. $y^{iv}-2y'''-2y'+y=e^x$

RESOLUCIÓN

37. $y''-5y'+6y=(12x-7)e^{-x} \qquad y(0)=y'(0)=0$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''-5y'+6y=0 \qquad t^2-5t+6=0$$

$$(t-3)(t-2)\begin{cases} t_1=3 \\ t_2=2 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}$$

$$y^p \Rightarrow e^{-x}(Ax+B)$$

$$A=1 \quad B=0 \quad y^p=xe^{-x}$$

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}+xe^{-x}$$

$$y(0)=C_1+C_2=0$$

$$y'=3C_1e^{3x}+2C_2e^{2x}-xe^{-x}$$

$$y'(0)=3C_1+2C_2=0$$

$$C_1=-1 \qquad C_2=1$$

$$y=-e^{3x}+e^{2x}+xe^{-x}$$

38. $y''-2y'-3y=(x-2)e^{x}$

RESOLUCIÓN

$$y^{h}\Rightarrow y''-2y'-3y=0 \qquad t^{2}-2t-3=0$$

$$(t-3)(t+1)\begin{cases} t_1=3 \\ t_2=-1 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^{h}=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$$

$$y^{p}\Rightarrow e^{x}(Ax+B)$$

$$A=-1/4 \quad B=1/2$$

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+e^{x}(-\frac{x}{4}+\frac{1}{2})$$

39. $y''-5y'+6=(x+1)^{2}e^{-2x}$

RESOLUCIÓN

$$y^{h}\Rightarrow y''-5y'+6=0 \qquad t^{2}-5t+6=0$$

$$(t-3)(t-2)\begin{cases} t_1=3 \\ t_2=2 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^{h}=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}$$

$$y^{p}\Rightarrow e^{-2x}(Ax^{2}+Bx+C)$$

$$A=1/20 \quad B=29/200 \quad C=441/4000$$

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}+e^{-2x}(\frac{x^{2}}{20}+\frac{29}{200}x+\frac{441}{4000})$$

40. $4y''-4y'+y=(x-1)e^{\frac{x}{2}}$

RESOLUCIÓN

$$y^{h}\Rightarrow 4y''-4y'+y=0 \qquad 4t^{2}-4t+1=0$$

$$(2t-1)^{2}\{t_1=1/2 \quad multiplicidad \;\; 2$$

$$\rightarrow y^{h}=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2xe^{\frac{x}{2}}$$

$$y^{p}\Rightarrow (Ax+B)e^{\frac{x}{2}}$$

$$A = 1/24 \quad B = -1/8$$

$$y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 x e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{24} - \frac{1}{8}\right)$$

41. $y'' - 2y' + y = (x+1)e^x$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y'' - 2y' + y = 0 \qquad t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)^2 \left\{ t_1 = 1 \ \ multiplicidad \ \ 2 \right.$$

$$\rightarrow y^h = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

$$y^p \Rightarrow (Ax + B)e^x$$

$$A = 1/6 \quad B = 1/2$$

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{6} + \frac{1}{2}\right)$$

42. $y''' + 2y'' = (4x^2 + 6x - 1)e^{2x}$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''' + 2y'' = 0 \qquad t^3 + 2t^2 = 0$$

$$t^2(t+2) \begin{cases} t_1 = 0 \ \ multiplicidad \ \ 2 \\ t_2 = -2 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x}$$

$$y^p \Rightarrow (Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$$

$$A = 1/4 \quad B = -1/4 \quad C = 0$$

$$y = y^h = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x} + e^{2x}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\right)$$

43. $y'' - 4y = 6e^x \qquad y(0) = -1 \quad y'(0) = 0$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''-4y=0 \qquad t^2-4=0$$

$$(t+2)(t-2)\begin{cases} t_1=2 \\ t_2=-2 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$$

$$y^p \Rightarrow Ae^x$$

$$A=-2$$

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - 2e^x$$

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$y' = 2C_1e^{2x} - 2C_2e^{-2x} - 2e^x$$

$$y'(0) = 2C_1 - 2C_2 - 2 = 0 \qquad C_1 = 1 \quad C_2 = 0$$

$$y = e^{2x} - 2e^x$$

44. $y'''+y'-10y=29e^{4x}$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y'''+y'-10y=0 \qquad t^3+t-10=0$$

$$(t-2)(t+1+2i)(t+1-2i)\begin{cases} t_1=2 \\ t_2=-1-2i \\ t_3=-1+2i \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}\cos 2x + C_3e^{-x}sen2x$$

$$y^p \Rightarrow Ae^{4x}$$

$$A=1/2$$

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}\cos 2x + C_3e^{-x}sen2x + \frac{e^{4x}}{2}$$

45. $y''+4y'+5y=10e^{-3x} \quad cuando\ x=0,\ y=0\ y'=0$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''+4y'+5y=0 \qquad t^2+4t+5=0$$

$$(t+2+i)(t+2-i)\begin{cases} t_1=-1-i \\ t_2=-1+i \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 e^{-2x}\cos x + C_2 e^{-2x} senx$$

$$y^p \Rightarrow Ae^{-3x} = 10e^{-3x}$$

$$A = 5$$

$$y = C_1 e^{-2x}\cos x + C_2 e^{-2x} senx + 5e^{-3x}$$

$$y(0) = C_1 + 5 = 0$$

$$y' = -2C_1 e^{-2x}\cos x - C_1 e^{-2x} senx - 2C_2 e^{-2x} senx + C_2 e^{-2x}\cos x - 15e^{-3x}$$

$$y'(0) = -2C_1 + C_2 - 15 = 0 \quad C_1 = -5 \quad C_2 = 5$$

$$y = -5e^{-2x}\cos x + 5e^{-2x} senx + 5e^{-3x}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGENEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES

III. Resolver las ecuaciones diferencias siguientes:

1. $y''+y=3sen2x+x\cos x$

RESOLUCIÓN

$$\rightarrow y=y^h+y^p$$

$$y^h \Rightarrow y''+y=0$$

$$t^2+1=0$$

$$(t-i)(t+i)\ \{\ t_1=i,\ t_2=-i$$

$$\rightarrow y^h=c_1\cos x+c_2\text{sen}x$$

$$y^h=C_1\cos x+C_2\text{sen}x$$

$$y^p\begin{cases} y_1^p \Rightarrow A\text{sen}2x+B\cos 2x=3sen2x \\ y_2^p \Rightarrow x(Ax+B)\text{sen}x+x(Cx+D)\cos x=x\cos x \end{cases}$$

$$y_1^p \Rightarrow y=A\text{sen}2x+B\cos 2x$$

$$y'=2A\cos 2x-2B\text{sen}2x$$

$$y''=-4A\text{sen}2x-4B\cos 2x$$

$$y_1^p \Rightarrow -4A\text{sen}2x-4B\cos 2x+A\text{sen}2x+B\cos 2x=3\text{sen}2x$$

$$B=0,\ A=-1\}\quad y_1^p=-\text{sen}2x$$

$$y_2^p \Rightarrow y=Ax^2\text{sen}x+Bx\text{sen}x+Cx^2\cos x+Dx\cos x$$

$$y'=2Ax\text{sen}x+Ax^2\cos x+B\text{sen}x+Bx\cos x+2Cx\cos x-Cx^2\text{sen}x+D\cos x-Dx\text{sen}x$$

$$y''=2A\text{sen}x+4Ax\cos x-Ax^2\text{sen}x+2B\cos x-Bx\text{sen}x+2C\cos x-4Cx\text{sen}x-Cx^2\cos x$$
$$-2D\text{sen}x-Dx\cos x$$

$$y_2^p \Rightarrow 2A\text{sen}x+4Ax\cos x+2B\cos x+2C\cos x-4Cx\text{sen}x-2D\text{sen}x=x\cos x$$

$$A=\frac{1}{4};B=0\}\quad y_2^p=\frac{x^2}{4}\text{sen}x+\frac{x^2}{4}\cos x$$

$$\rightarrow y^p=-\text{sen}2x+\frac{x^2}{4}(\text{sen}x+\cos x)$$

$$\Rightarrow y=C_1\cos x+C_2\text{sen}x-\text{sen}2x+\frac{x^2}{4}(\text{sen}x+\cos x)$$

Rpta: $y = c_1 + c_2 e^{3x} - \frac{3}{5}e^{2x}senx - \frac{e^{2x}}{5}\cos x$

2. $y'' + y = \cos x - senx$

RESOLUCIÓN.

$\rightarrow y = y^h + y^p$

$y^h \Rightarrow y'' + y = 0$

$t^2 + 1 = 0$

$(t-i)(t+i) \{ \; t_1 = i, \; t_2 = -i$

$\rightarrow y^h = C_1 \cos x + C_2 \text{sen}x$

$y^p \Rightarrow x(A\text{sen}x + B\cos x)$

$y^p \Rightarrow y = Ax\text{sen}x + Bx\cos x$

$y' = A\text{sen}x + Ax\cos x + B\cos x - Bx\text{sen}x$

$y'' = 2A\cos x - Ax\text{sen}x - 2B\text{sen}x - Bx\cos x$

$y^p \Rightarrow 2A\cos x - 2B\text{sen}x = \cos x - \text{sen}x$

$$A = \frac{1}{2}, \; B = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow y^p = \frac{x}{2}\text{sen}x + \frac{x}{2}\cos x = \frac{x}{2}(\text{sen}x + \cos x)$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos x + C_2 \text{sen}x + \frac{x}{2}(\text{sen}x + \cos x)$$

3. $y'' + 9y = cos3x$

RESOLUCIÓN.

$\rightarrow y = y^h + y^p$

$y^h \Rightarrow y'' + 9y = 0$

$t^2 + 9 = 0$

$(t-3i)(t+3i) \{ \; t_1 = 3i, \; t_2 = -3i$

$\rightarrow y^h = C_1 \cos 3x + C_2 \text{sen}3x$

$$y^p \Rightarrow x\left(A\text{sen}3x + B\cos 3x\right)$$

$$y^p \Rightarrow y = Ax\text{sen}3x + Bx\cos 3x$$

$$y' = A\text{sen}3x + 3Ax\cos 3x + B\cos 3x - 3Bx\text{sen}3x$$

$$y'' = 4A\cos 3x - 9Ax\text{sen}3x - 4B\text{sen}3x - 9Bx\cos 3x$$

$$y^p \Rightarrow 4A\cos 3x - 8Ax\text{sen}3x - 4B\text{sen}3x - 8Bx\cos 3x + Bx\cos 3x = \cos 3x$$

$$A = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow y^p = \frac{x}{4}sen3x$$

$$\Rightarrow y = C_1\cos 3x + C_2\text{sen}3x + \frac{x}{4}sen3x$$

4. $y'' + y' - 6y = senx\cos x$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' + y' - 6y = 0 \qquad \rightarrow y^h = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$$

$$t^2 + t - 6 = 0$$

$$(t+3)(t-2)\left\{\ t_1 = -3,\ t_2 = 2\right.$$

$$\mapsto senx\cos x = \frac{1}{2}sen2x$$

$$y^p \Rightarrow A\text{sen}2x + B\cos 2x$$

$$y' = 2A\cos 2x - 2Bsen2x$$

$$y'' = -4A\text{sen}2x - 4B\cos 2x$$

$$y^p \Rightarrow -4A\text{sen}2x - 4B\cos 2x + 2A\cos 2x - 2Bsen2x - 6A\text{sen}2x - 6B\cos 2x = \frac{1}{2}\text{sen}2x$$

$$A = -\frac{5}{104},\ B = -\frac{1}{104}$$

$$\rightarrow y^p = -\frac{5}{104}\text{sen}2x - \frac{1}{104}\cos 2x = -\frac{1}{105}\left(5\text{sen}2x + \cos 2x\right)$$

$$\Rightarrow y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} - \frac{1}{105}\left(5\text{sen}2x + \cos 2x\right)$$

5. $y''+2y'+y=sen2x$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y=y^h+y^p$$

$$y^h \Rightarrow y''+2y'+1=0$$
$$t^2+2t+1=0$$
$$(t+1)(t+1)\{\ t_1=-1,\ t_2=-1$$

$$\rightarrow y^h=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}=e^{-x}(C_1+C_2x)$$

$$y^p \Rightarrow A\text{sen}2x+B\cos 2x$$
$$y'=2A\cos 2x-2Bsen2x$$
$$y''=-4A\text{sen}2x-4B\cos 2x$$

$$y^p \Rightarrow -4A\text{sen}2x-4B\cos 2x+2A\cos 2x-2Bsen2x-6A\text{sen}2x-6B\cos 2x=\text{sen}2x$$
$$A=-\frac{5}{52},\ B=-\frac{1}{52}$$

$$\rightarrow y^p=-\frac{5}{52}\text{sen}2x-\frac{1}{52}\cos 2x=-\frac{1}{52}(5\text{sen}2x+\cos 2x)$$

$$\Rightarrow y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}-\frac{1}{105}(5\text{sen}2x+\cos 2x)$$

6. $y''-4y'+5y=\cos x+senx$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y''-4y'+5y=0$$
$$t^2-4t+5=0$$
$$t=\frac{4\pm\sqrt{16-4(1)(5)}}{2}$$
$$t=2\pm i$$

$$\rightarrow y^h = e^{2x}\left(C_1\cos x + C_2\text{sen}x\right)$$

$$y^p \Rightarrow y = A\text{sen}x + B\cos x$$
$$y' = A\cos x - B\text{sen}x$$
$$y'' = -A\text{sen}x - B\cos x$$

$$y^p \Rightarrow 4A\text{sen}x + 4B\text{sen}x + 4B\cos x - 4A\cos x = \cos x + \text{sen}x$$
$$A=-\frac{3}{4},\; B=\frac{1}{4}$$

$$\rightarrow y^p = -\frac{3}{4}\text{sen}x + \frac{1}{4}\cos x = -\frac{1}{4}\left(3\text{sen}x - \cos x\right)$$

$$\Rightarrow y = e^{2x}\left(C_1\cos x + C_2\text{sen}x\right) - \frac{1}{4}\left(3\text{sen}x - \cos x\right)$$

7. $y^{iv} - y = senx - 2\cos x$

RESOLUCIÓN.

$$y^h \Rightarrow y^{iv} - y = 0$$

$$t^4 - 1 = 0$$

$$(t+1)\left(t^3 - t^2 + t - 1\right) = 0$$

$$(t+1)(t-1)(t-i)(t+i)\begin{cases} t = -1,\ t = 1 \\ t = i,\ t = -i \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x$$

$$y^p \Rightarrow x\left(A\operatorname{sen} x + B\cos x\right)$$

$$y^p \Rightarrow y = Ax\operatorname{sen} x + Bx\cos x$$

$$y' = A\operatorname{sen} x + Ax\cos x + B\cos x - Bx\operatorname{sen} x$$

$$y'' = 2A\cos x - Ax\operatorname{sen} x - 2B\operatorname{sen} x - Bx\cos x$$

$$y''' = -3Asenx - Ax\cos x - 3B\cos x + Bxsenx$$

$$y^{iv} = -4A\cos x + Axsenx + 4Bsenx + Bx\cos x$$

$$y^p \Rightarrow -4A\cos x + 4Bsenx + 2Bx\cos x = senx - 2\cos x$$

$$A = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow y^p = \frac{x}{2}\operatorname{sen} x + \frac{x}{4}\cos x = \frac{x}{4}\left(2\operatorname{sen} x + \cos x\right)$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x + \frac{x}{4}\left(2\operatorname{sen} x + \cos x\right)$$

8. $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = \operatorname{sen} x$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' + y = 0$$
$$t^2 + 1 = 0$$
$$(t+i)(t-i)\{\ t = -i,\ t = i$$

$$\rightarrow y^h = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$$

$$y^p \Rightarrow x(A\operatorname{sen}x + B\cos x)$$
$$y^p \Rightarrow y = Ax\operatorname{sen}x + Bx\cos x$$
$$y' = A\operatorname{sen}x + Ax\cos x + B\cos x - Bx\operatorname{sen}x$$
$$y'' = 2A\cos x - Ax\operatorname{sen}x - 2B\operatorname{sen}x - Bx\cos x$$

$$y^p \Rightarrow 2A\cos x - 2B\operatorname{sen}x = senx$$
$$A = 0,\ \ B = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow y^p = -\frac{x}{2}\cos x$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen}x - \frac{x}{2}\cos x$$

9. $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 4y = \cos x$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' + 4y = 0$$
$$t^2 + 4 = 0$$
$$(t+2i)(t-2i)\{\ t = -2i,\ t = 2i$$

$$\rightarrow y^h = C_1 \cos 2x + C_2 \text{sen} 2x$$

$$y^p \Rightarrow y = A\text{sen}x + B\cos x$$
$$y' = A\cos x - B\text{sen}x$$
$$y'' = -A\text{sen}x - B\cos x$$

$$y^p \Rightarrow 3A\text{sen}x + 3B\cos x = \cos x$$
$$A = 0,\ \ B = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow y^p = \frac{1}{3}\cos x$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos 2x + C_2 \text{sen} 2x + \frac{\cos x}{3}$$

10. $\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} - 2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = 5\text{sen} 2x$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y^{iv} - 2y'' + y = 0$$
$$t^4 - 2t^2 + 1 = 0$$
$$\left(t^2 - 1\right)\left(t^2 - 1\right) = 0$$
$$\left(t-1\right)\left(t+1\right)\left(t-1\right)\left(t+1\right)\begin{cases} t = 1, \ \ multiplicidad\ 2 \\ t = -1, \ multiplicidad\ 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x} = \left(C_1 + C_2x\right)e^x + \left(C_3 + C_4x\right)e^{-x}$$

$$y^p \Rightarrow A\text{sen}2x + B\cos 2x$$
$$y' = 2A\cos 2x - 2B\text{sen}2x$$
$$y'' = -4A\text{sen}2x - 4B\cos 2x$$
$$y''' = -8A\cos 2x + 8B\text{sen}2x$$
$$y^{iv} = 16A\text{sen}2x + 16B\cos 2x$$

$$y^p \Rightarrow 25A\text{sen}2x + 25B\cos 2x = 5\text{sen}2x$$
$$A = \frac{1}{5}, \ \ B = 0$$

$$\rightarrow y^p = \frac{\text{sen}2x}{5}$$

$$\Rightarrow y = \left(C_1 + C_2x\right)e^x + \left(C_3 + C_4x\right)e^{-x} + \frac{\text{sen}2x}{5}$$

11. $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 9y = 4x\text{sen}x$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' - 9y = 0$$

$$t^2 + 9 = 0$$

$$(t-3i)(t+3i)\{\ t = 3i,\ \ t = -3i$$

$$\rightarrow y^h = C_1\cos 3x + C_2\text{sen}3x$$

$$y^p \Rightarrow (Ax+B)\text{sen}x + (Cx+D)\cos x$$

$$y = Ax\text{sen}x + B\text{sen}x + Cx\cos x + D\cos x$$

$$y' = A\text{sen}x + Ax\cos x + B\cos x + C\cos x - Cx\text{sen}x - D\text{sen}x$$

$$y'' = 2A\cos x - Ax\text{sen}x - B\text{sen}x - 2C\text{sen}x - Cx\cos x - D\cos x$$

$$y^p \Rightarrow 2A\cos x - 10Ax\text{sen}x - 10B\text{sen}x - 2C\text{sen}x - 10Cx\cos x$$

$$-10D\cos x = 4x\text{sen}x$$

$$A = \frac{2}{5},\ \ B = 0,\ C = 0,\ D = \frac{2}{25}$$

$$\rightarrow y^p = \frac{2x}{5}\text{sen}x + \frac{2}{25}\cos x$$

$$\Rightarrow y = C_1\cos 3x + C_2\text{sen}3x + \frac{2x}{5}\text{sen}x + \frac{2}{25}\cos x$$

12. $y'' + 4y' - 2y = 8x\text{sen}2x$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' + 4y' - 2y = 0$$

$$t^2 + 4t - 2 = 0$$

$$\left\{ t = -2 + \sqrt{6},\ t = -2 - \sqrt{6} \right.$$

$$\rightarrow y^h = C_1 e^{\left(-2+\sqrt{6}\right)} + C_2 \mathrm{e}^{\left(-2-\sqrt{6}\right)}$$

$$y^p \Rightarrow A\mathrm{sen}2x + B\cos 2x$$

$$y = 2A\cos 2x - 2B\mathrm{sen}2x$$

$$y' = -4A\mathrm{sen}2x - 4B\mathrm{cos}2x$$

$$y^p \Rightarrow -6A\mathrm{sen}2x - 8B\mathrm{sen}2 - 6B\mathrm{cos}2x + 8A\cos 2x = 8\mathrm{sen}2x$$

$$A = -\frac{12}{25},\ B = -\frac{16}{25}$$

$$\rightarrow y^p = -\frac{12\mathrm{sen}2x + 16\mathrm{cos}2x}{25}$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^{\left(-2+\sqrt{6}\right)} + C_2 \mathrm{e}^{\left(-2-\sqrt{6}\right)} - \frac{12\mathrm{sen}2x + 16\mathrm{cos}2x}{25}$$

13. $C_1 \cos x + C_2 \mathrm{sen}x$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' + y = 0$$
$$t^2 + 1 = 0$$
$$(t-i)(t+i)\{\ t = i,\ \ t = -i$$

$$\rightarrow y^h = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$$

$$y^p \Rightarrow x(Ax+B)\operatorname{sen}x + x(Ax+B)\cos x$$
$$y = Ax^2\operatorname{sen}x + Bx\operatorname{sen}x + Ax^2\cos x + Bx\cos x$$
$$y' = 2Ax\operatorname{sen}x + Ax^2\cos x + B\operatorname{sen}x + Bx\cos x + 2Ax\cos x - Ax^2\operatorname{sen}x + B\cos x - Bx\operatorname{sen}x$$
$$y'' = 2A\operatorname{sen}x + 4Ax\cos x - Ax^2\operatorname{sen}x + 2B\cos x - Bx\operatorname{sen}x + 2A\cos x - 4Ax\operatorname{sen}x - Ax^2\cos x$$
$$-2B\operatorname{sen}x - Bx\cos x$$

$$y^p \Rightarrow 2A\operatorname{sen}x + 4Ax\cos x + 2B\cos x + 2A\cos x - 4Ax\operatorname{sen}x - 2B\operatorname{sen}x = 4x\cos x$$
$$A = 1,\ B = 0$$

$$\rightarrow y^p = x^2\operatorname{sen}x + x^2\cos x = x^2(\operatorname{sen}x + \cos x)$$

$$\Rightarrow y = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen}x + x^2(\operatorname{sen}x + \cos x)$$

14. $y'' - 2my' + m^2 y = \operatorname{sen}(nx)$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' - 2my' + m^2 y = 0$$

$$t^2 - 2mt + m^2 = 0$$

$$(t-m)(t-m)\{\ t = m,\ multiplicidad\ \ 2.$$

$$\rightarrow y^h = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx}$$

$$y^p \Rightarrow y = A\operatorname{sen} nx + B\cos nx$$

$$y' = An\cos nx - Bn\operatorname{sen} nx$$

$$y'' = A\cos nx - An^2\operatorname{sen} nx - B\operatorname{sen} nx - Bn^2\cos nx$$

$$y^p \Rightarrow A\cos nx - An^2\operatorname{sen} nx - B\operatorname{sen} nx - Bn^2\cos nx - 2mAn\cos nx +$$

$$2mBn\operatorname{sen} nx + m^2 A\operatorname{sen} nx + m^2 B\cos nx = \operatorname{sen} nx$$

$$A = \frac{(m^2 - n^2)}{(m^2+n^2)^2}, \quad B = \frac{2mn}{(m^2+n^2)^2}$$

$$\rightarrow y^p = \frac{(m^2-n^2)\operatorname{sen} nx + 2mn\cos nx}{(m^2+n^2)^2}$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx} + \frac{(m^2-n^2)\operatorname{sen} nx + 2mn\cos nx}{(m^2+n^2)^2}$$

15. $y'' - a^2 y = 2\cos(mx) + 3\operatorname{sen}(mx), m \neq a$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' + a^2 y = 0$$

$$t^2 + a^2 = 0$$

$$(t - ai)(t + ai)\begin{cases} t = ai \\ t = -ai \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 \cos ax + C_2 \operatorname{sen} ax$$

$$y^p \Rightarrow y = A\cos mx + B\operatorname{sen} mx$$

$$y' = Am\cos mx - Bm\operatorname{sen} mx$$

$$y'' = A\cos mx - Am^2\operatorname{sen} mx - B\operatorname{sen} mx - Bm^2\cos mx$$

$$y^p \Rightarrow A\cos mx - Am^2\operatorname{sen} mx - B\operatorname{sen} mx - Bm^2\cos mx +$$

$$a^2 A\cos ms + a^2 B\operatorname{sen} mx = 2\cos(mx) + 3\operatorname{sen}(mx)$$

$$A = \frac{2}{a^2 - m^2}, \quad B = \frac{3}{a^2 - m^2}$$

$$\rightarrow y^p = \frac{2\cos mx + 3\operatorname{sen} mx}{a^2 - m^2}$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos ax + C_2 \operatorname{sen} ax + \frac{2\cos mx + 3\operatorname{sen} mx}{a^2 - m^2}$$

16. $4y'' + 8y' = x\operatorname{sen} x$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow 4y''+8y'=0$$
$$4t^2+8t=0$$
$$4t(t+2)\begin{cases} t=0 \\ t=-2 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 + C_2e^{-2x}$$

$$y^p \Rightarrow y = (Ax+B)\text{sen}x + (Cx+D)\cos x$$
$$y = Ax\text{sen}x + B\text{sen}x + Cx\cos x + D\cos x$$
$$y' = A\text{sen}x + Ax\cos x + B\cos x + C\cos x - Cx\text{sen}\,x - D\text{sen}x$$
$$y'' = 2A\cos x - Ax\text{sen}x - B\text{sen}x - 2C\text{sen}x - Cx\cos x - D\cos x$$

$$y^p \Rightarrow 8A\cos x - 4Ax\text{sen}x - 4B\text{sen}x - 8C\text{sen}x - 4Cx\cos x - 4D\cos x +$$
$$8A\text{sen}x + 8Ax\cos x + 8B\cos x + 8C\cos x - 8Cx\text{sen}\,x - 8D\text{sen}x = x\text{sen}\,x$$

$$A = -\frac{1}{20},\quad B = \frac{7}{50},\quad C = -\frac{1}{10},\quad D = -\frac{1}{50}$$

$$\rightarrow y^p = -\left(\frac{x}{20} - \frac{7}{50}\right)\text{sen}x - \left(\frac{x}{10} + \frac{1}{50}\right)\cos x$$

$$\Rightarrow y = C_1 + C_2e^{-2x} - \left(\frac{x}{20} - \frac{7}{50}\right)\text{sen}x - \left(\frac{x}{10} + \frac{1}{50}\right)\cos x$$

17. $y''+y = x^2\,\text{sen}\,x$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' + y = 0$$
$$t^2 + 1 = 0$$
$$(t-i)(t+i)\begin{cases} t = i \\ t = -i \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 \cos x + C_2 \text{sen } x$$

$$y^p \Rightarrow y = x\left(Ax^2 + Bx + C\right)\text{sen } x + x\left(Dx^2 + Ex + F\right)\cos x$$
$$y = Ax^3 \text{sen } x + Bx^2 \text{sen } x + Cx\text{sen } x + Dx^3 \cos x + Ex^2 \cos x + Fx\cos x$$
$$y' = 3Ax^2 \text{sen } x + Ax^3 \cos x + 2Bx\text{sen } x + Bx^2 \cos x + C\text{sen } x + Cx\cos x$$
$$+ 3Dx^2 \cos x - Dx^3 \text{sen } x + 2Ex\cos x - Ex^2 \text{sen } x + F\cos x - Fx\text{sen } x$$
$$y'' = 6Ax\text{sen } x + 6Ax^2 \cos x - Ax^3 \text{sen } x + 2B\text{sen } x + 4Bx\cos x - Bx^2 \text{sen } x$$
$$+ 2C\cos x - Cx\text{sen } x + 6Dx\cos x - 6Dx^2 \text{sen } x - Dx^3 \cos x + 2E\cos x$$
$$- 4Ex\text{sen } x - Ex^2 \cos x - 2F\text{sen } x - Fx\cos x$$

$$y^p \Rightarrow 6Ax\text{sen } x + 6Ax^2 \cos x + 2B\text{sen } x + 4Bx\cos x + 2C\cos x + 6Dx\cos x -$$
$$6Dx^2 \text{sen } x + 2E\cos x - 4Ex\text{sen } x - 2F\text{sen } x = x^2 \text{ sen } x$$

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{6}, \quad E = 0, \quad F = \frac{1}{4}$$

18. $y''' - y = \text{sen } x$

$$\rightarrow y^p = \frac{x^2}{4}\text{sen } x + \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x}{4}\right)\cos x$$

RESOLUCIÓN.

$$\Rightarrow y = C_1 \cos x + C_2 \text{sen } x + \frac{x^2}{4}\text{sen } x + \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x}{4}\right)\cos x$$

19. $y''+y=2\cos x, \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=0$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' + y = 0$$

$$t^2 + 1 = 0$$

$$(t-i)(t+i)\begin{cases} t = i \\ t = -i \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$$

$$y^p \Rightarrow y = x\left(A\operatorname{sen} x + B\cos x\right)$$

$$y = Ax\operatorname{sen} x + Bx\cos x$$

$$y' = A\operatorname{sen} x + Ax\cos x + B\cos x - Bx\operatorname{sen} x$$

$$y'' = 2A\cos x - Ax\operatorname{sen} x - 2B\operatorname{sen} x - Bx\cos x$$

$$y^p \Rightarrow 2A\cos x - 2B\operatorname{sen} x = 2\cos x$$

$$A = 1, \quad B = 0,$$

$$\rightarrow y^p = x\operatorname{sen} x$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + x\operatorname{sen} x$$

$$\Rightarrow \textit{Cuando} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\rightarrow y(0) = 1 \ \Rightarrow \ C_1 = 1 \\ &\rightarrow y'(0) = 0 \ \Rightarrow \ C_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad y = \cos x + x\operatorname{sen} x$$

20. $y'' + 4y = \operatorname{sen} x, \qquad y(0) = y'(0) = 1$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' + 4y = 0$$

$$t^2 + 4 = 0$$

$$(t-2i)(t+2i)\begin{cases} t = 2i \\ t = -2i \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x$$

$$y^p \Rightarrow y = A\operatorname{sen} x + B\cos x$$

$$y' = A\cos x - B\operatorname{sen} x$$

$$y'' = -A\operatorname{sen} x - B\cos x$$

$$y^p \Rightarrow 3A\operatorname{sen} x + 3B\cos x = \operatorname{sen} x$$

$$A = \frac{1}{3}, \qquad B = 0,$$

$$\rightarrow y^p = \frac{\operatorname{sen} x}{3}$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + \frac{\operatorname{sen} x}{3}$$

$$\Rightarrow Cuando \qquad y(0) = y'(0) = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow y(0) = 1 \;\; \Rightarrow \;\; C_1 = 1 \\ \rightarrow y'(0) = 1 \;\; \Rightarrow \;\; C_2 = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} y = \cos 2x + \frac{1}{3}(\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x)$$

21. $y'' + 4y = 4(\operatorname{sen} 2x + \cos 2x), \qquad y(\pi) = y'(\pi) = 2$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' + 4y = 0$$

$$t^2 + 4 = 0$$

$$(t-2i)(t+2i)\begin{cases} t = 2i \\ t = -2i \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x$$

$$y^p \Rightarrow y = Ax \operatorname{sen} 2x + Bx \cos 2x$$

$$y' = A \operatorname{sen} 2x + 2Ax \cos 2x + B \cos 2x - 2Bx \operatorname{sen} 2x$$

$$y'' = 4A \cos 2x - 4Ax \operatorname{sen} 2x - 4B \operatorname{sen} 2x - 4Bx \cos 2x$$

$$y^p \Rightarrow 4A \cos 2x - 4B \operatorname{sen} 2x = 4 \operatorname{sen} 2x + 4 \cos 2x$$

$$A = 1, \qquad B = -1,$$

$$\rightarrow y^p = x(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x)$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + x \operatorname{sen} 2x - x \cos 2x$$

$$\Rightarrow Cuando \qquad y(\pi) = y'(\pi) = 2$$

$$\rightarrow y(\pi) = 2 \;\Rightarrow\; C_1 = 2 + \pi$$

$$\rightarrow y'(\pi) = 2 \;\Rightarrow\; C_2 = \frac{1 + 2\pi}{2}$$

$$\Rightarrow y = (2+\pi)\cos 2x + \left(\frac{1+2\pi}{2}\right)\operatorname{sen} 2x + x(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x)$$

22. $y'' + 4y = -12 \operatorname{sen} 2x$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' + 4y = 0$$

$$t^2 + 4 = 0$$

$$(t-2i)(t+2i)\begin{cases} t = 2i \\ t = -2i \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x$$

$$y^p \Rightarrow y = Ax\operatorname{sen} 2x + Bx\cos 2x$$

$$y' = A\operatorname{sen} 2x + 2Ax\cos 2x + B\cos 2x - 2Bx\operatorname{sen} 2x$$

$$y'' = 4A\cos 2x - 4Ax\operatorname{sen} 2x - 4B\operatorname{sen} 2x - 4Bx\cos 2x$$

$$y^p \Rightarrow 4A\cos 2x - 4B\operatorname{sen} 2x = -12\operatorname{sen} 2x$$

$$A = 0, \qquad B = 3,$$

$$\rightarrow y^p = 3x\cos 2x$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + 3x\cos 2x$$

