CAPÍTULO CINCO

LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

5.1 Introducción

El concepto de transformar una función puede emplearse desde el punto de vista de hacer un cambio de variable para simplificar la solución de un problema; es decir, si se tiene un problema en la variable *x*, se sustituye *x* por alguna otra expresión en términos de una nueva variable, por ejemplo, $x = \operatorname{sen} y$, anticipando que el problema tendrá una formulación y una solución más sencillas en términos de la nueva variable *y*; luego de obtener la solución en términos de la nueva variable, se usa el procedimiento opuesto al cambio previo y se obtiene entonces la solución del problema original. El *logaritmo* es un ejemplo sencillo de una transformación a la que ya nos hemos enfrentado; su virtud es que transforma un producto en una suma, que es una operación mucho más sencilla. Efectuando la operación inversa, el *antilogaritmo*, obtenemos el resultado del producto.

En el Capítulo 3 se estudió la Transformada de Fourier. Sin embargo, esta transformación está restringida a funciones que tienden a cero lo suficientemente rápido conforme $t \to \pm\infty$ de modo que la integral de Fourier converja. Ahora se removerá esa restricción. También queremos extender el teorema de la integral de Fourier a aquellos casos donde deseamos la respuesta de un sistema lineal a una excitación que comienza en $t = 0$, es decir, se definen condiciones iniciales, y luego desarrollar ciertas propiedades de la transformada modificada resultante, la cual identificaremos como la transformada de Laplace.

Una transformación que es de gran importancia en el cálculo es la de integración,

$$I\{f(t)\} = \int_0^x f(t)\,dt = F(x)$$

El resultado de esta operación es una función *F*(*x*), la *imagen* de $f(t)$ bajo la transformación. Obsérvese que la operación inversa a la integración es la derivación; si se designa por *D* la operación de derivar, *d/dt*, entonces

$$D\{F(x)\} = f(x)$$

Con frecuencia es necesaria una transformación más complicada. Si se tiene una función *f*(*t*) de la variable *t*, se define una *transformada integral* de *f*(*t*) como

$$\text{Transformada integral de } f(t) = T\{f(t)\} = \int_a^b f(t)K(s,t)\,dt \tag{5.1}$$

La función $K(s, t)$, la cual es una función de dos variables, se denomina el *núcleo* de la transformación. Obsérvese que la transformada integral ya no depende de t; es una función $F(s)$ de la variable s, de la cual depende el núcleo. El tipo de transformada que se obtiene y los tipos de problemas para los cuales es de utilidad dependen de dos cosas: el núcleo y los límites de integración. Para ciertos núcleos $K(s, t)$, la transformación (5.1) al aplicarse a formas lineales en $f(t)$ dadas, cambia esas formas a expresiones algebraicas en $F(s)$ que involucran ciertos valores de frontera de la función $f(t)$. Como consecuencia, ciertos tipos de problemas en ecuaciones diferenciales ordinarias se transforman en problemas algebraicos cuya incógnita es la imagen $F(s)$ de $f(t)$. Como ya se mencionó, si se conoce una transformación inversa, entonces es posible determinar la solución $y(t)$ del problema original.

En general, recuerde que una transformación $T\{f(t)\}$ es *lineal* si para todo par de funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ y para todo par de constantes c_1 y c_2, ella satisface la relación

$$T\left\{c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)\right\}=c_1 T\left\{f_1(t)\right\}+c_2 T\left\{f_2(t)\right\} \tag{5.2}$$

Es decir, la transformada de una combinación lineal de dos funciones es la combinación lineal de las transformadas de esas funciones.

Para la selección particular del núcleo $K(s,t)=e^{-st}$ y los límites de integración desde cero hasta infinito en la Ec. (5.1), la transformación definida así se denomina una *transformación de Laplace* y la imagen resultante una *transformada de Laplace*. La transformada de Laplace de $f(t)$ es entonces una función de la variable s y se denota por $F(s)$ o $\mathcal{L}\{f(t)\}$. La transformación de Laplace es probablemente la herramienta más poderosa para estudiar los sistemas lineales descritos por ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. Como un proceso, la transformación convierte un problema en ecuaciones diferenciales en uno que involucra una o más ecuaciones algebraicas.

5.2 Definición de la Transformada de Laplace

Dada una función $f(t)$ definida para todos los valores positivos de la variable t, se forma la integral

$$\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt=F(s) \tag{5.3}$$

la cual define una nueva función $F(s)$ del parámetro s, para todo s para el cual converge la integral. La función $F(s)$ así formada se denomina la *transformada de Laplace unilateral* de $f(t)$. Normalmente se omitirá el término *unilateral* y la transformada se denotará por $F(s)$ o $\mathcal{L}\{f(t)\}$. Es decir, la definición formal de la transformada de Laplace es

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}=F(s)=\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{5.4}$$

El límite inferior de la Ec. (5.4) se escogió como 0^- en vez de 0 o 0^+ para incluir casos donde la función $f(t)$ pueda tener una discontinuidad de salto en $t=0$. Esto no debe considerarse una restricción, ya que en los estudios usuales de transitorios, el origen del tiempo siempre puede tomarse en el instante $t = 0$ o en algún tiempo finito $t > 0$. La función en el lado derecho de la Ec. (5.4) no depende de t porque la integral tiene límites fijos. Como ya se mencionó, la transformación de Laplace es un proceso que reduce un sistema de ecuaciones *integro-diferenciales* simultáneas lineales a un sistema de ecuaciones *algebraicas* simultáneas lineales. La transformada de Laplace asocia una función en el dominio del tiempo con otra función, la cual se define en el “plano de frecuencia compleja”.

La propiedad más sencilla y más obvia de la transformación de Laplace es que es *lineal*. Esta afirmación es fácil de demostrar ya que ella está definida como una integral. Es decir, si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ poseen transformadas $F_1(s)$ y $F_2(s)$ y c_1 y c_2 son constantes,

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)\}=c_1F_1(s)+c_2F_2(s) \tag{5.5}$$

La notación

$$f(t) \leftrightarrow F(s)$$

significará que las funciones $f(t)$ y $F(t)$ forman *un par de transformadas de Laplace*, es decir, que $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$.

En general, la variable s es compleja ($s = \sigma + j\omega$) pero, por los momentos, se tomará como real y más adelante se discutirán las limitaciones sobre el carácter de la función $f(t)$ y sobre el recorrido de la variable s. Puesto que el argumento st del exponente de e en la Ec. (5.3) o (5.4) debe ser adimensional, entonces las dimensiones de s deben ser las de frecuencia y las unidades de segundos inversos (s^{-1}).

Ahora se obtendrán las transformadas de algunas funciones elementales. La mayoría de los ejemplos están basados en la integral

$$\int_0^\infty e^{-pt}\,dt=\frac{1}{p}, \qquad p>0 \tag{5.6}$$

cuya demostración procede de la identidad

$$\int_0^T e^{-pt}\,dt=\frac{1-e^{-pT}}{p}$$

En efecto, si $p > 0$, entonces $e^{-pT} \to 0$ conforme $T \to \infty$ y se obtiene la Ec. (5.5).

Ejemplo 1

(a) Se determinará la transformada de Laplace de la función $f(t) = 1$, $t > 0$. Insertando esta función en la Ec. (5.3), se obtiene

$$\mathcal{L}\{1\}=\int_{0-}^\infty (1)e^{-st}\,dt=\int_0^\infty e^{-st}\,dt=\frac{1}{s}$$

para $s > 0$. En la notación indicada,

$$1 \leftrightarrow \frac{1}{s}, \qquad s>0 \tag{5.7}$$

(b) Considérese ahora la función $f(t) = e^{ct}$, $t > 0$, donde c es una constante. En este caso,

$$\mathcal{L}\left\{ e^{ct} \right\} = \int_{0-}^{\infty} e^{ct} e^{-st} dt = \int_{0-}^{\infty} e^{-(s-c)t} dt$$

La última integral es la misma que la de (5.6) con $p = s - c$; por lo tanto, es igual a $1/(s-c)$, con tal que $s - c > 0.$ Se concluye entonces que

$$e^{ct} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{s-c}, \quad s > c \tag{5.8}$$

Con la ayuda de métodos elementales de integración se pueden obtener las transformadas de otras funciones. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} t \;&\leftrightarrow\; \frac{1}{s^2}, \qquad & t^2 \;&\leftrightarrow\; \frac{2}{s^3} \\ \operatorname{sen} at \;&\leftrightarrow\; \frac{1}{s^2+a^2}, \qquad & \cos at \;&\leftrightarrow\; \frac{s}{s^2+a^2} \end{aligned} \tag{5.9}$$

para $s > 0$; más adelante se estudiarán procedimientos más sencillos para obtener estas transformadas.

Ejemplo 2

Usando la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace se obtendrá la transformada de la función $f(t) = \operatorname{senh} at$.

Usando la identidad

$$\operatorname{senh} at = \frac{1}{2}e^{at} - \frac{1}{2}e^{-at}$$

entonces

$$\mathcal{L}\{\operatorname{senh} at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}e^{at} - \frac{1}{2}e^{-at}\right\} = \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+a}$$

cuando $s > a$ y $s > -a$; es decir,

$$\operatorname{senh} at \quad \leftrightarrow \quad \frac{a}{s^2+a^2}, \qquad \left(s > |a| \right)$$

Como la ecuación de definición de la transformada de Laplace contiene una integral en la cual uno de sus límites es infinito y por la propiedad de linealidad, una de las primeras preguntas a responder se refiere a la existencia de la transformada. Un ejemplo sencillo de una función que no tiene una transformada de Laplace es $f(t) = \exp\left[\exp(t)\right]$. Por ello, a continuación se darán algunos teoremas concernientes a la convergencia de la integral de Laplace.

5.3 Condiciones para la Existencia de la Transformada de Laplace

5.3.1 Funciones Seccionalmente Continuas

Se dice que una función $f(t)$ es *seccionalmente continua* en un intervalo acotado $a < t < b$, si es continua excepto en un número finito de puntos $t_1 < t_2 < \cdots < t_N$ de $(a\ ,\ b)$ y si en cada punto de discontinuidad posee límites finitos conforme t tiende a cualquier extremo de los subintervalos desde el interior (si $x_1 = a$, el límite por el lado derecho existe en t_1, y si $t_N = b$, el límite por el lado izquierdo debe existir en t_N). Se usan los símbolos

$$f(t_i^-), \qquad f(t_i^+)$$

para denotar los límites por el lado izquierdo y por el lado derecho, respectivamente, de $f(t)$ en t_i. La función $f(t)$ que se ilustra en la Fig. 5.1 es seccionalmente continua en $(a,\ b)$. Tiene sólo una discontinuidad en $t = t_1$ y

$$f(t_1^-) = A, \qquad f(t_i^+) = B$$

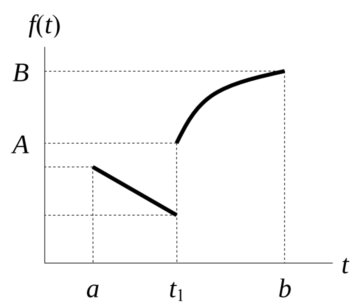


Figura 5.5

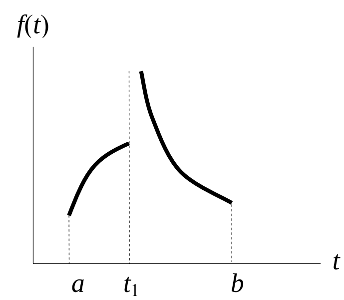


Figura 5.2

La función que se ilustra en la Fig. 5.2 *no* es seccionalmente continua. Posee sólo una discontinuidad en t_1, pero el límite por el lado derecho de $g(t)$ no existe en t_1.

Teorema 1. Sean las funciones $f(t)$ y $g(t)$ seccionalmente continuas en todo intervalo de la forma $[c,T]$, donde c es fijo y $T > c$. Si $|f(t)| \le g(t)$ para $t \ge c$ y si la integral

$$\int_c^\infty g(t)\,dt$$

converge, entonces la integral

$$\int_c^\infty f(t)\,dt$$

también converge.

Más adelante se usará el Teorema 1 para establecer un conjunto de condiciones de suficiencia para la existencia de la transformada de Laplace de una función. Sin embargo, primero se introducirá la notación

$$f(t) = O\left[g(t)\right]$$

la cual debe leerse "$f(t)$ es del orden de $g(t)$". Esta notación significa que existen constantes M y N tales que

$$|\, f(t)\,| \leq Mg(t)$$

cuando $t \geq N$. En particular, si $f(t) = O|e^{\alpha t}|$ para alguna constante α, se dice que $f(t)$ es de *orden exponencial*.

Teorema 2. Sea $f(t)$ una función seccionalmente continua en todo intervalo de la forma $[0, T]$, donde $T > 0$ y sea $f(t) = O\left[e^{\alpha t}\right]$ para alguna constante α. Entonces la transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ existe, al menos para $s > \alpha$.

Demostración: De acuerdo con las hipótesis del teorema, existen constantes M y t_0 tales que $|\, f(t)\,| \leq Me^{\alpha t}$ cuando $t > t_0$. Entonces $\left|\, f(t)e^{-st}\,\right| \leq M\, e^{-(s-\alpha)t}$ cuando $s \geq t_0$. Puesto que la integral

$$\int_{t_0}^\infty M\, \mathrm{e}^{-(s-\alpha)\,t}\, dt$$

converge cuando $s > \alpha$, la integral

$$\int_{t_0}^\infty e^{-st}\, dt$$

también converge (Teorema 1). Puesto que

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^{t_0} e^{-st} f(t)\,dt + \int_{t_0}^\infty e^{-st} f(t)\,dt, \qquad s > \alpha$$

la transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > \alpha$.

