Capítulo 4

TRANSFORMADA DE LAPLACE

4.1. GENERALIDADES

Consideremos una función $f(t)$ definida para $t \geq 0$.Se define la transformada de Laplace[1] de la función como una nueva función de otra variable s , así:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt \tag{4.1}$$

La transformada de Laplace de la función $f(t)$ que está en el dominio temporal t, queda ahora en el dominio de la variable s, cuyo significado está asociado particularmente a la frecuencia oscilatoria (ω en Radianes). En general $s = \sigma + j\omega$ es una variable compleja, cuyas partes real e imaginaria corresponden a las frecuencias neperiana y oscilatoria de la señal, por esta razón se dice que la función $F(s)$ está en el dominio de la frecuencia.

Es claro que la convergencia de la integral de la ecuación (4.1) depende de la naturaleza de la función. El siguiente desarrollo nos permitirá aclarar la situación planteada, teniendo en cuenta la señal de la figura 4.1. Supongamos que la función es seccionalmente continua en el intervalo $[0, T)$, es decir, presenta un número finito de discontinuidades finitas en el intervalo. En tal caso, la integral se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \lim_{b \to \infty} \int_T^b e^{-st} f(t) dt$$

Puesto que la función está acotada en el intervalo $[0, T)$, existirá un real positivo: K tal que

1

Llamada así en honor al matemático y astrónomo francés Pierre-Simon Laplace (1749-1827) considerado como uno de los más grandes científicos de la historia, aveces referido como el Newton de Francia.

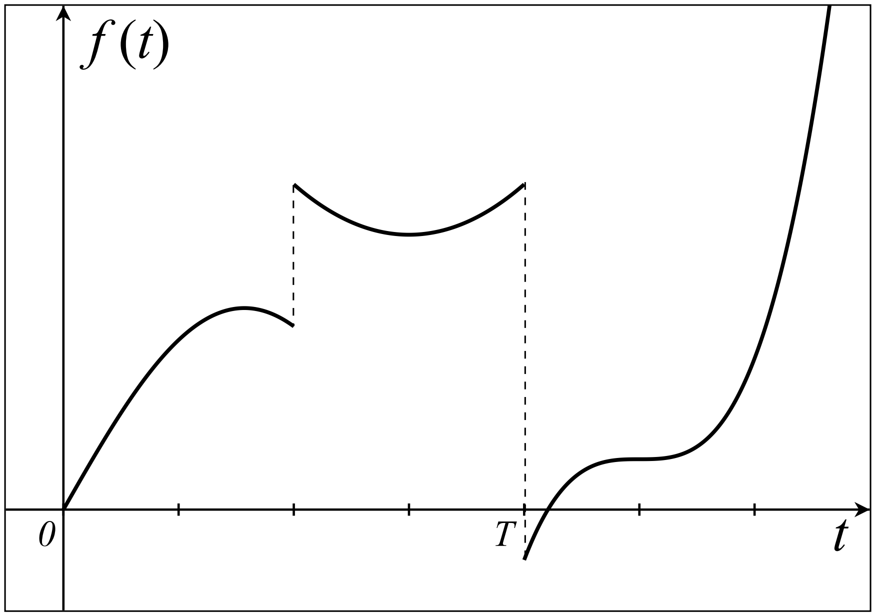


Figura 4.1: Función seccionalmente continua en $[0,T]$ y de orden exponencial para $t > T$

la primera integral cumple con la siguiente condición:

$$\left|\int_0^T e^{-st} f(t)dt\right| \leq K \int_0^T e^{-st} dt$$
$$\Rightarrow \left|\int_0^T e^{-st} f(t)dt\right| \leq \frac{K}{s}(1 - e^{-Ts})$$

En cuanto a la segunda integral, su convergencia se asegura en la medida en que la función no crezca más de lo que decrece la función exponencial, es decir, debe existir un real positivo: M y un real: α tal que:

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$$

Una función que presenta dicha característica se denomina de orden exponencial. Así las cosas, la segunda integral cumple con la siguiente condición:

$$\left|\lim_{b\to\infty}\int_T^b e^{-st} f(t)dt\right| \leq \int_T^b e^{-st} Me^{\alpha t} dt$$
$$\Rightarrow \left|\lim_{b\to\infty}\int_T^b e^{-st} f(t)dt\right| \leq \lim_{b\to\infty} M \int_T^b e^{-(s-\alpha)t} dt$$

Es claro que si $s > \alpha$ la integral converge y viene dada por:

$$\left|\lim_{b\to\infty}\int_T^b e^{-st} f(t)dt\right| \leq \frac{Me^{-(s-\alpha)T}}{s-\alpha}$$

El análisis presentado nos lleva a decir que si la función es seccionalmente continua en $[0, T)$ y de orden exponencial para $t > T$, su transformada de Laplace existe y está acotada de la siguiente manera:

$$F(s) \leq \frac{M}{s} + \frac{Me^{-(s-\alpha)T}}{s-\alpha} \quad , \text{ con } s > \alpha$$

Es conveniente advertir que las condiciones bajo las cuales se da la convergencia son de suficiencia y no de necesidad, es decir, es posible asignarle una transformada de Laplace a una función que no cumpla con una de las dos condiciones.
De todas formas, las funciones que cumplen con ambas condiciones, a las que se les denomina "*respetables*", son las funciones de uso generalizado en ingeniería y ciencias.
Cuando la función es respetable se cumple que:

- $\lim_{s \to \infty} \{F(s)\} = 0$
- $\lim_{s \to \infty} \{sF(s)\} \leq K$

La función impulso unitario $\delta(t)$ no es seccionalmente continua y sin embargo se le asigna, como transformada de Laplace, la unidad, es decir: $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$. Observe que no cumple las dos propiedades previamente enunciadas. Otra función de interés es aquella de la forma:

$$f(t) = t^{\alpha} \quad \text{con } \alpha \neq -1, -2, -3, \ldots$$

Es obvio que si α es negativo la función no es seccionalmente continua, sin embargo, se le asigna una transformada de Laplace, así:

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha} dt$$

Haciendo el cambio de variable $x = st$, se encuentra que:

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha}\} = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx$$

Por definición de la función Gamma[2], se tiene que:

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha}\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

De lo anterior, puede verse que la función: $t^{-1/2}$, a pesar de no ser respetable, tiene transformada y viene dada por:

$$\mathcal{L}\left\{t^{-1/2}\right\} = F(s) = \frac{\Gamma(1/2)}{S^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

Como puede verse, la función $F(s)$ no cumple con la propiedad $\lim_{s \to \infty} \{sF(s)\} \leq K$, precisamente por que $f(t)$ no es una función respetable, aunque cumple la propiedad $\lim_{s \to \infty} \{F(s)\} = 0$.

[2]Remítase al Apéndice A.2

De la misma manera, pueden idearse funciones no respetables, cuyas transformadas de Laplace existen. Por ejemplo la función definidad como:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^2}\sigma(t-n) = \sigma(t) + e\sigma(t-1) + e^4\sigma(t-2) + e^8\sigma(t-3) + \cdots$$

Cuya transformada (como se verá más adelante en la sección 4.3.10) está dada por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^2-ns}$$

Una función de interés particular, que sin ser seccionalmente continua, se le asigna una transformada de Laplace es: $f(t) = \ln(t)$. Aplicando la definición se tiene:

$$\mathcal{L}\{\ln(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\ln(t)dt$$

El procedimiento para realizar la integral es bastante truculento, sin embargo se presenta a continuación:
Partimos de la definición de la función Gamma, así:

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^p dx$$

Derivando con respecto a p, resulta:

$$\frac{d\Gamma(p+1)}{dp} = \Gamma'(p+1) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^p\ln(x)dx$$

Evaluando en $p=0$, se tiene: $\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}\ln(x)dx = -\gamma$. El resultado de esta integral es conocido como el número de Euler[3] $\gamma = 0.577215664901532860606$.