23. $y'' + y = -9\cos 2x, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' + y = 0$$

$$t^2 + 1 = 0$$

$$(t-i)(t+i)\begin{cases} t = i \\ t = -i \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$$

$$y^p \Rightarrow y = A\operatorname{sen} 2x + B\cos 2x$$

$$y' = 2A\cos 2x - 2Bx\operatorname{sen} 2x$$

$$y'' = -4Ax\operatorname{sen} 2x - 4Bx\cos 2x$$

$$y^p \Rightarrow -4Ax\operatorname{sen} 2x - 4Bx\cos 2x + A\operatorname{sen} 2x + B\cos 2x = -9\cos 2x$$

$$A = 0, \quad B = -9,$$

$$\rightarrow y^p = -9\cos 2x$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - 9\cos 2x$$

$$\Rightarrow Cuando \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

$$\left.\begin{aligned} &\rightarrow y(0) = 2 \;\Rightarrow\; C_1 = 11 \\ &\rightarrow y'(0) = 1 \;\Rightarrow\; C_2 = 1 \end{aligned}\right\} y = 11\cos x + \operatorname{sen} x - 9\cos 2x$$

24. $y'' + 2y' + 2y = -2\cos 2x - 4\operatorname{sen} 2x, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' + 2y' + 2y = 0$$
$$t^2 + 2t + 2 = 0$$
$$\begin{cases} t = -1 + i \\ t = -1 - i \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \operatorname{sen} x$$

$$y^p \Rightarrow y = A \operatorname{sen} 2x + B \cos 2x$$
$$y' = 2A \cos 2x - 2B \operatorname{sen} 2x$$
$$y'' = -4A \operatorname{sen} 2x - 4B \cos 2x$$

$$y^p \Rightarrow -2A \operatorname{sen} 2x - 4B \operatorname{sen} 2x - 2B \cos 2x + 4A \cos 2x = -2 \cos 2x - 4 \operatorname{sen} 2x$$

$$A = 0, \quad B = 1,$$
$$\rightarrow y^p = \cos 2x$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \operatorname{sen} x + \cos 2x$$

$$\Rightarrow \textit{Cuando} \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$
$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow y(0) = 1 \;\Rightarrow\; C_1 = 0 \\ \rightarrow y'(0) = 1 \;\Rightarrow\; C_2 = 1 \end{array}\right\} \; y = e^{-x} \operatorname{sen} x + \cos 2x$$

25. $y'' + 2y' + 2y = 2\operatorname{sen} 2x - 4\cos 2x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y''+2y'+2y=0$$
$$t^2+2t+2=0$$
$$\begin{cases} t=-1+i \\ t=-1-i \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\operatorname{sen}x$$

$$y^p \Rightarrow y = Ax\operatorname{sen}2x + Bx\cos 2x$$
$$y' = A\operatorname{sen}2x + 2Ax\cos 2x + B\cos 2x - 2Bx\operatorname{sen}2x$$
$$y'' = 4A\cos 2x - 4Ax\operatorname{sen}2x - 4B\operatorname{sen}2x - 4Bx\cos 2x$$

$$y^p \Rightarrow 4A\cos 2x - 4Ax\operatorname{sen}2x - 4B\operatorname{sen}2x - 2Bx\cos 2x + 2A\operatorname{sen}2x$$
$$+4Ax\cos 2x + 2B\cos 2x - 2Bx\operatorname{sen}2x = 2\operatorname{sen}2x - 4\cos 2x$$

$$A=\frac{1}{5},\qquad B=-\frac{11}{10},$$
$$\rightarrow y^p = \frac{x}{5}\operatorname{sen}2x - \frac{11x}{10}\cos 2x$$

$$\Rightarrow y = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\operatorname{sen}x - \frac{x}{5}\operatorname{sen}2x - \frac{11x}{10}\cos 2x$$

$$\Rightarrow Cuando \qquad y(0)=0,\quad y'(0)=0$$
$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow y(0)=0 \;\Rightarrow\; C_1=0 \\ \rightarrow y'(0)=0 \;\Rightarrow\; C_2=-\dfrac{11}{10} \end{array}\right\} y=-\frac{11}{10}e^{-x}\operatorname{sen}x-\frac{x}{5}\operatorname{sen}2x-\frac{11x}{10}\cos 2x$$

26. y''+4y'+3y=4sen $x+8\cos x$, $\qquad y(0)=3,\;\; y'(0)=-1$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' + 4y' + 3y = 0$$

$$t^2 + 4t + 3 = 0$$

$$(t+3)(t+1)\begin{cases} t = -3 \\ t = -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$$

$$y^p \Rightarrow y = A\text{sen}\, x + B\cos x$$

$$y' = A\cos x - B\text{sen}\, x$$

$$y'' = -A\text{sen}\, x - B\cos$$

$$y^p \Rightarrow 2A\text{sen}\, x + 2B\cos + 4A\cos x - 4B\text{sen}\, x = 4\text{sen}\, x + 8\cos x$$

$$A = 2, \quad B = 0,$$

$$\rightarrow y^p = 2\text{sen}\, x$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} - 2\text{sen}\, x$$

$$\Rightarrow Cuando \qquad y(0) = 3, \; y'(0) = -1$$

$$\left.\begin{matrix} \rightarrow y(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1 \\ \rightarrow y'(0) = -1 \Rightarrow \quad C_2 = 2 \end{matrix}\right\} y = e^{-3x} + 2e^{-x} - 2\text{sen}\, x$$

27. $y'' + y = 2\cos x$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' + y = 0$$

$$t^2 + 1 = 0$$

$$(t-i)(t+i)\begin{cases} t = i \\ t = -i \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$$

$$y^p \Rightarrow y = Ax\operatorname{sen} x + Bx\cos x$$

$$y' = A\operatorname{sen} x + Ax\cos x + B\cos x - Bx\operatorname{sen} x$$

$$y'' = 2A\cos x - Ax\operatorname{sen} x - 2B\operatorname{sen} x - Bx\cos x$$

$$y^p \Rightarrow 2A\cos x - 2B\operatorname{sen} x = 2\cos x$$

$$A = 1, \qquad B = 0,$$

$$\rightarrow y^p = x\operatorname{sen} x$$

$$\Rightarrow y = Ax\operatorname{sen} x + Bx\cos x + x\operatorname{sen} x$$

28. $y'' - 3y' + 2y = 14\operatorname{sen} 2x - 18\cos 2x$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y''-3y'+2y=0$$
$$t^2-3t+2=0$$
$$(t-2)(t-1)\begin{cases} t=2 \\ t=1 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1e^{2x}+C_2e^x$$

$$y^p \Rightarrow y = A\operatorname{sen}2x + B\cos 2x$$
$$y' = 2A\cos 2x - 2B\operatorname{sen}2x$$
$$y'' = -4A\operatorname{sen}2x - 4B\cos 2x$$

$$y^p \Rightarrow -2A\operatorname{sen}2x + 6B\operatorname{sen}2x - 6A\cos 2x - 2B\cos 2x = 14\operatorname{sen}2x - 18\cos 2x$$

$$A=2, \quad B=3,$$
$$\rightarrow y^p = 2\operatorname{sen}2x + 3\cos 2x$$

$$\Rightarrow y = C_1e^{2x}+C_2e^x + 2\operatorname{sen}2x + 3\cos 2x$$

29. $y''+k^2y=\operatorname{sen}(bx),\ \ k\neq b$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' + k^2 y = 0$$

$$t^2 + k^2 = 0$$

$$(t-ki)(t+ki)\begin{cases} t = ki \\ t = -ki \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 \cos(kx) + C_2 \text{sen}(kx)$$

$$y^p \Rightarrow y = A\text{sen}(bx) + B\cos(bx)$$

$$y' = bA\cos(bx) - bB\text{sen}(bx)$$

$$y'' = -b^2 A\text{sen}(bx) - b^2 B\cos(bx)$$

$$y^p \Rightarrow -b^2 A\text{sen}(bx) - b^2 B\cos(bx) + k^2 A\text{sen}(bx) + k^2 B\cos(bx) = \text{sen}(bx)$$

$$A = \frac{1}{k^2 - b^2}, \qquad B = 0,$$

$$\rightarrow y^p = \frac{\text{sen}(bx)}{k^2 - b^2}$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos(kx) + C_2 \text{sen}(kx) + \frac{\text{sen}(bx)}{k^2 - b^2}$$

30. $y'' - 7y' + 6y = \text{sen}x$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' - 7y' + 6y = 0$$
$$t^2 - 7t + 6 = 0$$
$$(t-6)(t-1)\begin{cases} t = 6 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 e^{6x} + C_2 e^x$$

$$y^p \Rightarrow y = A\text{sen}x + B\cos x$$
$$y' = A\cos x - B\text{sen}x$$
$$y'' = -A\text{sen}\, x - B\cos x$$

$$y^p \Rightarrow 5A\text{sen}\, x + 7B\text{sen}x - 7A\cos x + 5B\cos x = \text{sen}\, x$$

$$A = \frac{1}{37}, \quad B = \frac{6}{37},$$
$$\rightarrow y^p = \frac{\text{sen}x + 6\cos x}{37}$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x + \frac{\text{sen}x + 6\cos x}{37}$$

31. $y'' + 2y' + 5y = -\dfrac{17}{2}\cos 2x$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$t^2 + 2t + 5 = 0 \begin{cases} t = -1 + 2i \\ t = -1 - 2i \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \text{sen} 2x\right)$$

$$y^p \Rightarrow y = Ax\text{sen}2x + Bx\cos 2x$$
$$y' = A\text{sen}2x + 2Ax\cos 2x + B\cos 2x - 2Bx\text{sen}2x$$
$$y'' = 4A\cos 2x - 4Ax\text{sen}2x - 3B\text{sen}2x - 4Bx\cos 2x$$

$$y^p \Rightarrow -3Ax\text{sen}2x - 3B\text{sen}2x + 2A\text{sen}2x - 4Bx\text{sen}2x + 4A\cos 2x +$$
$$Bx\cos 2x + 4Ax\cos 2x + 2B\cos 2x = -\frac{17}{2}\cos 2x$$

$$A = -\frac{51}{8}, \quad B = \frac{17}{8},$$

$$\rightarrow y^p = \frac{-51x\text{sen}2x + 17x\cos 2x}{8}$$

$$\Rightarrow y = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \text{sen} 2x\right) + \frac{-51x\text{sen}2x + 17x\cos 2x}{8}$$

32. $y'' + y' + \text{sen}\, 2x = 0, \qquad y(\pi) = y'(\pi) = 1$

RESOLUCIÓN.

$$y''+y'=-\operatorname{sen}2x$$
$$\to y=y^h+y^p$$

$$y^h \Rightarrow y''+y'=0$$
$$t^2+t=0$$
$$t(t+1)\{t=0,\ \ t=-1$$

$$\to y^h=C_1+C_2e^{-x}$$

$$y^p \Rightarrow y=A\operatorname{sen}2x+B\cos 2x$$
$$y'=2A\cos 2x-2B\operatorname{sen}2x$$
$$y''=-4A\operatorname{sen}2x-4B\cos 2x$$

$$y^p \Rightarrow -4A\operatorname{sen}2x-2B\operatorname{sen}2x-4B\cos 2x+2A\cos 2x=-\operatorname{sen}2x$$

$$A=\frac{1}{5},\quad B=\frac{1}{10},$$

$$\to y^p=\frac{1}{5}\operatorname{sen}2x+\frac{1}{10}\cos 2x$$

$$\Rightarrow y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{5}\operatorname{sen}2x+\frac{1}{10}\cos 2x$$

$$\Rightarrow \textit{Cuando}\qquad y(\pi)=y'(\pi)=1$$
$$\left.\begin{array}{l}\to y(\pi)=1\ \ \Rightarrow\ \ C_1=1\\ \to y'(\pi)=1\ \ \Rightarrow\ \ C_2=2\end{array}\right\}\ y=\frac{1}{3}\operatorname{sen}2x-\frac{\operatorname{sen}x}{3}-\cos x$$

33. $y''-4y'+3y=2\cos x+4\operatorname{sen}x$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' - 4y' + 3y = 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-1)(t-3)\begin{cases} t = 1, \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$$

$$y^p \Rightarrow y = A\text{sen}x + B\cos x$$

$$y' = A\cos x - B\text{sen}x$$

$$y'' = -A\text{sen}\,x - B\cos x$$

$$y^p \Rightarrow 2A\text{sen}\,x + 4B\text{sen}x + 2B\cos x - 4A\cos x = 2\cos x + 4\text{sen}\,x$$

$$A = 0, \quad B = 1,$$

$$\rightarrow y^p = \cos x$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \cos x$$

34. $y''' - y'' + y' - y = 4\text{sen}\,x$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y''' - y'' + y' - y = 0$$
$$t^3 - t^2 + t - 1 = 0$$
$$(t-1)(t-i)(t+i)\begin{cases} t = 1 \\ t = i, \ t = -i \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x$$

$$y^p \Rightarrow y = Ax\operatorname{sen}x + Bx\cos x$$
$$y' = A\operatorname{sen}x + Ax\cos x + B\cos x - Bx\operatorname{sen}x$$
$$y'' = 2A\cos x - Ax\operatorname{sen} x - 2B\operatorname{sen}x - Bx\cos x$$
$$y''' = -3A\operatorname{sen}x - Ax\cos x - 3B\cos x + Bx\operatorname{sen}x$$

$$y^p \Rightarrow -2A\operatorname{sen}x + 2B\operatorname{sen}x - 2B\cos x - 2A\cos x = 2\cos x + 4\operatorname{sen} x$$

$$A = -\frac{3}{2}, \qquad B = \frac{1}{2},$$

$$\rightarrow y^p = \frac{1}{2}\left(\cos x - 3\operatorname{sen}x\right)$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen}x + \frac{1}{2}\left(\cos x - 3\operatorname{sen}x\right)$$

35. $y'' + y = 2\cos x, \qquad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' + y = 0$$

$$t^2 + 1 = 0$$

$$(t-i)(t+i)\begin{cases} t = i, \\ t = -i \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$$

$$y^p \Rightarrow y = Ax\operatorname{sen} x + Bx\cos x$$

$$y' = A\operatorname{sen} x + Ax\cos x + B\cos x - Bx\operatorname{sen} x$$

$$y'' = 2A\cos x - Ax\operatorname{sen} x - 2B\operatorname{sen} x - Bx\cos x$$

$$y^p \Rightarrow 2A\cos x - 2B\operatorname{sen} x = 2\cos x$$

$$A = 1, \quad B = 0,$$

$$\rightarrow y^p = x\operatorname{sen} x$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x$$

$$\Rightarrow Cuando \qquad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \\ \rightarrow y(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \end{array}\right\} y = (C_2 + x)\operatorname{sen} x$$

36. $y'' - 4y' + 3y = 20\cos x$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' - 4y' + 3y = 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-3)(t-1)\begin{cases} t = 3 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 e^{3x} + C_2 e^x$$

$$y^p \Rightarrow y = A\text{sen}x + B\cos x$$

$$y' = A\cos x - B\text{sen}x$$

$$y'' = -A\text{sen}\,x - B\cos x$$

$$y^p \Rightarrow 2A\text{sen}\,x + 2B\cos x - 4A\cos x + 4B\text{sen}x = 20\cos x$$

$$A = -4, \quad B = 2,$$

$$\rightarrow y^p = -4\text{sen}x + 2\cos x$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x - 4\text{sen}x + 2\cos x$$

37. $y'' + y' - 2y = -6(\text{sen}2x + 3\cos 2x), \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$

RESOLUCIÓN.

$$y''+y'-2y=-6\text{sen}2x-18\cos 2x$$
$$\rightarrow y=y^h+y^p$$

$$y^h \Rightarrow y''+y'-2y=0$$
$$t^2+t-2=0$$
$$(t+2)(t-1)\begin{cases} t=-2 \\ t=1 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$$

$$y^p \Rightarrow y=A\text{sen}2x+B\cos 2x$$
$$y'=2A\cos 2x-2B\text{sen}2x$$
$$y''=-4A\text{sen}2x-4B\cos 2x$$

$$y^p \Rightarrow -6A\text{sen}2x-6B\cos 2x+2A\cos 2x-2B\text{sen}2x=-6\text{sen}2x-18\cos 2x$$

$$A=0, \quad B=3,$$

$$\rightarrow y^p=3\cos 2x$$

$$\Rightarrow y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}+3\cos 2x$$

$$\Rightarrow Cuando \qquad y(0)=2, \quad y'(0)=2$$
$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow y(0)=2 \quad \Rightarrow \quad C_1=-1 \\ \rightarrow y'(0)=2 \quad \Rightarrow \quad C_2=0 \end{array}\right\} y=-e^{-2x}+3\cos 2x$$

38. $y''+y=-60\text{sen}4x, \qquad y(0)=8, \quad y'(0)=14$

RESOLUCIÓN.

$$\rightarrow y = y^h + y^p$$

$$y^h \Rightarrow y'' + y = 0$$

$$t^2 + 1 = 0$$

$$(t+i)(t-i)\begin{cases} t = -i \\ t = i \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 \cos x + C_2 \text{sen} x$$

$$y^p \Rightarrow y = A\text{sen}4x + B\cos 4x$$

$$y' = 4A\cos 4x - 4B\text{sen}4x$$

$$y'' = -16A\text{sen}4x - 16B\cos 4x$$

$$y^p \Rightarrow -15A\text{sen}4x - 15B\cos 4x = -60\text{sen}4x$$

$$A = 4, \quad B = 0,$$

$$\rightarrow y^p = 4\text{sen}4x$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos x + C_2 \text{sen} x + 4\text{sen}4x$$

$$\Rightarrow Cuando \qquad y(0) = 8, \quad y'(0) = 14$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow y(0) = 8 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 8 \\ \rightarrow y'(0) = 14 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -2 \end{array}\right\} y = 8\cos x - 2\text{sen}x + 4\text{sen}4x$$

39. $y'' + 4y' + 5y = 8(\text{sen}3x - 3\cos 3x), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -7$

RESOLUCIÓN.

$$y''+4y'+5y=8\text{sen}3x-24\cos 3x$$
$$\rightarrow y=y^h+y^p$$

$$y^h \Rightarrow y''+4y'+5y=0$$
$$t^2+4t+5=\begin{cases} t=-2-i \\ t=-2+i \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h=C_1e^{-2x}\cos x+C_2e^{-2x}\text{sen}x$$

$$y^p \Rightarrow y=A\text{sen}3x+B\cos 3x$$
$$y'=3A\cos 3x-3B\text{sen}3x$$
$$y''=-9A\text{sen}3x-9B\cos 3x$$

$$y^p \Rightarrow -4A\text{sen}3x-4B\cos 3x+12A\cos 3x-12B\text{sen}3x=-60\text{sen}4x$$
$$A=\frac{3}{2},\quad B=\frac{9}{2},$$

$$\rightarrow y^p=\frac{3}{2}\left(\text{sen}3x+3\cos 3x\right)$$

$$\Rightarrow y=C_1e^{-2x}\cos x+C_2e^{-2x}\text{sen}x+\frac{3}{2}\left(\text{sen}3x+3\cos 3x\right)$$

$$\Rightarrow Cuando \qquad y(0)=1,\quad y'(0)=-7$$
$$\rightarrow y(0)=1 \quad \Rightarrow \quad C_1=-\frac{7}{2}$$
$$\rightarrow y'(0)=-7 \quad \Rightarrow \quad C_2=-\frac{37}{2}$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}\left(e^{-2x}\left(-7\cos x-37\text{sen}x\right)+\frac{3}{2}\left(\text{sen}3x+3\cos 3x\right)\right)$$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGENEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES

IV. Hallar la solución general de las ecuaciones diferenciales:

1. $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}=2e^{2x}sen(x)$

RESOLUCIÓN

$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}=0$

$P(t)=t^2-3t=(t-3)t=0$

De donde: $t=0,\quad t=3$

La solución homogénea es: $y_g=c_1+c_2e^{3x}$

La solución particular es:

$y_p=Ae^{2x}senx+Be^{2x}\cos x$

$y_p^{'}=e^{2x}(A\cos x - Bsenx)+e^{2x}(2B\cos x+2Asenx)$

$y_p^{"}=e^{2x}\left((4A+3B)\cos x+(3A-4B)senx\right)$

Remplazando e Igualando la ecuación tenemos;

$A=-\frac{3}{5},\qquad B=-\frac{1}{5}$

$y_p=-\frac{3}{5}e^{2x}senx-\frac{1}{5}e^{2x}\cos x$

Rpta: $y=c_1+c_2e^{3x}-\frac{3}{5}e^{2x}senx-\frac{e^{2x}}{5}\cos x$

2. $4y''-5y'+y=e^{x}(sen2x-\cos 2x)$

RESOLUCIÓN

$4y'''-5y'+y=0$

$P(t)=4t^2-5t+1=\left(t-\frac{1}{4}\right)(t-1)=0$

De donde: $t=1;t=\frac{1}{4}$

La solución homogénea es;

$y_p=c_1e^{x}+c_2e^{x/4}$

$y_p=e^{x}\left(Asen2x+B\cos 2x\right)$

La solución particular es; $y_p^{'}=e^{x}\left((2A+B)\cos 2x+(A-2B)sen2x\right)$

$y_p^{"}=e^{x}\left((4A-3B)\cos 2x-(3A+4B)sen2x\right)$

Remplazando e Igualando la ecuación tenemos;

$$A=-\frac{11}{146};B=\frac{5}{146}$$

Rpta: $y=c_1e^x+c_2e^{x/4}+\frac{e^x}{146}(-11sen2x+5cos2x)$

3. $y'''+y''-2y=e^x(2\cos x+xsenx)$

RESOLUCIÓN

$y'''+y''-2y=0$
$P(t)=t^3+t^2-2=0$
De donde: $t=-2,t=1$
La solución homogénea es:
$y_g=c_1e^x+e^{-x}(c_2\cos x+c_3senx)$

La solución particular es;
$y_p=e^{-x}(A\cos x+(Bx+C)senx)$
$y_p'=e^{-x}[(Bx+C)\cos x+(B-A)senx]+e^{-x}[A\cos x+(Bx+C)senx]$
$y_p''=e^{-x}[(Bx+A-B)senx-(Bx-A+C)\cos x]+e^{-x}[(Bx+A-2B+C)\cos x+(Bx-A+B+C)senx]$
$y_p'''=e^{-x}[(2A-4B)\cos x+2(Bx-B+C)senx]+e^{-x}[2(Bx-B+c)\cos x+2(B-A)senx]$

Remplazando e Igualando la ecuación tenemos; $A=0;B=-\frac{1}{2},C=0$

Rpta: $y=c_1e^x+e^{-x}(c_2\cos x+c_3senx)-\frac{xe^x}{2}senx$

4. $y''+4y'+4y=e^{-2x}senx$

RESOLUCIÓN

$y''+4y'+4y=0$
$P(t)=t^2+4t+4=0$
De donde: $t=-2,duplicidad$
La solución homogénea es:
$y_g=e^{-2x}(c_1x+c_2)$
La solución particular es;
$y_p=e^{-2x}(Asenx+B\cos x)$
$y_p'=e^{-2x}(A\cos x-Bsenx)-e^{-2x}(2B\cos x+2Asenx)$
$y_p''=e^{-2x}[2(2A+B)senx-2(A-2B)\cos x]-e^{-2x}[(2A+B)\cos x+(A-2B)senx]$

Remplazando e Igualando la ecuación tenemos:

$$A=-1; B=0$$

Rpta: $y=e^{-2x}\left(c_1x+c_2\right)-e^{-2x}senx$

5. $y''+4y'+5y=e^{-2x}\cos x$

RESOLUCIÓN

$y''+4y'+5y=0$

$P(t)=t^2+4t+5=0$

De donde: $t=-2-i, t=-2+i$

La solución homogénea es:

$y_g=e^{-2x}\left(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x\right)$

La solución particular es similar al anterior entonces la solución general será;

Rpta: $y=e^{-2x}\left(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x\right)+\dfrac{xe^{-2x}}{2}senx$

6. $y''-2y'+2y=e^{x}\cos x$

RESOLUCIÓN

$y''-2y'+2y=0$

$P(t)=t^2-2t+2=0$

De donde: $t=1-i, t=1+i$

La solución homogénea es:

$y_g=e^x(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x)$

La solución particular es similar al anterior por lo tanto la solución general es;

Rpta: $y=e^x(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x)+\dfrac{xe^x}{2}senx$

7. $y'''+4y''-12y'=8e^{2x}\cos x.senx$

RESOLUCIÓN

$y'''+4y''-12y'=0$

$P(t)=t^3+4t^2-12t=0$

De donde: $t=-6, t=2, t=0$

La solución homogénea es:

$y_g=c_1+c_2e^{2x}+c_3e^{-6x}$

Se sabe que: $2senx.\cos x=sen2x$

Entonces la solución general será similar al problema 5:

Rpta: $y=c_1+c_2e^{2x}+c_3e^{-6x}-\dfrac{1}{68}e^{2x}(5sen2x+3\cos 2x)$

8. $y''+2y'+y=e^x\cos x$

RESOLUCIÓN

$y''+2y'+y=0$

$P(t)=t^2+2t+1=0$

De donde: $t=-1, duplicidad$

La solución homogénea es:

$y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$

Entonces la solución general será también similar al problema 5:

Rpta: $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+\dfrac{e^x}{25}(3\cos x+4\operatorname{sen} x)$

9. $y''+2y'+5y=e^xsen2x$

RESOLUCIÓN

$y''+2y'+5y=0$

$P(t)=t^2+2t+5=0$

De donde: $t=-1+i, t=-1-i$

La solución homogénea es:

$y=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2 \operatorname{sen} 2x)$

Entonces la solución general será similar al problema anterior:

$$\text{Rpta: } y=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\operatorname{sen} 2x)-\frac{xe^{-x}}{4}\cos 2x$$

10. $y''-y'=e^x senx$

RESOLUCIÓN

$y''-y'=0$

$P(t)=t^2-t=t(t-1)=0$

De donde: $t=0, t=1$

La solución homogénea es:

$y=c_1+c_2e^x$

Entonces la solución general será similar al problema anteriormente resuelto:

$$\text{Rpta: } y=c_1+c_2e^x-\frac{e^x}{2}(\cos x+\operatorname{sen} x)$$

11. $y''+2y'+y=x^2e^x\cos x$

RESOLUCIÓN

$y''+2y'+y=0$

$P(t)=t^2+2t+1=0$

De donde: $t=-1$, duplicidad

La solución homogénea es:

$y=(c_1+c_2x)e^{-x}$

Entonces la solución general será similar al problema anteriormente resuelto:

$$\text{Rpta: } y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}(-x^2\cos x+4xsenx+6\cos x)$$

12. $y'''-3y''+3y'-y=e^x\cos 2x$

RESOLUCIÓN

$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$P(t) = t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$

De donde: $t = 1$, triplicidad

La solución homogénea es:

$y = \left(c_1 + c_2x + c_3x^2\right)e^x$

Entonces la solución general será similar al problema anteriormente resuelto:

$$\text{Rpta: } y = \left(c_1 + c_2x + c_3x^2\right)e^x - \frac{e^x}{8} sen2x$$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGENEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES

V. Hallar la solución general de las ecuaciones diferenciales:

1. $y''+9y=x^2e^{3x}+6$

RESOLUCIÓN

$y''+9y=0$

$P(t)=t^2+9=(t-3i)(t+3i)=0$

De donde: $t=-3i, t=3i$

La solución homogénea es:

$y=c_1\cos 3x+c_2 sen3x$

La solución particular es;

$y_p=\left(Ax^2+Bx+C\right)e^{3x}+D$

$y_p^{'}=(2Ax+B)+De^x$

$y_p^{''}=2A+De^x$

Remplazando e Igualando en la ecuación 0riginal tenemos:

$A=\frac{1}{18}, B=-\frac{1}{27}, C=\frac{1}{162}, D=\frac{2}{3}$

$y_p=\frac{1}{18}\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)e^{3x}+\frac{2}{3}$

Rpta: $y=c_1\cos 3x+c_2 sen3x+\frac{1}{18}\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)e^{3x}+\frac{2}{3}$

2. $y''+2y'=3+4sen2x$

RESOLUCIÓN

$y''+2y'=0$

$P(t)=t^2+2t=t(t+2)=0$

De donde: $t=0, \quad t=-2$

La solución homogénea es:

$y_g=c_1+c_2e^{-2x}$

La solución particular es;

$y_p=Ax+Bsen2x+C\cos 2x$

$y_p^{'}=A+2B\cos 2x-2Csen2x$

$y_p^{''}=-4Bsenx-4C\cos 2x$

Remplazando e Igualando en la ecuación 0riginal tenemos:

$A=\frac{3}{2}, B=-\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{2}$

$y_p=\frac{3x}{2}-\frac{sen2x}{2}-\frac{\cos 2x}{2}$

Rpta: $y=c_1+c_2e^{-2x}+\frac{3x}{2}-\frac{sen2x}{2}-\frac{\cos 2x}{2}$

3. $y''+4y=x^2+3e^x, y(0)=0, y'(0)=2$

RESOLUCIÓN

$y''+4y=0$

$P(t)=t^2+4=(t-2i)(t+2i)=0$

De donde: $t=2i, t=-2i$

La solución homogénea es:

$y_g=c_1sen2x+c_2\cos 2x$

La solución particular es;

$y_p=Ax^2+Bx+C+De^x$

$y_p'=2Ax+B+De^x$

$y_p''=2A+De^x$

Remplazando e Igualando en la ecuación 0riginal tenemos:

$A=\frac{1}{4}, B=0, C=-\frac{1}{8}, D=\frac{3}{5}$

$y_p=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{8}+\frac{3}{5}e^x$

Remplazándolas condiciones iníciales y (0), y' (0) en;

$y=y_g+y_p$

Obtenemos los valores de las constantes $c_1=\frac{7}{10}, c_2=-\frac{19}{40}$

Rpta: $y=\frac{7}{10}sen2x-\frac{19}{40}\cos 2x+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{8}+\frac{3}{5}e^x$

4. $y''-2y'+y=xe^x+4, \quad y(0)=1, \ y'(0)=1$

RESOLUCIÓN

$y''-2y'+y=0$

$P(t)=t^2-2t+1=(t-1)^2=0$

De donde: $t=1$, de multiplicidad 2

La solución homogénea es:

$y_g=c_1e^x+c_2xe^x$

La solución particular es;

$$y_p = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right)e^x + Dx + E$$

$$y_p' = \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right)e^x + \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right)e^x + D$$

$$y_p'' = (6Ax + 2B)e^x + \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right)e^x + \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right)e^x + \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right)e^x$$

Remplazando e Igualando en la ecuación 0riginal tenemos:

$$A = \frac{1}{6}, B = 0, C = 0, D = 0, E = 4$$

$$y_p = \frac{x^3 e^x}{6} + 4$$

Remplazando los valores de y (0), y' (0) obtenemos;

$$c_1 = -3, c_2 = 4$$

Rpta: $y = 4xe^x - 3e^x + \dfrac{x^3 e^x}{6} + 4$

5. $2y'' + 3y' + y = x^2 + 3senx$

RESOLUCIÓN

$$2y'' + 3y' + y = 0$$

$$P(t) = 2t^2 + 3t + 1 = 0$$

De donde: $t = -1, t = -\dfrac{1}{2}$

La solución homogénea es:

$$y_g = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x/2}$$

La solución particular es;

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + Dsenx + E\cos x$$

$$y_p' = 2Ax + B + D\cos x - Esenx$$

$$y_p'' = 2A - Dsenx - E\cos x$$

Remplazando e Igualando en la ecuación 0riginal tenemos:

$$A = 1, B = -6, C = 14, D = -\frac{3}{10}, E = -\frac{9}{10}$$

$$y_p = x^2 - 6x + 14 - \frac{3}{10}senx - \frac{9}{10}\cos x$$

Rpta: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x/2} + x^2 - 6x + 14 - \dfrac{3}{10}senx - \dfrac{9}{10}\cos x$

6. $y''+y'+y=sen^2x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

RESOLUCIÓN

$y''+y'+y=0$

$P(t)=t^2+t+1=0$

De donde: $t=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, t=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

La solución homogénea es:

$y_g=c_1e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2e^{-x/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$

La solución particular es;

$y_p=Ax+Bsen2x+C\cos 2x$

$y_p^{'}=A+2B\cos 2x-2Csen2x$

$y_p^{''}=-4Bsen2x-4C\cos 2x$

Remplazando e Igualando en la ecuación 0riginal tenemos:

$A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{13}, C=\frac{3}{26}$

$y_p=\frac{1}{2}-\frac{sen2x}{13}+\frac{3cos2x}{26}$

Rpta: $y=c_1e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2e^{-x/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}-\frac{sen2x}{13}+\frac{3cos2x}{26}$

7. $y''+y'+y=2senhx=e^x-e^{-x}$

RESOLUCIÓN

$y''+y'+y=0$

$P(t)=t^2+t+1=0$

De donde: $t=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, t=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

La solución homogénea es:

$y_g=c_1e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2e^{-x/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$

La solución particular es;

$y_p=Ae^x+Be^{-x}$

$y_p^{'}=Ae^x-Be^{-x}$

$y_p^{''}=Ae^x+Be^{-x}$

Remplazando e Igualando en la ecuación 0riginal tenemos:

$$A=\frac{1}{6}, B=-\frac{1}{4}$$
$$y_p=\frac{e^x}{6}-\frac{e^{-x}}{4}$$

Rpta: $y=c_1e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2e^{-x/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{e^x}{6}-\frac{e^{-x}}{4}$

8. $y''-y'-2y=\cosh 2x=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$

RESOLUCIÓN

$$y''-y'-2y=0$$
$$P(t)=t^2-t-2=0$$

De donde: $t=-1, t=2$

La solución homogénea es:

$$y_g=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$$

La solución particular es;

$$y_p=Ae^{2x}+Be^{-2x}$$
$$y_p'=2Ae^{2x}-2Be^{-2x}$$
$$y_p''=4Ae^{2x}+4Be^{-2x}$$