Como una aplicación importante del Teorema 2, se demostrará que si $f(t)$ es de la forma

$$t^n e^{at} \cos bt, \qquad t^n e^{at} \operatorname{sen} bt \tag{5.10}$$

donde n es un entero no negativo, entonces $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a > 0$. Primero obsérvese que

$$t^n = O\left[e^{\varepsilon t} \right]$$

para todo número positivo ε. Como $\left| \cos bt \right| \le 1$ y $\left| \operatorname{sen} bt \right| \le 1$ para todo t, tenemos que

$$f(t) = O\left[e^{(a+\varepsilon)t} \right]$$

Por el teorema 1, $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a+\varepsilon$ para todo número positivo ε. Por consiguiente, $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a$.

El resultado anterior es importante en el estudio de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Considere la ecuación homogénea

$$P(D)x = 0$$

donde $D = d/dt$ y $P(D)$ es un operador polinomial. Toda solución de esta ecuación es una combinación lineal de funciones de la forma (5.10). Cualquier derivada de una solución es también una combinación lineal de funciones de este tipo. Por lo tanto, se puede decir que toda solución de la ecuación, y toda derivada de una solución, es de orden exponencial y posee una transformada de Laplace.

Teorema 3. Sea $f(t)$ una función seccionalmente continua en todo intervalo de la forma $[0, T]$ y sea $f(t) = O\left[e^{\alpha t} \right]$ para alguna constante α. Entonces la función $h(t)$, donde

$$h(t) = \int_0^t f(u)\,du$$

es de orden exponencial. Si $\alpha > 0$, $h(t) = O\left[e^{\alpha t} \right]$ y si $\alpha < 0$, $h(t) = O[1]$.

Demostración: Existen constantes positivas t_0 y M_1 tales que $\left| f(t) \right| \le M_1 e^{\alpha t}$ para $t \ge t_0$. También existe una constante positiva M_2 tal que $|f(t)| \le M_2$ para $0 \le t \le t_0$. Puesto que

$$h(t) = \int_0^{t_0} f(u)\,du + \int_{t_0}^{t} f(u)\,du$$

para $t > t_0$, se tiene que

$$\left| h(t) \right| \le M_2 \int_0^{t_0} du + M_1 \int_{t_0}^{t} f(u)\,du$$

o

$$\left| h(t) \right| \le M_2 t_0 + \frac{M_1}{\alpha}\left(e^{\alpha t} - e^{\alpha t_0} \right)$$

Si $\alpha > 0$, entonces

$$\left| h(t) \right| \le \left(M_2 t_0 + \frac{M_1}{\alpha} \right) e^{\alpha t}, \qquad t \ge t_0$$

y $h(t) = O\left[e^{\alpha t} \right]$.

Ejemplo 3

La función *escalón unitario* (previamente definida en el Cap. 1)

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 0 \text{ cuando } 0 < t < t_0 \\ 1 \text{ cuando } t > t_0 \end{cases}$$

es un ejemplo de una función seccionalmente continua en el intervalo $0 < t < T$ para todo número positivo T (Fig. 5.3). Observe la discontinuidad en $t = t_0$:

$$\lim_{t \to t_0^-} u(t-t_0) = 0 \qquad \lim_{t \to t_0^+} u(t-t_0) = 1$$

La transformada de Laplace de esta función es

$$\int_{0^-}^{\infty} u(t-t_0) e^{-st} dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{t_0}^{\infty}$$

Así que, siempre que $s > 0$,

$$\mathcal{L}\left\{ u(t-t_0) \right\} = \frac{e^{-t_0 s}}{s}$$

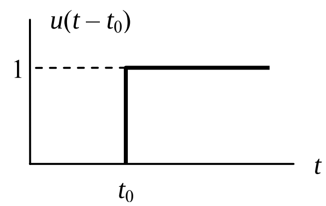


Figura 5.3

Aquí se debe señalar un punto importante. La transformada de Laplace está definida solamente entre 0^- y $+\infty$. La conducta de la función $f(t)$ para $t < 0$ nunca entra en la integral y por tanto no tiene efecto sobre su transformada. Por ejemplo, las funciones $f(t) = 1$ y $u(t)$ ($t_0 = 1$ en el Ejemplo 3) tienen la misma transformada $1/s$.

Las condiciones mencionadas en los teoremas para la existencia de la transformada de una función son adecuadas para la mayoría de nuestras necesidades; pero ellas son condiciones suficientes y no necesarias. Por ejemplo, la función $f(t)$ puede tener una discontinuidad infinita en, por ejemplo, $t = 0$, es decir $|f(t)| \to \infty$ conforme $t \to 0$, con tal que existan números positivos m, N y T, donde $m < 1$, tales que $|f(t)| < N/t^m$ cuando $0 < t < T$. Entonces, si en cualquier otra forma, $f(t)$ cumple con las condiciones mencionadas, su transformada todavía existe porque la integral

$$\int_{0-}^{T} e^{-sT} f(t)\,dt$$

existe.

5.3.2 Región de Convergencia de la Transformada

El recorrido de valores de la variable compleja s para los cuales converge la transformada de Laplace se denomina la *región de convergencia* (RDC). Por ejemplo, sabemos que la señal $x(t) = e^{-at}u(t)$, a real, tiene como transformada la función $X(s) = 1/(s+a)$, siempre que $\mathrm{Re}(s) > -a$, puesto que

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(s+a)t} = 0$$

sólo si $\mathrm{Re}(s+a) > 0$ o $\mathrm{Re}(s) > -a$. Así que la RDC para este ejemplo la especifica la condición $\mathrm{Re}(s) > -a$ y se muestra en el plano complejo como lo ilustra la Fig. 5.4 mediante el área sombreada a la derecha de la línea $\mathrm{Re}(s) = -a$, para el caso en que $a > 0$.

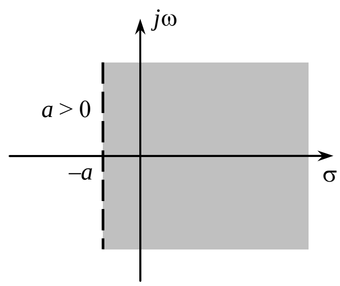


Figura 5.4

5.4 Teoremas de la Derivada y de la Integral

Se desea expresar la transformada de Laplace

$$\int_{0^-}^{\infty} f'(t)e^{-st}\,dt$$

de la derivada $f'(t)$ de una función $f(t)$ en términos de la transformada de Laplace $F(s)$ de $f(t)$. Integrando por partes se obtiene

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}=\int_{0^-}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Sea $f(t)$ del orden de e^{st} conforme t tiende a infinito y continua. Entonces, siempre que $s > a$, el primer término en el lado derecho se convierte en $-f(0)$ y por tanto

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = sF(s) - f(0) \tag{5.11}$$

Así que la *diferenciación* de la función objeto corresponde a la *multiplicación* de la función resultado por su variable s y la adición de la constante $-f(0)$. La fórmula (5.11) da entonces la *propiedad operacional fundamental* de la transformación de Laplace; ésta es la propiedad que hace posible reemplazar la operación de diferenciación en una ecuación diferencial por una simple operación algebraica sobre la transformación.

Ejemplo 4

Se desea resolver la ecuación

$$y'(t) + 3y(t) = 0, \qquad t > 0 \tag{5.12}$$

con la condición inicial $y(0) = 2$.

Multiplicando ambos lados de la Ec. (5.12) por e^{-st} e integrando de cero a infinito, se obtiene

$$\int_{0^-}^{\infty}\left[y'(t) + 3y(t)\right] e^{-st}dt = 0 \tag{5.13}$$

Del teorema de la derivada, Ec. (5.11), se obtiene que

$$\int_{0^-}^{\infty} y'(t)e^{-st}dt = sY(s) - y(0) = sY(s) - 2$$

donde $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Sustituyendo en la Ec. (5.12) da

$$sY(s) - 2 + Y(s) = 0 \tag{5.14}$$

Así que la transformada de Laplace $Y(s)$ de la función incógnita $y(t)$ satisface esta ecuación. Resolviéndola, se obtiene

$$Y(s) = \frac{2}{s+3} \tag{5.15}$$

Como se observa, la fracción anterior es la transformada de la función $2e^{-3t}$. Por lo tanto, la solución de (5.12) es

$$y(t) = 2e^{-3t}, \qquad t > 0$$

5.4.1 La Transformada de Laplace Bilateral

La transformada de Laplace $F(s)$ de una función $f(t)$, como se definió en (5.3), involucra los valores de la función $f(t)$ para todo t en el intervalo (0−, ∞). Es decir, el intervalo adecuado en la solución de ecuaciones diferenciales que son válidas para $t \geq 0$. En la teoría de circuitos eléctricos, sistemas de control lineales y otras aplicaciones, algunas veces es deseable considerar los valores de $f(t)$ en todo el eje real y definir a $F(s)$ en consecuencia. Esto conduce a la función

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \tag{5.16}$$

conocida como la *transformada de Laplace bilateral* de $f(t)$. Si la función $f(t)$ es *causal*, es decir, si $f(t) = 0$ para $t < 0$, entonces la integral en (5.16) es igual a la integral en (5.3). En este texto no se usará la Ec. (5.16). *La notación F(s) se reservará sólo para las transformadas unilaterales*.

5.4.2 La Función Impulso

Un concepto importante ya presentado en el Cap. 1 es el de la *función impulso*. Esta función, también conocida como la *función delta de Dirac*, se denota por $\delta(t)$ y se representa gráficamente mediante una flecha vertical, como en la Fig. 5.5. En un sentido matemático estricto, la función impulso es un concepto bastante sofisticado. Sin embargo, para las aplicaciones de interés es suficiente comprender sus propiedades formales y aplicarlas correctamente. Las propiedades de esta función ya se estudiaron en el Cap. 1 y no se repetirán aquí. Su transformada se derivará más adelante.

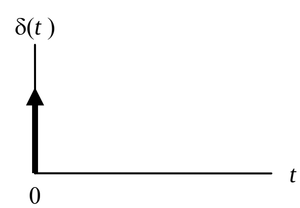


Figura 5.5

5.4.3 El Teorema de la Derivada

Al comienzo de esta sección se demostró que si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, entonces

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \tag{5.17}$$

Ahora se revisará el significado de $f(0)$. Si $f(t)$ es continua en el origen, entonces $f(t)$ tiene un significado claro: **es el valor de *f*(*t*) para *t* = 0**. Suponga, sin embargo, que $f(t)$ es discontinua y que

$$f(0+) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(+\varepsilon), \quad f(0-) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(-\varepsilon), \quad \varepsilon > 0 \tag{5.18}$$

son sus valores en t = 0+ y t = 0–, respectivamente (Fig. 5.7*a*). En este caso, el número $f(0)$ en la Ec. (5.17) depende de la interpretación de $f'(t)$. Si $f'(t)$ incluye el impulso $[f(0+) - f(0-)]\delta(t)$ debido a la discontinuidad de $f(t)$ en t = 0 (Fig. 5.7*b*), entonces $f(0) = f(0-)$. Si $f'(t)$ es la derivada de $f(t)$ para $t>0$ solamente y sin el impulso en el origen (Fig. 5.7*c*), entonces $f(0) = f(0^+)$. La primera interpretación requiere aclarar el significado de la integral en la Ec. (5.3) cuando $f(t)$ contiene un impulso en el origen.

Como se sabe, la integral de $\delta(t)$ en el intervalo $(0, \infty)$ no está definida porque $\delta(t)$ es un impulso en t = 0. Para evitar esta dificultad, se interpretará a $F(s)$ como un límite de la integral $f(t)e^{-st}$ en el intervalo $(-\varepsilon, \infty)$:

$$F(s) = \lim_{\varepsilon\to 0-} \int_{-\varepsilon}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{5.19}$$

donde $\varepsilon > 0$. Con esta interpretación de $F(s)$ se deduce que la transformada de $\delta(t)$ es igual 1:

$$\delta(t) \quad \leftrightarrow \quad 1 \tag{5.20}$$

porque

$$\int_{-\varepsilon}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1$$

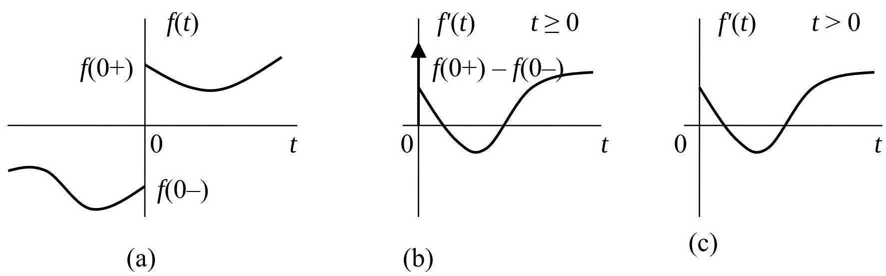


Figura 5.7

Además, el término $f(0)$ en la Ec. (5.29) es el límite $f(0^-)$ de $f(-\varepsilon)$ conforme $\varepsilon \to 0$. Si $F(s)$ se interpreta como un límite en el intervalo (ε, ∞), entonces $f(0) = f(0^+)$. En resumen,

$$\int_{0^-}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0^-) \tag{5.21}$$

y

$$\int_{0^+}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0^+) \tag{5.22}$$

La diferencia $f(0^+) - f(0^-)$ entre estas dos integrales es igual a la transformada de Laplace del impulso $[f(0^+) - f(0^-)]\delta(t)$ en el origen y causada por la discontinuidad de $f(t)$ en ese punto.