Haciendo el cambio de variable $x = st$ y nos queda:

$$\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-st}\ln(st)sdt = s\int_0^{\infty} e^{-st}[\ln(s)+\ln(t)]dt$$
$$\Rightarrow -\gamma = s\ln(s)\int_0^{\infty} e^{-st}dt + sF(s) = s\ln(s)\frac{1}{s} + sF(s)$$

De donde:

$$F(s) = \mathcal{L}\{\ln(t)\} = -\frac{(\gamma+\ln(s))}{s}$$

[3]Remítase al apéndice A.2

EJERCICIOS 4.1.

1. Diga si las siguientes funciones son respetables o no.

   a) $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$

   b) $f(t) = \dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$

   c) $f(t) = \dfrac{\cos(t)}{t}$

   d) $f(t) = t\ln(t)$

2. La transformada de Laplace de una función viene dada por $F(s) = \ln(s) - \ln(s+1)$. Determine si la función $f(t)$ es respetable o no.

4.2. TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$\boldsymbol{f(t)}$	$\boldsymbol{F(s)}$
$\delta(t)$	1
$Ku(t)$	$\dfrac{K}{s}$ para $s > 0$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$ para $s > a$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
t^{α}	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$ para $\alpha \neq -1, -2, -3, \ldots$
t^{n}	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
$\sinh(bt)$	$\dfrac{b}{s^2-b^2}$ para $\lvert s\rvert > b$
$\cosh(bt)$	$\dfrac{s}{s^2-b^2}$ para $\lvert s\rvert > b$
$\ln(t)$	$-\dfrac{(\gamma+\ln(s))}{s}$
$J_0(t)$[1]	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ para $\lvert s\rvert > 0$

Tabla 4.1: Resumen de transformadas de Laplace

Por integración directa se puede verificar la tabla 4.1, sin embargo omitiremos los procedimientos matemáticos y presentaremos alternativamente un ejemplo de cálculo de transformadas mediante software.

★ *Solución con Máxima:* Para encontrar la transformada de Laplace se ejecuta el comando: `laplace(f(t),t,s)`. Como ejemplo, encontraremos las transformadas de algunas funciones dadas en la tabla 4.1.

```
(%i1) laplace(exp(a*t),t,s);
laplace(sin(w*t),t,s);
laplace(sinh(b*t),t,s);
laplace(bessel_j(0,t),t,s);
```

Los resultados son:

(%o1) $\frac{1}{s-a}$

(%o2) $\frac{w}{w^2+s^2}$

(%o3) $\frac{b}{s^2-b^2}$

(%o4) $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{s^2}+1}\; s}$

★ *Solución con Matlab:* En este caso, la secuencia de comandos usados es:

```
>> syms t, syms a, syms b, syms w;
laplace(exp(a*t)),laplace(sin(w*t)), laplace(sinh(b*t)), laplace(besselj(0,t))

ans =
-1/(a - s)

ans =
w/(s^2 + w^2)

ans =
-b/(b^2 - s^2)

ans =
1/(s^2 + 1)^(1/2)
```

[1]Polinomio de Bessel de orden cero, definido en la ecuación (5.8). Remítase a la sección 5.6.5

4.3. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

A continuación se presentan las propiedades más importantes de la transformada de Laplace.

4.3.1. Linealidad

Si $F(s)$ y $G(s)$ son las transformadas de las funciones $f(t)$ y $g(t)$ respectivamente, entonces:

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{af(t)+bg(t)\right\}=aF(s)+bG(s)} \tag{4.2}$$

Ejemplo: 4.1. Determine la transformada de Laplace de la función: $f(t)=\sin^2(t)$

Solución: De la trigonometría se sabe que: $f(t)=\sin^2(t)=\dfrac{1}{2}\left[1-\cos(2t)\right]$.