Remplazando e Igualando en la ecuación 0riginal tenemos:

$$A=\frac{1}{6}, B=\frac{1}{8}$$
$$y_p=\frac{e^{2x}}{6}+\frac{e^{-2x}}{8}$$

Rpta: $y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+\frac{e^{2x}}{6}+\frac{e^{-2x}}{8}$

9. $y''+2y'+5y=e^{-x}(2x+sen2x)$

RESOLUCIÓN

$$y''+2y'+5y=0$$
$$P(t)=t^2+2t+5=0$$

De donde: $t=-1+2i, t=-1-2i$

La solución homogénea es:

$$y_g=e^{-x}(c_1cos2x+c_2sen2x)$$

La solución particular es;

$y_p = e^{-x}\left(Ax+B\right)sen2x + e^{-x}\left(Cx+D\right)\cos 2x + \left(Ex+F\right)e^{-x}$

Derivando, remplazando e Igualando en la ecuación 0riginal tenemos:

$A=0, B=0, C=-\frac{1}{4}, E=\frac{1}{2}, F=0$

$y_p = -\frac{xe^{-x}}{4}\cos 2x + \frac{xe^{-x}}{2}$

Rpta: $y = e^{-x}\left(c_1cos2x + c_2sen2x\right) - \frac{xe^{-x}}{4}\cos 2x + \frac{xe^{-x}}{2}$

10. $y^{v} - y^{iv} = xe^{x} - 1$

RESOLUCIÓN

$y^{v} - y^{iv} = 0$

$P\left(t\right) = t^5 - t^4 = 0$

De donde: $t=0, multiplicidad = 4, t=1$

La solución homogénea es:

$y_g = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4 + c_5e^{x}$

La solución particular es;

$y_p = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{x} + Dx + F$

$y_p^{'} = \left(2Ax+B\right)e^{x} + \left(Ax^2+Bx+C\right)e^{x} + D$

$y_p^{"} = 2Ae^{x} + \left(2Ax+B\right)e^{x} + \left(2Ax+B\right)e^{x} + \left(Ax^2+Bx+C\right)e^{x}$

Derivando hasta la quinta derivada, Remplazando e Igualando en la ecuación 0riginal tenemos:

$A=\frac{1}{2}, B=-4, C=0, D=\frac{1}{24}, E=0$

$y_p = \left(\frac{x^2}{2} - 4x\right)e^{x} + \frac{x^4}{24}$

Rpta: $y = \frac{x^4}{24} + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4 + \left(\frac{x^2}{2} - 4x + c_5\right)e^{x}$

11. $y''' - 4y' = xe^{2x} + senx + x^2$

RESOLUCIÓN

$y''' - 4y' = 0$

$P\left(t\right) = t^3 - 4t = 0$

De donde: $t=0, t=2, t=-2$

La solución homogénea es:

$y_g = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}$

La solución particular es;

$y_p = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{2x} + Dsenx + E\cos x + Fx^3 + Gx^2 + Hx$

Derivando, remplazando e Igualando en la ecuación 0riginal tenemos:

$A = 1, B = -\frac{3}{2}, C = 0, D = 0, E = \frac{1}{5}, F = -\frac{1}{12}, G = 0, H = -\frac{1}{8}$

$y_p = \frac{\cos x}{5} - \frac{x^3}{12} - \frac{x}{8} + \frac{e^{2x}}{2}\left(2x^2 - 3x\right)$

Rpta: $y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} + \frac{\cos x}{5} - \frac{x^3}{12} - \frac{x}{8} + \frac{e^{2x}}{2}\left(2x^2 - 3x\right)$

12. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\cos x + xe^{-x}$

RESOLUCIÓN

$y'' + 2y' + 2y = 0$

$P(t) = t^2 + 2t + 2 = 0$

De donde: $t = -1 + i, t = -1 - i$

La solución homogénea es:

$y_g = e^{-x}\left(c_1\cos x + c_2senx\right)$

La solución particular es;

$y_p = e^{-x}\left(Asenx + B\cos x + Dx + E\right)$

$y_p' = e^{-x}\left(A\cos x - Bsenx + D\right) + e^{-x}\left(Asenx + B\cos x + Dx + E\right)$

$y_p'' = \ldots$

Remplazando e Igualando en la ecuación 0riginal tenemos:

$A = \frac{1}{2}, B = 0, D = 1, E = 0$

$y_p = \frac{x}{2}e^{-x}senx + xe^{-x}$

Rpta: $y = \frac{x}{2}e^{-x}senx + xe^{-x} + e^{-x}\left(c_1\cos x + c_2senx\right)$

13. $y^{iv} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{\cos x}{2}$

RESOLUCIÓN

$y^{iv} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = 0$

$P(t) = t^4 + 2t^3 + 2t^2 + 2t + 1 = 0$

De donde: $t=-1, duplicidad, t=-i, t=i$

La solución homogénea es:

$$y_g=(c_1+c_2x)e^{-x}+c_3\cos x+c_4 senx$$

La solución particular es;

$$y_p=(Ax+B)e^x+(Cx+D)senx+(Ex+F)\cos x$$

Remplazando e Igualando en la ecuación Original tenemos:

$$A=\frac{1}{8}, B=-\frac{1}{4}, C=0, D=0, E=-\frac{1}{8}, F=0$$

$$y_p=e^x\left(\frac{x}{8}-\frac{1}{4}\right)-\frac{x}{8}\cos x$$

Rpta: $y=e^x\left(\frac{x}{8}-\frac{1}{4}\right)+(c_1+c_2x)e^{-x}+\left(c_3-\frac{x}{8}\right)\cos x+c_4 senx$

14. $y''+y'=\cos^2 x+e^x+x^2$

RESOLUCIÓN

$$y''+y'=0$$

$$P(t)=t^2+t=t(t+1)=0$$

De donde: $t=0, t=-1$

La solución homogénea es:

$$y_g=c_1+c_2e^{-x}$$

La solución particular es;

$$y_p=Asen2x+B\cos 2x+Ce^x+x\left(Dx^2+Ex+F\right)$$

Derivando hasta la segunda derivada, Remplazando e Igualando en la ecuación Original tenemos:

$$A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{10}, C=\frac{1}{2}, D=\frac{1}{3}, E=-1, F=2$$

$$y_p=\frac{x^3}{3}-x^2+2x+\frac{e^x}{2}+\frac{\operatorname{sen} x}{2}-\frac{\cos 2x}{10}$$

Rpta: $y=c_1+c_2e^{-x}+\frac{x^3}{3}-x^2+2x+\frac{e^x}{2}+\frac{\operatorname{sen} x}{2}-\frac{\cos 2x}{10}$

15. $y^v+4y'''=e^x+3sen2x+1$

RESOLUCIÓN

$$y^v+4y'''=0$$

$$P(t)=t^5+4t^3=t^3\left(t^2+4\right)=0$$

De donde: $t=0$ de multiplicidad 3, $t=-2i$, $t=2i$,

La solución homogénea es:

$y_g = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4\cos 2x + c_5 sen2x$

La solución particular es;

$y_p = Ae^x + Bxsen2x + Cx\cos 2x + Dx^5 + Ex^3$

Derivando hasta la quinta derivada, Remplazando e Igualando en la ecuación Original tenemos:

$A = \frac{1}{5}, B = \frac{3}{32}, C = 0, D = 0, E = \frac{1}{24}$

$y_p = \frac{e^x}{5} + \frac{x^3}{24} + \frac{3x}{32}sen2x$

Rpta: $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4\cos 2x + c_5 sen2x + \frac{e^x}{5} + \frac{x^3}{24} + \frac{3x}{32}sen2x$

16. $y'' - y' = x^2 - e^{-x} + e^x$

RESOLUCIÓN

$y'' - y' = 0$

$P(t) = t^2 - t = t(t-1) = 0$

De donde: $t = 0, t = 1$

La solución homogénea es:

$y_g = c_1 + c_2e^x$

La solución particular es;

$y_p = x\left(Ax^2 + Bx + C\right) + \left(Dx + E\right)e^{-x} + \left(Fx + G\right)e^x$

Derivando hasta la segunda derivada, Remplazando e Igualando en la ecuación Original tenemos:

$A = \frac{1}{3}, B = -1, C = 2, D = 1, E = 0, F = \frac{1}{2}, G = 0$

$y_p = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + xe^{-x} + \frac{x}{2}e^x$

Rpta: $y = c_1 + c_2e^x + \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + xe^{-x} + \frac{x}{2}e^x$

17. $y'' - 3y' = 1 + e^x + \cos x + senx$

RESOLUCIÓN

$y'' - 3y' = 0$

$P(t) = t^2 - 3t = t(t-3) = 0$

De donde: $t = 0, t = 3$

La solución homogénea es:
$y_g = c_1 + c_2 e^{3x}$

La solución particular es;

Similar al problema anterior entonces:

$$\text{Rpta: } y = c_1 + c_2 e^{3x} - \frac{e^x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{\cos x - 2senx}{5}$$

18. $y'' - 4y' = 4x + senx + sen2x$

RESOLUCIÓN

$y'' - 4y' = 0$
$P(t) = t^2 - 4t = t(t-4) = 0$
De donde: $t = 0, \quad t = 4$
La solución homogénea es:
$y_g = c_1 + c_2 e^{4x}$
La solución particular es;
$y_p = x + 1 + \frac{1}{25}(4\cos x + 3senx) + \frac{cos2x}{8}$

$$\text{Rpta: } y = c_1 + c_2 e^{4x} + x + 1 + \frac{1}{25}(4\cos x + 3senx) + \frac{cos2x}{8}$$

19. $y'' - 4y' + 5y = 1 + \cos^2 x + e^{2x}$

RESOLUCIÓN

$y'' - 4y' + 5y = 0$
$P(t) = t^2 - 4t + 5 = 0$
De donde: $t = 2 + i, t = 2 - i$
La solución homogénea es:
$y_g = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} senx$

La solución particular es;
$y_p = \frac{3}{10} + \frac{\cos 2x}{130} - \frac{4sen2x}{65}$

$$\text{Rpta: } y = (c_1 \cos x + c_2 senx + 1)e^{2x} + \frac{3}{10} + \frac{\cos 2x}{130} - \frac{4sen2x}{65}$$

20. $y''' - 2y' + 4y = e^x \cos x + x^2 + sen2x$

RESOLUCIÓN

$y'''-2y'+4y=0$

$P(t)=t^3-2t+4=0$

De donde: $t=-2,\ t=1+i, t=1-i$

La solución homogénea es:

$y_g=c_1e^{-2x}+(c_2\cos x+c_3 senx)e^x$

La solución particular es;

$$y_p=\frac{1}{8}(2x^2+2x+1)+\frac{1}{40}(sen2x+3\cos 2x)+\frac{xe^x}{20}(3senx-\cos x)$$

Rpta:

$$y=c_1e^{-2x}+(c_2\cos x+c_3 senx)e^x+\frac{1}{8}(2x^2+2x+1)+\frac{1}{40}(sen2x+3\cos 2x)+\frac{xe^x}{20}(3senx-\cos x)$$

21. $y''+2y'=3+4sen2x$

RESOLUCIÓN

$y''+2y'=0$

$P(t)=t^2+2t=t(t+2)=0$

De donde: $t=0,\quad t=-2$

La solución homogénea es:

$y_g=c_1+c_2e^{-2x}$

La solución particular es;

$y_p=Ax+Bsen2x+C\cos 2x$

$y_p'=A+2B\cos 2x-2Csen2x$

$y_p''=-4Bsenx-4C\cos 2x$

Remplazando e Igualando en la ecuación 0riginal tenemos:

$A=\frac{3}{2}, B=-\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{2}$

$y_p=\frac{3x}{2}-\frac{sen2x}{2}-\frac{\cos 2x}{2}$

Rpta: $y=c_1+c_2e^{-2x}+\dfrac{3x}{2}-\dfrac{sen2x}{2}-\dfrac{\cos 2x}{2}$

22. $y''-2y'+y=xe^x+4,\quad y(0)=1,\ y'(0)=1$

RESOLUCIÓN

$y''-2y'+y=0$

$P(t)=t^2-2t+1=(t-1)^2=0$

De donde: $t=1$, de multiplicidad 2

La solución homogénea es:

$y_g = c_1 e^x + c_2 x e^x$

La solución particular es;

$y_p = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right)e^x + Dx + E$

$y_p^{'} = \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right)e^x + \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right)e^x + D$

$y_p^{''} = \left(6Ax + 2B\right)e^x + \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right)e^x + \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right)e^x + \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right)e^x$

Remplazando e Igualando en la ecuación 0riginal tenemos:

$A = \frac{1}{6}, B = 0, C = 0, D = 0, E = 4$

$y_p = \frac{x^3 e^x}{6} + 4$

Remplazando los valores de y (0), y' (0) obtenemos;

$c_1 = -3, c_2 = 4$

Rpta: $y = 4xe^x - 3e^x + \frac{x^3 e^x}{6} + 4$

23. $2y'' + 3y' + y = x^2 + 3senx$

RESOLUCIÓN

$2y'' + 3y' + y = 0$

$P(t) = 2t^2 + 3t + 1 = 0$

De donde: $t = -1, t = -\frac{1}{2}$

La solución homogénea es:

$y_g = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x/2}$

La solución particular es;

$y_p = Ax^2 + Bx + C + Dsenx + E\cos x$

$y_p^{'} = 2Ax + B + D\cos x - Esenx$

$y_p^{''} = 2A - Dsenx - E\cos x$

Remplazando e Igualando en la ecuación 0riginal tenemos:

$A = 1, B = -6, C = 14, D = -\frac{3}{10}, E = -\frac{9}{10}$

$y_p = x^2 - 6x + 14 - \frac{3}{10}senx - \frac{9}{10}\cos x$

Rpta: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x/2} + x^2 - 6x + 14 - \frac{3}{10}senx - \frac{9}{10}\cos x$

24. $y'' - 8y' + 15y = 15x^2 + 14y + 1 + e^x$

RESOLUCIÓN

$y"-8y'+15y=0$

$P(t)=t^2-8t+15=0$

De donde: $t=3, t=5$

La solución homogénea es:

$y_g=c_1e^{3x}+c_2e^{5x}$

La solución particular es;

$y_p=\left(Ax^2+Bx+C\right)+De^x$

$y_p'=\left(2Ax+B\right)+De^x$

$y_p''=2A+De^x$

Remplazando e Igualando en la ecuación Original tenemos:

$A=1, B=2, C=1, D=\frac{1}{8}$

$y_p=(x+1)^2+\frac{e^x}{8}$

Rpta: $y=c_1e^{3x}+c_2e^{5x}+\left(x+1\right)^2+\frac{e^x}{8}$

25. $y'''+4y'+4y'=e^{-2x}+8\left(x+1\right)$

RESOLUCIÓN

$y'''+4y''+4t'=0$

$P(t)=t^3+4t^2+4t=0$

De donde: $t=-2,$ de multiplicidad 2,

$t=0$

La solución homogénea es:

$y_g=c_1+e^{-2x}\left(c_2x+c_3\right)$

La solución particular es;

$y_p=\left(Ax^2+Bx+C\right)e^{-2x}+Dx^2+Ex+F$

$y_p'=\left(2Ax+B\right)e^{-2x}-2\left(Ax^2+Bx+C\right)e^{-2x}+2Dx+E$

$y_p''=2Ae^{-2x}-2\left(2Ax+B\right)e^{-2x}+4e^{-2x}\left(Ax^2+Bx+C\right)+2e^{-2x}\left(2Ax+B\right)+2D$

$y_p'''=-4e^{-2x}+....$

Remplazando e Igualando en la ecuación Original tenemos:

$A=-\frac{1}{4}, B=0, C=0, D=1, E=0, F=0$

$y_p=x^2-\frac{x^2e^{-2x}}{4}$

Rpta: $y=c_1+e^{-2x}(c_2x+c_3)+x^2-\frac{x^2e^{-2x}}{4}$

26. $y^{iv}-y^{iii}+y^{ii}=12x^2-24x+e^{-x}$

RESOLUCIÓN

$y^{iv}-y^{iii}+y^{ii}=0$

$P(t)=t^4-t^3+y^2=t(t^2-t+1)=0$

De donde: $t=0, t=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}, t=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

La solución homogénea es:

$y_g=c_1+c_2x+e^{x/2}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_4 sen\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

$y_g=c_1+c_2x$

La solución particular es;

$y_p=Ax^4+Bx^3+Cx^2+Ee^{-x}$

$y_p^{'}=4Ax^3+3Bx^2+2Cx-Ee^{-x}$

$y_p^{''}=12Ax^2+6Bx+2C+Ee^{-x}$

$y_p^{'''}=24Ax+6B-Ee^{-x}$

$y_p^{iv}=24A+Ee^{-x}$

Remplazando e Igualando en la ecuación 0riginal tenemos:

$A=1, B=0, C=-12, E=\frac{1}{3}$

$y_p=x^4-12x^2+\frac{e^{-x}}{3}$

Rpta: $y=c_1+c_2x+e^{x/2}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_4 sen\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+x^4-12x^2+\frac{e^{-x}}{3}$

27. $y^{iv}-8y''+16y=xsenhx(2x)$

RESOLUCIÓN

$y^{iv}-8y''+16y=0$

$P(t)=t^4-8t^2+16=(t+2)^2(t-2)^2=0$

De donde: $t=2, t=-2, duplicidad$

La solución homogénea es:

$$y_g = e^{2x}(c_1x+c_2)+e^{-2x}(c_3x+c_4)$$

$$y = y_g + y_p$$

La solución particular es;

$$y_p = x^2e^{2x}\left(\frac{x}{192}-\frac{1}{128}\right)-x^3e^{-2x}\left(\frac{x}{192}+\frac{1}{128}\right)$$

Rpta: $y = e^{2x}(c_1x+c_2)+e^{-2x}(c_3x+c_4)+x^2e^{2x}\left(\frac{x}{192}-\frac{1}{128}\right)-x^3e^{-2x}\left(\frac{x}{192}+\frac{1}{128}\right)$

28. $y'''-y' = \left(x+e^x\right)^2$

RESOLUCIÓN

$$y'''-y'=0$$

$$P(t)=t^3-t=t(t+1)(t-1)=0$$

De donde: $t=0, t=1, t=-1$

La solución homogénea es:

$$y_g = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x}$$

$$y = y_g + y_p$$

La solución particular es:

$$y_p = Ax^3+Bx^2+Cx+x(Dx+E)e^x+Fe^{2x}$$

$$y_p' = 3Ax^2+2Bx+C+(2Dx+E)e^x+x(Dx+E)e^x+2Fe^{2x}$$

$$y_p'' = 6Ax+2B+2De^x+(2Dx+E)e^x+(2Dx+E)e^x+x(Dx+E)e^x+4Fe^{2x}$$

Remplazando e Igualando en la ecuación 0riginal tenemos:

$$A=-\frac{1}{3}, B=0, C=-2, D=\frac{1}{2}, E=-\frac{3}{2}, F=\frac{1}{6}$$

$$y_p = \frac{e^{2x}}{6}-x\left(\frac{x^2}{3}+2\right)+\frac{x}{2}(x-3)e^x$$

Rpta: $y = c_1+c_2e^x+c_3e^{-x}+\frac{e^{2x}}{6}-x\left(\frac{x^2}{3}+2\right)+\frac{x}{2}(x-3)e^x$

29. $y'''+y''+y'+y = x\cosh(-x)$

RESOLUCIÓN

$y'''+y''+y'+y=0$
$P(t)=t^3+t^2+t+1=0$
De donde: $t=1, t=i, t=-i$

La solución homogénea es:

$y_g=c_1e^x+c_2\cos x+c_3senx$
$\cosh(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^x}{2}$
$y=y_g+y_p$

La solución particular es:

$y_p=\left(Ax^2+Bx+C\right)e^x+x\left(Dx+E\right)e^{-x}$
$y_p^{'}=\left(Ax^2+\left(2A+B\right)x+C+B\right)e^x-\left(Dx^2+\left(E-2D\right)x+E\right)e^{-x}$

Remplazando e Igualando en la ecuación 0riginal tenemos:

$A=0, B=\dfrac{1}{8}, C=-\dfrac{3}{16}, D=\dfrac{1}{8}, E=\dfrac{1}{4}$
$y_p=\dfrac{e^x}{8}(x-3/2)+\dfrac{x}{8}(x+2)e^{-x}$

Rpta: $y=c_1e^{-x}+c_2\cos x+c_3senx+\dfrac{e^x}{8}(x-3/2)+\dfrac{x}{8}(x+2)e^{-x}$

30. $y'''+2y''+y'=senx+2\cos 2x$

RESOLUCIÓN

$y'''+2y''+y'=0$
$P(t)=t^3+2t^2+t=0$
De donde: $t=0,\quad t=-1$ de multiplicidad 2

La solución homogénea es:

$y_g=c_1+e^{-x}\left(c_2x+c_3\right)$
$y=y_g+y_p$

La solución particular es:

$$y_p = Asenx + B\cos x + Csen2x + D\cos 2x$$
$$y_p^{'} = A\cos x - Bsenx + 2C\cos 2x - 2Dsen2x$$
$$y_p^{''} = -Asenx - B\cos x - 4Csen2x - 4D\cos 2x$$
$$y_p^{'''} = -A\cos x + Bsenx - 8Csen2x + 8Dsen2x$$

Remplazando e Igualando en la ecuación 0riginal tenemos:

$$A = -\frac{1}{2}, B = 0, C = -\frac{3}{25}, D = -\frac{4}{25}$$
$$y_p = -\frac{senx}{2} - \frac{1}{25}(3sen2x + 4\cos 2x)$$

Rpta: $y = c_1 + e^{-x}(c_2x + c_3) - \dfrac{senx}{2} - \dfrac{1}{25}(3sen2x + 4\cos 2x)$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGENEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES

VI. Dar la forma de la solución particular de las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $y''-4y'=x^2e^{2x}$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''-4y=0$$
$$t^2-4=0$$
$$(t-2)(t+2)\begin{cases} t_1=2, \\ t_2=-2 \end{cases}$$
$$\rightarrow y^h=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$$
$$y^p \Rightarrow xe^{2x}\left(Ax^2+Bx+C\right)$$

Rpta: $y_p=xe^{2x}\left(Ax^2+Bx+C\right)$

2. $y''+9y=\cos 2x$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''+9y=0$$
$$t^2+9=0$$
$$(t-3i)(t+3i)\begin{cases} t_1=3i \\ t_2=-3i \end{cases}$$
$$\rightarrow y^h=C_1\cos 3x+C_2\operatorname{sen}3x$$
$$y^p \Rightarrow A\cos 2x+B\operatorname{sen}2x$$

Rpta: $A\cos 2x+B\operatorname{sen}2x$

3. $y''-4y'+4y=sen2x+e^{2x}$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''-4y'+4y=0$$
$$t^2-4t+4=0$$
$$(t-2)(t-2)\{\ t_1=2,\quad multiplicidad\ \ 2.$$

$$\rightarrow y^h = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$$

$$y^p \Rightarrow \begin{cases} y_{p1} = A\text{sen}\,2x + B\cos 2x \\ y_{p2} = Cx^2e^{2x} \end{cases} \Rightarrow y^p = A\text{sen}\,2x + B\cos 2x + Cx^2e^{2x}$$

Rpta: $y_p = A\cos 2x + Bsen2x + Cx^2e^{2x}$

4. $y''+2y'+2y = e^x senx$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''+2y'+2y = 0$$

$$t^2 + 2t + 2 = \begin{cases} t_1 = -1+i \\ t_2 = -1-i \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\text{sen}3\text{x}$$

$$y^p \Rightarrow e^x\left(A\cos x + B\,\text{sen}\,x\right)$$

Rpta: $y_p = e^x\left(A\cos x + Bsenx\right)$

5. $y''-5y'+6y = \left(x^2+1\right)e^x + xe^{2x}$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''-5y'+6y = 0$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$\left(t-3\right)\left(t-2\right)\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$$

$$y^p \Rightarrow e^x\left(Ax^2 + Bx + C\right) + xe^{2x}\left(Dx+E\right)$$

Rpta: $y_p = e^x\left(Ax^2 + Bx + C\right) + xe^{2x}\left(Dx+E\right)$

6. $y''-2y'+5y = xe^x\cos 2x - x^2e^x sen2x$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''-2y+5y=0$$

$$t^2-2t+5=0\begin{cases} t_1=1+2i \\ t_2=1-2i \end{cases}$$

$$\to y^h=C_1e^x\cos 2x+C_2e^x\text{sen}\,2x$$

$$y^p \Rightarrow xe^x\left(\left(Ax^2+Bx+C\right)\cos 2x+\left(Dx^2+Ex+F\right)\text{sen}\,2x\right)$$

Rpta: $y_p=xe^x\left[\left(Ax^2+Bx+C\right)\cos 2x+\left(Dx^2+Ex+F\right)sen2x\right]$

7. $y''+3y'=2x^4+x^2e^{-3x}+sen3x$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''+3y'=0$$

$$t^2+3t=0$$

$$t(t+3)\begin{cases} t_1=0 \\ t_2=-3 \end{cases}$$

$$\to y^h=C_1+C_2e^{-3x}$$

$$y^p \Rightarrow x\left(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E\right)+x^3e^{-3x}\left(Fx^2+Gx+H\right)+I\text{sen}3x+J\cos 3x$$

Rpta:

$$y=x\left(A_1x^4+A_2x^4+A_3x^2+A_4x+A_5\right)+x\left(B_1x^2+B_2x+B_3\right)e^{-x}+Dsen3x+E\cos 3x$$

8. $y''+y=x(1+senx)$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''+y=0$$

$$t^2+1=0$$

$$(t+i)(t-i)\begin{cases} t_1=-i \\ t_2=i \end{cases}$$

$$\to y^h=C_1\cos x+C_2\text{sen}x$$

$$y^p \Rightarrow Ax+B+x\left(Cx+D\right)\text{sen}x+x\left(Ex+F\right)\cos x$$

Rpta: $y_p=\left(A_1x+A_2\right)+x\left(B_1x+B_2\right)senx+x\left(D_1x+D_2\right)\cos x$

9. $y''-5y'+6y=e^x\cos 2x+e^{2x}\left(3x+4\right)senx$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''+5y'+6y=0$$

$$t^2+5t+6=0$$

$$(t+3)(t+2)\begin{cases} t_1=-2 \\ t_2=-3 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$$

$$y^p \Rightarrow e^x\left(A\operatorname{sen}2x+B\cos 2x\right)+e^{2x}\left(Cx+D\right)\operatorname{sen}x+e^{2x}\left(Ex+F\right)\cos x$$

Rpta: $y_p = e^x\left(A\cos 2x+Bsen2x\right)+\left(D_1+D_2x\right)e^{2x}senx+\left(E_1x+E_2\right)e^{2x}\cos x$

10. $y''+2y'+2y=3e^{-x}+2e^{-x}\cos x+4e^{-x}x^2senx$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''+2y'+2y=0$$

$$t^2+2t+2\begin{cases} t_1=-1+i \\ t_2=-1-i \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1e^{-x}\cos x+C_2e^{-x}\operatorname{sen}x$$

$$y^p \Rightarrow e^{-x}A+xe^{-x}\left(\left(Bx^2+Cx+D\right)\cos x+\left(Ex^2+Fx+J\right)\operatorname{sen}x\right)$$

Rpta: $y_p = Ae^x+x\left(B_1x^2+B_2x+B_3\right)e^{-x}\cos x+x\left(C_1x^2+C_2x+C_3\right)e^{-x}senx$

11. $y''+3y'+2y=e^x\left(x^2+1\right)sen2x+3e^x\cos x+4e^x$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''+3y'+2y=0$$

$$t^2+3t+2$$

$$(t+2)(t+1)\begin{cases} t_1=-2 \\ t_2=-1 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$$

$$y^p \Rightarrow e^x\left(Ax^2+Bx+C\right)\operatorname{sen}2x+\left(Dx^2+Ex+F\right)\cos 2x+e^x\left(G\operatorname{sen}x+H\cos x\right)+Ie^x$$

Rpta:

$$y_p = e^x\left(Ax^2+Bx+C\right)\operatorname{sen}2x+\left(Dx^2+Ex+F\right)\cos 2x+e^x\left(G\operatorname{sen}x+H\cos x\right)+Ie^x$$

12. $y''+4y'=x^2sen2x+\left(6x+7\right)\cos 2x$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''+4y=0$$
$$t^2+4=$$
$$(t-2i)(t+2i)\begin{cases} t_1=2i \\ t_2=-2i \end{cases}$$
$$\rightarrow y^h=C_1\cos 2x+C_2\text{sen}2x$$
$$y^p \Rightarrow x\left(\left(Ax^2+Bx+C\right)\text{sen}2x+\left(Dx^2+Ex+F\right)\cos 2x\right)$$

Rpta: $x\left(\left(Ax^2+Bx+C\right)\text{sen}2x+\left(Dx^2+Ex+F\right)\cos 2x\right)$

13. $y''-4y'+4y=2x^2+4xe^{2x}+x\text{sen}2x$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''-4y'+4y=0$$
$$t^2-4t+4=0$$
$$(t-2)(t-2)\{t_1=2,\ \ multiplicidad\ \ 2.$$
$$\rightarrow y^h=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$$
$$y^p \Rightarrow \left(Ax^2+Bx+C\right)+x^2e^{2x}(Dx+E)+\left((Fx+G)\text{sen}2x+(Hx+I)\cos 2x\right)$$

Rpta: $y_p=\left(Ax^2+Bx+C\right)+x^2e^{2x}(Dx+E)+\left((Fx+G)\text{sen}2x+(Hx+I)\cos 2x\right)$

14. $y''-4y'+4y=x\left(2e^{2x}+x\text{sen}x\right)=2xe^{2x}+x^2\text{sen}x$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''-4y'+4y=0$$
$$t^2-4t+4=0$$
$$(t-2)(t-2)\{t_1=2,\ \ multiplicidad\ \ 2.$$
$$\rightarrow y^h=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$$
$$y^p \Rightarrow xe^{2x}(Ax+B)+\left(Cx^2+Dx+E\right)\text{sen}x+\left(Fx^2+Gx+H\right)\cos x$$

Rpta: $y_p=x(A_1x+A_2)e^{2x}+\left(B_1x^2+B_2x+B_3\right)\text{sen}x+\left(C_1x^2+C_2x+C_3\right)\cos x$

15. $y''+2y'+2y=x^2-3xe^{-2x}\cos 5x$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''+2y'+2y=0$$

$$t^2+2t+2\begin{cases} t_1=-1+i \\ t_2=-1-i \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h=C_1e^{-x}\cos x+C_2e^{-x}\text{sen}x$$

$$y^p \Rightarrow (Ax^2+Bx+C)+e^{-2x}((Dx+E)\cos 5x+(Fx+E)\text{sen}5x)$$

Rpta: $y_p=\left(A_1x^2+A_2x+A_3\right)+x\left(B_1x+B_2\right)e^{-2x}sen5x+x\left(C_1x+C_2\right)e^{-2x}\cos 5x$

16. $y'''-3y'-2y=e^x\left(1+xe^x\right)=e^x+xe^{2x}$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y'''-3y'-2y=0$$

$$t^3-3t-2\begin{cases} t_1=-1 \ \ multiplicidad \ \ 2 \\ t_2=2 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+C_3xe^{-x}$$

$$y^p \Rightarrow Ax^2e^x+xe^{2x}(Bx+C)$$

Rpta: $y_p=Ax^2e^x+xe^{2x}(Bx+C)$

17. $y^{iv}+5y''+4y=2\cos x$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y^{iV}+5y''+4y=0$$

$$t^4+5t^2+4\begin{cases} t_1=-4 \\ t_3=-5 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h=C_1e^{-4x}+C_2e^{-5x}$$

$$y^p \Rightarrow A\text{sen}x+B\cos x$$

Rpta: $A\text{sen}x+B\cos x$

18. $y''-4y'+8y=e^{2x}\left(1+sen2x\right)$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y''-4y'+8y=0$$

$$t^2-4t+8\begin{cases} t_1=2+2i \\ t_3=2-2i \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1e^{2x}\cos 2x + C_2e^{2x}\text{sen}2x$$

$$y^p \Rightarrow Ae^x + e^x(Bx\text{sen}2x + Cx\cos 2x)$$

Rpta: $Ae^x + e^x(Bx\text{sen}2x + Cx\cos 2x)$

19. $y^{iii} - y^{ii} - y^{i} + y = 2\left(x+2e^{-x}\right)$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y'''-y''+y'=0$$

$$t^3-t^2+t\begin{cases} t_1=0; \quad t_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad t_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1 + C_2e^{\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_3e^{\frac{1}{2}x}sen(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

$$y^p \Rightarrow (Ax+B) + Ce^{-x}$$

Rpta: $y_p = (Ax+B) + Ce^{-x}$

20. $y^{iii} + 3y^{ii} - 4y = 9xe^{-2x} + 4x$

RESOLUCIÓN

$$y^h \Rightarrow y'''+3y''-4y=0$$

$$t^3+3t^2-4\begin{cases} t_1=-2 \ \ multiplicidad \ 2 \\ t_2=1 \end{cases}$$

$$\rightarrow y^h = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + C_3e^{x}$$

$$y^p \Rightarrow x^2e^{-2x}(Ax+B) + Cx + D$$

Rpta: $x^2e^{-2x}(Ax+B) + Cx + D$

SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Resolver los siguientes ejercicios

1. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z & \ldots(1) \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x & \ldots(2) \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y & \ldots(3) \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

Llevando al método de matriz:

$$P(r) = \begin{bmatrix} -r & 1 & 1 \\ 1 & -r & 1 \\ 1 & 1 & -r \end{bmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \quad -r\left(r^2 - 1\right) - \left(-r - 1\right) + (r + 1) = 0$$

Sus raíces son:

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 1 \\ r_3 = -2 \end{cases}$$

Rpta: $x = \left(c_1 + c_2 t\right)e^t + ce^{-2t}$

2. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z & \ldots(1) \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + z & \ldots(2) \\ \dfrac{dz}{dt} = 3x + y & \ldots(3) \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

$$P(r) = \begin{bmatrix} -r & 1 & 1 \\ 3 & -r & 1 \\ 3 & 1 & -r \end{bmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \quad -r\left(r^2 - 1\right) - \left(-3r - 3\right) + (3r + 3) = 0$$

Sus raíces son:

$$\begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = 3 \\ r_3 = -2 \end{cases}$$

Rpta: $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} t + e^{-2t}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x + 8y - 2z \end{cases}$

RESOLUCIÓN

De (1) se tiene $y = \frac{1}{8}\frac{dx}{dt}$ Reemplazando en (2):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{8}\frac{dx}{dt}\right) = -2z$$

Derivando:

$$\frac{1}{8}\frac{d^3x}{dt^3} = -2\frac{dz}{dt}$$

$$-\frac{d^3x}{16dt^3} = \frac{dz}{dt} \quad \text{Re}\,emplando \text{ en } (3):$$

$$\frac{1}{16}\frac{d^3x}{dt^3} = 2x + 8y - 2z \Rightarrow$$

$$\frac{d^3x}{16dt^3} + 2x + \frac{dx}{dt} + \frac{1}{8}\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

Es una ecuación homogénea.