Si la función $f(t)$ es *continua* en el origen, entonces debe quedar claro que $f(0^-) = f(0^+) = f(0)$ y las fórmulas (5.17), (5.21) y (5.22) son equivalentes. Si $f(t)$ es continua para $t \geq 0$ excepto por un salto finito en t_0, es fácil demostrar que la fórmula (5.17) debe reemplazarse por la fórmula

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) - [f(t_0 + 0) - f(t_0 - 0)]\; e^{-st_0}$$

donde la cantidad entre corchetes es la magnitud del salto en t_0.

Derivadas de Orden Superior. Sean $f(t)$ y $f'(t)$ continuas para $t \geq 0$ y de orden exponencial y también sea $f'(t)$ seccionalmente continua en todo intervalo acotado. Entonces, como $f''(t)$ es la derivada de $f'(t)$, la transformada de $f'(t)$ menos el valor inicial $f'(0)$ de $f'(t)$, es decir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f''(t)\} &= sL\{f'(t)\} - f(0) \\ &= s[sF(s) - f(0)] - f'(0) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned} \tag{5.23}$$

La aplicación repetida del argumento anterior produce la relación

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots f^{(n-1)}(0) \tag{5.24}$$

donde se supone que $f(t)$ y sus derivadas de orden hasta $n - 1$ son continuas para $t \geq 0$ y de orden exponencial.

Aplicando (5.24) al impulso $\delta(t)$, se obtiene

$$\mathcal{L}\left\{\delta^{(n)}(t)\right\} = s^n$$

porque la transformada de $\delta(t)$ es igual a 1 y los valores de sus derivadas en $t = 0$ son iguales a cero.

Ejemplo 5

Se desea obtener la transformada de $f(t) = \text{sen}(at)$ a partir de la transformada de $\cos(at)$.

Si $f(t) = \cos(at)$, entonces $f'(t) = -a\,\text{sen}(at)$ y aplicando (5.17), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{-a\,\text{sen}\,at\} &= s\,\mathcal{L}\{\cos at\} - 1 \\ &= \frac{s^2}{s^2 + a^2} - 1 = -\frac{a^2}{s^2 + a^2} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\mathcal{L}\{\text{sen}\,at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

Ejemplo 6

Determínese la transformada de $f(t) = tu(t)$.

Solución: La función $f(t) = t$ y $f'(t)$ son continuas y $f(t)$ es de $O\left(e^{\alpha t}\right)$ para cualquier α positiva. Por lo tanto,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \qquad (s > 0)$$

o

$$\mathcal{L}\{1\} = s\mathcal{L}\{t\}$$

Como $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$, se tiene entonces que

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \qquad (s > 0)$$

Ejemplo 7

Determínese la transformada de Laplace de $f(t) = t^n$, donde n es cualquier entero positivo.

Solución La función $f(t) = t^n$ cumple con todas las condiciones del Teorema 2 para cualquier α positiva. En este caso,

$$f(0) = f'(0) = \cdots f^{(n-1)}(0) = 0$$
$$f^{(n)}(t) = n!$$
$$f^{(n+1)}(t) = 0$$

Aplicando la fórmula (5.24) se obtiene

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n+1)}(t)\right\} = 0 = s^{n+1}\mathcal{L}\left\{t^n\right\} - n!$$

y por tanto,

$$\mathcal{L}\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad (s > 0)$$

5.4.4 El Teorema de la Integral

Usando el teorema de la derivada, se obtendrá la transformada $F(s)$ de la integral definida por

$$f(t) = \int_{0^-}^{t} y(\tau)\,d\tau \tag{5.25}$$

de una función $y(t)$ en términos de la transformada $Y(s)$ de $y(t)$. Se supone que $f(t)$ es seccionalmente continua y de orden exponencial.

La función $f(t)$ en la Ec. (5.25) es continua y $f(0) = 0$. También se tiene que $y(t) = f'(t)$. Por lo tanto, la transformada $Y(s)$ de $y(t)$ es igual la transformada $sY(s) - f(0)$ y, puesto que $f(0^-) = 0$, se concluye que $Y(s) = sF(s)$. Entonces,

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} y(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}Y(s) \tag{5.26}$$

Ahora bien, la formulación de las leyes de Kirchhoff para una red, con frecuencia incluye una integral con límites de $-\infty$ a t. Estas integrales pueden dividirse en dos partes,

$$\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{0^-} y(t)\,dt + \int_{0^-}^{t} y(\tau)\,d\tau$$

en donde el primer término de la derecha es una constante. Cuanto $y(t)$ es una corriente, esta integral es el valor inicial de la carga, $q(0^-)$, y cuando $y(t)$ es un voltaje, la integral es el enlace de flujo $\Psi(0^-) = L\,i(0^-)$, donde L es la inductancia. En cualquier caso, este término debe incluirse en la formulación de la ecuación; la transformada de una constante $q(0^-)$ es

$$\mathcal{L}\left\{q(0^-)\right\} = \frac{q(0^-)}{s}$$

Y se puede escribir una ecuación similar para $\Psi(0^-)$.

5.4.5 Traslación Compleja

Ahora se expresará la transformada

$$\int_{0^-}^{\infty}\left[e^{-at}f(t)\right]e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-(s+a)t}dt \qquad (a > 0)$$

del producto $e^{-at}f(t)$ en términos de la transformada $F(s)$ de $f(t)$. La última integral en la ecuación anterior es la misma integral de la ecuación de definición de la transformada, siempre que s se reemplace por $s - a$. Por lo tanto, es igual a $F(s - a)$ y se obtiene el par de transformadas

$$e^{-at}f(t) \leftrightarrow F(s+a) \tag{5.27}$$

Esta propiedad nos dice que la transformada del producto de e^{-at} por una función de t es igual a la transformada de la misma función con s reemplazada por $s + a$. Como herramienta para hallar transformadas inversas, esta propiedad afirma que si $s + a$ es reemplazada por s en la transformada de una función $f(t)$, entonces $f(t)$ es igual al producto de e^{-at} por la inversa de la transformada modificada.

Ejemplo 8

(a) Se desea evaluar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+4)}\right\}$.

Suprimiendo el factor 1/*s*, obtenemos $Y(s)=1/(s^2+4)=\frac{1}{2}\left[2/(s^2+4)\right]$ cuya transformada inversa es igual a $\frac{1}{2}\operatorname{sen}2t$. Integrando esta ecuación y usando la Ec. (5.26), tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}=\int_0^t \frac{\operatorname{sen}2t}{2}dt=-\frac{\cos 2t}{4}\bigg|_0^t=\frac{1-\cos 2t}{4}=\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t$$

(b) Ahora se usarán las Ecs. (5.25) y (5.26) para evaluar la integral

$$g(t)=\int_0^t e^{-a\tau}d\tau$$

Éste es un caso especial de la Ec. (5.26) con $Y(t) = e^{-at}$. Usando (5.26) con $f(t) = 1$, se tiene que $F(s) = 1/s$ y entonces

$$\mathcal{L}\left\{e^{-at}\times 1\right\}=\frac{1}{s+a}$$

Usando(5.26) con $Y(s) = 1/(s+a)$, se obtiene

$$G(s)=\frac{1}{s(s+a)}=\frac{1/a}{s}-\frac{1/a}{s+a}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} g(t)&=\frac{1}{a}-\frac{1}{a}e^{-at}\\ &=\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right) \qquad (t>0)\end{aligned}$$

Aplicando la Ec. (5.26) a las transformadas de sen(*bt*) y cos(*bt*) se demuestra fácilmente que

$$e^{-at}\cos bt \quad\leftrightarrow\quad \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$$

$$e^{-at}\operatorname{sen} bt \quad\leftrightarrow\quad \frac{b}{(s+a)^2+b^2}$$

5.5 El Problema de Inversión

Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de una función $f(t)$, entonces $f(t)$ se denomina la *transformada de Laplace inversa* de $F(s)$. El problema de inversión es la determinación de la transformada inversa $f(t)$ de una función $F(s)$ dada. Este problema es básico en las aplicaciones de la transformada de Laplace. Considere, por ejemplo, la ecuación diferencial

$$y'(t)+3y(t)=6, \qquad y(0)=0 \tag{5.28}$$

Transformando esta ecuación, se obtiene

$$sY(s)+3Y(s)=\frac{6}{s}$$

puesto que $y(0) = 0$ y la transformada de $f(t) = 6$ es igual a $6/s$. Por lo tanto,

$$Y(s)=\frac{6}{s(s+3)} \tag{5.29}$$

Así que para determinar $y(t)$ se debe hallar la transformada inversa de esta fracción.

En general, hay dos métodos de inversión fundamentales diferentes:

1. *El Método de la Fórmula de Inversión*. En este método, la función $f(t)$ se expresa directamente como una integral que involucra la función $F(s)$. Este resultado importante, conocido como el de la *fórmula de inversión*, se discute usualmente en el contexto de lo que se conoce como transformadas de Fourier (tópico fuera del alcance de este texto).
2. *Tablas*. En este método se intenta expresar la función $F(s)$ como una suma de transformadas

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)+\ \cdots\ +F_n(s) \tag{5.30}$$

donde $F_1(s),\ \ldots\ ,F_n(s)$ son funciones con transformadas inversas $f_1(t),\ \ldots\ ,f_n(t)$ conocidas y tabuladas. De la propiedad de linealidad de la transformada se determina que si $F(s)$ puede ser expandida como en la Ec. (5.30), entonces su transformada inversa $f(t)$ está dada por

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)+\ \cdots\ +f_n(t) \tag{5.31}$$

Como una ilustración se expande la fracción (5.29) como una suma de dos fracciones con transformadas conocidas:

$$Y(s)=\frac{6}{s(s+3)}=\frac{2}{s}-\frac{2}{s+3} \tag{5.32}$$

Ésta muestra que la transformada inversa $y(t)$ de $Y(s)$ es la suma

$$y(t)=2-e^{-3t}, \qquad t>0$$

(Esta técnica también se usó en el Ejemplo 8).

La identidad en (5.32) proviene de la conocida técnica de expansión de funciones racionales en fracciones parciales, la cual se discutirá más adelante.

En el problema de inversión se deben considerar las siguientes preguntas:

1. *Existencia*. ¿Posee toda función $F(s)$ una transformada inversa? Hay funciones que no poseen transformadas inversas. Sin embargo, esas funciones tienen un interés principalmente matemático. *Todas las funciones consideradas en este texto poseen transformadas inversas.*
2. *Unicidad*. ¿Pueden dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ tener la misma transformada $F(s)$? Si dos funciones tienen la misma transformada, entonces ellas deben ser iguales para esencialmente todos los valores de t. Sin embargo, pueden diferir en un conjunto discreto de puntos. Si las funciones son continuas, entonces ellas deben ser idénticas.

5.5.1 Inversión de Transformadas Racionales (Fracciones Parciales)

Ahora se determinará la transformada inversa $f(t)$ de la clase de funciones racionales, es decir, de funciones de la forma

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)} \tag{5.33}$$

donde $N(s)$ y $D(s)$ son polinomios en s y no poseen factores comunes. Aquí se supone que $F(s)$ es una fracción *propia*, es decir, que el grado de $N(s)$ es menor que el de $D(s)$. Las fracciones impropias involucran funciones de singularidad y se considerarán posteriormente.