Por lo tanto, se tiene que:

$$\mathcal{L}\left\{\sin^2(t)\right\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{1-\cos(2t)\right\}$$

Con base en la tabla 4.1 resulta:

$$\mathcal{L}\left\{\sin^2(t)\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)=\frac{2}{s(s^2+4)}$$

4.3.2. Multiplicación por la exponencial o translación lineal

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}=F(s-a)} \tag{4.3}$$

Demostración:
Sea $F(s)$ la transformada de la función $f(t)$, esto es: $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$.
Al multiplicar la función dada por e^{at}, su transformada viene a ser:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}=&\int_0^\infty e^{-st}[e^{at}f(t)]dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt\\ =&F(s-a)\end{aligned}$$

En consecuencia, si una función f(t) se multiplica por una función exponencial e^{at}, la correspondiente transformada se traslada una cantidad a.

Ejemplo: 4.2. Determine la transformada de la función: t^2e^{-2t}

Solución: Con base en la tabla 4.1, la transformada de t^2 es: $\mathcal{L}\left\{t^2\right\}=\dfrac{2}{s^3}$

En consecuencia, al multiplicarla por la exponencial, resulta:

$$\mathcal{L}\left\{t^2e^{-2t}\right\} = \frac{2}{(s+2)^3}$$

Ejemplo: 4.3. Encuentre la transformada de Laplace de la función: $f(t) = e^{-t}\sin(2t)$

Solución: A partir de la transformada de la función seno, se aplica la segunda propiedad, así:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\sin(2t)\right\} &= \frac{2}{s^2+4} \\ \Rightarrow \mathcal{L}\left\{e^{-t}\sin(2t)\right\} &= \frac{2}{(s+1)^2+4} = \frac{2}{s^2+2s+5} \end{aligned}$$

4.3.3. Translación en el dominio del tiempo o translación real

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\} = e^{-as}F(s) \quad \text{para } a>0} \tag{4.4}$$

Demostración:
Partiendo de la definición de la transformada:

$$\mathcal{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)u(t-a)dt = \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt$$

Se hace el cambio de variable $t-a=\tau$, resultando:

$$\mathcal{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\} = \int_a^\infty e^{-s(a+\tau)}f(\tau)d\tau = e^{-as}\int_a^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau = e^{-as}F(s)$$

Corolario:
A partir de la propiedad anteriormente presentada se puede determinar la transformada de Laplace de cualquier función de la forma $f(t)u(t-a)$ para $a>0$, así:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)u(t-a)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)u(t-a)dt = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

Haciendo el cambio de variable: $z=t-a$, se tiene:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)u(t-a)\right\} = \int_0^\infty e^{-s(z+a)}f(z+a)dz = e^{-as}\int_0^\infty e^{-sz}f(z+a)dz$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{f(t)u(t-a)\right\} = e^{-as}\mathcal{L}\left\{f(t+a)\right\}} \tag{4.5}$$

Ejemplo: 4.4. Encuentre la transformada de Laplace de la función:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } t < 0 \\ t & , \text{ si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & , \text{ si } t < 1 \end{cases}$$

Solución: La función por tramos $x(t)$ se puede expresar en función de señales singulares así:

$$x(t) = tu(t) - (t-1)u(t-1) - u(t-1)$$

Aplicando las propiedades de linealidad (4.2) y translación temporal (4.4), resulta:

$$X(s) = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s}$$

Ejemplo: 4.5. Determine la transformada de Laplace de la función: $[t + \sin(t)]u(t-\pi)$

Solución: Con base en el corolario de la propiedad de translación temporal (4.5), se tiene:

$$\mathcal{L}\left\{[t + \sin(t)]u(t-\pi)\right\} = e^{-\pi s}\mathcal{L}\left\{[t + \pi + \sin(t+\pi)]\right\}$$