El polinomio general de la ecuación diferencial es:

$$P(r) = r^2(r+2) + 16(r+2) = (r+2)(r^2+16) = 0$$

$$Donde\ \ r_1 = -4i, r_2 = 4i, r_3 = -2$$

La solución general de la ecuación es:

$$x = c_1 \cos 4t + c_2 sen 4t + c_3 e^{-2t}$$

Rpta: $x = c_1 \cos 4t + c_2 sen 4t + c_3 e^{-2t}$

4. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - y & \ldots(1) \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y & \ldots(2) \end{cases}$$

RESOLUCIÓN:

De (1) se tiene $y = 6x - \dfrac{dx}{dt}$ Reemplazando en (2):

$$6 - \frac{d^2x}{dt^2} = 15x - 2\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 15x = 6$$

El polinomio general de la ecuación diferencial es:

$$P(r) = r^2 - 2r + 15 = 0$$

$$Donde\ \ r_1 = 2 + \sqrt{14}i, \quad r_2 = 2 - \sqrt{14}i$$

La solución general de la ecuación es:

$$x = \left(c_1 \cos\sqrt{14}t + c_2 sen\sqrt{14}t\right)e^{2t}$$

La solución particular es de la forma:

$$x_p = At + B$$

De donde derivando la ecuación particular:

$$x_p = Ae^t + (Bt + C), \quad x_p^{'} = Ae^t + B, \quad x_p^{''} = Ae^t$$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$$Ae^t - Ae^t - 3\left(Ae^t + Bt\right) - 3C = 7e^t + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} 3Ae^t = -7 \\ 3C = -1 \end{array}\right\} de\ donde \begin{cases} A = -\dfrac{7}{3} \\ B = 0 \\ C = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Luego $y_p = -\dfrac{7}{3}e^t - \dfrac{1}{3}$ y la solución general es: $x = x_h + x_p$

$$x = \left(c_1 e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)t}\right) - \frac{7}{3}e^t - \frac{1}{3}$$

Rpta: $$x = \left(c_1 e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)t}\right) - \frac{7}{3}e^t - \frac{1}{3}$$

5. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y & \ldots(1) \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y & \ldots(2) \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

De (1) se tiene $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\frac{dx}{dt}$ Reemplazando en (2):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\frac{dx}{dt}\right) = 2x - 3\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{3}{4}\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{4dt^2} = 2x - \frac{9}{4}x + \frac{3}{4}\frac{dx}{dt}$$

$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$ Es una ecuación homogénea.

El polinomio general de la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^2 - 1 = (r-1)(r+1) = 0$

$Donde\ \ r = 1, \quad r = -1$

La solución general de la ecuación es:

$$x = c_1e^t + c_2e^{-t}$$

Rpta: $x = c_1e^t + c_2e^{-t}$

6. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y & \ldots(1) \\ \dfrac{dy}{dt} = 9x + 2y & \ldots(2) \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

De (1) se tiene $y = 2x - \frac{dx}{dt}$ Reemplazando en (2):

$$\frac{d}{dt}\left(2x - \frac{dx}{dt}\right) = 13x - 2\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 13x = 2$$

$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$ Es una ecuación homogénea.

El polinomio general de la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^2 - 2r + 13 = 0$

$Donde\ \ r_1 = 1 + 2\sqrt{3}i, \quad r_2 = 1 - 2\sqrt{3}i$

La solución general de la ecuación es:

$$x = \left(c_1 \cos 2\sqrt{3}x + c_2 sen 2\sqrt{3}x\right)e^t$$

La solución particular es de la forma:

$$x_p = At + B$$

De donde derivando la ecuación particular:

$x_p = At + B, \quad x_p^{'} = A, \quad x_p^{''} = 0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$0 - 2A + 13(At + B) = 2$

$\left.\begin{matrix} 13A = 0 \\ 13B - 2A = 2 \end{matrix}\right\} de\ \ donde \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{2}{13} \end{cases}$

Luego $y_p = \dfrac{2}{13}$ y la solución general es: $x = x_h + x_p$

$x = \left(c_1 \cos 2\sqrt{3}t + c_2 sen 2\sqrt{3}t\right)e^t + \dfrac{2}{13}$

Rpta: $x = \left(c_1 \cos 2\sqrt{3}t + c_2 sen 2\sqrt{3}t\right)e^t + \dfrac{2}{13}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + t & \ldots(1) \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + 2t & \ldots(2) \end{cases} \qquad x(0) = -\dfrac{7}{9}, \quad y(0) = -\dfrac{5}{9}$

RESOLUCIÓN

De (1) se tiene $y = \dfrac{1}{4}\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{x}{4}$ Reemplazando en (2):

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{4}\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{x}{4}\right) = x + \dfrac{1}{4}\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{x}{4}$

$\dfrac{d^2x}{4dt^2} - \dfrac{dx}{4dt} = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{4}\dfrac{dx}{dt}$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + 3x = 0$ Es una ecuación homogénea.

El polinomio general de la ecuación homogénea es:

$P(r) = r^2 - 5r + 6 = (r-3)(r-2) = 0$

$Donde\ \ r = 3, \quad r = 2$

La solución general de la ecuación homogenea es:

$$x_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$$

La solución particular es de la forma:

$$x_p = At + B$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = At + B, \quad y_p' = A, \quad y_p'' = 0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$-5A + 6At + 6B = -2t + 1$

$$\left.\begin{array}{l} 6A = -2 \\ 6B - 5A = 1 \end{array}\right\} de\ donde \begin{cases} A = -\dfrac{1}{3} \\ B = -\dfrac{1}{9} \end{cases}$$

Luego $y_p = -\dfrac{1}{3}\left(t + \dfrac{1}{3}\right)$ y la solución general es: $x = x_h + x_p$

$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} - \dfrac{1}{3}\left(t + \dfrac{1}{3}\right)$

Rpta: $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} - \dfrac{1}{3}\left(t + \dfrac{1}{3}\right)$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y & \ldots(1) \\ \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = x + y & \ldots(2) \end{cases} \qquad x(\pi) = -1, \quad y(\pi) = 0$

RESOLUCIÓN

De (1) se tiene $y = \dfrac{dx}{dt}$ Reemplazando en (2)

$\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right) = x + \dfrac{dx}{dt}$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 0$ Es una ecuación homogénea.

El polinomio general de la ecuación homogénea es:

$P(r) = r^2 + 1 = 0$

Donde $r = i, \quad r = -i$

La solución general de la ecuación es:

$$x_g = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

$x(\pi) = c_1 \cos \pi + c_2 \operatorname{sen} \pi = -1$

$x(\pi) = -c_1 = -1 \Rightarrow c_1 = 1$

Derivando (x_g) *y Reemplazando en* (1)

$\dfrac{dx}{dt} = -\operatorname{sen} t + c_2 \cos t \rightarrow y(\pi) = -\operatorname{sen} \pi + c_2 \cos \pi \;\Rightarrow c_2 = 0$

$x_g = \cos x$

Rpta: $x_g = \cos x$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = e^{-t} - y & \ldots(1) \\ \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = \operatorname{sen} t - 2y & \ldots(2) \end{cases} \qquad x(0) = -2, \quad y(0) = 1$

RESOLUCIÓN

De (1) se tiene $y = -\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + e^{-t}$, $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -e^{-t} - \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{d^2y}{dt^2}$ Reemplazando en (2)

$2\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{d^2y}{dt^2} - e^{-t} = \operatorname{sen} t + 2\left(\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - e^{-t}\right)$

Reemplazando en (2):

$2\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + e^{-t}\right) = \operatorname{sen} t + 2\left(\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - e^{-t}\right)$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} = e^{-t} - \operatorname{sen} t$

$-e^{-t} - \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} = e^{-t} - \operatorname{sen} t$

$\dfrac{dy}{dt} = 2e^{-t} - \operatorname{sen} t$ Es una ecuación no homogénea.

El polinomio general de la ecuación homogénea es:

$P(r) = r = 0$

Donde $r = 0$, La solución general de la ecuación es:

$$x_h = c_1$$

La solución particular es de la forma:

$$x_p = Ae^{-t} + B\operatorname{sen} t + C\cos t$$

De donde derivando la ecuación particular:

$y_p = Ae^{-t} + B\operatorname{sen} t + C\cos t,\quad y_p' = -Ae^{-t} + B\cos t - C\operatorname{sen} t$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$-Ae^{-t} + B\cos t - C\operatorname{sen} t = 2e^{-t} - \operatorname{sen} t$

$$\left.\begin{array}{l} -A = 2 \\ B\cos t = 0 \\ -C\operatorname{sen} t = -\operatorname{sen} t \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A = -2 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{array}\right.$$

Luego $y_p = -2e^{-t} + \cos t$ y la solución general es: $x = x_h + x_p$

$y = c_1 + e^{-t} + \cos t$

$y(0) = c_1 - 2 + 1 = 1 \Rightarrow c_1 = 2$

$y = 2 + e^{-t} + \cos t$

Rpta: $y = 2 + e^{-t} + \cos t$

10. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y & \ldots(1) \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y & \ldots(2) \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

De (1) se tiene $y = \frac{1}{4}\frac{dx}{dt} - \frac{x}{4}$ Reemplazando en (2):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4}\frac{dx}{dt} - \frac{x}{4}\right) = x + \frac{1}{4}\frac{dx}{dt} - \frac{x}{4}$$

$$\frac{d^2x}{4dt^2} - \frac{dx}{4dt} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\frac{dx}{dt}$$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + 3x = 0$ Es una ecuación homogénea.

El polinomio general de la ecuación homogénea es:

$P(r) = r^2 - 5r + 6 = (r-3)(r-2) = 0$

Donde $r = 3,\quad r = 2$

La solución general de la ecuación homogenea es:

$$x_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$$

La solución particular es de la forma:

$$x_p = At + B$$

De donde derivando la ecuación particular:

$x_p = At + B, \quad x_p^{'} = A, \quad x_p^{''} = 0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$-5A + 6At + 6B = -2t + 1$

$$\left.\begin{array}{l} 6A = -2 \\ 6B - 5A = 1 \end{array}\right\} de \ donde \left\{\begin{array}{l} A = -\dfrac{1}{3} \\ B = -\dfrac{1}{9} \end{array}\right.$$

Luego $x_p = -\dfrac{1}{3}\left(t + \dfrac{1}{3}\right)$ y la solución general es: $x = x_h + x_p$

$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} - \dfrac{1}{3}\left(t + \dfrac{1}{3}\right)$

Rpta: $x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} - \dfrac{1}{3}\left(t + \dfrac{1}{3}\right)$

11. $\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} = 6x - y - 6t^2 - t + 3 & \dots(1) \\ \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = 2y - 2t - 1 & \dots(2) \end{cases}$ $\qquad x(0) = 2, \quad y(0) = 3$

RESOLUCIÓN

De (1) se tiene $y = -2\dfrac{dx}{dt} + 6x - 6t^2 - t + 3$

$2\dfrac{d^2x}{dt^2} = 6\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} - 12t - 1$

Reemplazando en (2)

$-2\dfrac{d^2x}{dt^2} + 6\dfrac{dx}{dt} - 12t - 1 = 2\left(-2\dfrac{dx}{dt} + 6x - 6t^2 - t + 3\right) - 2t - 1$

$2\dfrac{d^2x}{dt^2} - 10\dfrac{dx}{dt} + 6x = 12t^2 - 8t - 6$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} - 5\dfrac{dx}{dt} + 3x = 6t^2 - 4t - 3$ Es una ecuación no homogénea.

El polinomio general de la ecuación homogénea es:

$P(r) = r^2 - 5r + 3 = 0$

$Donde\ \ r = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}, \quad r = \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$

La solución general de la ecuación homogenea es:

$$x_h = c_1 e^{\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)t}$$

La solución particular es de la forma:

$$x_p = At^2 + Bt + C$$

De donde derivando la ecuación particular:

$x_p = At^2 + Bt + C, \quad x_p' = 2At + B, \quad x_p'' = 2A$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$2A - 5(2At + B) + 3(At^2 + Bt + C) = 6t^2 - 4t - 3$

$$\left.\begin{array}{l} 3A = 6 \\ 3B - 10A = -4 \\ 2A - 5B + 3C = -3 \\ -Be^t = -e^t \end{array}\right\} de\ donde \begin{cases} A = 2 \\ B = 16/3 \\ C = 59/9 \end{cases}$$

Luego $x_p = 2t^2 + \dfrac{16}{3}t + \dfrac{59}{9}$ y la solución general es: $x = x_h + x_p$

$x = c_1 e^{\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)t} + 2t^2 + \dfrac{16}{3}t + \dfrac{59}{9}$

Rpta: $x = c_1 e^{\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)t} + 2t^2 + \dfrac{16}{3}t + \dfrac{59}{9}$

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y & \ldots(1) \\ \dfrac{dy}{dt} = y & \ldots(2) \end{cases}$

RESOLUCIÓN

De (1) se tiene $y = \dfrac{dx}{3dt} - \dfrac{x}{3}$ Reemplazando en (2):

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{3dt} - \dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{dx}{3dt} - \dfrac{x}{3}$

$\dfrac{d^2x}{3dt^2} - \dfrac{dx}{3dt} = \dfrac{dx}{3dt} - \dfrac{x}{3}$

$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}+x=0$ Es una ecuación homogénea.

El polinomio general de la ecuación diferencial es:

$P(r)=r^2-2r+1=0$

$Donde\ \ r_1=1\ \ de\, multiplicidad\ \ 2$

La solución general de la ecuación es:

$$x=(c_1+tc_2)e^t$$

Rpta: $x=(c_1+tc_2)e^t$

13. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2x+y & ...(1)\\ \frac{dy}{dt}=2x+3y & ...(2)\end{cases}$

RESOLUCIÓN

De (1) se tiene $y=\frac{dx}{dt}-2x$ Reemplazando en (2):

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}-2x\right)=2x+3\left(\frac{dx}{dt}-2x\right)$

$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}=2x+3\frac{dx}{dt}-6x$

$\frac{d^2x}{dt^2}-5\frac{dx}{dt}+4x=0$ Es una ecuación homogénea.

El polinomio general de la ecuación homogénea es:

$P(r)=r^2-5r+4=(r-4)(r-1)=0$

$Donde\ \ r=4,\quad r=1$

La solución general de la ecuación es:

$$x=c_1e^t+c_2e^{4t}$$

Rpta: $x=c_1e^t+c_2e^{4t}$

14. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=7x+4y & ...(1)\\ \frac{dy}{dt}=-x+3y & ...(2)\end{cases}$

RESOLUCIÓN

De (1) se tiene $y=\dfrac{dx}{4dt}-\dfrac{7}{4}x$ Reemplazando en (2):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{4dt}-\frac{7}{4}x\right)=-x+\frac{3}{4}\frac{dx}{dt}-\frac{21}{4}x$$

$$\frac{d^2x}{4dt^2}-\frac{7}{4}\frac{dx}{dt}=-\frac{25}{4}x+\frac{3}{4}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-10\frac{dx}{dt}+25=0$$ Es una ecuación homogénea.

El polinomio general de la ecuación diferencial es:

$P(r)=r^2-10r+25=0$

$Donde\ \ r_1=-5\ \ de\,multiplicidad\ \ 2$

La solución general de la ecuación es:

$$x=(c_1+tc_2)e^{-5t}$$

Rpta: $x=(c_1+tc_2)e^{-5t}$

15. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2x & \ldots(1)\\ \dfrac{dy}{dt}=-3x+y & \ldots(2)\end{cases}$

RESOLUCIÓN

De (2) se tiene $x=\dfrac{y}{3}-\dfrac{dy}{3dt}$ Reemplazando en (1):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{3}-\frac{dy}{3dt}\right)=-2\left(\frac{y}{3}-\frac{dy}{3dt}\right)$$

$$\frac{dy}{3dt}-\frac{d^2y}{3dt^2}=-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+2y=0$$ Es una ecuación homogénea.

El polinomio general de la ecuación homogénea es:

$P(r)=r^2+r+2=(r+2)(r-1)=0$

$Donde\ \ r=1,\quad r=-2$

La solución general de la ecuación es:

$$x=c_1e^{t}+c_2e^{-2t}$$

Rpta: $x=c_1e^{t}+c_2e^{-2t}$

16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y + e^{t} & ...(1) \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y + e^{-t} & ...(2) \end{cases}$

RESOLUCIÓN

De (1) se tiene $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{e^{t}}{3} - \dfrac{dx}{3dt}$ Reemplazando en (2):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{3} + \frac{e^{t}}{3} - \frac{dx}{3dt}\right) = 2\left(\frac{x}{3} + \frac{e^{t}}{3} - \frac{dx}{3dt}\right) + e^{-t}$$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} - 3\dfrac{dx}{dt} + 2x = -3e^{-t} - e^{t}$ Es una ecuación no homogénea.

El polinomio general de la ecuación homogénea es:

$P(r) = r^2 - 3r + 2 = (r-2)(r-1) = 0$

Donde $r = 1,\quad r = 2$

La solución general de la ecuación homogenea es:

$$x_h = c_1e^{t} + c_2e^{2t}$$

La solución particular es de la forma:

$$x_p = Ae^{-t} + Bte^{t}$$

De donde derivando la ecuación particular:

$x_p = Ae^{-t} + Bte^{t},\quad x_p^{'} = -Ae^{-t} + Bte^{t} + Be^{t},\quad x_p^{''} = Ae^{-t} + Bte^{t} + 2Be^{t}$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$Ae^{-t} + Bte^{t} + 2Be^{t} - 3\left(-Ae^{-t} + Bte^{t} + Be^{t}\right) + 2\left(Ae^{-t} + Bte^{t}\right) = -3e^{-t} - e^{t}$

$\left.\begin{matrix} 6Ae^{-t} = -3e^{-t} \\ -Be^{t} = -e^{t} \end{matrix}\right\} de\ donde \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = 1 \end{cases}$

Luego $x_p = \dfrac{1}{2}e^{-t} + te^{t}$ y la solución general es: $x = x_h + x_p$

$x = c_1e^{t} + c_2e^{2t} + \dfrac{1}{2}e^{-t} + te^{t}$

Rpta: $x = c_1e^{t} + c_2e^{2t} + \dfrac{1}{2}e^{-t} + te^{t}$

17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y + t + 1 & ...(1) \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y + t - 1 & ...(2) \end{cases}$

RESOLUCIÓN

De (1) se tiene $y = 4x - \dfrac{dx}{dt} + t + 1$ Reemplazando en (2):

$$\frac{d}{dt}\left(4x - \frac{dx}{dt} + t + 1\right) = 2x + 4x - \frac{dx}{dt} + t + 1 + t - 1$$

$$4\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} + 1 = 6x - \frac{dx}{dt} + 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = -2t + 1$$ Es una ecuación no homogénea.

El polinomio general de la ecuación homogénea es:

$P(r) = r^2 - 5r + 6 = (r-3)(r-2) = 0$

Donde $r = 3, \quad r = 2$

La solución general de la ecuación homogenea es:

$$x_h = c_1e^{2t} + c_2e^{3t}$$

La solución particular es de la forma:

$$x_p = At + B$$

De donde derivando la ecuación particular:

$x_p = At + B, \quad x_p' = A, \quad x_p'' = 0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$-5A + 6At + 6B = -2t + 1$

$$\left.\begin{array}{l} 6A = -2 \\ 6B - 5A = 1 \end{array}\right\} de\ donde \left\{\begin{array}{l} A = -\dfrac{1}{3} \\ B = -\dfrac{1}{9} \end{array}\right.$$

Luego $x_p = -\dfrac{1}{3}\left(t + \dfrac{1}{3}\right)$ y la solución general es: $x = x_h + x_p$

$$x = c_1e^{2t} + c_2e^{3t} - \frac{1}{3}\left(t + \frac{1}{3}\right)$$

Rpta: $x = c_1e^{2t} + c_2e^{3t} - \dfrac{1}{3}\left(t + \dfrac{1}{3}\right)$

18. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y + 3te^t & \ldots(1) \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + e^t & \ldots(2) \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

De (1) se tiene $y=\frac{1}{4}\left(\frac{dx}{dt}-x-3te^{t}\right)$ Reemplazando en (2):

$$\frac{1}{4}\left(\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-3te^{t}-3e^{t}\right)=x-\frac{1}{4}\left(\frac{dx}{dt}-x-3te^{t}\right)+e^{t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=7e^{t}$$

El polinomio general de la ecuación diferencial es:

$$P(r)=r^2-2r-3=(r-3)(r+1)=0$$

$$Donde\ \ r_1=3,\quad r_2=-1$$

La solución general de la ecuación es:

$$x_g=c_1e^{-t}+c_2e^{3t}$$

La solución particular es de la forma:

$$x_p=Ae^{t}$$

De donde derivando la ecuación particular:

$$x_p=Ae^{t},\quad x_p^{'}=Ae^{t},\quad x_p^{''}=Ae^{t}$$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$$Ae^{t}-2Ae^{t}-3Ae^{t}=7e^{t}$$

$$-4A=7\}\ de\ donde\{A=-7/4$$

Luego $y_p=-\frac{7}{4}e^{t}$ y la solución general es: $x=x_g+x_p$

$$x=c_1e^{-t}+c_2e^{3t}-\frac{7}{4}e^{t}$$

Rpta: $x=c_1e^{-t}+c_2e^{3t}-\frac{7}{4}e^{t}$

19. $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=5x-4y & \ldots(1)\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=2x+y & \ldots(2)\end{cases}$$

RESOLUCIÓN

De (1) se tiene $y=\frac{5}{4}x-\frac{dx}{4dt}$ Reemplazando en (2):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{5}{4}x-\frac{dx}{4dt}\right)=2x+\frac{5}{4}x-\frac{dx}{4dt}$$

$$\frac{5}{4}\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{4dt^2}=\frac{13}{4}x-\frac{dx}{4dt}$$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}-6\dfrac{dx}{dt}+13=0$ Es una ecuación homogénea.

El polinomio general de la ecuación homogénea es:

$P(r)=r^2-6r+13=0$

$Donde\ \ r=3+i,\quad r=3-i$

La solución general de la ecuación es:

$$x=c_1e^{3t}\cos x+c_2e^{3t}\operatorname{sen} x$$

Rpta: $x=(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x)e^{3t}$

20. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x-3y & \ldots(1)\\ \dfrac{dy}{dt}=3x+y & \ldots(2)\end{cases}$

RESOLUCIÓN

De (1) se tiene $y=\dfrac{2x}{3}-\dfrac{dx}{3dt}$ Reemplazando en (2):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2x}{3}-\frac{dx}{3dt}\right)=3x+\frac{4x}{3}-\frac{2dx}{3dt}$$

$$\frac{2}{3}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{3}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{13}{3}x-\frac{2}{3}\frac{dx}{dt}$$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}-4\dfrac{dx}{dt}+13x=0$ Es una ecuación homogénea.

El polinomio general de la ecuación homogénea es:

$P(r)=r^2-2r+10=0$

$Donde\ \ r=2+3i,\quad r=2-3i$

La solución general de la ecuación es:

$$x=c_1e^{2t}\cos 3t+c_2e^{2t}\operatorname{sen} 3t$$

Rpta: $x=(c_1\cos 3t+c_2\operatorname{sen} 3t)e^{2t}$

21. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-3y & \ldots(1)\\ \dfrac{dy}{dt}=3x+y & \ldots(2)\end{cases}$

RESOLUCIÓN

De (1) se tiene $y=\frac{x}{3}-\frac{dx}{3dt}$ Reemplazando en (2):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{3}-\frac{dx}{3dt}\right)=3x+\frac{x}{3}-\frac{dx}{3dt}$$

$$\frac{1}{3}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{3}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{10}{3}x-\frac{1}{3}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}+10x=0$$ Es una ecuación homogénea.

El polinomio general de la ecuación homogénea es:

$$P(r)=r^2-2r+10=0$$

Donde $r=1+3i,\quad r=1-3i$

La solución general de la ecuación es:

$$x=c_1e^t\cos 3x+c_2e^t\,\text{sen}\,3x$$

Rpta: $x=(c_1\cos 3x+c_2\,\text{sen}\,3x)e^t$

22. $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x-2y & \ldots(1)\\ \dfrac{dy}{dt}=5x+2y & \ldots(2)\end{cases}$$

RESOLUCIÓN

De (1) se tiene $y=\frac{1}{2}\left(4x-\frac{dx}{dt}\right)$ Reemplazando en (2):

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(4x-\frac{dx}{dt}\right)\right]=5x+\left(4x-\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-5\frac{dx}{dt}+18x=0$$

El polinomio general de la ecuación diferencial es:

$$P(r)=r^2-5r+18=0$$

Donde $r_1=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{47}}{2}i,\quad r_2=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{47}}{2}i$

La solución general de la ecuación es:

$$x=\left(c_1\cos\frac{\sqrt{47}}{2}t+c_2\,\text{sen}\,\frac{\sqrt{47}}{2}t\right)e^{\left(\frac{5}{2}\right)t}$$

La solución particular es de la forma:

$$x_p = At + B$$

De donde derivando la ecuación particular:

$x_p = At + B,\quad x_p' = A,\quad x_p'' = 0$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$0 - 2A + 18(At + B) = 4$

$\left.\begin{array}{l} 18At = 0 \\ 18B - 2A = 4 \end{array}\right\} de\ donde \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{2}{9} \end{cases}$

Luego $x_p = \dfrac{2}{9}$ y la solución general es: $x = x_h + x_p$

$x = \left(c_1 \cos\sqrt{17}t + c_2 sen\sqrt{17}t\right)e^t + \dfrac{2}{9}$

Rpta: $x = \left(c_1 \cos\sqrt{17}t + c_2 sen\sqrt{17}t\right)e^t + \dfrac{2}{9}$

23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 2y & \ldots(1) \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 2y & \ldots(2) \end{cases}$

RESOLUCIÓN

24. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y & \ldots(1) \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y & \ldots(2) \end{cases}$

RESOLUCIÓN

$$\text{P(r)} = \begin{bmatrix} 5-r & 4 \\ 1 & 1-r \end{bmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \quad (r+5)(r-1) + 4 = 0$$

Las raíces son:

$\begin{cases} r_1 = 3 \\ r_2 = 3 \end{cases}$

Rpta: $x = (c_1 + tc_2)e^{3t}$

TRANFORMADA DE LAPLACE

I.

1. Demostrase que $f(t)=t^x$, es de orden exponencial cuando $t\to\infty;\forall\in R$

DEMOSTRACIÓN

Definición:

La función F $\left[0,+\infty\right\rangle\to R$, es de orden exponencial si existen constantes $c\rangle o$ y α tal que $\left|F(t)\right|\le ce^{\alpha t},\forall t\ge 0.$

2. ¿La función $f(t)=t^x$, es de orden exponencial en $\left[0,+\infty\right\rangle$?

SOLUCIÓN

Definición:

La función F $\left[0,+\infty\right\rangle\to R$, es de orden exponencial si existen constantes $c\rangle o$ y α tal que $\left|F(t)\right|\le ce^{\alpha t},\forall t\ge 0.$

Rpta: No es de orden exponencial

3. ¿Cuáles de las siguientes funciones son continuas por tramos en $[0,+\infty>$? Razónese la respuesta.

a) $f(t)=\dfrac{t+1}{t-1}$ Rpta: No es continua por tramos $[0,+\infty>$

b) $f(t)=\dfrac{t-2}{t^2-t-2}$ Rpta: Es continua por tramos en $[0,+\infty>$

c) $f(t)=e^{\frac{1}{t}}$ Rpta: No es continua por tramos en $[0,+\infty>$

d) $f(t)=t^2$ Rpta: Es continua por tramos en $[0,+\infty>$

4. Demostrar que para cualquier número real α , $F(t)=e^{\alpha t}f(t)$ es continua por tramos en $[0,+\infty>$, siempre que f lo sea.

DEMOSTRACIÓN

5. Demuéstrese que las funciones dadas son continuas por tramos y de orden exponencial en $[0,+\infty>$.

DEMOSTRACIÓN

a) $f(t)=t^n.\cos kt$ Rpta: No es continua por tramos $[0,+\infty>$

b) $f(t)=\dfrac{1-\cos kt}{t}$ Rpta: Es continua por tramos en $[0,+\infty>$

c) $f(t)=\dfrac{1-e^t}{t}$ Rpta: No es continua por tramos $[0,+\infty>$

d) $f(t)=\dfrac{1-senkt}{t}$ Rpta: Es continua por tramos en $[0,+\infty>$

6. Hallar la transformada de Laplace $L\{F(t)\}$ si:

a) $f(t)=t^2.\cos t$

SOLUCIÓN

$$f(s)=L\{F(t)\}$$

$$L\{cost\}=\frac{s}{s^2+1}\rightarrow L\{t^2cost\}=\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)=\frac{1-s^2}{\left(s^2+1\right)^2}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1-s^2}{\left(s^2+1\right)^2}\right)=\frac{-2s(1+s^2)^2-4s(1-s^2)(s^2+1)}{(s^2+1)^4}=\frac{2s^3-6s}{\left(s^2+1\right)^3}$$

Rpta: $f(s)=\dfrac{2s^3-6s}{\left(s^2+1\right)^3}$

b) $f(t)=t^2.e^t.\cos t$

SOLUCIÓN

Se sabe que el ejercicio anterior es $f(t)=t^2.\cos t$ y por propiedad:

$$L\{t^2.e^t.\cos t\}=\frac{2(s-1)^3-6(s-1)}{\left((s-1)^2+1\right)^3}$$

Rpta: $f(s)=\dfrac{2(s-1)^3-6(s-1)}{\left((s-1)^2+1\right)^3}$

c) $f(t)=(2t-3)e^{\frac{t+2}{3}}$

SOLUCIÓN

$$L\{F(t)\}=L\{2t.e^{t/3}e^{2/3}\}-L\{3e^{t/3}e^{2/3}\}$$

$$L\{F(t)\}=\frac{2.e^{2/3}}{(s-\frac{1}{3})^2}-\frac{3e^{2/3}}{s-\frac{1}{3}}=\frac{e^{2/3}(3-3s)}{(s^2-\frac{1}{3})^2}$$

Rpta: $f(s)=\dfrac{e^{2/3}(3-3s)}{(s-\frac{1}{3})^2}$

7. Demostrar que $L\{t^2 sent\}=\left(\dfrac{6s^2-2}{(s+1)^3}\right)$

DEMOSTRACIÓN

$$L\{t^2 sent\}=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}L\{sent\}=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{-1(2s)}{(s^2+1)^2}\right)$$

$$=\left(\frac{-2(s^2+1)^2-2(s+1)(2s)(-2s)}{(s+1)^4}\right)=\left(\frac{-2(s^2+1)+8s^2}{(s+1)^3}\right)=\left(\frac{6s^2-2}{(s+1)^3}\right)$$

Por lo tanto, $f(s)=\left(\dfrac{6s^2-2}{(s+1)^3}\right)$ L.q.q.d.