Primero, supóngase que todas las raíces s_i, $i = 1, 2, \ldots , n$, del denominador $D(s)$ son distintas. De acuerdo con la teoría de fracciones parciales, $F(s)$ puede entonces expandirse como una suma, es decir,

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{c_1}{s-s_1}+\frac{c_2}{s-s_2}+\ \cdots\ +\frac{c_n}{s-s_n} \tag{5.34}$$

Para determinar el valor de c_i, se multiplican ambos miembros de la Ec. (5.34) por $s-s_i$ para obtener la ecuación

$$\left(s-s_i\right)F(s)=(s-s_i)\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{c_1\left(s-s_i\right)}{s-s_1}+\ \cdots\ +c_i+\ \cdots\ +\frac{c_n\left(s-s_i\right)}{s-s_n}$$

es decir, se remueve del denominador el factor $s-s_i$; evaluando ahora el resultado en $s = s_i$, se obtiene

$$c_i=\left(s-s_i\right)F(s)\Big|_{s=s_i}=\left(s-s_i\right)\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s=s_i}=\frac{N(s)}{D'(s)}\bigg|_{s=s_i} \tag{5.35}$$

donde $D'(s_i)=\left[dD/ds\right]_{s=s_i}=\left[D(s)/\left(s-s_i\right)\right]_{s=s_i}$. Puesto que la transformada inversa de la fracción $1/(s-s_i)$ es igual a $e^{s_i t}$, de la Ec. (5.34) se concluye que la transformada inversa $f(t)$ de la función racional $F(s)$ es una suma de exponenciales:

$$f(t)=c_1e^{s_1 t}+c_2e^{s_2 t}+\ \cdots\ c_ne^{s_n t} \tag{5.36}$$

Ejemplo 9. Determine la transformada inversa de la función

$$F(s)=\frac{s^2+29\text{s}+30}{s^3+7\text{s}^2+10\text{s}}$$

Solución: El denominador de F(s) es de mayor grado que el numerador y posee factores reales y distintos; éstos son: $s_1=0$, $s_2=-2$ y $s_3=-5$. Por lo tanto, se pueden determinar factores c_1, c_2, y c_3 tales que

$$\frac{s^2+29s+30}{s^3+7s^2+10s}=\frac{s^2+29s+30}{s(s+2)(s+3)}=\frac{c_1}{s}+\frac{c_2}{s+2}+\frac{c_3}{s+5}$$

y usando la Ec. (5.35) se obtiene

$$c_1=sF(s)\big|_{s=0}=3,\quad c_2=(s+2)F(s)\big|_{s=-2}=4,\quad c_3=(s+5)F(s)\big|_{s=-5}=-6$$

Por lo tanto,

$$f(t)=3+4e^{-2t}-6e^{-5t},\quad t>0$$

Ahora se considerarán fracciones parciales para el caso en el cual el polinomio $D(s)$ contiene factores lineales repetidos de la forma $(s-s_i)^m$. En este caso, la expansión de $F(s)$ en fracciones parciales consiste de términos de la forma

$$\frac{c_{i1}}{s-s_i}+\frac{c_{i2}}{(s-s_i)^2}+\;\cdots\;\frac{c_{im}}{(s-s_i)^m} \tag{5.37}$$

donde los números c_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, m$, son independientes de s y vienen dados por

$$c_{i,m-r}=\frac{1}{r!}\frac{d^r}{ds^r}\Big[(s-s_i)^m\,F(s)\Big]_{s=s_i},\qquad r=0,\;1,\;\ldots\;,m-1 \tag{5.38}$$

Así que para evaluar el coeficiente $c_{i,m-r}$ se remueve el factor $(s-s_i)^m$ del denominador de $F(s)$ y se evalúa la derivada r-ésima del resultado en $s = s_i$. La componente de $f(t)$ debida a la raíz múltiple s_i es la transformada inversa de la suma en (5.37) y viene dada por

$$c_{i1}e^{s_i t}+c_{i2}t\,e^{s_i t}+\;\cdots\;+\frac{c_{im}}{(m-1)!}t^{m-1}e^{s_i t} \tag{5.39}$$

De lo anterior se concluye que la transformada inversa de una función racional $F(s)$ es una suma de exponenciales cuyos coeficientes son polinomios en t. Los exponentes s_i se denominan los *polos* de $F(s)$, es decir, los polos son las raíces del denominador $D(s)$.

Ejemplo 10. La función

$$F(s)=\frac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2}=\frac{c_1}{s+3}+\frac{c_{21}}{s+5}+\frac{c_{22}}{(s+5)^2} \tag{5.40}$$

tiene un polo sencillo en $s_1 = -3$ y un polo múltiple en $s_2 = -5$ con multiplicidad $m = 2$. En este caso,

$$c_1=\left.\frac{s^2+2s+5}{(s+5)^2}\right|_{s=-3}=2, \qquad c_{22}=\left.\frac{s^2+2s+5}{s+3}\right|_{s=-5}=-10$$

$$c_{21}=\left.\frac{d}{ds}\frac{s^2\,2s+5}{s+3}\right|_{s=-5}=\left.\frac{s^2+6s+1}{(s+3)^2}\right|_{s=-5}=-1$$

Por tanto,

$$f(t)=2e^{-3t}-(1+10t)e^{-5t}, \qquad t>0$$

Observe que el coeficiente c_{21} puede determinarse sin diferenciación. Puesto que (5.40) es válida para toda s, también es válida para $s = 0$ (o cualquier otro número). Haciendo $s = 0$, por ejemplo, se obtiene

$$\frac{1}{15}=\frac{c_1}{3}+\frac{c_{21}}{5}+\frac{c_{22}}{25}$$

Puesto que $c_1 = 2$ y $c_{22} = -10$, la igualdad anterior produce $c_{21} = 1$.

Raíces Complejas

En los ejemplos anteriores, las raíces del denominador de la función $F(s)$ eran reales. Se pueden obtener resultados similares si $D(s)$ tiene raíces complejas. Sin embargo, en este caso los coeficientes correspondientes son complejos y $f(t)$ contiene términos exponenciales complejos. En el análisis de sistemas físicos, la función $F(s)$ tiene coeficientes reales. Por ello, las raíces complejas siempre ocurren en pares conjugados y, como se demuestra a continuación, las componentes correspondientes de $f(t)$ son ondas sinusoidales amortiguadas con coeficientes reales. Se comenzará con un ejemplo:

$$F(s)=\frac{5s+13}{s(s^2+4s+13)}$$

En este caso, $D(s)$ tiene dos polos complejos, $s_1 = -2 + j3$, $s_2 = -2 - j3$, y un polo real, $s_3 = 0$. La expansión directa de (5.34) da

$$\frac{5s+13}{s(s^2+4s+13)}=\frac{c_1}{s-(-2+j3)}+\frac{c_2}{s-(-2-j3)}+\frac{c_3}{s}$$

donde $c_1 = -(1+j)/2$, $c_2 = -(1-j)/2$ y $c_3 = 1$ (determinados en la forma ya explicada). Por consiguiente,

$$f(t)=-\frac{1+j}{2}e^{(-2+j3)t}-\frac{1-j}{2}e^{(-2-j3)t}+1, \qquad t>0 \tag{5.41}$$

Esta expresión incluye cantidades complejas. Sin embargo, es una función real. Efectivamente, insertando la identidad $e^{(-2\pm j3)t} = e^{-2t}\left(\cos 3t \pm j\,\mathrm{sen}\,3t\right)$ en (5.41), se obtiene

$$f(t) = 1 - e^{-2t}\left(\cos 3t - \mathrm{sen}\,3t\right), \qquad t > 0 \tag{5.42}$$

la cual es una expresión real.

Ahora se demostrará que la Ec. (5.42) puede determinarse directamente. El resultado está en el hecho de que si $F(s)$ es una función real con coeficientes reales y s_1 y s_2 son dos números complejos conjugados, entonces $F(s_2) = F(s_1^*) = F^*(s_1)$ (donde el asterisco indica el conjugado complejo).

Considere una función racional $F(s)$ con coeficientes reales. Como se sabe, si $s_1 = \alpha + j\beta$ es un polo complejo de F(s), entonces su conjugado, $s_1^* = \alpha - j\beta$, también es un polo. Por lo tanto, la expansión (5.34) de $F(s)$ contiene términos como

$$\frac{c_1}{s-s_1} + \frac{c_2}{s-s_2}, \qquad s_1 = \alpha + j\beta, \quad s_2 = \alpha - j\beta \tag{5.43}$$

Los coeficientes c_1 y c_2 se expresarán en términos de la función

$$G(s) = \frac{F(s)}{j\beta}(s-s_1)(s-s_2) \tag{5.44}$$

De la Ec. (5.35) se obtiene que

$$c_1 = F(s)(s-s_1)\Big|_{s=s_1} = \frac{j\beta G(s_1)}{s-s_2} = \frac{1}{2}G(s_1)$$

puesto que $s_1 - s_2 = j2\beta$. En forma similar,

$$c_2 = \frac{1}{2}G(s_2)$$

La función $G(s_1)$ es, en general, compleja con parte real G_r y parte imaginaria G_i, es decir,

$$G(s_1) = G_r + jG_i \tag{5.45}$$

Como $F(s_2) = F^*(s_1)$, de (5.44) se obtiene que $G(s_2) = G^*(s_1) = G_r - jG_i$, y por lo tanto,

$$c_1 = \frac{1}{2}\left(G_r + jG_i\right), \qquad c_2 = \frac{1}{2}\left(G_r - jG_i\right)$$

La transformada inversa de la suma en la Ec. (5.43) es entonces igual a

$$c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} = \frac{1}{2}\left(G_r + jG_i\right)e^{(\alpha + j\beta)t} + \frac{1}{2}\left(G_r - jG_i\right)e^{(\alpha - j\beta)t} \tag{5.46}$$

Insertando la identidad $e^{(\alpha \pm j\beta)t} = e^{\alpha t}\left(\cos\beta t \pm j\,\mathrm{sen}\,\beta t\right)$ en la Ec. (5.46), se obtiene finalmente la transformada inversa $f(t)$ de $F(s)$ debida a los polos complejos conjugados s_1 y s_2, y la cual es igual a

$$e^{\alpha t}\left(G_r \cos\beta t - G_i \operatorname{sen}\beta t\right) \tag{5.47}$$

En resumen: Para hallar el término en $f(t)$ resultante de los polos complejos de $F(s)$, se forma la función $G(s)$, como en (5.44), y se calcula su valor $G(s_1)$ para $s = s_1$. El término correspondiente de $f(t)$ lo da la Ec. (5.47), donde G_r y G_i son las partes real e imaginaria de $G(s)$.

El resultado anterior se aplicará a la función

$$F(s) = \frac{5s+13}{s(s^2+4s+13)}$$

ya considerada. En este caso,

$$\left(s-s_1\right)\left(s-s_2\right) = s^2+4s+13, \qquad s_1 = -2+j3, \quad \alpha = -2, \quad \beta = 3$$

$$G(s) = \frac{F(s)}{j\beta}\left(s^2+4s+13\right) = \frac{5s+13}{j3s}, \qquad G(s_1) = \frac{5\left(-2+j3\right)+13}{j3(-2+j3)}$$

Por tanto, $G_r = -1$, $G_i = -1$ y la Ec. (5.47) da

$$e^{-2t}\left(-\cos 3t + \operatorname{sen} 3t\right)$$

Este es el término de $f(t)$ proveniente de los polos complejos de $F(s)$ y concuerda con el resultado (5.42).

Ejemplo 11

Obtener la transformada de Laplace inversa de la función

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+9)\left(s+2\right)} = \frac{c_1}{s-j3} + \frac{c_2}{s+j3} + \frac{c_3}{s+2}$$

El coeficiente c_3 correspondiente al polo real $s_3 = -2$ se determina directamente a partir de la Ec. (5.35):

$$c_3 = \left(s+2\right)F(s)\Big|_{s=-2} = -\frac{2}{13}$$

Los otros dos polos $s_1 = j3$ y $s_2 = -j3$ de $F(s)$ son imaginarios puros con $\alpha = 0$ y $\beta = 3$. Puesto que

$$\left(s-s_1\right)\left(s-s_2\right) = s^2+9$$

la función $G(s)$ correspondiente en la Ec. (5.44) está dada por

$$G(s) = \frac{F(s)}{j3}\left(s^2+9\right) = \frac{s}{j3\left(s+2\right)}$$

Por lo tanto,

$$G(s_1) = \frac{j3}{j3(j3+2)} = \frac{2}{13} - j\frac{3}{13}$$

Agregando el término $c_3 e^{-2t}$ debido al polo real $s_3 = -2$, se obtiene

$$f(t) = \frac{2}{13}\cos 3t + \frac{3}{13}\operatorname{sen} 3t - \frac{2}{13}e^{-2t}$$

5.5.2 Inversión de Funciones Impropias

En la Sección 5.5.1 se determinó la transformada inversa de funciones racionales propias. Ahora se considerarán funciones impropias, limitando la discusión a dos casos especiales.

Se comenzará con un ejemplo. Suponga que

$$F(s) = \frac{3s^2 + 15s + 14}{s^2 + 3s + 2}$$

Dividiendo se obtiene

$$\frac{3s^2 + 15s + 14}{s^2 + 3s + 2} = 3 + \frac{6s + 8}{s^2 + 3s + 2} = 3 + \frac{2}{s+1} + \frac{4}{s+2}$$

y por tanto,

$$f(t) = 3\delta(t) + 2e^{-t} + 4e^{-2t}$$

Considérese otro ejemplo. Sea la función

$$F(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + s + 8}{s^2 + 4s}$$

Entonces, procediendo en la misma forma que en el ejemplo previo, se obtiene

$$\frac{s^3 + 3s^2 + s + 8}{s^2 + 4s} = s - 1 + \frac{2}{s} + \frac{3}{s+4}$$

y por lo tanto

$$f(t) = \delta'(t) - \delta(t) + 2 + 3e^{-4t}$$

En general, para una función racional

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

donde el grado de $N(s)$ es mayor o igual que el de $D(s)$, se procede a la división para obtener

$$F(s) = c_{m-n}s^{m-n} + \cdots + c_1 s + c_0 + \frac{Q(s)}{D(s)} = P(s) + \frac{Q(s)}{D(s)}$$

donde $P(s)$ es el cociente y $Q(s)$ es el residuo; m es el grado del numerador y n el del denominador ($m > n$). Ahora el grado de $Q(s)$ es menor que el de $D(s)$. La nueva función racional $Q(s)/D(s)$ es propia y está preparada para su expansión. Se continúa entonces con la expansión en fracciones parciales de $Q(s)/D(s)$ y luego se obtiene la transformada inversa de $F(s)$. Obsérvese que el polinomio $P(s)$ producirá funciones singulares. Éstas no aparecen con frecuencia, pero son de mucha utilidad en la solución de algunos problemas prácticos que están fuera del alcance de este texto.

5.6 Los Valores Inicial y Final de $f(t)$ a Partir de $F(s)$

A continuación se demuestra que los valores de una función $f(t)$ y sus derivadas en $t = 0$ pueden expresarse en términos de los valores de su transformada para valores grandes de s. Este resultado permite determinar en una forma sencilla la conducta de $f(t)$ cerca del origen. También se determinará el comportamiento de $f(t)$ conforme t tiende a infinito usando su transformada y bajo ciertas condiciones.