Pero se sabe que $\sin(t+\pi) = -\sin(t)$, con lo que:

$$\mathcal{L}\left\{[t + \sin(t)]u(t-\pi)\right\} = e^{-\pi s}\mathcal{L}\left\{t + \pi - \sin(t)\right\} = e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s} - \frac{1}{s^2+1}\right)$$

Ejemplo: 4.6. Encuentre la transformada de Laplace de la función:

$$y(t) = \cos(t)[u(t) - u(t-\pi)]$$

Solución: Transformando a ambos lados de la función $y(t)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} Y(s) =& \mathcal{L}\left\{\cos(t)u(t)\right\} - \mathcal{L}\left\{\cos(t)u(t-\pi)\right\} \\ =& \frac{s}{s^2+1} - e^{-\pi s}\mathcal{L}\left\{\cos(t+\pi)u(t)\right\} \\ =& \frac{s}{s^2+1} - e^{-\pi s}\mathcal{L}\left\{-\cos(t)u(t)\right\} \\ =& \frac{s}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1} = \frac{s(1-e^{-s})}{s^2+1} \end{aligned}$$

4.3.4. Cambio de escala

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{f(at)\right\} = \frac{1}{a}F(s/a) \quad \text{para } s > 0} \tag{4.6}$$

La propiedad establece que cuando se cambia la escala en el dominio de tiempo ocurre un cambio de escala contrario en el dominio de la frecuencia, es decir, si la función en el dominio de tiempo se amplía en un factor a, la correspondiente transformada se reduce en la misma cantidad y viceversa. Es de notar que en el dominio de la frecuencia la amplitud queda dividida por a.

Demostración:
Partiendo de la definición, tenemos: $\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(at)dt$.
Realizando el cambio de variable: $\tau = at$, nos queda:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-(s/a)\tau} f(\tau)\frac{d\tau}{a} = \frac{1}{a}F(s/a)$$

***Ejemplo:* 4.7.** Determine la transformada de las funciones $x(2t)$, $x(t/2)$, siendo $x(t)$ la función del ejemplo 4.4.

Solución: Con base en el ejemplo 4.4, se tiene que:

$$X(s) = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s}$$

En consecuencia resulta:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(2t)\} &= \frac{1}{2}X(s/2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s/2)^2} - e^{-s/2}\frac{1}{(s/2)^2} - e^{-s/2}\frac{1}{s/2}\right)\\ &= \frac{2}{s^2} - e^{-s/2}\frac{2}{s^2} - e^{-s/2}\frac{1}{s}\end{aligned}$$

Y para $x(t/2)$, nos queda:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(t/2)\} &= 2X(2s) = 2\left(\frac{1}{(2s)^2} - e^{-2s}\frac{1}{(2s)^2} - e^{-2s}\frac{1}{2s}\right)\\ &= \frac{1}{2s^2} - e^{-2s}\frac{2}{2s^2} - e^{-2s}\frac{1}{s}\end{aligned}$$

4.3.5. Derivada en el dominio del tiempo

$$\boxed{\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - sf(0)} \qquad (4.7)$$

Demostración:
Para demostrar la propiedad se parte de suponer que tanto la función como su primera derivada son respetables, es decir, satisfacen las condiciones de existencia de la transformada. Se recurrirá al siguiente procedimiento:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt$$

Usando el procedimiento de integración por partes, se tiene:

$$U = e^{-st} \Rightarrow dU = -se^{-st}dt$$
$$dV = f'(t)dt \Rightarrow V = f(t)$$

Entonces la integral puede expresarse de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = \lim_{b\to\infty}\left\{ f(t)e^{-st}\Big|_0^b \right\} + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

De la expresión anterior, para $s > 0$, se sigue que:

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = 0 - f(0) + sF(s) = sF(s) - f(0)$$

Debe garantizarse que la función $f(t)$ esté definida en $t = 0$.