8. Demostrar que $L\{\cos^3 t\}=\dfrac{s(s^2+7)}{(s^2+9)(s^2+1)}$

DEMOSTRACIÓN

Propiedad: $\boxed{\cos^3 t=\dfrac{\cos 3t+3\cos t}{4}}$

$$L\{\cos^3 t\}=L\left\{\frac{\cos 3t+3\cos t}{4}\right\}=\frac{1}{4}L\{\cos 3t+3\cos t\}=\frac{1}{4}\left(\frac{s}{s^2+9}+\frac{3s}{s^2+1}\right)$$

$$=\frac{s}{4}\left(\frac{s^2+1+3(s^2+9)}{(s^2+9)(s^2+1)}\right)=\frac{s}{4}\left(\frac{4s^2+28}{(s^2+9)(s^2+1)}\right)=\frac{s(s^2+7)}{(s^2+9)(s^2+1)}$$

Por lo tanto, $f(s)=\dfrac{s(s^2+7)}{(s^2+9)(s^2+1)}$ L.q.q.d

9. Halla $L\{t^3.\cos t\}$

SOLUCIÓN

$$L\{\cos t\}=\frac{s}{s^2+1}$$

$$L\{t^3\cos t\}=(-1)^3\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)=(-1)^3\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s^2+1-s(2s)}{(s^2+1)^2}\right)=(-1)^3\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1-s^2}{(s^2+1)^2}\right)$$

$$=(-1)^3\frac{d}{ds}\left(\frac{(-2s)(s^2+1)^2-2(s^2+1)(2s)(1-s^2)}{(s^2+1)^4}\right)=(-1)^3\frac{d}{ds}\left(\frac{2s^3-6s}{(s^2+1)^3}\right)$$

$$=(-1)\left(\frac{(6s^2-6)(s^2+1)^3-3(s^2+1)^2(2s)(2s^3-6s)}{(s^2+1)^6}\right)=(-1)\left(\frac{(6s^2-6)(s^2+1)-3(2s)(2s^3-6s)}{(s^2+1)^4}\right)$$

$$=(-1)\left(\frac{6s^4-6-12s^4+36s^2}{(s^2+1)^4}\right)=(-1)\left(\frac{-6s^4+36s^2-6}{(s^2+1)^4}\right)=\frac{6s^4-36s^2+6}{(s^2+1)^4}$$

Rpta: $f(s)=\dfrac{6s^4-36s^2+6}{(s^2+1)^4}$

10. Halla $L\left\{\dfrac{sen^2t.\cos t}{t}\right\}$

SOLUCIÓN

$$L\left\{\frac{sen^2t.\cos t}{t}\right\}=L\left\{\frac{(1-\cos^2 t)\cos t}{t}\right\}=L\left\{\frac{\cos t-\cos^3 t}{t}\right\}=L\left\{\frac{\cos t}{t}\right\}-L\left\{\frac{\cos^3 t}{t}\right\}$$

$$L\{\cos t\}-L\{\cos^3 t\}=\frac{s}{s^2+1}-\frac{s^3+7s}{s^4+10s^2+9}$$

$$\Rightarrow L\left\{\frac{\cos t}{t}\right\}-L\left\{\frac{\cos^3 t}{t}\right\}=\int_s^{+\infty}\frac{u}{u^2+1}du-\int_s^{+\infty}\frac{u^3+7u}{u^4+10u^2+9}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_s^{+\infty}\frac{2u}{u^2+1}du-\frac{1}{4}\int_s^{+\infty}\frac{4u^3+20u+8u}{u^4+10u^2+9}du=\frac{1}{2}\int_s^{+\infty}\frac{2u}{u^2+1}du-\frac{1}{4}\int_s^{+\infty}\frac{4u^3+20u}{u^4+10u^2+9}du-\frac{1}{4}\int_s^{+\infty}\frac{8u}{u^4+10u^2+9}du$$

$$=\frac{1}{2}\ln(u^2+1)\Big|_s^{\infty}-\frac{1}{4}\ln(u^4+10u^2+9)\Big|_s^{\infty}-\int_s^{+\infty}\frac{2u}{(u^2+9)(u^2+1)}du$$

$$\int_s^{+\infty}\frac{2u}{(u^2+9)(u^2+1)}du=\int_s^{+\infty}\left(\frac{Au+B}{(u^2+9)}+\frac{Cu+D}{(u^2+1)}\right)du=\int_s^{+\infty}\left(\frac{(Au+B)(u^2+1)+(Cu+D)(u^2+9)}{(u^2+9)(u^2+1)}\right)du$$

$$=\int_s^{+\infty}\left(\frac{(A+C)u^3+(B+D)u^2+(A+9C)u+B+9D}{(u^2+9)(u^2+1)}\right)du$$

$$A=-\frac{1}{4},B=0,C=0,D=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \int_s^{+\infty} \frac{2u}{(u^2+9)(u^2+1)}du = \int_s^{+\infty}\left(\frac{-\frac{u}{4}}{(u^2+9)}+\frac{\frac{u}{4}}{(u^2+1)}\right)du = -\frac{1}{4}\int_s^{+\infty}\frac{u}{(u^2+9)}du+\frac{1}{4}\int_s^{+\infty}\frac{u}{(u^2+1)}du$$

$$= -\frac{1}{8}\int_s^{+\infty}\frac{2u}{(u^2+9)}du+\frac{1}{8}\int_s^{+\infty}\frac{2u}{(u^2+1)}du = -\frac{1}{8}\ln(u^2+9)\Big|_s^{\infty}+\frac{1}{8}\ln(u^2+1)\Big|_s^{\infty}$$

$$= 0+\frac{1}{8}\ln(s^2+9)+0-\frac{1}{8}\ln(s^2+1) = \frac{1}{8}\ln(s^2+9)-\frac{1}{8}\ln(s^2+1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(u^2+1)\Big|_s^{\infty} - \frac{1}{4}\ln(u^4+10u^2+9)\Big|_s^{\infty} - \int_s^{+\infty}\frac{2u}{(u^2+9)(u^2+1)}du$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u^2+1)\Big|_s^{\infty} - \frac{1}{4}\ln(u^4+10u^2+9)\Big|_s^{\infty} - \left(-\frac{1}{8}\ln(u^2+9)\Big|_s^{\infty}+\frac{1}{8}\ln(u^2+1)\Big|_s^{\infty}\right)$$

$$= 0-\frac{1}{2}\ln(s^2+1)-0+\frac{1}{4}\ln(s^4+10s^2+9)-\left(-0+\frac{1}{8}\ln(s^2+9)+0-\frac{1}{8}\ln(s^2+1)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(s^2+1)+\frac{1}{4}\ln(s^4+10s^2+9)-\frac{1}{8}\ln(s^2+9)+\frac{1}{8}\ln(s^2+1)$$

$$= -\ln(s^2+1)^{\frac{1}{2}}+\ln(s^4+10s^2+9)^{\frac{1}{4}}-\ln(s^2+9)^{\frac{1}{8}}+\ln(s^2+1)^{\frac{1}{8}}$$

$$= \ln\left(\frac{(s^2+9)^{\frac{1}{4}}(s^2+1)^{\frac{1}{4}}(s^2+1)^{\frac{1}{8}}}{(s^2+1)^{\frac{1}{2}}(s^2+9)^{\frac{1}{8}}}\right) = \ln\left(\frac{(s^2+9)^{\frac{1}{4}}(s^2+1)^{\frac{3}{8}}}{(s^2+1)^{\frac{1}{2}}(s^2+9)^{\frac{1}{8}}}\right) = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{s^2+9}{s^2+1}\right)$$

Rpta: $f(s) = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{s^2+9}{s^2+1}\right)$

11. Halla $L\{sen(a+t)\}$

SOLUCIÓN

Propiedad: $\boxed{sen(a+t) = sena\cos t + \cos asent}$

$$L\{sen(a+t)\} = L\{sena\cos t + \cos asent\}$$

$$= sena\left(\frac{s}{s^2+1}\right)+\cos a\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{s.sena+\cos a}{s^2+1}$$

Rpta: $f(s) = \frac{\cos a + s.sena}{s^2+1}$

12. Halla $L\{\cos^2 bt\}$

SOLUCIÓN

$$L\{\cos^2 bt\} = L\left\{\frac{1+\cos 2bt}{2}\right\} = \frac{1}{2}L\{1+\cos 2bt\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4b^2}\right)$$

Rpta: $f(s)=\frac{1}{2}(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4b^2})$

13. Demostrar que:

a) $L\left\{\cosh^2(at)\right\}=\dfrac{s^2-2a^2}{s\left(s^2-4a^2\right)}$

DEMOSTRACIÓN

$$L\left\{\cosh^2(at)\right\}=L\left\{\left(\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right)^2\right\}=\frac{1}{4}L\left\{e^{2at}+2+e^{-2at}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-2a}+\frac{1}{s+2a}+\frac{2}{s}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{2s}{s^2-4a^2}+\frac{2}{s}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{2s^2+2s^2-8a^2}{s\left(s^2-4a^2\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{4s^2-8a^2}{s\left(s^2-4a^2\right)}\right)=\frac{s^2-2a^2}{s\left(s^2-4a^2\right)}$$

Por lo tanto, $f(s)=\dfrac{s^2-2a^2}{s\left(s^2-4a^2\right)}$ L.q.q.d.

b) $L\left\{senh^2(at)\right\}=\dfrac{2a^2}{s\left(s^2-4a^2\right)}$

DEMOSTRACIÓN

$$L\left\{sen\mathrm{h}^2(at)\right\}=L\left\{\left(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right)^2\right\}=\frac{1}{4}L\left\{e^{2at}-2+e^{-2at}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-2a}+\frac{1}{s+2a}-\frac{2}{s}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{2s}{s^2-4a^2}-\frac{2}{s}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{2s^2-2s^2+8a^2}{s\left(s^2-4a^2\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{8a^2}{s\left(s^2-4a^2\right)}\right)=\frac{2a^2}{s\left(s^2-4a^2\right)}$$

Por lo tanto, $f(s)=\dfrac{2a^2}{s\left(s^2-4a^2\right)}$ L.q.q.d.

c) $L\left\{\cos at.senat\right\}=\dfrac{a\left(s^2+2a^2\right)}{s^4+4a^4}$

DEMOSTRACIÓN

$$L\left\{\cos at.senat\right\}=L\left\{\frac{2\cos at.senat}{2}\right\}=\frac{1}{2}L\left\{sen2at\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{2a}{s^2+4a^2}\right)$$

Por lo tanto, $f(s)=\dfrac{2a}{2\left(s^2+4a^2\right)}$ L.q.q.d.

d) $L\left\{\cos at.\cos at\right\}=\dfrac{s^3}{s^4+4a^4}$

DEMOSTRACIÓN

$$L\{\cos at.\cos at\} = L\{\cos^2 at\} = L\left\{\frac{1+\cos 2at}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4a^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{s^2+4a^2+s^2}{s\left(s^2+4a^2\right)}\right) = \frac{s^2+2a^2}{s\left(s^2+4a^2\right)}$$

Por lo tanto, $f(s) = \dfrac{s^2+2a^2}{s\left(s^2+4a^2\right)}$ L.q.q.d.

e) $L\{\operatorname{senh}(at).sen(at)\} = \dfrac{2a^2 s}{s^4+4a^4}$

DEMOSTRACIÓN

$$L\{\operatorname{senh}(at).sen(at)\} = L\left\{\left(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right).sen(at)\right\} = \frac{1}{2}L\left\{e^{at}.sen(at)-e^{-at}.sen(at)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{(s-a)^2+a^2}\right)-\left(\frac{a}{(s+a)^2+a^2}\right)\right] = \frac{a}{2}\left[\frac{s^2+2sa+2a^2-\left(s^2-2sa+2a^2\right)}{\left(s^2-2sa+2a^2\right)\left(s^2+2sa+2a^2\right)}\right]$$

$$= \frac{a}{2}\left[\frac{4sa}{\left(s^2-2sa+2a^2\right)\left(s^2+2sa+2a^2\right)}\right] = \frac{2sa^2}{\left(s^2+2a^2-2sa\right)\left(s^2+2a^2+2sa\right)}$$

$$= \frac{2sa^2}{\left(s^2+2a^2\right)^2-(2sa)^2} = \frac{2sa^2}{s^4+4s^2a^2+4a^4-(2sa)^2} = \frac{2a^2 s}{s^4+4a^4}$$

Por lo tanto, $f(s) = \dfrac{2a^2 s}{s^4+4a^4}$ L.q.q.d

f) $L\{\operatorname{senh}(at).\cos(at)\} = \dfrac{a\left(s^2-2a^2\right)}{s^4+4a^4}$

DEMOSTRACIÓN

$$L\{\operatorname{senh}(at).\cos(at)\} = L\left\{\left(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right).\cos(at)\right\} = \frac{1}{2}L\left\{e^{at}.\cos(at)-e^{-at}.\cos(at)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{s}{(s-a)^2+a^2}\right)-\left(\frac{s}{(s+a)^2+a^2}\right)\right] = \frac{s}{2}\left[\frac{s^2+2sa+2a^2-\left(s^2-2sa+2a^2\right)}{\left(s^2-2sa+2a^2\right)\left(s^2+2sa+2a^2\right)}\right]$$

$$= \frac{s}{2}\left[\frac{4sa}{\left(s^2-2sa+2a^2\right)\left(s^2+2sa+2a^2\right)}\right] = \frac{2s^2a}{\left(s^2+2a^2-2sa\right)\left(s^2+2a^2+2sa\right)}$$

$$= \frac{2s^2a}{\left(s^2+2a^2\right)^2-(2sa)^2} = \frac{2s^2a}{s^4+4s^2a^2+4a^4-(2sa)^2} = \frac{2s^2a}{s^4+4a^4}$$

Por lo tanto, $f(s) = \dfrac{2s^2a}{s^4+4a^4}$ L.q.q.d.

14. Hallar la transformada de Laplace de F(t) si :

a) $F(t)=\begin{cases} t, & t<2 \\ 2, & t>2 \end{cases}$

SOLUCIÓN

$$\Rightarrow L\{F(t)\}=\int_0^2 e^{-st}tdt+\int_2^{\infty} e^{-st}2dt=\int_0^2 e^{-st}tdt-\frac{2}{s}e^{-st}\Big|_2^{\infty}$$

$u=t$ du=dt

$dv=e^{-st}$ v=$-\frac{e^{-st}}{s}$

$$=(-\frac{2}{\text{s}}te^{-st}+\frac{e^{-st}}{s^2})\Big|_0^2-\frac{2e^{-st}}{s}\Big|_2^{\infty}=-\frac{4}{\text{s}}e^{-2s}+\frac{e^{-2s}}{s^2}-\frac{1}{s^2}+\frac{2e^{-2s}}{s}=-\frac{1+(1-2s)e^{-2s}}{s^2}$$

Rpta: $L\{F(t)\}=-\frac{1+(1-2s)e^{-2s}}{s^2}$

b) $F(t)=te^t\frac{d}{dt}(sen2t)$

SOLUCIÓN

$$\Rightarrow L\left\{\frac{d}{dt}sen2t\right\}=s(\frac{2}{s^2+4})-sen0=\frac{2s}{s^2+4}$$

$$L\left\{t.\frac{2s}{s^2+4}\right\}=-\frac{\text{d}}{\text{ds}}(\frac{2s}{s^2+4})=\frac{2s^2-8}{(s^2+4)^2}$$

$$\Rightarrow L\left\{te^t\frac{d}{dt}(sen2t)\right\}=\frac{2(\text{s-1})^2-8}{((\text{s-1})^2+4)^2}$$

Rpta: $L\{F(t)\}=\frac{2(\text{s-1})^2-8}{((\text{s-1})^2+4)^2}$

c) $F(t)=\begin{cases} sent, & t<2\pi \\ 0, & t>2\pi \end{cases}$

SOLUCIÓN

$$\Rightarrow L\{F(t)\} = \int_0^{2\pi} e^{-st} sent dt + \int_{2\pi}^{\infty} e^{-st}\,0dt$$

$$u = sent \qquad \text{du}=\cos t\text{dt}$$

$$dv = e^{-st} \qquad \text{v}=-\frac{e^{-st}}{s}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-st} sentdt = -sent\,\frac{e^{-st}}{s}\Bigg|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{s} e^{-st}\cos tdt$$

$$u = \cos t \qquad \text{du}=-sent\text{dt}$$

$$dv = e^{-st} \qquad \text{v}=-\frac{e^{-st}}{s}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-st} sentdt = -sent\,\frac{e^{-st}}{s}\Bigg|_0^{2\pi} - \cos t\,\frac{e^{-st}}{s^2}\Bigg|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{s^2} e^{-st} sentdt$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-st} sentdt = -s.sent\,\frac{e^{-st}}{s^2+1}\Bigg|_0^{2\pi} - \cos t\,\frac{e^{-st}}{s^2+1}\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= -\left(\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{-e^{-2\pi s}+1}{s^2+1}$$

$$\text{Rpta: } L\{F(t)\} = \frac{-e^{-2\pi s}+1}{s^2+1}$$

d) $F(t) = \begin{cases} 0 & ,t < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos t & ,\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{3\pi}{2} \\ 0 & ,t > \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

SOLUCIÓN

$$\Rightarrow L\{F(t)\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-st}\,0dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-st}\cos tdt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\infty} e^{-st}\,0dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-st}\cos tdt$$

$$u = \cos t \qquad \text{du}=-sent\text{dt}$$

$$dv = e^{-st} \qquad \text{v}=-\frac{e^{-st}}{s}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-st}\cos tdt = -\cos t\,\frac{e^{-st}}{s}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{s} e^{-st} sentdt$$

$$u = sent \qquad \text{du}=\cos t\text{dt}$$

$$dv = e^{-st} \qquad \text{v}=-\frac{e^{-st}}{s}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-st}\cos tdt = -\cos t\,\frac{e^{-st}}{s}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - sent\,\frac{e^{-st}}{s^2}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{s} e^{-st}\cos tdt$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-st}\cos tdt = -\cos t\,\frac{e^{-st}}{s-1}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - sent\,\frac{e^{-st}}{s(s-1)}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{(2s+1)e^{-\frac{3\pi s}{2}}}{s(s-1)}$$

$$\text{Rpta: } L\{F(t)\} = \frac{(2s+1)e^{-\frac{3\pi s}{2}}}{s(s-1)}$$

e) $$F(t) = \begin{cases} t & , \ t < 2 \\ \text{8-3t} & , \ 2 \le t \le 3 \\ t-4 & , \ 3 < t \le 4 \\ 0 & , \ t > 4 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

$$\Rightarrow L\{F(t)\} = \int_0^2 e^{-st} t\,dt + \int_2^3 e^{-st}(8-3t)\,dt + \int_3^4 e^{-st}(t-4)\,dt + \int_4^\infty e^{-st}\,0dt$$

$u = t$ du=dt

$dv = e^{-st}$ v=- $\frac{e^{-st}}{s}$

$$= -t\frac{e^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^2 - \frac{e^{-st}}{s} + 3t\frac{e^{-st}}{s} + 3\frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_2^3 + 4\frac{e^{-st}}{s} - t\frac{e^{-st}}{s} + \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_3^4 =$$

$$\frac{1-(1+2s)e^{-2s}}{s^2} + \frac{(8s+3)e^{-3s}}{s^2} + \frac{e^{-4s}-(1+s)e^{-3s}}{s^2} = \frac{e^{-4s}+(7s+2)e^{-3s}-(1+2s)e^{-2s}-1}{s^2}$$

$$\text{Rpta: } L\{F(t)\} = \frac{e^{-4s}+(7s+2)e^{-3s}-(1+2s)e^{-2s}-1}{s^2}$$

f) $$F(t) = e^{-3t}\int_0^t t\cos(4t)\,dt$$

SOLUCIÓN

$$L\{\cos 4t\} = \frac{s}{s^2+16}$$

$$L\{t\cos(4t)\} = -\frac{d}{du}\left(\frac{s}{s^2+16}\right) = \frac{16-s^2}{(s^2+16)^2}$$

$$L\left\{\int_0^t t\cos(4t)\,dt\right\} = \frac{f(s)}{s} = \frac{\frac{16-s^2}{(s^2+16)^2}}{s} = \frac{16-s^2}{s(s^2+16)^2}$$

$$L\left\{e^{-3t}\int_0^t t\cos(4t)\,dt\right\} = \frac{16-(s+3)^2}{(s+3)\left((s+3)^2+16\right)^2}$$

$$\text{Rpta: } F(s) = \frac{16-(s+3)^2}{(s+3)\left((s+3)^2+16\right)^2}$$

g) $F(t)=\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t e^{-t}\cos(3t)\,dt$

SOLUCIÓN

$$F(t)=\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t e^{-t}\cos(3t)\,dt$$

$$L\{\cos 3t\}=\frac{s}{s^2+9}$$

$$L\{e^{-t}\cos(3t)\}=\frac{s-1}{(s-1)^2+9}$$

$$L\left\{\int_0^t e^{-t}\cos(3t)\,dt\right\}=\frac{s-1}{s\left((s-1)^2+9\right)}$$

$$L\left\{\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t e^{-t}\cos(3t)\,dt\right\}=\frac{s(s-1)}{\left((s-1)^2+9\right)}-1=\frac{s-10}{(s-1)^2+9}$$

Rpta: $f(s)=\frac{s-10}{(s-1)^2+9}$

h) $F(t)=te^t\int_0^t t\frac{d}{dt}\left(e^{2t}sent\right)dt$

SOLUCIÓN

$$L\left\{\frac{d}{dt}\left(e^{2t}sent\right)\right\}=2e^{2t}sent+e^{2t}\cos t$$

$$L\{sent\}=\frac{1}{s^2+1}$$

$$L\{2e^{2t}sent\}=\frac{2}{(s-2)^2+1}$$

$$L\{\cos t\}=\frac{s}{s^2+1}$$

$$L\{e^{2t}\cos t\}=\frac{s-2}{(s-2)^2+1}$$

$$L\{2e^{2t}sent+e^{2t}\cos t\}=\frac{2}{(s-2)^2+1}+\frac{s-2}{(s-2)^2+1}$$

$$L\{t(2e^{2t}sent+e^{2t}\cos t)\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{(s-2)^2+1}\right)$$

$$=-\left(\frac{(s-2)^2+1-2s(s-2)}{\left((s-2)^2+1\right)^2}\right)=\frac{s^2-5}{\left((s-2)^2+1\right)^2}$$

$$L\left\{\int_0^t t\frac{d}{dt}\left(e^{2t}sent\right)dt\right\}=\frac{s^2-5}{s\left((s-2)^2+1\right)^2}$$

$$L\left\{t\int_0^t t\frac{d}{dt}\left(e^{2t}sent\right)dt\right\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2-5}{s\left((s-2)^2+1\right)^2}\right)=$$

$$-\left(\frac{2s^2\left((s-2)^2+1\right)^2-\left(s^2-5\right)\left(\left((s-2)^2+1\right)^2+4s\left((s-2)^2+1\right)(s-2)\right)}{s^2\left((s-2)^2+1\right)^4}\right)$$

$$=-\left(\frac{2s^2\left((s-2)^2+1\right)-\left(s^2-5\right)\left(\left((s-2)^2+1\right)+4s(s-2)\right)}{s^2\left((s-2)^2+1\right)^3}\right)$$

$$\text{Rpta: } f(s)=\frac{\left(4s^2-8s+1\right)\left(s^2-5\right)-2s^2-\left(s^2+5\right)(s-2)^2}{s^2\left((s-2)^2+1\right)^3}$$

15. Si $f(s)=L\{f(t)\}$,demostrar que para r›0; $L\left\{r^tF(ar)\right\}=\frac{1}{a}f\left(\frac{s-\ln r}{a}\right)$

SOLUCIÓN

$$L\left\{r^tF(ar)\right\}=\frac{1}{a}f\left(\frac{s-\ln r}{a}\right)$$

$$L\{F(r)\}=f(s)$$

$$L\{F(ar)\}=\frac{1}{a}f\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$f(x)=r^t$$

$$\ln\left(f(x)\right)=t\ln r$$

$$f(x)=e^{\ln rt}$$

$$\therefore L\left\{e^{\ln rt}F(ar)\right\}=\frac{1}{a}f\left(\frac{s-\ln r}{a}\right)$$

$$\text{Rpta: } L\left\{e^{\ln rt}F(ar)\right\}=\frac{1}{a}f\left(\frac{s-\ln r}{a}\right)$$

16. Demostrar que; $L\left\{t^2senbt\right\}=\frac{6bs^2-2b^3}{\left(s^2+b^2\right)^3}$

DEMOSTRACIÓN

$$L\{t^2 senbt\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{b}{s^2+b^2}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{-b(2s)}{(s^2+b^2)^2}\right)$$

$$= \frac{(-2b)(s^2+b^2)^2 + 2bs.2.(s^2+b^2).(2s)}{(s^2+b^2)^4} = \frac{(-2b)(s^2+b^2)+8bs^2}{(s^2+b^2)^3}$$

$$= \frac{-2bs^2-2b^3+8bs^2}{(s^2+b^2)^3} = \frac{6bs^2-2b^3}{(s^2+b^2)^3}$$

Por lo tanto, $f(s) = \dfrac{6bs^2-2b^3}{(s^2+b^2)^3}$ L.q.q.d.

17. Demostrar que; $L\left\{\dfrac{sent}{t}\right\} = arctg\dfrac{1}{s}$

DEMOSTRACIÓN

$$L\{sent\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$L\left\{\frac{sent}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} \frac{1}{u^2+1}du = arctgu\Big|_s^{\infty} = arctg\frac{1}{s}$$

Por lo tanto, $f(s) = arctg\dfrac{1}{s}$ L.q.q.d.

18. Calcular $L\{F(t)\}$ si:

a) $F(t) = e^{-3t}\displaystyle\int_0^t tsen(2t)dt$

SOLUCIÓN

$$F(t) = e^{-3t}\int_0^t tsen(2t)d$$

$$L\{sen2t\} = \frac{2}{s^2+4}$$

$$L\{tsen2t\} = (-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = (-1)\frac{-4s}{(s^2+4)^2} = \frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

$$L\left\{\int_0^t tsen2t\right\} = \frac{f(s)}{s} = \frac{\frac{4s}{(s^2+4)^2}}{s} = \frac{4}{(s^2+4)^2}$$

$$L\left\{e^{-3t}\int_0^t tsen2t\right\} = \frac{4}{((s+3)^2+4)^2} = \frac{4}{(s^2+6s+13)^2}$$

Rpta: $F(s)=\dfrac{4}{\left(s^2+6s+13\right)^2}$

b) $F(t)=e^{-3t}\dfrac{sen2t}{t}$

SOLUCIÓN

$$F(t)=e^{-3t}\frac{sen2t}{t}$$

$$L\{sen2t\}=\frac{2}{s^2+4}$$

$$L\left\{\frac{sen2t}{t}\right\}=\int_s^{+\infty}\frac{2}{u^2+4}du=2\int_s^{+\infty}\frac{1}{u^2+4}du=2\left(\frac{1}{2}\right)arctg\left(\frac{u}{2}\right)\Bigg|_s^{\infty}=\frac{\pi}{2}-arctg\left(\frac{s}{2}\right)$$

$$\Rightarrow L\{F(t)\}=L\left\{e^{-3t}\frac{sen2t}{t}\right\}=\frac{\pi}{2}-arctg\left(\frac{s+3}{2}\right)$$

Rpta: $F(s)=\dfrac{\pi}{2}-arctg\left(\dfrac{s+3}{2}\right)$

19. Calcular $L\left\{\int_0^t\frac{e^{-3t}sen2t}{t}dt\right\}$

SOLUCIÓN

$$L\{sen2t\}=\frac{2}{s^2+4}$$

$$L\left\{\frac{sen2t}{t}\right\}=\int_s^{+\infty}\frac{2}{u^2+4}du=2\int_s^{+\infty}\frac{1}{u^2+4}du=(2)\frac{1}{2}arctg\left(\frac{u}{2}\right)\Bigg|_s^{\infty}=\frac{\pi}{2}-arctg\left(\frac{s}{2}\right)$$

$$L\left\{\frac{e^{-3t}sen2t}{t}\right\}=\frac{\pi}{2}-arctg\left(\frac{s+3}{2}\right)$$

$$L\left\{\int_0^t\frac{e^{-3t}sen2t}{t}dt\right\}=\frac{f(s)}{s}=\frac{\frac{\pi}{2}-arctg\left(\frac{s+3}{2}\right)}{s}=\frac{1}{s}\left[\frac{\pi}{2}-arctg\left(\frac{s+3}{2}\right)\right]$$

Rpta: $F(s)=\dfrac{1}{s}\left[\dfrac{\pi}{2}-arctg\left(\dfrac{s+3}{2}\right)\right]$

20. Calcular $L\left\{\frac{sen^3t}{t}\right\}$:

SOLUCIÓN

Propiedad: $\boxed{sen^3t=\frac{3sent-sen3t}{4}}$

$$L\left\{sen^3t\right\}=L\left\{\frac{3sent-sen3t}{4}\right\}=\frac{1}{4}L\left\{3sent-sen3t\right\}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{s^2+1}-\frac{3}{s^2+9}\right)$$

$$L\left\{\frac{sen^3t}{t}\right\}=\frac{1}{4}\int_s^{+\infty}\left(\frac{3}{u^2+1}-\frac{3}{u^2+9}\right)du=\frac{3}{4}\int_s^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}du-\frac{3}{4}\int_s^{+\infty}\frac{1}{u^2+9}du$$

$$=\frac{3}{4}\left[arctg\left(u\right)\Big|_s^{\infty}-\frac{1}{3}arctg\left(\frac{u}{3}\right)\Big|_s^{\infty}\right]=\frac{3}{4}arctg\left(\frac{1}{s}\right)-\frac{1}{4}arctg\left(\frac{3}{s}\right)$$

Rpta: $f(s)=\frac{3}{4}arctg\frac{1}{s}-\frac{1}{4}arctg\frac{3}{s}$

21. Halle $L\left\{\frac{\left(e^{at}-e^{bt}\right)^2}{t}\right\}$

SOLUCIÓN

$$L\left\{\frac{\left(e^{at}-e^{bt}\right)^2}{t}\right\}=L\left\{\frac{e^{2at}-2e^{(a+b)t}+e^{2bt}}{t}\right\}$$

$$L\left\{e^{2at}-2e^{(a+b)t}+e^{2bt}\right\}=\frac{1}{s-2a}-\frac{2}{s-a-b}+\frac{1}{s-2b}$$

$$\Rightarrow L\left\{\frac{e^{2at}-2e^{(a+b)t}+e^{2bt}}{t}\right\}=\int_s^{+\infty}\frac{1}{u-2a}du-2\int_s^{+\infty}\frac{1}{u-a-b}du+\int_s^{+\infty}\frac{1}{u-2b}du$$

$$=\ln\left(u-2a\right)\Big|_s^{\infty}-2\ln\left(u-a-b\right)\Big|_s^{\infty}+\ln\left(u-2b\right)\Big|_s^{\infty}$$

$$=0-\ln\left(s-2a\right)-0+\ln\left(s-a-b\right)^2+0-\ln\left(s-2b\right)=\ln\left(\frac{\left(s-a-b\right)^2}{\left(s-2a\right)\left(s-2b\right)}\right)$$

Rpta: $f(s)=\ln\left(\frac{\left(s-a-b\right)^2}{\left(s-2a\right)\left(s-2b\right)}\right)$

Halle $L\left\{\dfrac{sent+sen^3t}{t}e^t\right\}$

$$L\left\{sent+sen^3t\right\}=L\left\{sent+\frac{3sent-sen3t}{4}\right\}=\frac{1}{4}L\left\{4sent+3sent-sen3t\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{7}{s^2+1}-\frac{3}{s^2+9}\right]$$

$$L\left\{\frac{\left(sent+sen^3t\right)}{t}\right\}=\frac{7}{4}\int_s^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}du-\frac{3}{4}\int_s^{+\infty}\frac{1}{u^2+9}du$$

$$=\frac{7}{4}arctg\left(u\right)\Big|_s^{\infty}-\frac{1}{4}arctg\left(\frac{u}{3}\right)\Big|_s^{\infty}=\frac{7}{4}arctg\left(\frac{1}{s}\right)-\frac{1}{4}arctg\left(\frac{3}{s}\right)$$

$$\Rightarrow L\left\{\frac{\left(sent+sen^3t\right)}{t}e^t\right\}=\frac{7}{4}arctg\left(\frac{1}{s-1}\right)-\frac{1}{4}arctg\left(\frac{3}{s-1}\right)$$

Rpta: $f\left(s\right)=\dfrac{7}{4}arctg\left(\dfrac{1}{s-1}\right)-\dfrac{1}{4}arctg\left(\dfrac{3}{s-1}\right)$

22. Halle $L\left\{\dfrac{sent+sen^3t}{t}e^t\right\}$

$$L\left\{sent+sen^3t\right\}=L\left\{sent+\frac{3sent-sen3t}{4}\right\}=\frac{1}{4}L\left\{4sent+3sent-sen3t\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{7}{s^2+1}-\frac{3}{s^2+9}\right]$$

$$L\left\{\frac{\left(sent+sen^3t\right)}{t}\right\}=\frac{7}{4}\int_s^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}du-\frac{3}{4}\int_s^{+\infty}\frac{1}{u^2+9}du$$

$$=\frac{7}{4}arctg\left(u\right)\Big|_s^{\infty}-\frac{1}{4}arctg\left(\frac{u}{3}\right)\Big|_s^{\infty}=\frac{7}{4}arctg\left(\frac{1}{s}\right)-\frac{1}{4}arctg\left(\frac{3}{s}\right)$$

$$\Rightarrow L\left\{\frac{\left(sent+sen^3t\right)}{t}e^t\right\}=\frac{7}{4}arctg\left(\frac{1}{s-1}\right)-\frac{1}{4}arctg\left(\frac{3}{s-1}\right)$$

23. Evaluar $L\left\{senkt.\cos kt\right\}$

SOLUCIÓN

$$L\left\{senkt.\cos kt\right\}=L\left\{\frac{2senkt.\cos kt}{2}\right\}=L\left\{\frac{sen2kt}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}L\left\{sen2kt\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{2k}{s^2+4k^2}\right)$$

Rpta: $f(s)=\dfrac{k}{s^2+4k^2}, s>0$

24. Hallar $L\{F(t)\}$ si $F(t)=e^{3t}\int_0^t t\cos(4t)\,dt$

SOLUCIÓN

$$L\{\cos(4t)\}=\frac{s}{s^2+16}$$

$$L\{t\cos(4t)\}=(-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+16}\right)=(-1)\left[\frac{(s^2+16)-s(2s)}{(s^2+16)^2}\right]=\frac{s^2-16}{(s^2+16)^2}$$

$$L\left\{\int_0^t t\cos(4t)\,dt\right\}=\frac{f(s)}{s}=\frac{\dfrac{s^2-16}{(s^2+16)^2}}{s}=\frac{s^2-16}{s(s^2+16)^2}$$

$$L\left\{e^{3t}\int_0^t t\cos(4t)\,dt\right\}=\frac{(s-3)^2-16}{(s-3)\left((s-3)^2+16\right)^2}$$