5.6.1 El Teorema del Valor Inicial

La función e^{-st} tiende a cero conforme s tiende a infinito para $t > 0$ (la parte real de s mayor que cero). A partir de esto se deduce que bajo ciertas condiciones generales

$$\lim_{s\to\infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt = 0 \tag{5.48}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Si $f(t)$ es continua para $t \geq 0$, excepto posiblemente por un número finito de discontinuidades finitas, y también de orden exponencial, entonces la integral en (5.48) tiende a $F(s)$ cuando $\varepsilon \to 0$. Esto da como resultado que

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0 \tag{5.49}$$

Lo anterior podría no ser cierto si $f(t)$ contiene impulsos u otras singularidades en el origen. Por ejemplo, si $f(t) = e^{at}$, entonces $F(s) = 1/(s - a)$ tiende a cero cuando $s \to \infty$. Sin embargo, si $f(t) = \delta(t)$, entonces su transformada $F(s) = 1$ no tiende a cero.

Aplicando (5.49) a la función $f'(t)$ y usando la Ec. (5.17), se obtiene

$$\lim_{s\to\infty} \int_{0^-}^{\infty} f'(t) e^{-st}\, dt = sF(s) - f(0^-) = 0$$

Aquí se toma a $f'(t)$ como seccionalmente continua y de orden exponencial.

Entonces se obtiene que

$$f(0^-) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \tag{5.50}$$

este resultado se conoce como el *teorema del valor inicial*. Se verificará con una ilustración sencilla. Si $f(t) = 3e^{-2t}$, entonces

$$F(s) = \frac{3}{s+2}, \qquad \lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{3s}{s+2} = 3$$

lo cual concuerda con la Ec. (5.50) porque, en este caso, $f(0^+) = f(0) = 3$.

Ejemplo 12

Si

$$F(s) = \frac{2s+3}{s^2+7s+10}$$

entonces,

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{2s^2+3s}{s^2+7s+10} = 2$$

y, po tanto, $f(0) = 2$.

El teorema del valor inicial también puede usarse para determinar los valores iniciales de las derivadas de $f(t)$. En efecto, como se obtiene a partir de la Ec. (5.24), la función $s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ es la transformada de Laplace de $f''(t)$. Por lo tanto [ver la Ec. (5.48)], debe tender a cero cuando $\varepsilon \to \infty$ [$f''(t)$ debe cumplir con las condiciones necesarias]. Esto conduce a la conclusión de que

$$f''(0) = \lim_{s\to\infty}\left[s^2F(s) - sf(0)\right] \tag{5.51}$$

En una forma similar se pueden determinar los valores iniciales de derivadas de orden superior. En todos estos casos se ha supuesto que $f(t)$ es continua en el origen.

Ejemplo 13

Si

$$F(s) = \frac{2s+3}{s^2+7s+10}$$

entonces $sF(s) \to 0$, $s^2F(s) \to 0$ y $s^3F(s) \to 1$ cuando $s \to \infty$. Por tanto,

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 1$$

5.6.2 El Teorema del Valor Final

Ahora se demostrará que si $f(t)$ y su primera derivada son transformables en el sentido de Laplace, entonces

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{5.52}$$

Ya se ha demostrado que

$$\int_{0^-}^{\infty} f'(t)e^{-st}\,dt = sF(s) - f(0^-) \tag{5.53}$$

Cuando *s* tiende a cero, se obtiene entonces que

$$\begin{aligned}\int_{0^-}^{\infty} f'(t)\,dt &= \lim_{t\to\infty}\int_{0^-}^{t} f'(t)\,dt \\ &= \lim_{t\to\infty}\left[f(t) - f(0^-)\right]\end{aligned}$$

Igualando este resultado con el de la Ec. (5.53), escrita para el límite cuando $s \to 0$, se llega a la conclusión de que

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{5.54}$$

como se requería. La aplicación de este resultado requiere que *todas las raíces del denominador de* $F(s)$ *tengan partes reales negativas,* ya que de otra manera no existe el límite de $f(t)$ cuando *t* tiende a infinito.

Ejemplo 14

Para la función

$$f(t) = 5 - 3e^{-2t}$$

es evidente que su valor final es 5. La transformada de $f(t)$ es

$$F(s) = \frac{5}{s} - \frac{3}{s+2} = \frac{2s+10}{s(s+2)}$$

y, según la Ec. (5.54), el valor final de $f(t)$ es

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0}\frac{2s+10}{s+2} = 5$$

5.7 Teoremas Adicionales

5.7.1 El Teorema de Traslación Real o de Desplazamiento

Una función $f(t)$ trasladada en el tiempo se representa como $f(t-t_0)u(t-t_0)$, donde

$$f(t-t_0)u(t-t_0)=\begin{cases} f(t-t_0), & t>t_0 \\ 0, & t<t_0 \end{cases} \tag{5.55}$$

(véase la Fig. 5.8). Observe que la función $f(t-t_0)u(t-t_0)$ es idéntica a $f(t)u(t)$ excepto que está *retardada o trasladada* en t_0 seg. Para encontrar la transformada de esta función se aplica la Ec. (5.3) a la Ec. (5.55):

$$\int_{0^-}^{\infty} f(t-t_0)u(t-t_0)e^{-st}dt=\int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-s(t+t_0)}dt$$

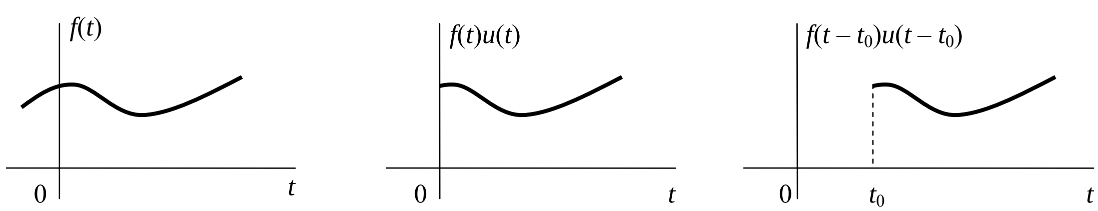


Figura 5.8

de donde se concluye que

$$\mathcal{L}\{f(t-t_0)u(t-t_0)\}=e^{-st_0}\mathcal{L}\{f(t)\} \tag{5.56}$$

Aplicando la propiedad (5.56) al par $\delta(t)\leftrightarrow 1$, se obtiene

$$\delta(t-t_0) \quad\leftrightarrow\quad e^{-st_0}$$

Ejemplo 15

De los pares $1\leftrightarrow 1/s$ y $t\leftrightarrow 1/s^2$, se obtienen los pares

$$u(t-t_0)\ \leftrightarrow\ \frac{1}{s}e^{-st_0}, \qquad (t-t_0)u(t-t_0)\ \leftrightarrow\ \frac{1}{s^2}e^{-st_0}$$

Aplicando lo anterior al pulso $p_T=u(t)-u(t-T)$. Se obtiene

$$p_T = u(t) - u(t-T) \;\leftrightarrow\; \frac{1}{s}\left(1 - e^{-sT}\right) \tag{5.57}$$

Este último resultado puede verificarse aplicando la definición dada por la Ec. (5.3) de la transformada. Puesto que $p_T(t) = 1$ para $0 < t < T$ y 0 para otros valores de *t*, su transformada es igual a

$$\int_{0-}^{\infty} p_T(t) e^{-st}\,dt = \int_{0}^{T} e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-sT}\right)$$

acorde con (5.57).

Ejemplo 16

Si se da la función

$$f(t) = 6e^{-2t}u(t) + 4e^{-3(t-t_0)}u(t-t_0)$$

entonces, aplicando la Ec. (5.56), se obtiene

$$F(s) = \frac{6}{s+2} + \frac{4}{s+3}e^{-st_0}$$

Supóngase que F_1(s), F_2(s), … , F_m(s) son funciones con transformadas inversas conocidas $f_1(t)$, $f_2(t)$, … , $f_m(t)$. De la Ec. y la propiedad de linealidad de la transformada se obtiene que la transformada inversa de la suma

$$F(s) = F_1(s)e^{-st_1} + F_2(s)e^{-st_2} + \cdots + F_m(s)e^{-st_m} \tag{5.58}$$

es la suma

$$f(t) = f_1(t-t_1)u(t-t_1) + f_2(t-t_2)u(t-t_2) + \cdots + f_m(t-t_m)u(t-t_m) \tag{5.59}$$

Esto se ilustrará mediante un ejemplo.

Ejemplo 17

Se desea determinar la transformada inversa de la función

$$F(s) = \frac{3 + 3se^{-sT} + 6e^{-2sT}}{s^2 + 7s + 10}$$

Solución: Esta función es una suma igual que en la Ec. (5.58), donde

$$F_1(s)=\frac{3}{s^2+7s+10},\quad F_2(s)=\frac{3s}{s^2+3s+10},\quad F_3(s)=\frac{6}{s^2+7s+10}$$

y $t_1 = 0$, $t_2 = T$ y $t_3 = 2T$. Usando expansión en fracciones parciales, se obtiene

$$f_1(t)=e^{-2t}-e^{-5t},\quad f_2(t)=5e^{-5t}-2e^{-2t},\quad f_3(t)=2e^{-2t}-2e^{-5t}$$

y aplicando la Ec. (5.59), se obtiene

$$f(t)=f_1(t)u(t)+f_2(t-T)u(t-T)+f_3(t-2T)u(t-2T)$$

5.7.2 El Teorema de Escala

Este teorema relaciona los cambios de escala en el dominio de s con los cambios correspondientes en el dominio de t. El término cambio de escala significa que s o t se multiplican por una constante positiva. Dada una función $f(t)$, se cambia de escala al formar una nueva función $f(t/t_0)$. Su transformada se encuentra como sigue: a partir de la ecuación de definición se tiene que

$$\mathcal{L}\{f(t/t_0)\}=\int_0^\infty f(t/t_0)e^{-st}\,dt$$

$$=t_0\int_0^\infty f(t/t_0)e^{-(t_0 s)t/t_0}\,d(t/t_0)$$

si ahora se hace $t/t_0 = x$, entonces la última ecuación se convierte en

$$\mathcal{L}\{f(t/t_0)\}=t_0\int_0^\infty f(x)e^{-t_0 sx}\,dx$$

Obsérvese que la integral define a $F(t_0 s)$, de tal modo que se puede escribir

$$\mathcal{L}\{f(t/t_0)\}=t_0F(t_0 s) \tag{5.60}$$

La transformada inversa correspondiente es

$$f(t/t_0)=t_0\mathcal{L}^{-1}\{F(t_0 s)\} \tag{5.61}$$

Ejemplo 18

Para la transformada

$$F(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

el valor correspondiente de $f(t)$ es

$$f(t) = 1 - e^{-t} \tag{5.62}$$

El teorema de escala indica que la nueva función

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{2F(2s)\} = 1 - e^{-t/2} \tag{5.63}$$

está relacionada con $f(t)$ en la Ec. (5.62) por un simple cambio en la escala del tiempo.

5.7.3 Derivadas de Transformadas

Cuando la integral de Laplace

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \tag{5.64}$$

es diferenciada formalmente con respecto al parámetro s, se obtiene la fórmula

$$\frac{dF(s)}{dt} = \int_{0-}^{\infty} [-t\, f(t)]\, e^{-st}\, dt$$

lo que implica que

$$t\, f(t) \;\leftrightarrow\; -\frac{dF(s)}{ds} \tag{5.65}$$

es decir, la multiplicación de una función $f(t)$ por t en el dominio del tiempo equivale a diferenciar la transformada $F(s)$ de $f(t)$ con respecto a s y luego cambiar de signo en el dominio de la frecuencia compleja..

Se debe señalar que $f(t)e^{-st}$ y su derivada parcial de cada orden con respecto a s cumplen con las condiciones necesarias para que la diferenciación con respecto a s se pueda ejecutar dentro del signo de integración; se obtiene así el siguiente teorema:

Teorema 4. La diferenciación de la transformada de una función corresponde a la multiplicación por $-t$:

$$F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n\, f(t)\}, \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots\ ) \tag{5.66}$$

Adicionalmente $F^{(n)}(s) \to 0$ conforme $s \to \infty$. Estas propiedades se cumplen siempre que $f(t)$ sea seccionalmente continua y del orden de $e^{\alpha t}$, si $s > \alpha$ en la fórmula (5.66).

Ejemplo 19

Ya se sabe que

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} = \frac{a}{s^2 + a^2} \qquad (s > 0)$$

y, por la Ec. (5.66),

$$\mathcal{L}\{-t \operatorname{sen} at\} = \frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right) = -\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

de donde se obtiene la fórmula

$$\mathcal{L}\{\, t \operatorname{sen} a\, t\,\} = \frac{2\, a\, s}{\left(s^2 + a^2\right)^2} \tag{5.67}$$

Ejemplo 20

Determinar la transformada de Laplace de $f(t) = t\, \mathrm{e}^{-at} \cos 5t$.