Corolarios

1. **Derivadas de orden superior.**
   Con base en la propiedad se presentan las transformadas de las derivadas de orden superior, en la medida en que sean respetables y que la función y las $n-1$ primeras derivadas estén definidas en $t = 0$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\\
\mathcal{L}\left\{f'''(t)\right\} &= s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)\\
&\vdots\\
\mathcal{L}\left\{D^nf(t)\right\} &= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \cdots - D^{n-1}f(0)
\end{aligned}$$

2. **Teorema del valor inicial.**
   El teorema del valor inicial es de gran importancia en aquellos problemas de valor inicial que resultan del análisis de sistemas lineales. Se parte de la transformada de la primera derivada, así:

$$sF(s) - f(0) = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt$$

   Tomando el límite cuando s tiende a infinito, y asumiendo que $f'(t)$ es respetable, resulta:

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to\infty}\left\{sF(s) - f(0)\right\} &= \lim_{s\to\infty}\left\{\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt\right\}\\
\lim_{s\to\infty}\left\{sF(s)\right\} - f(0) &= \int_0^\infty \lim_{s\to\infty}\left\{e^{-st}f'(t)\right\}dt\\
&= 0
\end{aligned}$$

   Finalmente se obtiene:

$$\boxed{\lim_{s\to\infty}\left\{sF(s)\right\} = \lim_{t\to 0}\{f(t)\}} \qquad (4.8)$$

3. **Teorema del valor final.**
El teorema del valor final es de gran importancia en aquellos problemas de valor inicial que resultan del análisis de sistemas lineales. Se parte de la transformada de la primera derivada, así:
$$sF(s) - f(0) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt$$
Tomando el límite cuando s tiende a cero, resulta:
$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0}\{sF(s) - f(0)\} &= \lim_{s\to 0}\left\{\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt\right\}\\
\lim_{s\to 0}\{sF(s)\} - f(0) &= \int_0^\infty \lim_{s\to 0}\left\{e^{-st} f'(t)\right\}dt = \int_0^\infty f'(t)dt\\
&= \lim_{t\to\infty}\{f(t)\} - f(0)
\end{aligned}$$
Finalmente se obtiene:
$$\boxed{\lim_{s\to 0}\{sF(s)\} = \lim_{t\to\infty}\{f(t)\}} \tag{4.9}$$

***Ejemplo:* 4.8.** Determine la transformada de Laplace de la función $y(t)$ del siguiente problema de valor inicial:

$$y'(t) + 2y(t) = e^{-t}u(t) \quad \text{con } y(0) = 2$$

Solución: Sea $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Aplicando la propiedad de linealidad se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y'(t) + 2y(t)\} &= \mathcal{L}\left\{e^{-t}u(t)\right\}\\
sY(s) - y(0) + 2Y(s) &= \frac{1}{s+1}\\
sY(s) - 2 + 2Y(s) &= \frac{1}{s+1}\\
\Rightarrow (s+2)Y(s) &= 2 + \frac{1}{s+1}
\end{aligned}$$

Simplificando la expresión, nos queda:

$$Y(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$$

***Ejemplo:* 4.9.** Determine la transformada de Laplace de la función $y(t)$ del siguiente problema de valor inicial:

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = u(t) \quad \text{con } y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Solución: Sea $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Aplicando la propiedad de linealidad se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''(t) + 2y'(t) + 2y(t)\} &= \mathcal{L}\{u(t)\} \\
s^2Y(s) - sy'(0) - y(0) + 2[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) &= \frac{1}{s} \\
s^2Y(s) + 2sY(s) + 2Y(s) &= \frac{1}{s} \\
(s^2 + 2s + 2)Y(s) &= \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

Despejando $Y(s)$, nos queda:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s + 2s + 2)}$$

4.3.6. Integración en el dominio del tiempo

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}} \tag{4.10}$$

Demostración:
Se parte del hecho de que la función a integrar es respetable y, en consecuencia, su integral también lo será.