Rpta: $f(s)=\dfrac{(s-3)^2-16}{(s-3)\left((s-3)^2+16\right)^2}$

25. Hallar $L\{F(t)\}$ si:

a) $F(t)=t\int_0^t e^{-3t}sen(2t)\,dt$

SOLUCIÓN

$$L\{sen(2t)\}=\frac{2}{s^2+4}$$

$$L\{e^{-3t}sen(2t)\}=\frac{2}{(s+3)^2+4}$$

$$L\left\{\int_0^t e^{-3t}sen(2t)\,dt\right\}=\frac{f(s)}{s}=\frac{\dfrac{2}{(s+3)^2+4}}{s}=\frac{2}{s\left[(s+3)^2+4\right]}$$

$$L\left\{t\int_0^t e^{-3t}sen(2t)\,dt\right\}=(-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s\left[(s+3)^2+4\right]}\right)=(-1)\frac{\left[-\left((s+3)^2+4+2s(s+3)\right)\right]}{s^2\left[(s+3)^2+4\right]^2}$$

Rpta: $f(s)=\dfrac{3s^2+12s+13}{s^2\left[(s+3)^2+4\right]^2}$

b) $F(t)=t\int_0^t te^{-3t}sen2tdt$

SOLUCIÓN

$$L\left\{sen\left(2t\right)\right\} = \frac{2}{s^2+4}$$

$$L\left\{tsen\left(2t\right)\right\} = \left(-1\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = \left(-1\right)\left(\frac{-2\left(2s\right)}{\left(s^2+4\right)^2}\right) = \frac{4s}{\left(s^2+4\right)^2}$$

$$L\left\{te^{-3t}sen2t\right\} = \frac{4\left(s+3\right)}{\left(\left(s+3\right)^2+4\right)^2}$$

$$L\left\{\int_0^t te^{-3t}sen2tdt\right\} = \frac{f\left(s\right)}{s} = \frac{\dfrac{4\left(s+3\right)}{\left(\left(s+3\right)^2+4\right)^2}}{s} = \frac{4\left(s+3\right)}{s\left(\left(s+3\right)^2+4\right)^2}$$

$$L\left\{t\int_0^t te^{-3t}sen2tdt\right\} = \left(-1\right)\frac{d}{ds}\left[\frac{4\left(s+3\right)}{s\left(\left(s+3\right)^2+4\right)^2}\right]$$

$$= \left(-1\right)\left(\frac{4s\left(\left(s+3\right)^2+4\right)^2 - 4\left(s+3\right)\left[\left(\left(s+3\right)^2+4\right)^2 + 4s\left(\left(s+3\right)^2+4\right)\left(s+3\right)\right]}{s^2\left(\left(s+3\right)^2+4\right)^4}\right) =$$

$$\left(\frac{4\left(s+3\right)\left[\left(s+3\right)^4+8\left(s+3\right)^2+16+4s\left(s+3\right)^3+16s\left(s+3\right)\right]-4s\left(\left(s+3\right)^4+8\left(s+3\right)^2+16\right)}{s^2\left(\left(s+3\right)^2+4\right)^4}\right) =$$

$$\left(\frac{4\left(s+3\right)^5-4s\left(s+3\right)^4-32s\left(s+3\right)^2-64s+32\left(s+3\right)^3+64\left(s+3\right)+16s\left(s+3\right)^4+64s\left(s+3\right)^2}{s^2\left(\left(s+3\right)^2+4\right)^4}\right)$$

$$= \left(-1\right)\left(\frac{-4\left(s+3\right)^5-12s\left(s+3\right)^4-32\left(s+3\right)^3-32s\left(s+3\right)^2-64\left(s+3\right)+64s}{s^2\left(\left(s+3\right)^2+4\right)^4}\right)$$

$$= \frac{4\left(s+3\right)^5+12s\left(s+3\right)^4+32\left(s+3\right)^3+32s\left(s+3\right)^2+64\left(s+3\right)-64s}{s^2\left(\left(s+3\right)^2+4\right)^4}$$

Rpta: $\dfrac{4\left(s+3\right)^5+12s\left(s+3\right)^4+32\left(s+3\right)^3+32s\left(s+3\right)^2+64\left(s+3\right)-64s}{s^2\left(\left(s+3\right)^2+4\right)^4}$

c) $F\left(t\right) = e^{-3t}\int_0^t \frac{sen2t}{t}dt$

SOLUCIÓN

$$F(t)=e^{-3t}\int_0^t \frac{sen2t}{t}dt$$

$$L\{sen(2t)\}=\frac{2}{s^2+4}$$

$$L\left\{\frac{sen(2t)}{t}\right\}=2\int_s^{+\infty}\frac{1}{u^2+4}du=2\left(\frac{1}{2}\right)arctg\left(\frac{u}{2}\right)\Bigg|_s^{\infty}=\frac{\pi}{2}-arctg\left(\frac{s}{2}\right)$$

$$L\left\{\int_0^t \frac{sen2t}{t}dt\right\}=\frac{f(s)}{s}=\frac{\frac{\pi}{2}-arctg\left(\frac{s}{2}\right)}{s}=\frac{1}{s}\left[\frac{\pi}{2}-arctg\left(\frac{s}{2}\right)\right]$$

$$L\left\{e^{-3t}\int_0^t \frac{sen2t}{t}dt\right\}=\frac{1}{(s+3)}\left[\frac{\pi}{2}-arctg\left(\frac{s+3}{2}\right)\right]$$

Rpta: $f(s)=\frac{1}{(s+3)}\left[\frac{\pi}{2}-arctg\left(\frac{s+3}{2}\right)\right]$

d) $F(t)=\int_0^t \frac{e^t-\cos 2t}{t}dt$

SOLUCIÓN

$$F(t)=\int_0^t \frac{e^t-\cos 2t}{t}dt=\int_0^t \frac{e^t}{t}dt-\int_0^t \frac{\cos 2t}{t}dt$$

$$L\{e^t\}=\frac{1}{s-1}$$

$$L\{\cos 2t\}=\frac{s}{s^2+4}$$

$$L\left\{\frac{e^t}{t}\right\}-L\left\{\frac{\cos 2t}{t}\right\}=\int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u^2+4}\right)du=\left[\ln(u-1)-\ln(u^2+4)\right]\Big|_s^{\infty}$$

$$=\left[\ln\left(\frac{u-1}{u^2+4}\right)\right]\Bigg|_s^{\infty}=0-\ln\left(\frac{s-1}{s^2+4}\right)=\ln\left(\frac{s^2+4}{s-1}\right)$$

$$\Rightarrow L\left\{\int_0^t \frac{e^t-\cos 2t}{t}dt\right\}=\frac{f(s)}{s}=\frac{\ln\left(\frac{s^2+4}{s-1}\right)}{s}=\frac{1}{s}\ln\left(\frac{s^2+4}{s-1}\right)$$

Rpta: $f(s)=\frac{1}{s}\ln\left(\frac{s^2+4}{s-1}\right)$

26. Hallar $L\{F(t)\}$ si $F(t)=\begin{cases} sent & ,t<4\pi \\ sent+\cos t & ,t>4\pi \end{cases}$

SOLUCIÓN

$$F(t)=\begin{cases} sent & ,t<4\pi \\ sent+\cos t & ,t>4\pi \end{cases}$$

$$L\{F(t)\}=\int_0^{4\pi} e^{-st}(sent)dt+\int_{4\pi}^{\infty} e^{-st}(sent)dt+\int_{4\pi}^{\infty} e^{-st}(\cos t)dt$$

$u = sent \qquad du=\cos t dt$

$dv = e^{-st} \qquad v=-\dfrac{e^{-st}}{s}$

$u = \cos t \qquad du=-sentdt$

$dv = e^{-st} \qquad v=-\dfrac{e^{-st}}{s}$

$$L\{F(t)\}=\int_0^{4\pi} e^{-st}(sent)dt+\int_{4\pi}^{\infty} e^{-st}(sent)dt+\int_{4\pi}^{\infty} e^{-st}(\cos t)dt=-\frac{e^{-st}}{s}sent\Big|_0^{4\pi}+\int_0^{4\pi}\frac{e^{-st}}{s}(\cos t)dt-\frac{e^{-st}}{s}sent\Big|_{4\pi}^{\infty}+\int_{4\pi}^{\infty}\frac{e^{-st}}{s}(\cos t)dt$$

$$-\frac{e^{-st}}{s}\cos t\Big|_{4\pi}^{\infty}-\int_{4\pi}^{\infty}\frac{e^{-st}}{s}(sent)dt=-\frac{e^{-st}}{s}sent\Big|_0^{4\pi}-\frac{e^{-st}}{s}sent\Big|_{4\pi}^{\infty}-\frac{e^{-st}}{s}\cos t\Big|_{4\pi}^{\infty}+\int_0^{4\pi}\frac{e^{-st}}{s}(\cos t)dt+\int_{4\pi}^{\infty}\frac{e^{-st}}{s}(\cos t)dt-\int_{4\pi}^{\infty}\frac{e^{-st}}{s}(sent)dt$$

$$=-\frac{e^{-st}}{s}sent\Big|_0^{4\pi}-\frac{e^{-st}}{s}sent\Big|_{4\pi}^{\infty}-\frac{e^{-st}}{s}\cos t\Big|_{4\pi}^{\infty}-\frac{e^{-st}}{s}\cos t\Big|_0^{4\pi}-\int_0^{4\pi}\frac{e^{-st}}{s^2}(sent)dt-\frac{e^{-st}}{s}\cos t\Big|_{4\pi}^{\infty}-\int_{4\pi}^{\infty}\frac{e^{-st}}{s^2}(sent)dt$$

$$=-\frac{e^{-st}}{s}sent\Big|_0^{4\pi}-\frac{e^{-st}}{s}sent\Big|_{4\pi}^{\infty}-\frac{e^{-st}}{s}\cos t\Big|_{4\pi}^{\infty}-\frac{e^{-st}}{s}\cos t\Big|_0^{4\pi}-\int_0^{4\pi}\frac{e^{-st}}{s^2}(sent)dt-\frac{e^{-st}}{s}\cos t\Big|_{4\pi}^{\infty}-\int_{4\pi}^{\infty}\frac{e^{-st}}{s^2}(sent)dt+\frac{e^{-st}}{s}sent\Big|_{4\pi}^{\infty}-\int_{4\pi}^{\infty}\frac{e^{-st}}{s^2}(\cos t)dt$$

Rpta: $f(s)=\dfrac{3}{4}arctg\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{4}arctg\dfrac{3}{s}$

27. Hallar $L\left\{e^{3t}.\cos 3t.\cos 4t\right\}$

SOLUCIÓN

Propiedad: $\boxed{2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)}$

$$L\left\{e^{3t}.\cos 3t.\cos 4t\right\}=\frac{1}{2}L\left\{e^{3t}.2\cos 4t.\cos 3t\right\}=\frac{1}{2}L\left\{e^{3t}.\left(\cos(7t)+\cos(t)\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{s-3}{(s-3)^2+49}+\frac{s-3}{(s-3)^2+1}\right]=\left[\frac{(s-3)\left((s-3)^2+25\right)}{\left((s-3)^2+49\right)\left((s-3)^2+1\right)}\right]$$

Rpta: $f(s)=\dfrac{(s-3)\left((s-3)^2+25\right)}{\left((s-3)^2+49\right)\left((s-3)^2+1\right)}$

28. Calcular $L\left\{e^{3t}.t^3.sen^2 t\right\}$

SOLUCIÓN

$$L\left\{e^{3t}.t^3.sen^2 t\right\} = L\left\{e^{3t}.t^3.\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)\right\} = \frac{1}{2}L\left\{e^{3t}.t^3.(1-\cos 2t)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}L\left\{e^{3t}.t^3 - e^{3t}.t^3\cos 2t\right\} = \frac{1}{2}L\left\{e^{3t}.t^3\right\} - \frac{1}{2}L\left\{e^{3t}.t^3\cos 2t\right\}$$

$$\frac{1}{2}L\left\{t^3\right\} - \frac{1}{2}L\left\{t^3\cos 2t\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{s^4}\right) - \frac{1}{2}\left[(-1)^3\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)\right] = \left(\frac{3}{s^4}\right) - \frac{1}{2}\left[(-1)\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{4-2s^2}{\left(s^2+4\right)^2}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{3}{s^4}\right) - \frac{1}{2}\left[(-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{(-4s)\left(s^2+4\right)^2 - \left(4-2s^2\right).2.\left(s^2+4\right)(2s)}{\left(s^2+4\right)^4}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{3}{s^4}\right) - \frac{1}{2}\left[(-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{(-4s)\left(s^2+4\right) - \left(4-2s^2\right)(4s)}{\left(s^2+4\right)^3}\right)\right] = \left(\frac{3}{s^4}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{-4s^3-16s-16s+8s^3}{\left(s^2+4\right)^3}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{3}{s^4}\right) + 2\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{s^3-8s}{\left(s^2+4\right)^3}\right)\right] = \left(\frac{3}{s^4}\right) + 2\left[\frac{\left(3s^2-8\right)\left(s^2+4\right)^3 - \left(s^3-8s\right)2\left(s^2+4\right)^2(2s)}{\left(s^2+4\right)^6}\right]$$

$$= \left(\frac{3}{s^4}\right) + 2\left[\frac{\left(3s^2-8\right)\left(s^2+4\right) - \left(s^3-8s\right)(4s)}{\left(s^2+4\right)^4}\right] = \left(\frac{3}{s^4}\right) + 2\left[\frac{36s^2-32-s^4}{\left(s^2+4\right)^4}\right]$$

$$\Rightarrow L\left\{e^{3t}.t^3.sen^2 t\right\} = \frac{1}{2}L\left\{e^{3t}.t^3.(1-\cos 2t)\right\} = \left(\frac{3}{(s-3)^4}\right) + 2\left[\frac{36(s-3)^2 - 32 - (s-3)^4}{\left((s-3)^2+4\right)^4}\right]$$

Rpta: $f(s) = \left(\dfrac{3}{(s-3)^4}\right) + \left[\dfrac{72(s-3)^2 - 2(s-3)^4 - 64}{\left((s-3)^2+4\right)^4}\right]$

29. Hallar $L\left\{(t+a)^n\right\}, n \in Z^+$ *es un entero positivo.*

SOLUCIÓN

Rpta: $F(s) = n!\left(\dfrac{a^n}{(n-1)!s} + \dfrac{a^{n-1}}{(n-2)!s^2} + \ldots + \dfrac{a}{1!s^n} + \dfrac{1}{s^{n+1}}\right)$

30. Hallar $L\left\{sen(at).\cos(bt)\right\}$

SOLUCIÓN

Propiedad: $\boxed{2senA\cos B = sen(A+B) + sen(A-B)}$

$$L\{sen(at).\cos(bt)\}=\frac{1}{2}L\{2sen(at).\cos(bt)\}=\frac{1}{2}L\{sen(a+b)t+sen(a-b)t\}$$
$$=\frac{1}{2}L\{sen(a+b)t+sen(a-b)t\}=\frac{1}{2}\left[\frac{a+b}{s^2+(a+b)^2}+\frac{a-b}{s^2+(a-b)^2}\right]$$

Rpta: $f(s)=\frac{1}{2}\left[\frac{a+b}{s^2+(a+b)^2}+\frac{a-b}{s^2+(a-b)^2}\right]$

31. Hallar $L\{e^{at}sen^2bt\}$

SOLUCIÓN

$$L\{e^{at}sen^2bt\}=L\left\{e^{at}\left(\frac{1-\cos 2b}{2}\right)\right\}=\left(\frac{1}{2}\right)L\{e^{at}(1-\cos 2b)\}$$
$$=L\{1-\cos 2b\}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2-4b^2}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)L\{e^{at}(1-\cos 2b)\}=\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{s-a}-\frac{(s-a)}{(s-a)^2-4b^2}\right]=\frac{-4b^2}{2(s-a)\left((s-a)^2-4b^2\right)}$$

Rpta: $f(s)=\frac{-4b^2}{2(s-a)\left((s-a)^2-4b^2\right)}$

32. Hallar $L\left\{\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t e^{-t}\cos(3t)\,dt\right\}$

SOLUCIÓN

$$L\left\{\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t e^{-t}\cos(3t)\,dt\right\}$$
$$L\{\cos(3t)\}=\frac{s}{s^2+9}$$
$$L\{e^{-t}\cos(3t)\}=\frac{s+1}{(s+1)^2+9}$$
$$L\left\{\int_0^t e^{-t}\cos(3t)\,dt\right\}=\frac{f(s)}{s}=\frac{\frac{s+1}{(s+1)^2+9}}{s}=\frac{s+1}{s\left((s+1)^2+9\right)}$$
$$L\left\{\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t e^{-t}\cos(3t)\,dt\right\}=\frac{s^2(s+1)}{s\left((s+1)^2+9\right)}-s\int_0^t e^{-t}\cos(3t)\,dt-\left[\left(e^{-t}\cos(3t)\right)1-\left(e^{-t}\cos(3t)\right)0\right]$$
$$=\frac{s(s+1)}{\left((s+1)^2+9\right)}-s\int_0^t e^{0}\cos(0)\,dt-\left[\left(e^{0}\cos(0)\right)1-\left(e^{0}\cos(0)\right)0\right]=\frac{s(s+1)}{\left((s+1)^2+9\right)}-s\int_0^t dt-[1]$$
$$=\frac{s(s+1)}{\left((s+1)^2+9\right)}-s(t)\Big|_0^0-[1]=\frac{s(s+1)}{\left((s+1)^2+9\right)}-1=\frac{s(s+1)-(s+1)^2-9}{\left((s+1)^2+9\right)}=-\frac{s+10}{\left((s+1)^2+9\right)}$$

Rpta: $f(s)=-\frac{s+10}{\left((s+1)^2+9\right)}$

33. Calcular $L\left\{\sqrt{t}\cos t^{\frac{3}{2}}\right\}$

SOLUCIÓN

$$\text{Rpta: } F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3n+\frac{3}{2})}{(2n)!s^{3n+\frac{3}{2}}}$$

34. Calcular $L\left\{\int_0^{\infty} e^{-s^2t}\frac{sent}{t}dt\right\}$

SOLUCIÓN

$$L\left\{\int_0^{\infty} e^{-s^2t}\frac{sent}{t}dt\right\}$$

$$L\{sent\}=\frac{1}{s^2+1}$$

$$L\left\{\frac{sent}{t}\right\}=\int_s^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}du=arctg(u)\Big|_s^{\infty}=\frac{\pi}{2}-arctg(s)$$

$$L\left\{e^{-s^2t}\frac{sent}{t}\right\}=\frac{\pi}{2}-arctg(s+s^2)$$

$$L\left\{\int_0^{\infty} e^{-s^2t}\frac{sent}{t}dt\right\}=\frac{f(s)}{s}=\frac{\frac{\pi}{2}-arctg(s+s^2)}{s}=\frac{1}{s}\left[\frac{\pi}{2}-arctg(s+s^2)\right]$$

$$\text{Rpta: } f(s)=arctg\left(\frac{1}{s}\right)$$

35. Hallar $L\left\{\frac{\cos at-\cos bt}{te^t}\right\}$

SOLUCIÓN

$$L\left\{\frac{\cos at-\cos bt}{te^t}\right\}=L\left\{e^{-t}\frac{\cos at}{t}\right\}-L\left\{e^{-t}\frac{\cos bt}{t}\right\}$$

$$L\{\cos at\}=\frac{s}{s^2+a^2}$$

$$L\left\{\frac{\cos at}{t}\right\}=\frac{1}{2}\int_s^{+\infty}\frac{2u}{u^2+a^2}du=\frac{1}{2}\ln(u^2+a^2)\Big|_s^{\infty}=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\ln(s^2+a^2)\right]$$

$$L\left\{e^{-t}\frac{\cos at}{t}\right\}=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\ln\left((s+1)^2+a^2\right)\right]$$

$$L\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2}$$

$$L\left\{\frac{\cos bt}{t}\right\} = \frac{1}{2}\int_s^{+\infty}\frac{2u}{u^2+b^2}du = \frac{1}{2}\ln\left(u^2+b^2\right)\Big|_s^{\infty} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\ln\left(s^2+b^2\right)\right]$$

$$L\left\{e^{-t}\frac{\cos bt}{t}\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\ln\left((s+1)^2+b^2\right)\right]$$

$$L\left\{\frac{\cos at-\cos bt}{te^t}\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\ln\left((s+1)^2+a^2\right)\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\ln\left((s+1)^2+b^2\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\ln\left((s+1)^2+a^2\right)-\frac{\pi}{2}+\ln\left((s+1)^2+b^2\right)\right] = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(s+1)^2+b^2}{(s+1)^2+a^2}\right)$$

Rpta: $f(s) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(s+1)^2+b^2}{(s+1)^2+a^2}\right)$

36. Calcular $L\left\{\int_0^{\infty} e^{-a^2t}\frac{sent}{t}dt\right\}$

RESOLUCIÓN

$$L\left\{\frac{sent}{t}\right\} = \frac{1}{s}arctg(\frac{1}{s})$$

$$L\left\{e^{-a^2t}\frac{sent}{t}\right\} = \frac{1}{s+a^2}arctg(\frac{1}{s+a^2})$$

Rpta: $f(s) = \frac{1}{s\left(s+a^2\right)}arctg(\frac{1}{s+a^2})$

$$L\left\{\int_0^{\infty} e^{-a^2t}\frac{sent}{t}dt\right\} = \frac{1}{s\left(s+a^2\right)}arctg(\frac{1}{s+a^2})$$

37. Calcular la transformada de Laplace de: $L\left\{te^t\int_a^t z\frac{d}{dz}\left(e^{2z}senz\right)dz\right\}$

RESOLUCIÓN

$$L\{e^{2z}senz\} = \frac{1}{(s-2)^2+1}$$

$$L\left\{\frac{d}{dz}\left(e^{2z}senz\right)\right\} = s(L\{e^{2z}senz\})-e^0sen(0) = \frac{s}{(s-2)^2+1}$$

$$L\left\{z\frac{d}{dz}\left(e^{2z}senz\right)\right\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{(s-2)^2+1}\right) = \frac{s^2-5}{\left((s-2)^2+1\right)^2}$$

$$L\left\{\int_0^t z\frac{d}{dz}\left(e^{2z}senz\right)dz\right\} = \frac{1}{s}\frac{s^2-5}{\left((s-2)^2+1\right)^2}$$

$$L\left\{e^t\int_0^t z\frac{d}{dz}\left(e^{2z}senz\right)dz\right\} = \frac{(s-1)^2-5}{(s-1)\left((s-3)^2+1\right)^2}$$

$$L\left\{te^t\int_0^t z\frac{d}{dz}\left(e^{2z}senz\right)dz\right\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{(s-1)^2-5}{(s-1)\left((s-3)^2+1\right)^2}\right)$$

$$\text{Rpta: } f(s)=\frac{(s^2-4s-1)(5s^2-22s+22)}{(s-1)^2\left(s^2-6s+10\right)^3}-\frac{2}{\left(s^2-6s+10\right)^2}$$

38. Hallar $L\left\{\dfrac{\cos at-\cos bt}{te^t}\right\}$

RESOLUCIÓN

$$L\left\{e^{-t}\cos at-e^{-t}\cos bt\right\}=L\left\{e^{-t}\cos at\right\}-L\left\{e^{-t}cosbt\right\}$$

$$L\left\{e^{-t}\cos at-e^{-t}\cos bt\right\}=\frac{s+1}{(s+1)^2+a^2}-\frac{s+1}{(s+1)^2+b^2}$$

$$L\left\{\frac{e^{-t}(\cos at-\cos bt)}{t}\right\}=\int_s^{+\infty}\frac{u+1}{(u+1)^2+a^2}du-\int_s^{+\infty}\frac{u+1}{(u+1)^2+b^2}du$$

$$L\left\{\frac{e^{-t}(\cos at-\cos bt)}{t}\right\}=-\frac{1}{2}\ln\left((s+1)^2+a^2\right)+\frac{1}{2}\ln\left((s+1)^2+b^2\right)$$

$$\text{Rpta: } f(s)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(s+1)^2+b^2}{(s+1)^2+a^2}\right)$$

39. Calcular $L\left\{\int_0^{2t}te^{u-2t}\left(\dfrac{senu}{u}\right)du\right\}$

RESOLUCIÓN

$$L\left\{\frac{senu}{u}\right\}=arctg(\frac{1}{s})$$

$$L\left\{e^u\frac{senu}{u}\right\}=arctg(\frac{1}{s-1})$$

$$L\left\{\int_0^{2t}e^u\left(\frac{senu}{u}\right)du\right\}=\frac{1}{s}arctg(\frac{1}{s-1})$$

$$L\left\{te^{-2t}\int_0^{2t}e^u\left(\frac{senu}{u}\right)du\right\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+2}arctg(\frac{1}{s+1})\right)$$

$$\text{Rpta: } f(s)=\frac{arctg\left(\dfrac{1}{s+1}\right)}{(s+2)^2}-\frac{1}{\left((s+1)^2+1\right)(s+2)}$$

40. Demostrar que: $L\left\{\int_0^{2t}\int_0^{x}\left(\int_0^{2y}\dfrac{senz}{z}dz\right)dydx\right\}=\dfrac{4}{s^3}arctg\left(\dfrac{4}{s}\right)$

RESOLUCIÓN

$$L\left\{\int_0^{2y}\frac{senz}{z}dz\right\}=\frac{1}{s}arctg(\frac{1}{s})$$

$$\rightarrow L\left\{\int_0^{2t}\int_0^{x}\left(\int_0^{2y}\frac{senz}{z}dz\right)dydx\right\}=\frac{1}{s^3}arctg\left(\frac{1}{s}\right)$$

41. Calcular $L\left\{\int_0^{-t}\frac{senu}{u}du\right\}$

RESOLUCIÓN

$$L\{senu\}=\frac{1}{s^2+1}$$

$$L\left\{\frac{senu}{u}\right\}=\int_s^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}=arctgu\,/_s^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-arctgs$$

$$L\left\{\int_0^{-t}\frac{senu}{u}du\right\}=\frac{1}{s}(\frac{\pi}{2}-arctgs)=\frac{1}{s}arctg(\frac{1}{s})$$

Rpta: $f(s)=\frac{1}{s}arctg(\frac{1}{s})$

42. Calcular $L\left\{\int_0^{t}\int_0^{-t}\frac{senu}{u}dudu\right\}$

RESOLUCIÓN

$$L\left\{\int_0^{-t}\frac{senu}{u}du\right\}=\frac{1}{s}arctg(\frac{1}{s})$$

$$L\left\{\int_0^{t}\int_0^{-t}\frac{senu}{u}dudu\right\}=\frac{1}{s^2}arctg(\frac{1}{s})$$

Rpta: $f(s)=\frac{1}{s^2}arctg(\frac{1}{s})$

43. Demostrar que: $L\left\{\int_0^{bt}\int_0^{ax}\int_y^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}dudydz\right\}=\frac{ab^2}{s^3}\ln(\frac{s}{ab}+1)$

RESOLUCIÓN

$$L\left\{\int_0^{bt}\int_0^{ax}\int_y^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}dudydz\right\}=\frac{ab^2}{s^3}\ln(\frac{s}{ab}+1)$$

Rpta:

44. Demostrar que: $L\left\{\int_0^{t}\int_0^{-x}\int_0^{-y}\left(\frac{senz}{z}\right)dzdydx\right\}=-\frac{1}{s^3}arctg(\frac{1}{s})$

RESOLUCIÓN

$$L\left\{\int_0^{-y}\frac{senz}{z}\right\}=\frac{1}{s}arctg(\frac{1}{s})$$

$$\rightarrow L\left\{\int_0^{t}\int_0^{-x}\int_0^{-y}\left(\frac{senz}{z}\right)dzdydx\right\}=\frac{1}{s^3}arctg(\frac{1}{s})$$

Rpta:

45. Demostrar que: $L\left\{\int_0^{t}\int_0^{-x}\int_0^{-y}\left(\frac{senz}{z}\right)dzdydx\right\}=\frac{1}{s^2}arctg(-\frac{1}{s})$

RESOLUCIÓN

$$L\left\{\int_0^{-y}\frac{senz}{z}\right\}=\frac{1}{s}arctg(\frac{1}{s})$$

$$\rightarrow L\left\{\int_0^{t}\int_0^{-x}\int_0^{-y}\left(\frac{senz}{z}\right)dzdydx\right\}=\frac{1}{s^3}arctg(\frac{1}{s})$$

Rpta:

46. Calcular $L\left\{\int_0^{2t}\frac{\cos 3z-\cos 2z}{z}dz\right\}$

RESOLUCIÓN

$$L\left\{\int_0^{2t}\frac{\cos 3z-\cos 2z}{z}dz\right\}$$

$$L\left\{\frac{\cos 3z}{z}-\frac{\cos 2z}{z}\right\}=L\left\{\frac{\cos 3z}{z}\right\}-L\left\{\frac{\cos 2z}{z}\right\}$$

$$L\left\{\frac{\cos 3z}{z}-\frac{\cos 2z}{z}\right\}=\int_s^{+\infty}\frac{u}{u^2+9}du-\int_s^{+\infty}\frac{u}{u^2+4}du=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+4}{s^2+9}\right)$$

$$L\left\{\int_0^{2t}\frac{\cos 3z-\cos 2z}{z}dz\right\}=\frac{1}{2s}\ln\left(\frac{s^2+4}{s^2+9}\right)$$

Rpta: $f(s)=\dfrac{1}{2s}\ln\left(\dfrac{s^2+16}{s^2+36}\right)$

47. Calcular $L\left\{\int_0^t e^t z\frac{d}{dz}(e^{2z}senz)dz\right\}$

RESOLUCIÓN

$$L\{e^{2z}senz\}=\frac{1}{(s-2)^2+1}$$

$$L\left\{\frac{d}{dz}(e^{2z}senz)\right\}=s\frac{1}{(s-2)^2+1}-e^0sen(0)=\frac{s}{(s-2)^2+1}$$

$$L\left\{z\frac{d}{dz}(e^{2z}senz)\right\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{(s-2)^2+1}\right)=\frac{s^2-5}{(s-2)^2+1}$$

$$L\left\{\int_0^t z\frac{d}{dz}(e^{2z}senz)dz\right\}=\frac{s^2-5}{s\left((s-2)^2+1\right)^2}$$

$$L\left\{\int_0^t e^t z\frac{d}{dz}(e^{2z}senz)dz\right\}=\frac{(s-1)^2-5}{(s-1)\left((s-3)^2+1\right)}$$

Rpta: $f(s)=\dfrac{1}{(s-1)}\left[\dfrac{(s-1)^2-5}{\left((s-3)^2+1\right)^2}\right]$

48. Demostrar que: $L\left\{e^t\dfrac{sent}{t}\right\}=arctg\left(\dfrac{1}{s-1}\right)$

RESOLUCIÓN

$$L\left\{\frac{sent}{t}\right\}=\int_s^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}=arctgu\,/_s^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-arctg(s)$$

$$L\left\{e^t\,\frac{sent}{t}\right\}=\frac{\pi}{2}-arctg(s-1)=arctg(\frac{1}{1-s})$$

Rpta: No se cumple la igualdad

SOLUCIÓN

$$L\{sent\}=\frac{1}{s^2+1}$$

$$L\left\{\frac{sent}{t}\right\}=\int_s^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}du=arctg(u)\Big|_s^{\infty}=\frac{\pi}{2}-arctg(s)$$

$$L\left\{e^t\,\frac{sent}{t}\right\}=\frac{\pi}{2}-arctg(s-1)$$

Rpta: $f(s)=\dfrac{\pi}{2}-arctg(s-1)$

49. Calcular la transformada de Laplace de la función

$$F(t)=\begin{cases}\left|t-[|t|]\right| & ,\text{si } [|t|] \text{ es } par\\ \left|t-[|t+1|]\right| & ,\text{si } [|t|] \text{ es impar}\end{cases}$$

RESOLUCIÓN

$[|t|]$ =n ,n $\leq t<n+1$

$$F(t)=\begin{cases}\text{t} & ,\text{si } 0\leq t<1 \quad para\ n=0\\ \text{t -2} & ,\text{si } 1\leq t<2 \quad para\ n=1\\ \text{t-2} & ,\text{si } 2\leq t<1 \quad para\ n=2\\ \text{t-4} & ,\text{si } 3\leq t<4 \quad para\ n=3\\ \text{t-4} & ,\text{si } 4\leq t<5 \quad para\ n=4\\ . & \\ . & \end{cases}$$

por escala unidad queda f(t)= t + (t -2-t)u(t-1)+(t -2-(t-2))u(t-2)+(t -4-(t-2))u(t-3)+.............∞

$$f(t)=t-2u(t-1)-2u(t-3)-2u(t-5)-......-2u(t-(2k+1)) \qquad k\to\infty^+$$

$$L\{f(t)\}=L\{t-2u(t-1)-2u(t-3)-2u(t-5)-......-2u(t-(2k+1))\}$$

se sabe $\quad L\{u(t\text{-}a)\}=\dfrac{e^{-at}}{s}$

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{s^2}-2(\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-3s}}{s}+\frac{e^{-5s}}{s}+\frac{e^{-7s}}{s}.......\infty)=\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-(2k+1)s}$$

Rpta: $\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{2}{s}\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-(2k+1)s}$

50. Calcular $L\left\{\dfrac{\cos at - cosbt}{te^t}\right\}$

SOLUCIÓN

$$L\left\{\frac{\cos at-\cos bt}{te^t}\right\}=L\left\{e^{-t}\,\frac{\cos at}{t}\right\}-L\left\{e^{-t}\,\frac{\cos bt}{t}\right\}$$

$$L\{\cos at\}=\frac{s}{s^2+a^2}$$

$$L\left\{\frac{\cos at}{t}\right\}=\frac{1}{2}\int_s^{+\infty}\frac{2u}{u^2+a^2}du=\frac{1}{2}\ln\left(u^2+a^2\right)\Big|_s^{\infty}=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\ln\left(s^2+a^2\right)\right]$$

$$L\left\{e^{-t}\,\frac{\cos at}{t}\right\}=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\ln\left(\left(s+1\right)^2+a^2\right)\right]$$

$$L\{\cos bt\}=\frac{s}{s^2+b^2}$$

$$L\left\{\frac{\cos bt}{t}\right\}=\frac{1}{2}\int_s^{+\infty}\frac{2u}{u^2+b^2}du=\frac{1}{2}\ln\left(u^2+b^2\right)\Big|_s^{\infty}=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\ln\left(s^2+b^2\right)\right]$$

$$L\left\{e^{-t}\,\frac{\cos bt}{t}\right\}=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\ln\left(\left(s+1\right)^2+b^2\right)\right]$$

$$L\left\{\frac{\cos at-\cos bt}{te^t}\right\}=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\ln\left(\left(s+1\right)^2+a^2\right)\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\ln\left(\left(s+1\right)^2+b^2\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\ln\left(\left(s+1\right)^2+a^2\right)-\frac{\pi}{2}+\ln\left(\left(s+1\right)^2+b^2\right)\right]=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\left(s+1\right)^2+b^2}{\left(s+1\right)^2+a^2}\right)$$

Rpta: $f(s)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\left(s-1\right)^2+b^2}{\left(s-1\right)^2+a^2}\right)$

51. Calcular $L\left\{t\int_0^t e^u\,\dfrac{senu}{u}\,du\right\}$

RESOLUCIÓN

$$F(s)=L\left\{t\int_0^t e^u\,\frac{senu}{u}du\right\}$$

$$L\{sen(u)\}=\frac{2}{s^2+1}$$

$$L\left\{\frac{sen(u)}{u}\right\}=2\int_s^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}du=arctg(u)\Big|_s^{\infty}=\frac{\pi}{2}-arctg(s)$$

$$L\left\{e^u\,\frac{sen(u)}{u}\right\}=f(s-1)=\frac{\pi}{2}-arctg(s-1)$$

$$L\left\{\int_0^t e^u\,\frac{senu}{u}du\right\}=\frac{f(s-1)}{s}=\frac{\frac{\pi}{2}-arctg(s-1)}{s}=\frac{1}{s}\left[\frac{\pi}{2}-arctg(s-1)\right]$$

$$L\left\{t\int_0^t e^u\,\frac{senu}{u}du\right\}=d\left(\frac{f(s-1)}{s}\right)=\frac{1}{s^2}arctg\left(\frac{1}{s-1}\right)+\frac{1}{s(1+(s-1)^2)}$$

Rpta: $f(s)=\frac{1}{s^2}arctg\left(\frac{1}{s-1}\right)+\frac{1}{s\left(1+(s-1)^2\right)}$

1.