Si se hace $f_1(t) = \cos 5t$ y $f_2(t) = t \cos 5t$, se obtiene

$$F_1(s) = \frac{s}{s^2 + 25}$$

Usando el teorema de la multiplicación por *t*, se obtiene

$$F_2(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2 + 25}\right) = \frac{s^2 - 25}{(s^2 + 25)^2}$$

y finalmente, usando la propiedad de la traslación compleja,

$$F(s) = \frac{(s+2)^2 - 25}{\left[(s+2)^2 + 25\right]^2} = \frac{s^2 + 4s - 21}{\left(s^2 + 4s + 29\right)^2}$$

5.7.4 La Transformada de una Función Periódica

Considere la función periódica $f(t)$ con un período T que satisface $f(t + nT) = f(t)$, donde n es un entero positivo o negativo. La transformada de esta función es

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\
&= \int_{0^-}^{T} f(t) e^{-st} dt + \int_{T}^{2T} f(t) e^{-st} dt + \cdots
\end{aligned}
\tag{5.68}
$$

Trasladando sucesivamente cada término de la transformada por e^{-sT}, en donde n es el número de traslados necesarios para hacer que los límites de las expresiones integrales sean todos de 0– a T, se tiene que

$$
F(s) = \left(1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \cdots\right) \int_{0^-}^{T} f(t) e^{-st} dt
$$

y utilizando el teorema del binomio para la identificación de la serie, se obtiene

$$
F(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_{0^-}^{T} f(t) e^{-st} dt \tag{5.69}
$$

La integral en esta ecuación representa la transformada de la función $f(t)$ como si ella estuviese definida sólo de 0– a T. Denotando esta transformada por $F_1(s)$, se obtiene

$$
F(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} F_1(s) \tag{5.70}
$$

Esta ecuación relaciona la transformada de una función periódica con la transformada de esa función sobre el primer ciclo (o cualquier otro ciclo).

Ejemplo 21

Se desea determinar la transformada de un tren de pulsos con un período T, donde cada pulso tiene una amplitud unitaria y una duración $a < T$.

Solución: Aplicando la Ec. (5.70), se tiene

$$
\begin{aligned}
F_1(s) &= \int_{0^-}^{T} f(t) e^{-st} dt \\
&= \int_{0}^{a} e^{-st} dt = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-as}\right)
\end{aligned}
$$

y por tanto,

$$
F(s) = \frac{1}{s} \frac{1 - e^{-as}}{1 - e^{-Ts}}
$$

5.8 Aplicación de la Transformada de Laplace a Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

En esta sección se usan transformadas de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales *lineales con coeficientes constantes.* Se supone siempre que todas las ecuaciones son válidas para $t \geq 0$ y las soluciones se determinan para diferentes formas de excitación.

Una ecuación diferencial *lineal de orden n con coeficientes constantes* es una ecuación de la forma

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = x(t) \tag{5.71}$$

donde $x(t)$, la *excitación*, es una función conocida y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes dadas.

Una *solución* de (5.71) es cualquier función $y(t)$ que satisfaga la ecuación. Como se verá, la Ec. (5.71) tiene muchas soluciones. Sin embargo, su solución es única si se especifican los valores iniciales de $y(t)$ y sus primeras $n - 1$ derivadas:

$$y(0) = y_0\,,\;\; y'(0) = y_1\,,\;\; \ldots\,,\, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \tag{5.72}$$

Estos valores se denominan *condiciones iniciales*.

Una solución particular es una solución $y(t)$ que satisface unas condiciones iniciales específicas. Si no se especifican los valores iniciales, entonces $y(t)$ es una *solución general*. Así que una solución general es una familia de soluciones que depende de los n parámetros $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$.

A una ecuación diferencial se le puede dar una interpretación de sistema. En esta interpretación, la Ec. (5.71) especifica un sistema con entrada (excitación) $x(t)$ y salida (respuesta) $y(t)$. La salida así especificada, $y(t)$, es la solución única de la Ec. (5.71) bajo las condiciones iniciales especificadas.

El *estado inicial* del sistema es el conjunto (5.72) de condiciones iniciales. La respuesta de *estado cero* del sistema es la solución, $y(t) = y_\alpha(t)$, de (5.71) con cero condiciones iniciales:

$$y_\alpha(0) = y'_\alpha(0) = \cdots\, y_\alpha^{(n-1)}(0) = 0 \tag{5.73}$$

La respuesta de *entrada cero*, $y(t) = y_\beta(t)$. Es la solución de (5.71) cuando $x(t) = 0$. Es decir, la respuesta de entrada cero $y_\beta(t)$ es la solución de la ecuación *homogénea*

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \tag{5.74}$$

La aplicación de la transformada de Laplace para resolver la Ec. (5.71) comprende los siguientes pasos:

1. *Se multiplican ambos lados de la ecuación por e^{-st} y se integra de cero a infinito. Puesto que la ecuación es válida para $t \geq 0$, resulta la ecuación*

$$\int_{0^-}^{\infty} \left[a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_0 y(t) \right] e^{-st}\,dt = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st}\,dt \tag{5.75}$$

   Se supone que todas las funciones son transformables en el sentido de Laplace. Ello implica que el lado derecho es igual a la transformada $X(s)$ de la función conocida $x(t)$, y el lado izquierdo puede expresarse en términos de la transformada $Y(s)$ de $y(t)$ y de las condiciones iniciales (5.73).

2. *Se resuelve la ecuación en la transformada $Y(s)$ resultante.*

3. *Se determina la transformada inversa $y(t)$ de $Y(s)$ usando fracciones parciales u otros métodos de inversión.*

A continuación se ilustra el método con varios ejemplos.

Ejemplo 22

Resolver la ecuación diferencial

$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = x(t)$$

sujeta a la condición inicial $y(0) = y_0$.

Tomando transformadas en ambos lados se obtiene

$$a_1 \left[sY(s) - y_0 \right] + a_0 Y(s) = X(s)$$

Por tanto,

$$Y(s) = \frac{X(s)}{a_1 s + a_0} + \frac{a_1 y_0}{a_1 s + a_0}$$

Así que $Y(s) = Y_\alpha + Y_\beta$, donde

$$Y_\alpha(s) = \frac{1}{a_1 s + a_0} X(s)$$

es la respuesta de estado cero y

$$Y_\beta = \frac{1}{s + a_0/a_1} y_0$$

es la respuesta de entrada cero. Su inversa es la exponencial

$$y_\beta = y_0 e^{s_1 t}$$

donde $s_1 = -a_0/a_1$.

Si, por ejemplo, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $x(t) = 8t$ y $y(0) = 5$, entonces la ecuación es

$$y'(t) + 2y(t) = 8t, \qquad y(0) = 5,$$

y su ecuación transformada es

$$Y(s) = \frac{8/s^2}{s+2} + \frac{5}{s+2} = \frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{7}{s+2}$$

La solución completa es

$$y(t) = 4t - 2 + 7e^{-2t}, \qquad (t \geq 0)$$

Ejemplo 23

Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+5y=5u(t)$$

sujeta a las condiciones

$$y(0)=1, \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=2$$

La transformación de Laplace de esta ecuación diferencial produce

$$\left[s^2Y(s)-s\,y(0)-y'(0)\right]+4\left[sY(s)-y(0)\right]+5Y(s)=\frac{5}{s}$$

y al incluir las condiciones iniciales, se obtiene

$$Y(s)\left(s^2+4s+5\right)=\frac{5}{s}+s+6$$

o

$$Y(s)=\frac{s^2+6s+5}{s(s^2+4s+5)}$$

Desarrollando ahora en fracciones parciales,

$$Y(s)=\frac{1}{s}+\frac{-j}{s+2-j1}+\frac{j}{s+2+j1}$$

y tomando la transformada inversa da la solución

$$y(t)=1+2e^{-2t}\operatorname{sen}t, \qquad t\ge 0$$

Ejemplo 24

Determine la solución de la ecuación diferencial

$$y''(t)-y'(t)-6y(t)=2$$

sujeta a las condiciones

$$y(0)=1, \qquad y'(0)=0$$

Aplicando la transformación a ambos lados de la ecuación diferencial, se obtiene la ecuación algebraica

$$sY(s) - s - sY(s) + 1 - 6Y(s) = \frac{2}{s}$$

Por tanto,

$$\left(s^2 - s - 6\right)Y(s) = \frac{s^2 - s + 2}{s}$$

o

$$Y(s) = \frac{s^2 - s + 2}{s(s-3)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s+2}$$

Evaluando los coeficientes, se encuentra que

$$Y(s) = -\frac{1}{3}\frac{1}{s} + \frac{8}{15}\frac{1}{s-3} + \frac{4}{5}\frac{1}{s+2}$$

y la solución $y(t)$ es

$$y(t) = -\frac{1}{3} + \frac{8}{15}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t}, \qquad t \ge 0$$

Ejemplo 25

Determine la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy_1}{dt} + 20y_1 - 10y_2 = 100u(t)$$
$$\frac{dy_2}{dt} + 20y_2 - 10y_1 = 0$$

sujeto a las condiciones iniciales $y_1(0) = 0$ y $y_2(0) = 0$.

Las ecuaciones transformadas son

$$(s+20)Y_1(s) - 10Y_2(s) = \frac{100}{s}$$

$$-100Y_1(s) + (s+20)Y_2(s) = 0$$

Resolviendo este sistema, se obtiene

$$Y_1(s) = \frac{100(s+20)}{s(s^2+40s+300)} = \frac{20}{3}\frac{1}{s} - \frac{5}{s+10} - \frac{5}{3}\frac{1}{s+30}$$

$$Y_2(s) = \frac{1000}{s(s^2+40s+300)} = \frac{10}{3}\frac{1}{s} - \frac{5}{s+10} + \frac{5}{3}\frac{1}{s+30}$$

y la solución es

$$y_1(t) = \frac{20}{3} - 5e^{-10t} - \frac{5}{3}e^{-30t}, \qquad t \geq 0$$

$$y_2(t) = \frac{10}{3} - 5e^{-10t} + \frac{5}{3}e^{-30t}, \qquad t \geq 0$$

5.9 La Convolución

La operación de convolución encuentra aplicaciones en muchos campos, incluyendo la teoría de redes eléctricas y controles automáticos. Una aplicación sobresaliente es la que permite evaluar la *respuesta de un sistema lineal* a una excitación arbitraria cuando se conoce la respuesta al impulso [respuesta cuando la excitación es un impulso unitario $\delta(t)$].

Sean las dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ transformables en el sentido de Laplace y sean $F_1(s)$ y $F_2(s)$ sus transformadas respectivas. El producto de $F_1(s)$ y $F_2(s)$ es la transformada de Laplace de la *convolución de* $f_1(t)$ y $f_2(t)$; es decir,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = F_1(s)F_2(s) \tag{5.76}$$

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)\, f_2(\tau)\, d\tau \tag{5.77}$$

Las integrales en la Ec. (5.77) se conocen como *integrales de convolución* y el asterisco (*) indica la operación de convolución. De acuerdo con la relación $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$, se observa que

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_2(t) * f_1(t)\} \\ &= F_1(s)F_2(s) \end{aligned} \tag{5.78}$$

Así que la transformada inversa del producto de las transformadas $F_1(s)$ y $F_2(s)$ se determina mediante la convolución de las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ usando cualquiera de las fórmulas en la Ec. (5.77) (obsérvese que la *convolución es conmutativa*).

Para deducir estas relaciones, observe que la transformada $F(s) = F_1(s)F_2(s)$ se puede expresar como un producto de las integrales que definen sus transformadas de Laplace en la forma

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \int_{0-}^{\infty}\left[\int_0^t f_1(t-\tau)\, f_2(\tau)\, d\tau\right]e^{-st}\,dt$$

la cual puede expresarse como

$$F(s)=\int_{0-}^{\infty}\left[\int_{0-}^{\infty} f_1(t-\tau)u(t-\tau)\, f_2(\tau)\,d\tau\right]e^{-st}\,dt$$

puesto que $u(t-\tau)=0$ para $\tau > t$. Intercambiando el orden de integración, se obtiene

$$F(s)=\int_{0-}^{\infty} f_2(\tau)\left[\int_{0}^{\infty} f_1(t-\tau)u(t-\tau)e^{-st}\,dt\right]d\tau$$

Definiendo ahora

$$x=t-\tau$$

se tiene que

$$F(s)=\int_{0}^{\infty} f_2(\tau)\left[\int_{-\tau}^{\infty} f_1(x)u(x)e^{-s(x+\tau)}\,dx\right]d\tau$$

Pero $u(x)$ hace cero el valor de la integral entre corchetes para $x < 0$, y por tanto

$$F(s)=\int_{0-}^{\infty} f_2(\tau)\left[\int_{0-}^{\infty} f_1(x)e^{-s(x+\tau)}\,dx\right]d\tau$$

la cual puede ser expresada como el producto de dos integrales:

$$F(s)=\left[\int_{0-}^{\infty} f_2(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau\right]\left[\int_{0-}^{\infty} f_1(x)e^{-sx}\,dx\right]=F_2(s)F_1(s)$$

o también

$$F_2(s)F_1(\mathrm{s}) \;\leftrightarrow\; \int_{0}^{t} f_1(t-\tau)\, f_2(\tau)\,d\tau \tag{5.79}$$

la que demuestra la validez de una de las Ecs. (5.77). Si se intercambian $f_1(t)$ y $f_2(t)$, se puede utilizar un proceso similar para derivar la otra ecuación en (5.77).

A continuación se mostrará mediante un ejemplo, que la convolución se puede interpretar de acuerdo con cuatro pasos: (1) *reflexión*, (2) *traslación*, (3) *multiplicación* y (4) *integración*.