52. Calcular $L\left\{\int_0^{-3t}\int_0^{3x}\frac{1-e^y}{y}dydx\right\}$

$$F(s)=L\{1-e^{-y}\}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$$

$$L\left\{\frac{1-e^{-y}}{y}\right\}=+\ln(s)+\ln\left(\frac{1}{s+1}\right)=\ln\left(\frac{s}{(s+1)}\right)$$

$$L\left\{\int_0^{3x}\frac{1-e^{-y}}{y}dy\right\}=\frac{1}{s}\ln\left(\frac{s}{(s+1)}\right)$$

$$L\left\{\int_0^{-3t}\int_0^{3x}\frac{1-e^{-y}}{y}dydx\right\}=\frac{1}{s^2}\ln\left(\frac{s}{(s+1)}\right)$$

Rpta: f(s)= $\frac{1}{s^2}\ln\left(\frac{s}{(s+1)}\right)$

53. Calcular $L\left\{\int_0^t\frac{d}{dt}(te^{-t^2})dt\right\}$

$$L\{f(t)\} = L\left\{\int_0^t \frac{d}{dt}(te^{-t^2})dt\right\}$$

$$L\left\{e^{-t^2}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{-t^2}dt = -e^{-t^2}\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_0^\infty - \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}te^{-t^2}dt$$

$u = e^{-t^2}$ $\quad$ du=-2t$e^{-t^2}dt$

$dv = e^{-st}$ $\quad$ v = -$\dfrac{e^{-st}}{s}$ $\quad$ =

$$\int_0^\infty e^{-st}te^{-t^2}dt = -te^{-t^2}\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-st}e^{-t^2}dt - \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^2e^{-t^2}dt$$

u =t e^{-t^2} $\quad$ du= (e^{-t^2} -2t$^2e^{-t^2}$)dt

$dv = e^{-st}$ $\quad$ v = -$\dfrac{e^{-st}}{s}$

54. $L\left\{\dfrac{e^{at}-\cos bt}{t}\right\}$

$$L\{f(t)\} = L\left\{\frac{e^{at}-\cos bt}{t}\right\} = L\left\{\frac{e^{at}}{t}\right\} - L\left\{\frac{\cos bt}{t}\right\} =$$

$$L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \Rightarrow L\left\{\frac{e^{at}}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{u-a}du = ln(u-a)\Big|_s^\infty = ln\frac{1}{(s-a)}$$

$$-L\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2} \Rightarrow L\left\{\frac{\cos bt}{t}\right\} = \frac{1}{2}\int_s^\infty \frac{2u}{u^2+b^2}du = -ln(u^2+b^2)\Big|_s^\infty = ln(s^2+b^2)$$

$$L\left\{\frac{e^{at}-\cos bt}{t}\right\} = ln\frac{1}{(s-a)} + ln(s^2+b^2) = \ln(\frac{s^2+b^2}{s-a})$$

$$\text{Rpta: } \ln(\frac{s^2+b^2}{s-a})$$

55. $L\left\{\displaystyle\int_0^t \frac{senu^2}{u}du\right\}$

$$F(s)=L\left\{\int_0^t \frac{sen^2u}{u}du\right\}$$

$$sen^2u=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$L\left\{sen^2u\right\}=L\left\{\frac{1}{2}\right\}-L\left\{\frac{cos2u}{2}\right\}=\frac{1}{2s}-\frac{s}{2(s^2+4)}$$

$$L\left\{\frac{sen^2u}{u}\right\}=\frac{1}{2}\left[\int_s^\infty \frac{1}{x}dx+\int_s^\infty \frac{x}{x^2+4}dx\right]=\frac{1}{2}\left[\ln(x)-\frac{1}{2}ln(x^2+4)\right]\Bigg|_s^\infty$$

$$L\left\{\frac{sen^2u}{u}\right\}=\frac{1}{2}(\ln(\frac{1}{s})+\ln(s^2+4))=\ln\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}}$$

$$L\left\{\frac{sen^2u}{u}\right\}=\ln\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}}$$

Rpta: $\ln\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}}$

56. $L\left\{te^{-8t}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t e^{-t}\cos 4tdt\right\}$

$$f(s)=L\left\{te^{-8t}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t e^{-t}\cos 4tdt\right\}$$

$$L\left\{\cos 4t\right\}=\frac{s}{s^2+16}=L\left\{\int_0^t e^{-t}\cos 4tdt\right\}=\frac{1}{s}.\frac{s+1}{(s+1)^2+16}$$

$$L\left\{\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t e^{-t}\cos 4tdt\right\}=s\frac{s+1}{(s+1)^2+16}-F(0)-F'(0)=\frac{s(s+1)}{(s+1)^2+16}-1+1$$

$$L\left\{t\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t e^{-t}\cos 4tdt\right\}=-\frac{(2s+1)((s+1)^2+16)-2s(s+1)^2}{((s+1)^2+16)^2}=\frac{(s+1)^2+32s+16}{((s+1)^2+16)^2}$$

$$L\left\{e^{-8t}t\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t e^{-t}\cos 4tdt\right\}=\frac{(s+9)^2+32(s+9)+16}{((s+9)^2+16)^2}$$

Rpta: $\frac{(s+9)^2+32(s+9)+16}{((s+9)^2+16)^2}$

APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4\dfrac{dx}{dt}+4x=4e^{-2t}, x(0)=-1, x'(0)=4$

SOLUCIÓN:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=4e^{-2t}, x(0)=-1, x'(0)=4$$
$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+4\left[sX(s)-x(0)\right]+4X(s)=4L\left[e^{-2t}\right]$$
$$s^2X(s)+s-4+4sX(s)-4x(0)+4X(s)=4\frac{1}{s+2}$$
$$X(s)\left[s^2+4s+4\right]=4\frac{1}{s+2}-s$$
$$X(s)\left[s^2+4s+4\right]=\frac{4-s^2-2s}{s+2}$$
$$X(s)=\frac{4-s^2-2s}{(s+2)\left(s^2+4s+4\right)}$$
$$L^{-1}\left[X(s)\right]=L^{-1}\left[\frac{4-s^2-2s}{(s+2)\left(s^2+4s+4\right)}\right]$$
$$x(t)=L^{-1}\left[\frac{4-s^2-2s}{(s+2)^3}\right]$$

Como vemos podemos aplicar el método de fracciones parciales

$$x(t)=L^{-1}\left[\frac{4-s^2-2s}{(s+2)^3}\right]$$
$$\frac{4-s^2-2s}{(s+2)^3}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{(s+2)^2}+\frac{C}{(s+2)^3}$$
$$\frac{4-s^2-2s}{(s+2)^3}=\frac{A(s+2)^2+B(s+2)+C}{(s+2)^3}$$
$$4-s^2-2s=s^2A+4sA+4A+sB+2B+C$$
$$-2=4A+B\Rightarrow B=2$$
$$A=-1$$
$$4=4A+2B+C\Rightarrow C=4$$
$$x(t)=L^{-1}\left[\frac{-1}{s+2}+\frac{2}{(s+2)^2}+\frac{4}{(s+2)^3}\right]$$

$$x(t) = -L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] + 2L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2}\right] + 2L^{-1}\left[\frac{2}{(s+2)^3}\right]$$
$$x(t) = -e^{-2t} + 2te^{-2t} + 2t^2e^{-2t}$$

Respuesta: $x(t) = e^{-2t}(2t^2 + 2t - 1)$

b. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 6\cos 2t, x(0) = 3, x'(0) = 1$

SOLUCIÓN:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 6\cos 2t, x(0) = 3, x'(0) = 1$$
$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + X(s) = 6L[\cos 2t]$$
$$s^2X(s) - 3s - 1 + X(s) = 6\frac{s}{s^2+2^2}$$
$$X(s)\left(s^2+1\right) - 3s - 1 = 6\frac{s}{s^2+2^2}$$
$$X(s)\left(s^2+1\right) = 6\frac{s}{s^2+2^2} + 3s + 1$$
$$X(s)\left(s^2+1\right) = \frac{6s + (3s+1)\left(s^2+2^2\right)}{s^2+2^2}$$
$$X(s)\left(s^2+1\right) = \frac{6s + \left(3s^3 + 12s + s^2 + 4\right)}{s^2+2^2}$$
$$X(s) = \frac{3s^3 + 18s + s^2 + 4}{\left(s^2+2^2\right)\left(s^2+1\right)}$$
$$L^{-1}[X(s)] = L^{-1}\left[\frac{3s^3 + 18s + s^2 + 4}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+1\right)}\right]$$

Como vemos podemos aplicar el método de fracciones parciales

$$L^{-1}[X(s)] = L^{-1}\left[\frac{3s^3 + 18s + s^2 + 4}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+1\right)}\right]$$
$$x(t) = L^{-1}\left[\frac{3s^3 + 18s + s^2 + 4}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+1\right)}\right]$$
$$\frac{3s^3 + 18s + s^2 + 4}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+1\right)} = \frac{As+B}{\left(s^2+4\right)} + \frac{Cs+D}{\left(s^2+1\right)}$$

$$3s^3+18s+s^2+4=(As+B)(s^2+1)+(Cs+D)(s^2+4)$$
$$3s^3+18s+s^2+4=As^3+Bs^2+As+B+Cs^3+4Cs+Ds^2+4D$$
$$3=A+C$$
$$18=A+4C$$
$$15=3C \Rightarrow C=5 \wedge A=-2$$
$$1=B+D$$
$$4=B+4D$$
$$3=3D \Rightarrow D=1 \wedge B=0$$
$$x(t)=L^{-1}\left[\frac{-2s}{(s^2+4)}+\frac{5s+1}{(s^2+1)}\right]$$
$$x(t)=-2L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+4)}\right]+L^{-1}\left[\frac{5s+1}{(s^2+1)}\right]$$
$$x(t)=-2L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+4)}\right]+5L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)}\right]$$

Respuesta: $x(t)=-2\cos 2t+5\cos t+sent$

c. $y''(t)-y(t)=5sen2t, y(0)=0, y'(0)=1$

SOLUCIÓN:

$$y''(t)-y(t)=5sen2t, y(0)=0, y'(0)=1$$
$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=5L^{-1}[sen2t]$$
$$s^2Y(s)-1=5\frac{2}{s^2+4}$$
$$s^2Y(s)=5\frac{2}{s^2+4}+1$$
$$s^2Y(s)=\frac{10+s^2+4}{s^2+4}$$
$$Y(s)=\frac{s^2+14}{s^2(s^2+4)}$$
$$L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\frac{s^2+14}{s^2(s^2+4)}\right]$$

Como vemos podemos aplicar el método de fracciones parciales

$$L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{s^2+14}{s^2\left(s^2+4\right)}\right]$$

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{s^3+14s}{s^2\left(s^2+4\right)}\right]$$

$$\frac{s^3+14s}{s^2\left(s^2+4\right)} = \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{\left(s^2+4\right)}$$

$$\frac{s^3+14s}{s^2\left(s^2+4\right)} = \frac{As\left(s^2+4\right)+B\left(s^2+4\right)+s^2(Cs+D)}{s^2\left(s^2+4\right)}$$

$$s^3+14s = As\left(s^2+4\right)+B\left(s^2+4\right)+s^2(Cs+D)$$

$$s^3+14s = As^3+4As+Bs^2+4B+Cs^3+Ds^2$$

$$1 = A+C \Rightarrow C = \frac{-5}{2}$$

$$14 = 4A \Rightarrow A = \frac{7}{2}$$

$$B = D = 0$$

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{\frac{7}{2}}{s^2}+\frac{\frac{-5}{2}s}{s\left(s^2+4\right)}\right]$$

$$y(t) = \frac{7}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]+\frac{-5}{4}L^{-1}\left[\frac{2}{\left(s^2+4\right)}\right]$$

Respuesta: $y(t) = \frac{7}{2}t+\frac{-5}{4}sen2t$

d. $y''(t)-2y'(t)+2y(t) = 2\cos 2t-4sen2t, y(0)=0, y'(0)=1$

SOLUCIÓN:

$$y''(t)-2y'(t)+2y(t) = 2\cos 2t-4sen2t, y(0)=0, y'(0)=1$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-2sY(s)+2y(0)+2Y(s) = L[2\cos 2t-4sen2t]$$

$$s^2Y(s)-1-2sY(s)+2Y(s) = 2\frac{s}{s^2+4}-4\frac{2}{s^2+4}$$

$$Y(s)\left(s^2-2s+2\right) = 2\frac{s}{s^2+4}-4\frac{2}{s^2+4}+1$$

$$Y(s)\left(s^2-2s+2\right) = \frac{2s}{s^2+4}-\frac{8}{s^2+4}+1$$

$$Y(s)\left(s^2-2s+2\right) = \frac{2s+s^2-4}{s^2+4}$$

$$Y(s)=\frac{2s+s^2-4}{\left(s^2+4\right)\left(s^2-2s+2\right)}$$

$$L^{-1}\left[Y(s)\right]=L^{-1}\left[\frac{2s+s^2-4}{\left(s^2+4\right)\left(s^2-2s+2\right)}\right]$$

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{2s+s^2-4}{\left(s^2+4\right)\left(s^2-2s+2\right)}\right]$$

Como vemos podemos aplicar el método de fracciones parciales

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{2s^2+s^3-4s}{\left(s^2+4\right)\left(s^2-2s+2\right)}\right]$$

$$\frac{2s^2+s^3-4s}{\left(s^2+4\right)\left(s^2-2s+2\right)}=\frac{As+B}{\left(s^2+4\right)}+\frac{Cs+D}{\left(s^2-2s+2\right)}$$

$$\frac{2s^2+s^3-4s}{\left(s^2+4\right)\left(s^2-2s+2\right)}=\frac{(As+B)\left(s^2-2s+2\right)+(Cs+D)\left(s^2+4\right)}{\left(s^2+4\right)\left(s^2-2s+2\right)}$$

$$2s^2+s^3-4s=(As+B)\left(s^2-2s+2\right)+(Cs+D)\left(s^2+4\right)$$

$$2s^2+s^3-4s=As^3-2As^2+2As+Bs^2-2Bs+2B+Cs^3+Ds^2+4Cs+4D$$

$$1=A+C$$

$$2=-2A+B$$

$$-4=2A-2B+4C$$

$$D=0\wedge A=\frac{2}{3}\wedge B=\frac{7}{3}\wedge C=\frac{1}{3}$$

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{\frac{2}{3}s+\frac{7}{3}}{s\left(s^2+4\right)}+\frac{\frac{1}{3}s}{s\left(s^2-2s+2\right)}\right]$$

$$y(t)=\frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{2s+7}{s\left(s^2+4\right)}\right]+\frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{\left(s^2-2s+2\right)}\right]$$

$$y(t)=\frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{2}{\left(s^2+4\right)}\right]+\frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{7}{s\left(s^2+4\right)}\right]+\frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2+1}\right]$$

$$y(t)=\frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{2}{\left(s^2+4\right)}\right]+\frac{7}{24}L^{-1}\left[\frac{4}{s\left(s^2+4\right)}\right]+\frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2+1}\right]$$

$$y(t)=\frac{1}{3}sen2t+\frac{7}{24}(1-\cos 2t)+\frac{1}{3}e^t sent$$

Respuesta: $y(t)=\frac{1}{3}sen2t-\frac{7}{24}\cos 2t+\frac{1}{3}e^t sent+\frac{7}{24}$

e. $y''(t)-ty'(t)+y(t)=1, y(0)=1, y'(0)=2$

SOLUCIÓN:

$y''(t)-ty'(t)+y(t)=1, y(0)=1, y'(0)=2$

Respuesta:

f. $ty''(t)+(-1-t)y'(t)+2y(t)=t-1, y(0)=0, y'(0)=1$

SOLUCIÓN:

Respuesta:

g. $\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+4y=18e^{-t}sen3t, y(0)=0, y'(0)=3$

SOLUCIÓN:

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+4y=18e^{-t}sen3t, y(0)=0, y'(0)=3$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-sY(0)+y(0)+4Y(s)=18L\left[e^{-t}sen3t\right]$$

$$s^2Y(s)-3-sY(0)+4Y(s)=18\frac{3}{(s+1)^2+9}$$

$$Y(s)\left(s^2-s+4\right)=\frac{54}{(s+1)^2+9}+3$$

$$Y(s)\left(s^2-s+4\right)=\frac{54+3\left(s^2+2s+10\right)}{(s+1)^2+9}$$

$$Y(s)=\frac{54+3\left(s^2+2s+10\right)}{\left(s^2+2s+10\right)\left(s^2-s+4\right)}$$

$$Y(s)=\frac{3s^2+6s+84}{\left(s^2+2s+10\right)\left(s^2-s+4\right)}$$

$$L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\frac{3s^2+6s+84}{\left(s^2+2s+10\right)\left(s^2-s+4\right)}\right]$$

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{3s^3+6s^2+84s}{\left(s^2+2s+10\right)\left(s^2-s+4\right)}\right]$$

$$\frac{3s^3+6s^2+84s}{\left(s^2+2s+10\right)\left(s^2-s+4\right)}=\frac{As+B}{\left(s^2+2s+10\right)}+\frac{Cs+D}{\left(s^2-s+4\right)}$$

$$\frac{3s^3+6s^2+84s}{(s^2+2s+10)(s^2-s+4)}=\frac{(As+B)(s^2-s+4)+(Cs+D)(s^2+2s+10)}{(s^2+2s+10)(s^2-s+4)}$$

$$3s^3+6s^2+84s=As^3-As^2+4As+Bs^2-Bs+4B+Cs^3+2Cs^2+10Cs+Ds^2+2Ds+10D$$

$$6=-A+B+2C$$

$$84=4A-B+10C$$

$$90=3A+12C$$

$$3=A+C$$

$$81=9C\Rightarrow C=9\wedge A=-6\wedge B=-18\wedge D=0$$

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{-6s-18}{s(s^2+2s+10)}+\frac{9s}{s(s^2-s+4)}\right]$$

Respuesta:

h. $\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}-4y=-3e^t+4e^{2t}, y(0)=0, y'(0)=5, y''(0)=3$

SOLUCIÓN:

$$\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}-4y=-3e^t+4e^{2t}, y(0)=0, y'(0)=5, y''(0)=3$$

$$s^3Y(s)-s^2y(0)-sy'(0)-y''(0)-s^2Y(s)+sy(0)+y'(0)+4sY(s)-4y(0)-4Y(s)=L\left[-3e^t+4e^{2t}\right]$$

$$s^3Y(s)-5s-3-s^2Y(s)+5+4sY(s)-4Y(s)=\frac{-3}{s-1}+\frac{4}{s-2}$$

$$Y(s)(s^3-s^2+4s-4)-5s+2=\frac{-3}{s-1}+\frac{4}{s-2}$$

$$Y(s)(s^3-s^2+4s-4)=\frac{-3s+6+4s-4}{(s-1)(s-2)}+5s-2$$

$$Y(s)=\frac{-3s+6+4s-4+(5s-2)(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)(s^3-s^2+4s-4)}$$

$$Y(s)=\frac{-3s+6+4s-4+(5s-2)(s^2-3s+2)}{(s-1)(s-2)(s^3-s^2+4s-4)}$$

$$Y(s)=\frac{5s^3-17s^2+17s-2}{(s-1)(s-2)(s^3-s^2+4s-4)}$$

$$L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\frac{5s^3-17s^2+17s-2}{(s-1)(s-2)(s^3-s^2+4s-4)}\right]$$

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{5s^3-17s^2+17s-2}{(s-1)(s-2)(s^3-s^2+4s-4)}\right]$$

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{5s^3-17s^2+17s-2}{(s-1)^2(s-2)\left(s^2+4\right)}\right]$$

$$\frac{5s^3-17s^2+17s-2}{(s-1)^2(s-2)\left(s^2+4\right)}=\frac{A}{(s-1)}+\frac{B}{(s-1)^2}+\frac{C}{(s-2)}+\frac{Ds+E}{\left(s^2+4\right)}$$

$$\frac{5s^3-17s^2+17s-2}{(s-1)^2(s-2)\left(s^2+4\right)}=$$

$$\frac{A(s-1)(s-2)\left(s^2+4\right)+B(s-2)\left(s^2+4\right)+C(s-1)^2\left(s^2+4\right)+(Ds+E)(s-1)^2(s-2)\left(s^2+4\right)}{(s-1)^2(s-2)\left(s^2+4\right)}$$

$$\frac{5s^3-17s^2+17s-2}{(s-1)^2(s-2)\left(s^2+4\right)}=$$

$$\frac{A\left(s^4-3s^3+6s^2-3s+8\right)+B\left(s^3-2s^2+4s-8\right)+C(s^4-2s^3+5s^2-8s+4)+(Ds+E)(s^5-4s^4+9s^3-18s^2+20s-8)}{(s-1)^2(s-2)\left(s^2+4\right)}$$

$$5s^3-17s^2+17s-2=A\left(s^4-3s^3+6s^2-3s+8\right)+B\left(s^3-2s^2+4s-8\right)+C(s^4-2s^3+5s^2-8s+4)+$$
$$+(Ds+E)(s^5-4s^4+9s^3-18s^2+20s-8)$$

Respuesta:

2. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a. $\frac{d^3y}{dt^3}+2\frac{d^2y}{dt^2}-11\frac{dy}{dt}-12y=4, y(0)=y'(0)=y''(0)=0$

SOLUCIÓN:

$$\frac{d^3y}{dt^3}+2\frac{d^2y}{dt^2}-11\frac{dy}{dt}-12y=4, y(0)=y'(0)=y''(0)=0$$

$$s^3Y(s)-s^2y(0)-sy'(0)-y''(0)+2(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0))-11(sY(s)-y(0))-12Y(s)=L[4]$$

$$s^3Y(s)+2s^2Y(s)-11sY(s)-12Y(s)=\frac{4}{s}$$

$$Y(s)(s^3+2s^2-11s-12)=\frac{4}{s}$$

$$Y(s)=\frac{4}{s(s^3+2s^2-11s-12)}$$

$$Y(s)=\frac{4}{s(s+4)(s-3)(s+1)}$$

$$L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\frac{4}{s(s+4)(s-3)(s+1)}\right]$$

Como vemos podemos aplicar el método de fracciones parciales

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{4}{s(s+4)(s-3)(s+1)}\right]$$

$$\frac{4}{s(s+4)(s-3)(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+4)}+\frac{C}{(s-3)}+\frac{D}{(s+1)}$$

$$\frac{4}{s(s+4)(s-3)(s+1)}=$$

$$=\frac{A(s^3+2s^2-11s-12)+B(s^3-2s^2-3s)+C(s^3+5s^2+4s)+D(s^3+s^2-12s)}{s(s+4)(s-3)(s+1)}$$

$$4=A(s^3+2s^2-11s-12)+B(s^3-2s^2-3s)+C(s^3+5s^2+4s)+D(s^3+s^2-12s)$$

$$A+B+C+D=0$$

$$2A-2B+5C+D=0\Rightarrow C=\frac{12-3D}{7}$$

$$-11A-3B+4C-12D=0\Rightarrow B=\frac{279-96D}{21}$$

$$-12A=4\Rightarrow A=-3\wedge B=\frac{17568}{1491}\wedge C=\frac{303}{497}\wedge D=\frac{183}{71}$$

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{-3}{s}+\frac{\frac{17568}{1491}}{(s+4)}+\frac{\frac{303}{497}}{(s-3)}+\frac{\frac{183}{71}}{(s+1)}\right]$$

$$y(t)=-3L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+\frac{17568}{1491}L^{-1}\left[\frac{1}{(s+4)}\right]+\frac{303}{497}L^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)}\right]+\frac{183}{71}L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right]$$

Respuesta: $y(t)=-3+\frac{17568}{1491}e^{-4t}+\frac{303}{497}e^{3t}+\frac{183}{71}e^{-t}$

b. $t^2y''(t)-2y(t)=2$

SOLUCIÓN:

$$t^2y''(t)-2y(t)=2$$

$$\frac{d^2(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0))}{ds^2}-2Y(s)=L[2]$$

$$\frac{d^2(s^2Y(s))}{ds^2}-2Y(s)=\frac{2}{s}$$

$$2Y(s)+\frac{2sdY(s)}{ds}+\frac{2sdY(s)}{ds}+s^2\frac{d^2Y(s))}{ds^2}-2Y(s)=\frac{2}{s}$$

$$\frac{4sdY(s)}{ds}+s^2\frac{d^2Y(s)}{ds^2}=\frac{2}{s}$$

$$4st+s^2t^2=\frac{2}{s}$$

$$t(4+st)=\frac{2}{s^2}$$

Respuesta:

c. $y''(t)+2ty'(t)-4y(t)=6, y(0)=y'(0)=0$

SOLUCIÓN:

$y''(t)+2ty'(t)-4y(t)=6, y(0)=y'(0)=0$

Respuesta:

d. $y''(t)-8ty'(t)+16y(t)=3, y(0)=y'(0)=0$

SOLUCIÓN:

$y''(t)-8ty'(t)+16y(t)=3, y(0)=y'(0)=0$

Respuesta:

e. $y''(t)-4ty'(t)+4y(t)=0, y(0)=0, y'(0)=10$

SOLUCIÓN:

$y''(t)-4ty'(t)+4y(t)=0, y(0)=0, y'(0)=10$

Respuesta:

f. $\frac{d^3y}{dt^3}+4\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+2y=10\cos t, y(0)=0, y'(0)=0, y''(0)=3$

SOLUCIÓN:

$\frac{d^3y}{dt^3}+4\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+2y=10\cos t, y(0)=0, y'(0)=0, y''(0)=3$

Respuesta:

g. $\frac{d^2y}{dt^2}+y=e^{-2t}sent, y(0)=y'(0)=0$

SOLUCIÓN:

$\frac{d^2y}{dt^2}+y=e^{-2t}sent, y(0)=y'(0)=0$

Respuesta:

h. $\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}-8y=0, y(0)=3, y'(0)=6$

SOLUCIÓN:

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}-8y=0, y(0)=3, y'(0)=6$$

Respuesta:

3. Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales:

a. $tx''(t)-(4t-1)x'(t)+2(2t+1)x(t)=0, \text{ si } x(0)=0$

SOLUCIÓN:

$$tx''(t)-(4t-1)x'(t)+2(2t+1)x(t)=0,$$

Respuesta:

b. $x\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+xy=0, y(0)=1, y'(0)=1$

SOLUCIÓN:

$$x\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+xy=0, y(0)=1, y'(0)=1$$

Respuesta:

c. $tx''(t)+x'(t)-a^2tx(t)=0, x(0)=k, x'(0)=0, a\neq 0$

SOLUCIÓN:

$$tx''(t)+x'(t)-a^2tx(t)=0, x(0)=k, x'(0)=0, a\neq 0$$

Respuesta:

d. Resolver para V(t), si $\int_0^1 V'(t)V(t-u)du=24t^4, V(0)=0$

SOLUCIÓN:

Respuesta:

e. $tx''(t)+3x'(t)+tx(t)=0, \text{ si } x(0)=\frac{1}{2}$

SOLUCIÓN:

$$tx''(t)+3x'(t)+tx(t)=0,$$

Respuesta:

f. $t^2y''(t)+(2t^2+t)y'(t)+(2t^2+t-1)y(t)=0, \text{si } y(0)=0, y'(0)=\dfrac{1}{2}$

SOLUCIÓN:

$t^2y''(t)+(2t^2+t)y'(t)+(2t^2+t-1)y(t)=0,$

Respuesta:

g. $y'''(t)-6y''(t)+12y'(t)-8y(t)=t^3e^{2t}+1, y(0)=1, y'(0)=-1, y''(0)=2$

SOLUCIÓN:

$y'''(t)-6y''(t)+12y'(t)-8y(t)=t^3e^{2t}+1, y(0)=1, y'(0)=-1, y''(0)=2$

Respuesta:

h. $t^2V''(t)+tV'(t)+(t^2-1)V(t)=0, V(1)=2$

SOLUCIÓN:

$t^2V''(t)+tV'(t)+(t^2-1)V(t)=0, V(1)=2$

Respuesta:

4. Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales:

a. $y''(t)+4y(t)=9t, y(0)=0, y'(0)=7$

SOLUCIÓN:

$y''(t)+4y(t)=9t, y(0)=0, y'(0)=7$

Respuesta:

b. $y''(t)-3y'(t)+2y(t)=4t+12e^{-t}, y(0)=6, y'(0)=-1$

SOLUCIÓN:

$y''(t)-3y'(t)+2y(t)=4t+12e^{-t}, y(0)=6, y'(0)=-1$

Respuesta:

c. $y''(t)-4y'(t)+5y(t)=125t^2, y(0)=y'(0)=0$

SOLUCIÓN:

$y''(t)-4y'(t)+5y(t)=125t^2, y(0)=y'(0)=0$

Respuesta:

d. $y''(t) + y(t) = 8\cos t, y(0) = 1, y'(0) = -1$

SOLUCIÓN:

$y''(t) + y(t) = 8\cos t, y(0) = 1, y'(0) = -1$

Respuesta:

e. $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4e^{2t}$

SOLUCIÓN:

$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4e^{2t}$

Respuesta:

f. $y''(t) + 9y(t) = 18t, y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 0$

SOLUCIÓN:

$y''(t) + 9y(t) = 18t, y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 0$

Respuesta:

g. $y''(t) + 4y(t) = F(t), y(0) = 0, y'(0) = 1, donde F(t) = \begin{cases} 1, 0 < t < 1 \\ 0, t > 1 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

$y''(t) + 4y(t) = F(t), y(0) = 0, y'(0) = 1, donde F(t) = \begin{cases} 1, 0 < t < 1 \\ 0, t > 1 \end{cases}$

Respuesta:

h. $y''(t) + 4y(t) = F(t), y(0) = 0, y'() = 1, Si F(t) = U(t-2)$

SOLUCIÓN:

$y''(t) + 4y(t) = F(t), y(0) = 0, y'() = 1, Si F(t) = U(t-2)$

Respuesta:

i. $x'(t) + 3x(t) = e^{-2t}, x(0) = 0$

SOLUCIÓN:

$x'(t)+3x(t)=e^{-2t}, x(0)=0$

Respuesta:

j. $x'(t)-x(t)=\cos t - sent, x(0)=0$

SOLUCIÓN:

$x'(t)-x(t)=\cos t - sent, x(0)=0$

Respuesta:

k. $x'(t)+x(t)=2sent, x(0)=0$

SOLUCIÓN:

$x'(t)+x(t)=2sent, x(0)=0$

Respuesta:

l. $2x'(t)+6x(t)=te^{-3t}, x(0)=-\frac{1}{2}$

SOLUCIÓN:

$2x'(t)+6x(t)=te^{-3t}, x(0)=-\frac{1}{2}$

Respuesta:

5. Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales:

   a. $x''(t)+x(t)=2e^{t}, x(0)=1, x'(0)=2$

SOLUCIÓN:

$$x''(t)+x(t)=2e^{t}, x(0)=1, x'(0)=2$$
$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+X(s)=2L[e^{t}]$$
$$s^2X(s)-s-2+X(s)=\frac{2}{s-1}$$
$$X(s)(s^2+1)=\frac{2}{s-1}+s+2$$
$$X(s)(s^2+1)=\frac{s^2+s}{s-1}$$
$$X(s)=\frac{s(s+1)}{(s^2+1)(s-1)}$$

$$L^{-1}[X(s)] = L^{-1}\left[\frac{s(s+1)}{(s^2+1)(s-1)}\right]$$

$$x(t) = L^{-1}\left[\frac{s(s+1)}{(s^2+1)(s-1)}\right]$$

$$\frac{s(s+1)}{(s^2+1)(s-1)} = \frac{As+B}{(s^2+1)} + \frac{C}{(s-1)}$$

$$\frac{s(s+1)}{(s^2+1)(s-1)} = \frac{(As+B)(s-1)+C(s^2+1)}{(s^2+1)(s-1)}$$

$$s(s+1) = (As+B)(s-1)+C(s^2+1)$$

$$s^2+s = As^2+Bs-As-B+Cs^2+C$$

$$1 = A+C$$

$$1 = B-A$$

$$2 = B+C$$

$$0 = C-B$$

$$2 = 2C \Rightarrow C = 1 \wedge A = 0 \wedge B = 1$$

$$x(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)} + \frac{1}{(s-1)}\right]$$

$$x(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\right]$$

Respuesta: $x(t) = sent + e^t$

b. $x'(t) - 3x(t) = 3t^3 + 3t^2 + 2t + 1, x(0) = -1$

SOLUCIÓN:

$$x'(t) - 3x(t) = 3t^3 + 3t^2 + 2t + 1, x(0) = -1$$

$$sX(s) - x(0) - 3X(s) = L[3t^3 + 3t^2 + 2t + 1]$$

$$sX(s) + 1 - 3X(s) = L[3t^3] + L[3t^2] + L[2t] + L[1]$$

$$sX(s) + 1 - 3X(s) = \frac{6}{s^4} + \frac{6}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}$$

$$X(s)(s-3) = \frac{6}{s^4} + \frac{6}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} - 1$$

$$X(s) = \frac{6+6s+2s^2+s^3-s^4}{s^4(s-3)}$$

$$L^{-1}[X(s)] = L^{-1}\left[\frac{6+6s+2s^2+s^3-s^4}{s^4(s-3)}\right]$$

$$x(t)=L^{-1}\left[\frac{6+6s+2s^2+s^3-s^4}{s^4(s-3)}\right]$$

$$\frac{6+6s+2s^2+s^3-s^4}{s^4(s-3)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{D}{s^4}+\frac{E}{(s-3)}$$

$$\frac{6+6s+2s^2+s^3-s^4}{s^4(s-3)}=\frac{As^3(s-3)+Bs^2(s-3)+Cs(s-3)+D(s-3)+Es^4}{s^4(s-3)}$$

$$\frac{6+6s+2s^2+s^3-s^4}{s^4(s-3)}=\frac{As^4-3As^3+Bs^3-3Bs^2+Cs^2-3Cs+Ds-3D+Es^4}{s^4(s-3)}$$

$$6+6s+2s^2+s^3-s^4=As^4-3As^3+Bs^3-3Bs^2+Cs^2-3Cs+Ds-3D+Es^4$$

$$-1=A+E\Rightarrow E=\frac{5}{18}$$

$$1=-3A+B\Rightarrow A=-\frac{23}{18}$$

$$2=-3B+C\Rightarrow B=-\frac{14}{9}$$

$$6=-3C+D\Rightarrow C=-\frac{8}{3}$$

$$6=-3D\Rightarrow D=-2$$

$$x(t)=L^{-1}\left[\frac{-\frac{23}{18}}{s}+\frac{-\frac{14}{9}}{s^2}+\frac{-\frac{8}{3}}{s^3}+\frac{-2}{s^4}+\frac{\frac{5}{18}}{(s-3)}\right]$$

$$x(t)=-\frac{23}{18}L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\frac{14}{9}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]-\frac{8}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right]-2L^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right]+\frac{5}{18}L^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)}\right]$$

Respuesta: $x(t)=-\dfrac{23}{18}-\dfrac{14}{9}t-\dfrac{4t^2}{3}-2\dfrac{t^3}{6}+\dfrac{5}{18}e^{3t}$

C. $x''(t)+2x'(t)=\dfrac{1}{7}(t-\dfrac{1}{4})e^{-2t},x(0)=2,x'(0)=-\dfrac{1}{56}$

SOLUCIÓN:

$$x''(t)+2x'(t)=\frac{1}{7}(t-\frac{1}{4})e^{-2t},x(0)=2,x'(0)=-\frac{1}{56}$$

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+2sX(s)-2x(0)=L\left[\frac{1}{7}(t-\frac{1}{4})e^{-2t}\right]$$

$$s^2X(s)-2s+\frac{1}{56}+2sX(s)-4=\frac{1}{7}L\left[(t-\frac{1}{4})e^{-2t}\right]$$

$$X(s)(s^2+2s)-2s+\frac{223}{56}=\frac{1}{7}L\left[te^{-2t}\right]-\frac{1}{28}L\left[e^{-2t}\right]$$

$$X(s)(s^2+2s)-2s+\frac{223}{56}=\frac{1}{7}\frac{1}{(s+2)^2}-\frac{1}{28}\frac{1}{s+2}$$

$$X(s)(s^2+2s)=\frac{(s+6)+56(s^3+4s^2+4s)}{28(s+2)^2}-\frac{223}{56}$$

$$X(s)(s^2+2s)=\frac{56s^3+224s^2+225s+6}{28(s+2)^2}-\frac{223}{56}$$

$$X(s)(s^2+2s)=\frac{2(56s^3+224s^2+225s+6)-223(s+2)^2}{56(s+2)^2}$$

$$X(s)(s^2+2s)=\frac{112s^3+225s^2-442s-880}{56(s+2)^2}$$

$$L^{-1}\left[X(s)\right]=L^{-1}\left(\frac{1}{56}\left(\frac{112s^3+225s^2+1342s-880}{(s+2)^2(s^2+2s)}\right)\right)$$

$$x(t)=\frac{1}{56}L^{-1}\left(\frac{112s^3+225s^2+1342s-880}{(s+2)^2(s^2+2s)}\right)$$

$$\frac{112s^3+225s^2+1342s-880}{(s+2)^2(s^2+2s)}=\frac{A}{(s+2)}+\frac{B}{(s+2)^2}+\frac{C}{(s+2)^3}+\frac{D}{s}$$

$$\frac{112s^3+225s^2+1342s-880}{(s+2)^2(s^2+2s)}=\frac{As(s+2)^2+Bs(s+2)+Cs(s+2)+D(s+2)^3}{s(s+2)^3}$$

$$112s^3+225s^2+1342s-880=As^3+4As^2+4As+Bs^2+2Bs+Cs^2+2Cs+Ds^3+6Ds^2+12Ds+8D$$

Respuesta:

d. $y''(t)-3y'(t)+2y(t)=f(t),y(0)=y'(0)=0,f(t)=U(t-1)$

SOLUCIÓN:

$$y''(t)-3y'(t)+2y(t)=f(t),y(0)=y'(0)=0,f(t)=U(t-1)$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-3sY(s)+3y(0)+2Y(s)=L[U(t-1)]$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-3sY(s)+3y(0)+2Y(s)=L[U(t-1)]$$

Respuesta:

e. $ty''(t)+(1-2t)y'(t)-2y(t)=0, y(0)=1, y'(0)=2$

SOLUCIÓN:

$ty''(t)+(1-2t)y'(t)-2y(t)=0, y(0)=1, y'(0)=2$

Respuesta:

f. $ty''(t)+(t-1)y'(t)-y(t)=0, y(0)=5, y'(0)=0$

SOLUCIÓN:

$ty''(t)+(t-1)y'(t)-y(t)=0, y(0)=5, y'(0)=0$

Respuesta:

6. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

g. $y'''(t)+6y''(t)+12y'(t)+8y(t)=0, y(0)=4, y'(0)=-12, y''(0)=34$

SOLUCIÓN:

Respuesta:

h. $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=e^{-t}sent, y(0)=0, y'(0)=1$

SOLUCIÓN:

Respuesta:

i. $y''(t)-3y'(t)+2y(t)=4t+e^{3t}, y(0)=1, y'(0)=-1$

SOLUCIÓN:

Respuesta:

j. $y'''(t)-3y''(t)+3y'(t)-y(t)=0, y(0)=1, y'(0)=-1, y''(0)=-1$

SOLUCIÓN:

Respuesta:

k. $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=e^{-t}sent, y(0)=0, y'(0)=1$

SOLUCIÓN:

Respuesta:

l. $y'''(t)-3y''(t)-4y'(t)+12y(t)=12e^{-t}, y(0)=4, y'(0)=2, y''(0)=18$

SOLUCIÓN:

Respuesta:

7. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

m. $P\int_{a}^{b} x(t-u)x(u)du = 2x(t)-sen(pt), p \neq 0$

SOLUCIÓN:

Respuesta:

n. Si $L\{F(t)\}=H(s)$, resolver para x(t) la ecuación diferencial $x''(t)+6x'(t)+7x(t)=F(t)$ sujeto a $x(0)=x'(0)=0$

SOLUCIÓN:

Respuesta:

o. $y''(t)+y(t)=F(t)$, donde $y(0)=0, y'(0)=0, F(t)=\begin{cases} 0, t<\frac{3\pi}{2} \\ \cos t, \frac{3\pi}{2}<t<\frac{5\pi}{2} \\ 0, t>\frac{5\pi}{2} \end{cases}$

SOLUCIÓN:

Respuesta:

p. $\int_{0}^{t} x''(u)x'(t-u)du = x'(t)-x(t), x(0)=x'(0)=0$

SOLUCIÓN:

Respuesta:

q. $5\int_{0}^{t} e^{u}\cos 2(t-u)x(u)du = e^{t}(x'(t)+x(t))-1, x(0)=0$

SOLUCIÓN:

Respuesta:

r. $y''(t)+2y'(t)+2y(t)=e^{t}, y(0)=0, y'(0)=1$

SOLUCIÓN:

Respuesta:

s. $y'''(t)-3y''(t)+3y'(t)-y(t)=t^2e^t, y(0)=1, y'(0)=0, y''(0)=-2$

SOLUCIÓN:

Respuesta:

t. $y'''(t)+y''(t)+4y'(t)+4y(t)=-2, y(0)=0, y'(0)=1, y''(0)=-1$

SOLUCIÓN:

Respuesta:

8. Resolver la ecuación diferencial de segundo orden por Transformada de Laplace. $y''(t)+\alpha y'(t)+\beta y(t)=0$, donde α=6, $\beta=9$,y(0)=0, y'(0)=0.

SOLUCIÓN:

$$y''(t)+\alpha y'(t)+\beta y(t)=0 \alpha=6,\ \beta=9, y(0)=0,\ y'(0)=0$$
$$y''(t)+6y'(t)+9y(t)=0$$
$$s^2Y(s)+sy(0)-y(0)+6sY(s)-6y(0)+9Y(s)=0$$
$$Y(s)(s^2+6s+9)=0$$
$$Y(s)=0$$
$$L^{-1}[Y(s)]=0$$

Respuesta: $y(t)=0$

9. Resolver la ecuación diferencial de segundo orden por Transformada de Laplace. $y''(t)+\alpha y'(t)+\beta y(t)=Q(t)$, donde α=-1, β = -2,$y(0)=0, y'(0)=0$,Q(t)=e^t+e^{-2t}

SOLUCIÓN:

$y''(t)+\alpha y'(t)+\beta y(t)=Q(t)$

α=-1, β = -2,$y(0)=0, y'(0)=0$,Q(t)=$e^{t}+e^{-2t}$

$y''(t)-y'(t)-2y(t)=e^{t}+e^{-2t}$

$s^2Y(s)+sy(0)-y(0)-sY(s)+y(0)-2Y(s)=L[e^{t}+e^{-2t}]$

$Y(s)(s^2-s-2)=L[e^{t}]+L[e^{-2t}]$

$Y(s)(s^2-s-2)=\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{1}{s+2}$

$Y(s)(s^2-s-2)=\dfrac{s+2+s-1}{(s-1)(s+2)}$

$Y(s)=\dfrac{2s+1}{(s-1)(s+2)(s-2)(s+1)}$

$L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\dfrac{2s+1}{(s-1)(s+2)(s-2)(s+1)}\right]$

$y(t)=L^{-1}\left[\dfrac{2s+1}{(s-1)(s+2)(s-2)(s+1)}\right]$

$\dfrac{2s+1}{(s-1)(s+2)(s-2)(s+1)}=\dfrac{A}{(s-1)}+\dfrac{B}{(s+2)}+\dfrac{C}{(s-2)}+\dfrac{D}{(s+1)}$

$\dfrac{2s+1}{(s-1)(s+2)(s-2)(s+1)}=\dfrac{A(s+2)(s-2)(s+1)+B(s-1)(s-2)(s+1)+C(s-1)(s+2)(s+1)+D(s-1)(s+2)(s-2)}{(s-1)(s+2)(s-2)(s+1)}$

$\dfrac{2s+1}{(s-1)(s+2)(s-2)(s+1)}=\dfrac{A(s^3+s^2-4s-4)+B(s^3-2s^2-s+2)+C(s^3+2s^2-s-2)+D(s^3-s^2-4s+4)}{(s-1)(s+2)(s-2)(s+1)}$

$2s+1=A(s^3+s^2-4s-4)+B(s^3-2s^2-s+2)+C(s^3+2s^2-s-2)+D(s^3-s^2-4s+4)$

$A+B+C+D=0$

$A-2B+2C-D=0$

$2A-B+3C=0$

$-4A-B-C-4D=2$

$-4A+2B-2C+4D=1$

$-8A+B-3C=3$

$-6A=3\Rightarrow A=-\dfrac{1}{2}$

$B+C+D=\dfrac{1}{2}$

$-B-C-4D=0$

$-3D=\dfrac{1}{2}\Rightarrow D=-\dfrac{1}{6}$

$B+C-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$

$$B-C=-\frac{1}{3}$$

$$-B-C=-\frac{2}{3}$$

$$-2C=-1 \Rightarrow C=\frac{1}{2} \wedge B=\frac{1}{6}$$

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{A}{(s-1)}+\frac{B}{(s+2)}+\frac{C}{(s-2)}+\frac{D}{(s+1)}\right]$$

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{A}{(s-1)}\right]+L^{-1}\left[\frac{B}{(s+2)}\right]+L^{-1}\left[\frac{C}{(s-2)}\right]+L^{-1}\left[\frac{D}{(s+1)}\right]$$

$$y(t)=-\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\right]+\frac{1}{6}L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)}\right]+\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)}\right]-\frac{1}{6}L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right]$$

Respuesta: $y(t)=-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{6}e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{6}e^{-t}$

10. Resolver la ecuación diferencial de segundo orden por Transformada de Laplace. $F(t)y''(t)+R(t)y'(t)+S(t)y(t)=Q(t)$, donde $y(0)=0, y'(0)=0, F(t)=4t^2, S(t)=(t^2+1)^2, Q(t)=0$.

SOLUCIÓN:

$$F(t)y''(t)+R(t)y'(t)+S(t)y(t)=Q(t)$$

$$y(0)=0, y'(0)=0, F(t)=4t^2, S(t)=(t^2+1)^2, Q(t)=0$$

$$4t^2y''(t)+R(t)y'(t)+(t^2+1)^2y(t)=0$$

$$4t^2y''(t)+R(t)y'(t)+(t^4+2t^2+1)y(t)=0$$

$$4t^2y''(t)+R(t)y'(t)+(t^4+2t^2+1)y(t)=0$$

$$4\frac{d^2(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0))}{ds}+$$

Respuesta:

11. Resolver la siguiente ecuación diferencial mediante Transformada de Laplace. $y''(t)-3y'(t)+2y(t)=f(t)$ donde $f(t)=\begin{cases}0, 0<t<1\\ 1, t>1\end{cases}$, $y(0)=y'(0)=0$

SOLUCIÓN:

$$y''(t)-3y'(t)+2y(t)=f(t)$$
$$f(t)=0,0<t<1,y(0)=y'(0)=0$$
$$s^2Y(s)-3sY(s)+2Y(s)=0$$
$$y(t)=0$$
$$f(t)=1,t>1,y(0)=y'(0)=0$$
$$s^2Y(s)-3sY(s)+2Y(s)=1$$
$$Y(s)(s^2-3s+2)=1$$
$$Y(s)=\frac{1}{(s^2-3s+2)}\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{(s-2)(s-1)}$$
$$L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)(s-1)}\right]$$
$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)(s-1)}\right]$$
$$\frac{1}{(s-2)(s-1)}=\frac{A}{(s-2)}+\frac{B}{(s-1)}$$
$$\frac{1}{(s-2)(s-1)}=\frac{As-A+Bs-2B}{(s-2)(s-1)}$$
$$1=As-A+Bs-2B$$
$$A+B=0\Rightarrow A=-B$$
$$B-2B=1\Rightarrow B=-1\wedge A=1$$
$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)}-\frac{1}{(s-1)}\right]$$
$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\right]$$
$$y(t)=e^{2t}+e^{t}$$

Respuesta:

12. Resolver la ecuación diferencial dado por: $ty''(t)+2y'(t)+ty(t)=0,y(0^+)=1,y(\pi)=0$

SOLUCIÓN:

$$ty''(t)+2y'(t)+ty(t)=0,y(0^+)=1,y(\pi)=0$$
$$-\frac{d(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0))}{ds}+2sY(s)-2y(0)-\frac{d(Y(s))}{ds}=0$$
$$-2sY(s)-s^2\frac{d(Y(s))}{ds}+1+2sY(s)-2+\frac{d(Y(s))}{ds}=0$$

$$-s^2\frac{d(Y(s))}{ds}-1+\frac{d(Y(s))}{ds}=0$$
$$\frac{d(Y(s))}{ds}(s^2-1)=-1$$
$$\frac{d(Y(s))}{ds}=-\frac{1}{(s-1)(s+1)}$$
$$\int d(Y(s))=-\int\frac{ds}{(s-1)(s+1)}$$
$$\frac{1}{(s-1)(s+1)}=\frac{A}{(s-1)}+\frac{B}{(s+1)}$$
$$\frac{1}{(s-1)(s+1)}=\frac{As+A+Bs-B}{(s-1)(s+1)}$$
$$1=As+A+Bs-B$$
$$A+B=0$$
$$A-B=1$$
$$2A=1\Rightarrow A=\frac{1}{2}\wedge B=-\frac{1}{2}$$
$$Y(s)=-\frac{1}{2}Ln(s-1)+\frac{1}{2}Ln(s+1)$$
$$Y(s)=\frac{1}{2}Ln(\frac{s+1}{s-1})$$
$$L^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{2}L^{-1}\left[Ln(\frac{s+1}{s-1})\right]$$
$$y(t)=\frac{1}{2}\frac{e^t-e^{-t}}{t}$$

Respuesta: $y(t)=\dfrac{senht}{t}$

13. Resolver la ecuación diferencial $ty''(t)-4y'(t)+5y(t)=V(t), y(0)=1, y'(0)=1$ donde $V(t)=\begin{cases} e^{2t}\cos t, 0<t<2\pi \\ 0, t>2\pi \end{cases}$

SOLUCIÓN:

$$ty''(t)-4y'(t)+5y(t)=V(t), y(0)=1, y'(0)=1$$
$$V(t)=e^{2t}\cos t, 0<t<2\pi$$
$$-\frac{d(s^2Y(s)-s-1)}{ds}-4sY(s)+4+5Y(s)=L[e^{2t}\cos t]$$
$$-2sY(s)-s^2\frac{d(Y(s))}{ds}+1-4sY(s)+4+5Y(s)=\frac{s}{(s-2)^2+1}$$
$$-s^2\frac{d(Y(s))}{ds}+Y(s)(-6s+5)+5=\frac{s}{(s-2)^2+1}$$
$$-s^2\frac{d(Y(s))}{ds}+Y(s)(-6s+5)=\frac{s-5s^2+20s-25}{(s-2)^2+1}$$
$$-s^2\frac{d(Y(s))}{ds}+Y(s)(-6s+5)=-\frac{-5s^2+21s-25}{(s^2-4s+5)}$$
$$V(t)=0, t>2\pi$$
$$-\frac{d(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0))}{ds}-4sY(s)+4y(0)+5Y(0)=0$$

Respuesta:

14. Utilizando Transformada de Laplace resolver la ecuación diferencial $y'+2y+\int_0^t y(t)=f(t)$, donde $f(t)=\begin{cases} t, t<1 \\ (2-t), 1\le t\le 2 \\ 0, t>2 \end{cases}$ sujeto a la condición inicial y (0) = 1.

SOLUCIÓN:

$$y'+2y+\int_0^t y(t)=f(t)$$
$$f(t)=\begin{cases} t, t<1 \\ (2-t), 1\le t\le 2 \\ 0, t>2 \end{cases}$$
$$f(t)=t+(2-t-t)\mu(t-1)+(0-2+t)\mu(t-2)$$
$$f(t)=t+2(1-t)\mu(t-1)+(t-2)\mu(t-2)$$
$$f(t)=t+2(1-t)\mu(t-1)+(t-2)\mu(t-2)$$
$$f(t)=t+2\mu(t-1)-2t\mu(t-1)+t\mu(t-2)-2\mu(t-2)$$
$$F(s)=L[t]+2L[\mu(t-1)]+2\frac{d}{ds}(\frac{e^{-s}}{s})-\frac{d}{ds}(\frac{e^{-2s}}{s})-2L[\mu(t-2)]$$
$$F(s)=\frac{1}{s^2}+2\frac{e^{-s}}{s}+2\frac{-se^{-s}-e^{-s}}{s^2}-\frac{-2se^{-2s}-e^{-2s}}{s^2}-2\frac{e^{-2s}}{s}$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2}-2\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{e^{-2s}}{s^2}=\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2}$$

$$y'+2y+\int_0^t y(t)=f(t)$$

$$sY(s)-1+2Y(s)+\frac{1}{s}Y(s)=\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2}$$

$$Y(s)(s+2+\frac{1}{s})=\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2}+1$$

$$Y(s)=\frac{(1-e^{-s})^2+s^2}{s(s+1)^2}$$

$$Y(s)=\frac{(1-e^{-s})^2}{s(s+1)^2}+\frac{s}{(s+1)^2}$$

$$Y(s)=\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s(s+1)^2}+\frac{s}{(s+1)^2}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s(s+1)^2}+\frac{-2e^{-s}}{s(s+1)^2}+\frac{e^{-2s}}{s(s+1)^2}+\frac{s}{(s+1)^2}$$

$$L^{-1}\left[Y(s)\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}\right]+L^{-1}\left[\frac{-2e^{-s}}{s(s+1)^2}\right]+L^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s(s+1)^2}\right]+L^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)^2}\right]$$

$$y(t)=1-e^{-t}-te^{-t}-2L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s(s+1)^2}\right]+L^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s(s+1)^2}\right]+L^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)^2}\right]$$

$$\circ L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s(s+1)^2}\right]$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}\right]=1-e^{-t}-te^{-t}$$

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s(s+1)^2}\right]=Y(t-1)\mu(t-1)=1-\left[e^{-(t-1)}+(t-1)e^{-(t-1)}\right]\mu(t-1)$$

$$\circ L^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s(s+1)^2}\right]$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}\right]=1-e^{-t}-te^{-t}$$

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s(s+1)^2}\right]=Y(t-2)\mu(t-2)=1-\left[e^{-(t-2)}+(t-2)e^{-(t-2)}\right]\mu(t-2)$$

$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)^2}\right]=e^{-t}L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2}\right]=e^{-t}L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}\right]=e^{-t}(1-t)$$

$$y(t)=1-e^{-t}-te^{-t}-2[1-\left[e^{-(t-1)}+(t-1)e^{-(t-1)}\right]\mu(t-1)]+1-\left[e^{-(t-2)}+(t-2)e^{-(t-2)}\right]\mu(t-2)+e^{-t}(1-t)$$

Respuesta:

$$y(t)=-2te^{-t}+2\left[e^{-(t-1)}+(t-1)e^{-(t-1)}\right]\mu(t-1)]-\left[e^{-(t-2)}+(t-2)e^{-(t-2)}\right]\mu(t-2)$$

15. Resolver la ecuación $y(t)=4sent-2\int_0^t y(u)sen(t-u)du$

SOLUCIÓN:

$$y(t)=4sent-2\int_0^t y(u)sen(t-u)du$$

$$Y(s)=4\frac{1}{s^2+1}-2\frac{1}{s}L[sent]Y(s)$$

$$Y(s)=4\frac{1}{s^2+1}-2\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+1}Y(s)$$

$$Y(s)=\frac{4}{s^2+1}-\frac{2}{s(s^2+1)}Y(s)$$

$$Y(s)\left(\frac{s^3+s+2}{s(s^2+1)}\right)=\frac{4}{s^2+1}$$

$$L^{-1}\left[Y(s)\right]=L^{-1}\left[\frac{4s(s^2+1)}{(s^2+1)(s+1)(s^2-s+2)}\right]$$

$$\frac{4s(s^2+1)}{(s^2+1)(s+1)(s^2-s+2)}=\frac{As+B}{(s^2+1)}+\frac{C}{(s+1)}+\frac{Ds+E}{(s^2-s+2)}$$

$$\frac{4s(s^2+1)}{(s^2+1)(s+1)(s^2-s+2)}=\frac{(As+B)(s+1)(s^2-s+2)+C(s^2+1)(s^2-s+2)+(Ds+E)(s^2+1)(s+1)}{(s^2+1)(s+1)(s^2-s+2)}$$

$$4s^3+4s=As^4+Bs^3+As^2+2As+Bs+2B+Cs^4-Cs^3+3Cs^2-Cs+2C+Ds^4+Ds^3+$$

$$+Ds^2+Ds+Es^3+Es+Es^2+E$$

$$0=A+C+D\Rightarrow C=-D$$

$$4=B-C+D+E$$

$$\rightarrow 4=B+2D+E$$

$$0=A+3C+D+E$$

$$4=2A+B-C+D+E$$

$$A=0$$

$$\bullet -4=-B+C-D-E$$

$$\rightarrow -4=-B+4C$$

$$0=2B+2C+E$$

$$4=B-2C+E$$

$$-4=-B+4C$$

$$0=2C+E\Rightarrow E=-2C$$

$$0 = 2B + 2C + E \Rightarrow B = 0 \wedge C = -1 \wedge D = 1 \wedge E = 2$$

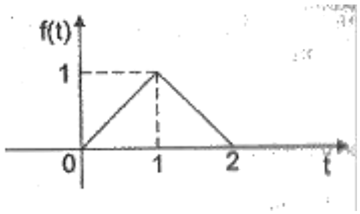
$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{-1}{(s+1)} + \frac{s+2}{(s^2 - s + 2)}\right]$$

$$y(t) = -L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right] + L^{-1}\left[\frac{s - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}\right]$$

$$y(t) = e^{-t} + L^{-1}\left[\frac{s-\frac{1}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}\right] + 5L^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}\right]$$

Respuesta: $y(t) = e^{-t} + e^{-\frac{t}{2}}\cos(\frac{\sqrt{7}}{2}) + \frac{5}{\sqrt{7}}e^{-\frac{1}{2}}sen(\frac{\sqrt{7}}{2})$

16. Resolver el problema siguiente de valor inicial $y'(t) + 2y(t) + \int_0^t y(u)du = f(t), y(0) = 1$ donde f es dado por el gráfico.



SOLUCIÓN:

$$y'(t) + 2y(t) + \int_0^t y(u)du = f(t), y(0) = 1$$

Viendo la figura hacemos un análisis:

Si $t \in <0,1> \Rightarrow m1 = 1 \Rightarrow f(t) = t$

Si $t \in <1,2> \Rightarrow m1 = -1 \Rightarrow f(t) = 2 - t$

De donde $f(t) = \begin{cases} t, t \in <0,1> \\ 2-t, t \in <1,2> \end{cases}$

$$f(t) = \begin{cases} t, t \in <0,1> \\ 2-t, t \in <1,2> \end{cases}$$

$$f(t) = t + (2 - t - t)\mu(t-2)$$

$$f(t) = t + (2 - 2t)\mu(t-1)$$

$$f(t) = t + 2\mu(t-1) - 2t\mu(t-1)$$

$$f(t) = t + 2\mu(t-1) - 2t\mu(t-1)$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2}+2\frac{e^{-s}}{s}+2\frac{d}{ds}(\frac{e^{-s}}{s})$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2}-2\frac{e^{-s}}{s^2}$$

$$F(s)=\frac{1-2e^{-s}}{s^2}$$

$$sY(s)-y(0)+2Y(s)+\frac{Y(s)}{s}=F(s)$$

$$sY(s)-1+2Y(s)+\frac{Y(s)}{s}=\frac{1-2e^{-s}}{s^2}$$

$$Y(s)=\frac{1-2e^{-s}+s^2}{s(s+1)^2}$$

$$L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\frac{1-2e^{-s}+s^2}{s(s+1)^2}\right]$$

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}\right]-2L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s(s+1)^2}\right]+L^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)^2}\right]$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}\right]=1-e^{-t}-te^{-t}$$

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s(s+1)^2}\right]=y(t-1)\mu(t-1)=1-\left[e^{-(t-1)}+(t-1)e^{-(t-1)}\right]\mu(t-1)$$

$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)^2}\right]=e^{-t}(1-t)$$

Respuesta: $y(t)=-1-2\left[e^{-(t-1)}+(t-1)e^{-(t-1)}\right]\mu(t-1)-2te^{-t}$

17. Resolver el siguiente problema de valor inicial $y''(t)+4y(t)=sent-U(t-2\pi).sen(t-2\pi), y(0)=y'(0)=0$

SOLUCIÓN:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4Y(s)=sent-U(t-2\pi).sen(t-2\pi),\, y(0)=y'(0)=0$$
$$s^2Y(s)+4Y(s)=L\left[sent-U(t-2\pi).sen(t-2\pi)\right]$$
$$Y(s)(s^2+4)=L[sent]-L[U(t-2\pi).sen(t-2\pi)]$$
$$Y(s)(s^2+4)=\frac{1}{s^2+1}-\frac{e^{2\pi s}}{s^2+1}$$
$$Y(s)=\frac{1-e^{2\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)}$$
$$L^{-1}\left[Y(s)\right]=L^{-1}\left[\frac{1-e^{2\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)}\right]$$
$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right]-L^{-1}\left[\frac{e^{2\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)}\right]$$
$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right]$$
$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{As+B}{(s^2+1)}+\frac{Cs+D}{(s^2+4)}$$
$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{(As+B)(s^2+4)+(Cs+D)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4)}$$
$$1=(As+B)(s^2+4)+(Cs+D)(s^2+1)$$
$$0=A+C\Rightarrow A=-C$$
$$0=B+D\Rightarrow D=-B$$
$$0=4A+C\Rightarrow A=0\wedge C=0$$
$$1=4B+D\Rightarrow B=\frac{1}{3}\wedge D=-\frac{1}{3}$$
$$\otimes L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right]=\frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)}-\frac{1}{2}\frac{2}{(s^2+4)}\right]=\frac{1}{3}sent-\frac{1}{6}sen2t$$
$$\otimes L^{-1}\left[\frac{e^{2\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)}\right]=F(t-2\pi)\mu(t-2\pi)=\frac{1}{3}sen(t-2\pi)\mu(t-2\pi)-\frac{1}{6}sen(2(t-2\pi))\mu(t-2\pi)$$
$$y(t)=y(t)=\frac{1}{3}sent-\frac{1}{6}sen2t+\frac{1}{3}sen(t-2\pi)\mu(t-2\pi)-\frac{1}{6}sen(2(t-2\pi))\mu(t-2\pi)$$

Respuesta: $y(t)=\frac{1}{6}(2sent-sen2t)+\frac{1}{6}(2sent-sen2t)\mu(t-2\pi)$

18. Resolver la ecuación diferencial

$$x''(t)-2x'(t)+5x(t)=e^{-2t}(4\cos 3t+18sen3t),\quad x(0)=2, x'(0)=-1$$

SOLUCIÓN:

$$x''(t)-2x'(t)+5x(t)=e^{-2t}(4\cos 3t+18sen3t), x(0)=2, x'(0)=-1$$

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)-2sX(s)+2sx(0)+5X(s)=L\left[e^{-2t}(4\cos 3t+18sen3t)\right]$$

$$X(s)(s^2-2s+5)-2s+1+4s=4L\left[e^{-2t}(\cos 3t)\right]+18L\left[e^{-2t}(sen3t)\right]$$

$$X(s)(s^2-2s+5)+1+2s=4\frac{s+2}{(s+2)^2+9}+18\frac{3}{(s+2)^2+9}$$

$$X(s)(s^2-2s+5)=\frac{4(s+2)+54}{(s+2)^2+9}-2s-1$$

$$X(s)(s^2-2s+5)=\frac{4(s+2)+54-(2s+1)(s^2+4s+13)}{(s+2)^2+9}$$

$$X(s)(s^2-2s+5)=\frac{4s+8+54-2s^3-9s^2-30s-13}{(s+2)^2+9}$$

$$X(s)=\frac{-2s^3-9s^2-26s+49}{((s+2)^2+9)(s^2-2s+5)}$$

$$L^{-1}\left[X(s)\right]=L^{-1}\left[\frac{-2s^3-9s^2-26s+49}{((s+2)^2+9)(s^2-2s+5)}\right]$$

$$\frac{-2s^3-9s^2-26s+49}{((s+2)^2+9)(s^2-2s+5)}=\frac{As+B}{((s+2)^2+9)}+\frac{Cs+D}{(s^2-2s+5)}$$

$$\frac{-2s^3-9s^2-26s+49}{((s+2)^2+9)(s^2-2s+5)}=\frac{(As+B)(s^2-2s+5)+(Cs+D)(s^2-2s+5)}{(s^2+4s+13)(s^2-2s+5)}$$

$$-2s^3-9s^2-26s+49=(As+B)(s^2-2s+5)+(Cs+D)(s^2-2s+5)$$