Ejemplo 26

En este ejemplo, sean $F_1(s) = 1/s$ y $F_2(s)=1/(s+1)$, de manera que $f_1(t) = u(t)$ y $f_2(t)=e^{-t}u(t)$. Se desea determinar la convolución de $f_1(t)$ y $f_2(t)$; es decir, se desea hallar

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{0}^{t} u(t-\tau)e^{-\tau}\,d\tau$$

Los pasos para aplicar la convolución a estas dos funciones se ilustran en la Fig. 5.9, en la cual $f_1(t)$ y $f_2(t)$ se muestran en la (a) y $f_1(\tau)$ y $f_2(\tau)$ en (b). En (c) se han reflejado las funciones respecto de la línea

$t = 0$ y en (*d*) se ha trasladado algún valor típico de t. En (e) se ha efectuado la multiplicación indicada dentro de la integral de las Ecs. (5.77). La integración del área sombreada da un punto de la curva $f(t)$ para el valor seleccionado de t. Al efectuar todos los pasos anteriores para diferentes valores de t, se obtiene la respuesta $f(t)$, tal como se señala en (*f*) de la misma figura.

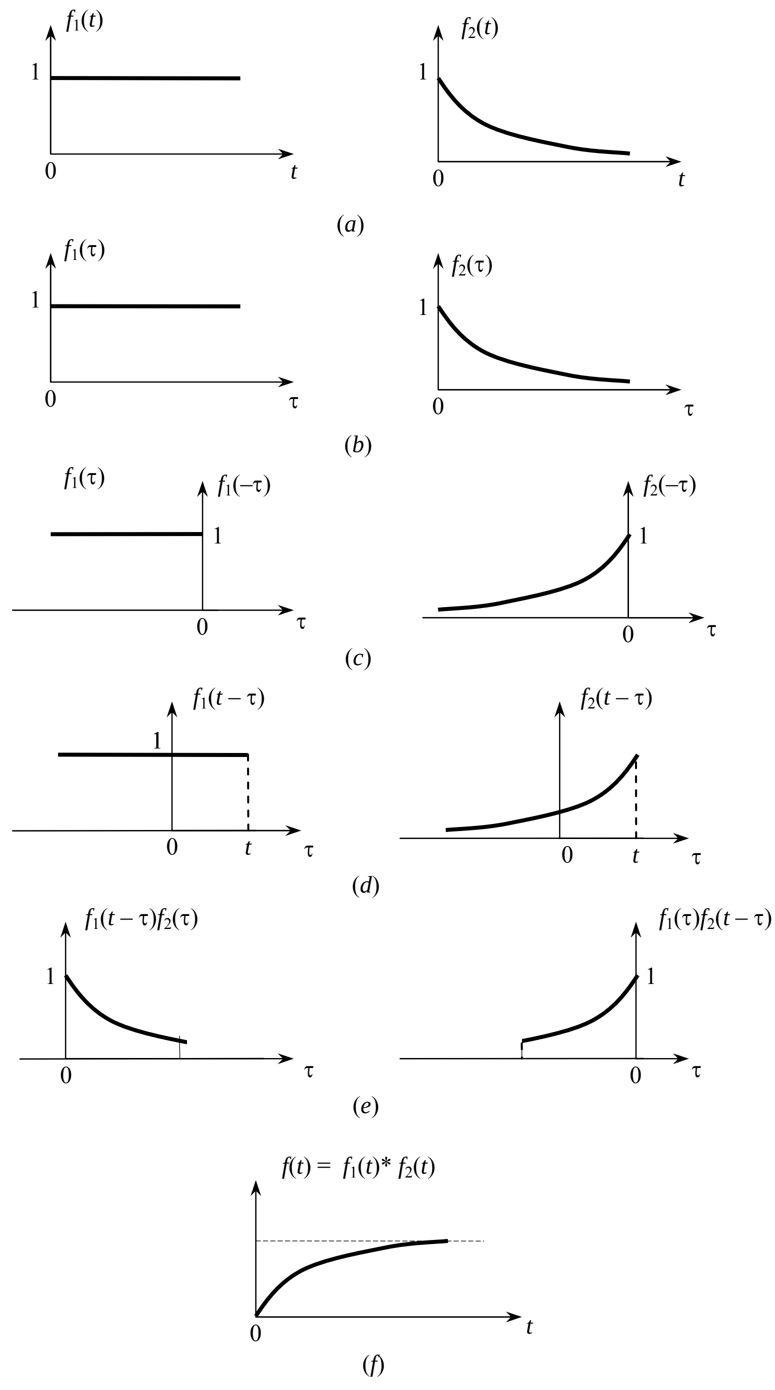


Figura 5.9

Para este ejemplo, la integración de la Ec. (5.79) es sencilla y da

$$f(t)=\int_0^t e^{-\tau}d\tau=1-e^{-t}$$

que es, por supuesto, la transformada inversa del producto $F_1(s)F_2(s)$,

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right\} \\ &= 1-e^{-t} \end{aligned}$$

Ejemplo 27

Como otro ejemplo, considere ahora la transformada

$$F(s)=\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$$

En este caso se puede tomar

$$F_1(s)=F_2(s)=\frac{1}{a}\frac{a}{s^2+a^2}$$

de manera que

$$f_1(t)=f_2(t)=\frac{1}{a}\operatorname{sen} at$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right\} &= \frac{1}{a^2}\operatorname{sen} at * \operatorname{sen} at \\ &= \frac{1}{a^2}\int_0^t \operatorname{sen} a\tau \operatorname{sen} a(t-\tau)\,d\tau \\ &= \frac{1}{2a^2}\left(\operatorname{sen} at - at\cos at\right) \end{aligned}$$

5.10 Propiedades de la Integral de Convolución

Ahora se derivarán algunas propiedades de la integral de convolución.

Propiedad 1 La operación de convolución es *conmutativa*, *distributiva* y *asociativa*:

$$
\begin{aligned}
& f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) && (a) \\
& f(t) * \left[f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_k(t) \right] = f(t) * f_1(t) + f(t) * f_2(t) + \cdots + f(t) * f_k(t) && (b) \\
& f_1(t) * \left[f_2(t) * f_3(t) \right] = \left[f_1(t) * f_2(t) \right] * f_3(t) && (c)
\end{aligned}
\tag{5.80}
$$

Solamente se verificará la relación (5.80) (*c*), dejando las otras dos como ejercicios. Sean $G_1(s)$ y $G_2(s)$ las transformadas de Laplace de las funciones $g_1(t) = f_2(t) * f_3(t)$ y $g_2(t) = f_1(t) * f_2(t)$, respectivamente. Por el teorema de convolución sabemos que

$$
G_1(s) = F_2(s) F_3(s), \qquad G_2(s) = F_1(s) F_2(s) \tag{5.81}
$$

donde $F_i(s)$ ($i = 1, 2, 3$) denota la transformada de Laplace de $f_i(t)$. Esto da

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{ f_1(t) * \left[f_2(t) * f_3(t) \right] \right\} &= \mathcal{L}\left\{ f_1(t) * g_1(t) \right\} = F_1(s) G_1(s) \\
&= F_1(s) F_2(s) F_3(s) = G_2(s) F_3(s) = \mathcal{L}\left\{ g_2(t) * f_3(t) \right\} \\
&= \mathcal{L}\left\{ \left[f_1(t) * f_2(t) \right] * f_3(t) \right\}
\end{aligned}
\tag{5.82}
$$

Tomando la transformada de Laplace inversa de ambos lados produce la identidad deseada (5.80) (*c*).

Propiedad 2 *Si las funciones* $f_1(t)$ *y* $f_2(t)$ *son diferenciables para* $t > 0$ *y continuas para* $t = 0$, *entonces su convolución es diferenciable para* $t > 0$:

$$
\begin{aligned}
\frac{df(t)}{dt} &= \int_0^t f_1(\tau) \frac{df_2(t-\tau)}{dt} d\tau + f_1(t) f_2(0) \\
&= \int_0^t \frac{df_1(t-\tau)}{dt} f_2(\tau) d\tau + f_1(0) f_2(t) \qquad t > 0
\end{aligned}
\tag{5.83}
$$

Para demostrar esto, aplicamos la regla de Leibnitz para diferenciar dentro de una integral, la cual dice que si

$$
h(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} g(t, \tau) d\tau \tag{5.84}
$$

donde $a(t)$ y $b(t)$ son funciones diferenciables de t y $g(t,\tau)$ y $\partial g(t,\tau)/\partial t$ son continuas en t y τ, entonces

$$\frac{dh(t)}{dt}=\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial g(t,\tau)}{\partial t}d\tau+g(t,b)\frac{db(t)}{dt}-g(t,a)\frac{da(t)}{dt} \tag{5.85}$$

Aplicando (5.85) a la ecuación de definición de la integral de convolución con $h(t)=f(t)$, $g(t,\tau)=f_1(\tau)f_2(t-\tau)$ o $f_1(t-\tau)f_2(\tau)$, $a=0^-$ y $b=t^+$, se obtiene la relación (5.83).

Observe que la Ec. (5.83) no necesita realmente la hipótesis de que ambas $f_1(t)\ y\ f_2(t)$ sean diferenciables. De hecho, si cualquiera de las funciones es diferenciable y la otra continua, entonces su convolución es diferenciable. Desde el punto de vista de la operación de convolución, la Ec. (5.83) puede escribirse también como

$$\frac{df(t)}{dt}=f_1(t)*\frac{df_2(t)}{dt}+f_1(t)f_2(0)=\frac{df_1(t)}{dt}*f_2(t)+f_1(0)f_2(t) \tag{5.86}$$

Propiedad 3 Sea

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)\frac{df(t)}{dt}=f_1(t)*\frac{df_2(t)}{dt}+f_1(t)f_2(0)=\frac{df_1(t)}{dt}*f_2(t)+f_1(0)f_2(t)$$

y escriba

$$g_1(t)=f_1(t-T_1)u(t-T_1),\qquad T_1\ge 0 \tag{5.87}$$

$$g_2(t)=f_2(t-T_2)u(t-T_2),\qquad T_2\ge 0 \tag{5.88}$$

$$g(t)=f(t-T_1-T_2)u(t-T_1-T_2) \tag{5.89}$$

donde $u(t)$ denota la función escalón unitario. Entonces

$$g(t)=g_1(t)*g_2(t) \tag{5.90}$$

Esta propiedad expresa que si las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son retrasadas por T_1 y T_2 segundos, respectivamente, entonces la convolución de las dos funciones retrasadas es igual a la convolución de las funciones originales, retrasada por T_1+T_2 segundos. La demostración de esta propiedad se deja para el lector.

5.11 Ecuaciones Diferenciales e Integrales

Con la ayuda de la propiedad de convolución se pueden resolver algunos tipos de ecuaciones integro-diferenciales no homogéneas, lineales y con coeficientes constantes. Se darán algunos ejemplos.

Ejemplo 28. Determine la solución general de la ecuación diferencial

$$y''(t)+k^2y(t)=f(t) \tag{5.91}$$

en términos de la constante k y la función $f(t)$.

Suponiendo que todas las funciones en (5.91) son transformables, la ecuación transformada es

$$s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + k^2 Y(s) = F(s)$$

donde $y(0)$ y $y'(0)$ son, por supuesto, las condiciones iniciales. De aquí se obtiene

$$Y(s) = \frac{1}{k}\frac{k}{s^2+k^2}F(s) + y(0)\frac{s}{s^2+k^2} + \frac{y'(0)}{k}\frac{k}{s^2+k^2}$$

y por tanto,

$$y(t) = \frac{1}{k}(\operatorname{sen} kt) * f(t) + y(0)\cos kt + \frac{y'(0)}{k}\operatorname{sen} kt$$

Esta solución general de la Ec. (5.91) puede entonces escribirse en la forma

$$y(t) = \frac{1}{k}\int_0^t f(\tau)\operatorname{sen} k(t-\tau)\,d\tau + C_1\cos kt + C_2\operatorname{sen} kt$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Ejemplo 29. Resuelva la ecuación integral

$$y(t) = at + \int_0^t y(\tau)\operatorname{sen}(t-\tau)\,d\tau$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma

$$y(t) = at + y(t) * \operatorname{sen} t$$

y, transformando ambos miembros, se obtiene la ecuación algebraica

$$Y(s) = \frac{a}{s^2} + Y(s)\frac{1}{s^2+1}$$

cuya solución es

$$Y(s) = a\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}\right)$$

y por tanto,

$$y(t) = a\left(t + \frac{1}{6}t^3\right)$$

La *ecuación integral general del tipo de convolución* tiene la forma

$$y(t) = f(t) + \int_0^t g(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau \tag{5.92}$$

donde las funciones $f(t)$ y $g(t)$ son dadas y $y(t)$ debe determinarse. Puesto que la ecuación transformada es

$$Y(s) = F(s) + G(s)Y(s)$$

la transformada de la función buscada es

$$Y(s) = \frac{F(s)}{1 - G(s)} \tag{5.93}$$

Si la Ec. (5.92) es modificada reemplazando $y(t)$ por combinaciones lineales de $y(t)$ y sus derivadas, la transformada de la ecuación modificada sigue siendo una ecuación algebraica en $Y(s)$.

Ahora se procederá a resolver la ecuación de estado para sistemas LIT estudiada en el Capítulo 2, utilizando la transformada de Laplace.

Aplicando la transformación de Laplace a la ecuación $\dfrac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{Bu}(t)$, con condición inicial $\mathbf{x}(0)$, se obtiene

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{AX}(s)\mathbf{BU}(s)$$

o

$$\mathbf{X}(s)[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \mathbf{x}(0) + \mathbf{BU}(s)$$

de donde

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(s) &= [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}[\mathbf{x}(0) + \mathbf{BU}(s)] \\ &= \mathbf{\Phi}(s)[\mathbf{x}(0) + \mathbf{BU}(s)]\end{aligned}$$

por lo que

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}[\mathbf{x}(0) + \mathbf{BU}(s)]\right\} \tag{5.94}$$

donde $\mathbf{\Phi}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ es la *matriz resolvente*. Se debe observar que $\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{\Phi}(s)\} = e^{At}$. En la sección anterior ya vimos que la matriz $\mathbf{\Phi}(t)$ se conoce como la *matriz de transición* y más adelante se darán algunas de sus propiedades.

Ejemplo 30. Resolver el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Tomando $u(t) = 1$ y ejecutando las operaciones indicadas en la Ec. (5.94), obtenemos

$$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]=s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & -6\\ 1 & s+5\end{bmatrix}$$

de donde

$$\mathbf{\Phi}(s)=[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}=\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix}s+5 & 6\\ -1 & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \frac{6}{(s+2)(s+3)}\\ \frac{-1}{(s+2)(s+3)} & \frac{s}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{X}(s)=\begin{bmatrix}\frac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \frac{6}{(s+1)(s+2)}\\ \frac{-1}{(s+2)(s+3)} & \frac{s}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ \overline{s}\end{bmatrix}\right\}$$

o

$$\mathbf{X}(s)=\begin{bmatrix}\frac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \frac{6}{(s+1)(s+2)}\\ \frac{-1}{(s+2)(s+3)} & \frac{s}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2+\frac{1}{s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{s^2+17s+6}{s(s+2)(s+3)}\\ \dfrac{2s}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}$$

y por tanto,

$$X_1(s)=\frac{s^2+17s+6}{s(s+2)(s+3)}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+2}+\frac{K_3}{s+3}=\frac{1}{s}+\frac{12}{s+2}-\frac{12}{s+3}$$

$$\Rightarrow \qquad x_1(t)=1+12e^{-2t}-12e^{-3t}$$

$$X_2(s)=\frac{2s}{(s+2)(s+3)}=\frac{K_1}{s+2}+\frac{K_2}{s+3}=-\frac{4}{s+2}+\frac{6}{s+3}$$

$$\Rightarrow \qquad x_2(t)=-4e^{-2t}+6e^{-3t}$$

Ejemplo 31. Resolver el sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}5\\ 1\end{bmatrix}$$

Procediendo igual que en el Ejemplo 30, se obtiene

$$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]=\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ 0 & s+2\end{bmatrix}, \qquad [s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{X}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{s+2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5+\dfrac{2}{s}\\ 1+\dfrac{3}{s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{5s+2}{s(s+1)}\\ \dfrac{s+3}{s(s+2)}\end{bmatrix}$$

y por tanto,

$$X_1(s)=\frac{5s+2}{s(s+1)}=\frac{2}{s}+\frac{3}{s+1}\qquad\Rightarrow\qquad x_1(t)=2+3e^{-t}$$

$$X_2(s)=\frac{s+3}{s(s+2)}=\frac{1.5}{s}-\frac{0.5}{s+2}\qquad\Rightarrow\qquad x_2(t)=1.5-0.5e^{-2t}$$

Ejemplo 32. Resolver el sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ -1 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$$

Aquí

$$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}=\begin{bmatrix}s+4 & -2\\ 1 & s+2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{s^2+6s+10}\begin{bmatrix}s+2 & 2\\ -1 & s+4\end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{X}(s)=\frac{1}{s^2+6s+10}\begin{bmatrix}s+2 & 2\\ -1 & s+4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 1+\dfrac{2}{s}\end{bmatrix}=\frac{1}{s^2+6s+10}\begin{bmatrix}\dfrac{3s^2+8s+4}{s}\\ \dfrac{s^2+3s+8}{s}\end{bmatrix}$$

$$X_1(s)=\frac{3s^2+8s+4}{s\left(s^2+6s+10\right)}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+3-j}*\frac{K_3}{s+3+j}$$

$$K_1=0.4,\quad K_2=\frac{3(-3+j)^2+8(-3+j)+4}{(-3+j)\,j2}=1.703\angle\,40.236°=K_3^*$$

$$\Rightarrow\qquad x_1(t)=0.4+3.406e^{-3t}\,\mathrm{sen}(t+130.24°)$$

y

$$X_2(s)=\frac{s^2+3s+8}{s(s^2+6s+10)}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+3-j}+\frac{K_3}{s+3+j}$$

$$K_1=0.8,\qquad K_2=1.204\angle 85.24°=K_3^*$$

$$\Rightarrow\qquad x_2(t)=0.8+2.41e^{-3t}\,\text{sen}(t+175.24°)$$

Ejemplo 33

Resolver el sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & -3\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}t,\qquad \mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}$$

Procedemos igual que en los ejemplos previos y obtenemos:

$$s\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}s & 1\\ -2 & s+3\end{bmatrix},\qquad [s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{-1}{(s+1)(s+2)}\\ \frac{2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}(s)=\begin{bmatrix}\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{-1}{(s+1)(s+2)}\\ \frac{2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0+\frac{1}{s}\\ 2+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-2s^2+s+3}{s^2(s+1)(s+2}\\ \frac{2s+2}{s^2(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$X_1(s)=\frac{-2s^2+s+3}{s^2(s+1)(s+2)}=\frac{1.5}{s^2}-\frac{1.75}{s}+\frac{1.75}{s+2}$$

$$\Rightarrow\qquad x_1(t)=1.5t-1.75+1.75e^{-2t}$$

$$X_2(s)=\frac{2s^3+2}{s^2(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s^2}-\frac{1.5}{s}+\frac{3.5}{s+2}$$

$$\Rightarrow\qquad x_2(t)=t-1.5+3.5e^{-2t}$$

5.12 Polos y Ceros de la Transformada

Usualmente, la transformada $F(t)$ de una función $f(t)$ es una función racional en s, es decir,

$$F(s)=\frac{a_0s^m+a_1s^{m-1}+\cdots+a_{m-1}s+a_m}{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}=\frac{a_0(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{b_0(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}\tag{5.95}$$

Los coeficientes a_k y b_k son constantes reales y m y n son enteros positivos. La función $F(s)$ se denomina una función racional *propia* si $n > m$, y una función racional *impropia* si $n \le m$. Las raíces del polinomio del numerador, z_k se denominan los *ceros* de $F(s)$ porque $F(s) = 0$ para esos valores de s. De igual forma, las raíces del polinomio del denominador, p_k, se denominan los *polos* de $F(s)$ ya que ella se hace infinita para esos valores de s. En consecuencia, los polos de $F(s)$ están fuera de la región de convergencia (RDC) ya que $F(s)$, por definición, no converge en los polos. Por otra parte, los ceros pueden estar dentro y fuera de la RDC, Excepto por un factor de escala, a_0/b_0, $F(s)$ puede especificarse completamente por sus polos y ceros, lo que nos da una forma compacta de representar a $F(s)$ en el plano complejo.

Tradicionalmente se usa una “×” para indicar la ubicación de un polo y un “○” para indicar cada cero. Esto se ilustra en la Fig.5.10 para la función dada por

$$F(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3} = 2\frac{s+2}{(s+1)(s+3)} \qquad \text{Re}(s) > -1$$

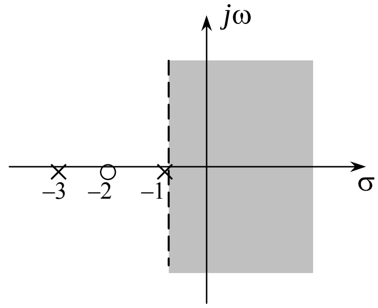


Figura 5.10

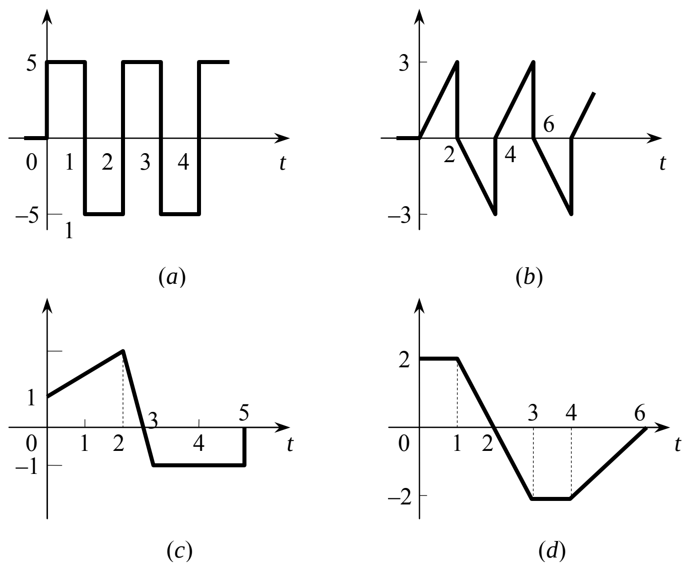
Problemas

1. Determinar la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

(a) $f(t) = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}t$ (b) $f(t) = 3e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,3t$

(c) $f(t) = 4e^{-t}\,\mathrm{sen}\,5t + t^2\cos 5t$ (d) $f(t) = t^3 e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,t$

2. Determine la transformada de Laplace de las funciones en las gráficas.



3. Encontrar la transformada de Laplace inversa de las siguientes funciones usando desarrollo en fracciones parciales.

(a) $F(s) = \dfrac{2s^2+3s+4}{s^3+5s^2+4s}$ (b) $F(s) = \dfrac{6s^2+10s+4}{3s^2+24s+48}$

(c) $F(s) = \dfrac{4s^2+6s+10}{s^3+5s^2+8s+4}$ (d) $F(s) = \dfrac{2s^2+6s+8}{\left(s^2+2s+5\right)^2}$

(e) $F(s) = \dfrac{2s^2+5s+4}{s^3+7s^2+16s+12}$ (f) $F(s) = \dfrac{8(s+10)^2}{s\left(s^2+10s+20\right)}$

(g) $F(s) = \dfrac{14s+42}{s^4+8s^3+14s^2+12s}$ (g) $F(s) = \dfrac{12s+48}{s^4+6s^3+16s^2+56s+80}$

4. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales mediante la aplicación directa de la transformación de Laplace.

(a) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4\dfrac{dx}{dt}+5x=2t+6. \quad x(0)=2, \quad x'(0)=1.$

(b) $2\dfrac{d^2x}{dt^2}+12\dfrac{dx}{dt}+10x=6\cos 4t, \quad x(0)=2, \ x'(0)=8.$

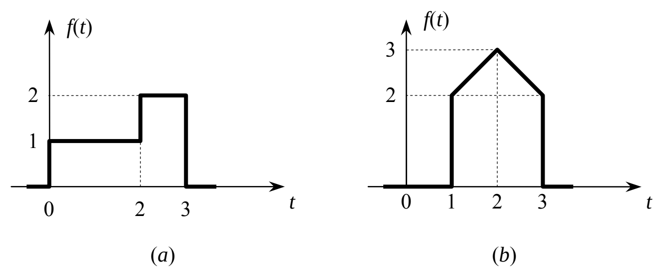
(c) $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{dt^3}+3\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}+3x=4, \quad x(0)=1, \ x'(0)=2, \ x''(0)=5.$

(d) $\dfrac{d^3x}{dt^3}+7\dfrac{d^2x}{dt^2}+12\dfrac{dx}{dt}=2. \quad x(0)=3, \ x'(0)=1, \ x''(0)=2.$

5. Halle las transformadas inversas de Laplace de las siguientes funciones:

(a) $\dfrac{1+e^{-s}}{s(s+3)}$ (b) $\dfrac{e^{-2s}-se^{-s}}{s^2+6s+5}$

6. Halle las transformadas de Laplace de las funciones ilustradas en la figura.



7. Determine la transformada inversa de las siguientes funciones usando la integral de convolución.

(a) $F(s)=\dfrac{5}{s(s^2+4)}$ (b) $F(s)=\dfrac{1}{s(s+4)^2}$

(c) $F(s)=\dfrac{10s}{s^3+2s^2+4s+8}$ (d) $F(s)=\dfrac{2}{s^3+6s^2+13s}$

8. Demuestre que la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$x'(t)-2y'(t)=f(t), \quad x''(t)\text{-}y''(t)+y(t)=0$$

bajo las condiciones $x(0)=x'(0)=y(0)=y'(0)=0,$ tal que $f(0) = 0$, es

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)\,d\tau-2\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau,$$

$$y(t)=-\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau$$

9. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones y verifique su resultado:

$$x'(t)+y(t)=f(t),\quad y'(t)+x(t)=1,\quad x(0)=1,\quad y(0)=0.$$

10. Resuelva por $y(t)$ y verifique su solución:

$$\int_0^t y(\tau)\,d\tau - y'(t)=t,\quad y(0)=2$$

11. Halle la solución de la ecuación integral

$$y(t)=a\,\text{sen}\,bt+c\int_0^t y(\tau)\,\text{sen}\,b(t-\tau)\,d\tau$$

(a) cuando $b^2 > bc$; (b) cuando $b = c$.

12. Sea $F(s)$ la transformada de Laplace de $f(t)$. Demuestre que

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^\infty F(s)\,ds$$

13. Demuestre que para α real y positiva

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{t^n}{n!}e^{-2\alpha t}\right)\right]=\frac{(s-\alpha)^n}{(s+\alpha)^{n+1}}$$

14. Usando la propiedad demostrada en el Problema 12, determine las transformadas de Laplace de las siguientes funciones:

a) $t^{-1}\cos\omega_0 t$ (b) $t^{-1}\left(1-e^{-\alpha t}\right)$ (c) $t^{-1}(\text{senh}\,\alpha t+\cosh\alpha t)$