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)dt$$

Por el procedimiento de integración por partes, se tiene:

$$U = \int_0^t f(\tau)d\tau \Rightarrow dU = f(t)dt$$

$$dV = e^{-st}dt \Rightarrow V = -\frac{e^{-st}}{s}$$

Entonces la integral puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} &= -\lim_{b\to\infty}\left\{\frac{e^{-st}}{s}\int_0^t f(\tau)d\tau\Bigg|_0^b\right\} + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s}f(t)dt \\
&= -0 \cdot \int_0^t f(\tau)d\tau + \left(\lim_{b\to 0}\frac{e^{-bt}}{b}\right)\cdot 0 + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\
&= \frac{F(s)}{s}
\end{aligned}$$

***Ejemplo:* 4.10.** Determine la transformada de Laplace de la función $y(t)$ del siguiente problema de valor inicial:

$$y'(t) + 2y(t) + \int_0^t y(z)dz = u(t) \qquad \text{con } y(0) = 0$$

Solución: Aplicando las propiedades de linealidad, derivación e integración temporal, se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{y'(t)+2y(t)+\int_0^t y(z)dz\right\} &= \mathcal{L}\left\{u(t)\right\}\\
sY(s)+2Y(s)+\frac{Y(s)}{s} &= \frac{1}{s}\\
(s^2+2s+1)Y(s) &= 1\\
\Rightarrow Y(s) &= \frac{1}{(s+1)^2}
\end{aligned}$$

4.3.7. Multiplicación por t

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{tf(t)\right\} = -F'(s)} \tag{4.11}$$

Demostración:
Por definición, la transformada de Laplace de $f(t)$ viene dada por:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

Si $F(s)$ es derivable con respecto a s, se tiene:

$$\frac{dF(s)}{ds} = F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

Usando la regla de Leibniz[4] para derivar dentro de una integral, resulta:

$$F'(s) = \int_0^\infty -te^{-st}f(t)dt$$

De la expresión anterior se sigue que:

$$\mathcal{L}\left\{tf(t)\right\} = -F'(s)$$

Cororario.
La transformada de una función multiplicada por una potencia entera no negativa del tiempo es:

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{t^nf(t)\right\} = (-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n} \qquad \text{con } n = 1, 2, 3, \ldots}$$

[4] Remítase al apendice A.1

***Ejemplo:* 4.11.** Determine la transformada de Laplace de la función: $f(t) = te^{-2t}\sin(2t)$

Solución: Sea $F(s) = \mathcal{L}\{\sin(2t)\} = \dfrac{2}{s^2+4}$.
Usando la propiedad de multiplicación por t, tenemos:

$$\mathcal{L}\{t\sin(2t)\} = -F'(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = \frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

Y Finalmente, aplicando la propiedad de translación lineal:

$$\mathcal{L}\left\{te^{-2t}\sin(2t)\right\} = \frac{4(s+2)}{[(s+2)^2+4]^2} = \frac{4(s+2)}{(s^2+2s+8)^2}$$

***Ejemplo:* 4.12.** Encuentre la transformada de Laplace de la función:$f(t) = e^{-t}\int_0^t x\sin(x)dx$

Solución: Primero hacemos $g(t) = t\sin(t)$, cuya transformada es:

$$G(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

Ahora hacemos $h(t) = \int_0^t g(u)du$, cuya transformada se obtiene aplicando la propiedad de integración temporal (4.12), así:

$$H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{2}{(s^2+1)^2}$$

Y finalmente con $f(t) = e^{-t}h(t)$, usando la propiedad de translación lineal, nos queda:

$$F(s) = H(s+1) = \frac{2}{[(s+1)^2+1]^2} = \frac{2}{(s^2+2s+2)^2}$$

4.3.8. División por t

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(z)dz} \tag{4.12}$$

Demostración:
Se parte de suponer que la función $f(t)/t$ es respetable. Sea $g(t) = f(t)/t$, con lo que:

$$f(t) = tg(t)$$

Con base en la propiedad de multiplicación por t 4.11, se tiene:

$$F(s) = -\frac{d}{ds}G(s) \Rightarrow dG(s) = -F(s)ds$$

Puesto que la transformada de Laplace de una función respetable es convergente para grandes valores de la frecuencia, se integran ambos miembros de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\int_s^\infty dG(s) &= -\int_s^\infty F(s)ds\\ G(s)|_s^\infty &= -\int_s^\infty F(s)ds\\ 0 - G(s) &= -\int_s^\infty F(z)dz\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(z)dz$$

Ejemplo: 4.13. Encuentre la transformada de Laplace de la función: $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$

Solución: Se parte de la transformada de la función seno, así: $\mathcal{L}\{\sin(t)\} = \dfrac{1}{s^2+1}$. Aplicando la propiedad de integración temporal:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{\sin(t)}{t}\right\} &= \int_s^\infty \frac{1}{z^2+1}dz = \tan^{-1}(s)\Big|_s^\infty\\ &= \tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}(s) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(s)\\ &= \tan^{-1}(1/s)\end{aligned}$$

Ejemplo: 4.14. Determine la transformada de Laplace de la función:

$$x(t) = -\frac{e^t}{t}\int_0^t \frac{e^u}{\sqrt{u}}du$$

Solución: Sea la función $f(t) = t^{-1/2}e^t$, cuya transformada de Laplace es la transformada de $t^{-1/2}$ desplazada, así:

$$F(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s-1}}$$

A continuación se hace $g(t) = \int_0^t f(u)du$, cuya transdormada se determina usando la propiedad de integración temporal (4.12):

$$G(s) = \frac{F(s)}{s} = \frac{1}{s}\sqrt{\frac{\pi}{s-1}}$$

Ahora hacemos $h(t) = e^{-t}g(t)$, con lo que:

$$H(s) = G(s+1) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}(s+1)}$$

Finalmente, a función original se puede escribir como: $x(t) = -h(t)/t$, cuya transformada es:

$$X(s) = -\int_s^\infty \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}(z+1)}dz$$

Para realizar la integral se hace el cambio de variable $z = u^2$. Evaluando la integral y tomando los límites, se obtiene:

$$X(s) = 2\sqrt{\pi}\tan^{-1}(\sqrt{s})$$

4.3.9. La transformada de la convolución

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{f(t) \otimes g(t)\right\} = F(s)G(s)} \tag{4.13}$$

Demostración:
La convolución de dos funciones viene dada por:

$$f(t) \otimes g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Aplicando la transformada resulta:

$$\mathcal{L}\left\{f(t) \otimes g(t)\right\} = \int_{t=0}^\infty e^{-st}\left(\int_{\tau=0}^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)dt$$

La expresión anterior se puede escribir en la forma:

$$\mathcal{L}\left\{f(t) \otimes g(t)\right\} = \int_{\tau=0}^t f(\tau)\left(\int_{t=0}^\infty e^{-st}g(t-\tau)dt\right)d\tau$$

De acuerdo con la propiedad de translación temporal (4.5), se tiene que:

$$\int_{t=0}^\infty e^{-st}g(t-\tau)dt = \mathcal{L}\left\{g(t-\tau)u(t-\tau)\right\} = e^{-s\tau}G(s) \qquad \text{para } t > \tau$$

Con esto, nos queda:

$$\mathcal{L}\left\{f(t) \otimes g(t)\right\} = \int_{\tau=0}^t f(\tau)e^{-s\tau}G(s)d\tau$$

Ahora, de acuerdo con una de las propiedades de la integral definida, se establece que:

$$\int_{\tau=0}^t f(\tau)e^{-s\tau}G(s)d\tau = G(s)\int_{\tau=0}^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau - G(s)\int_{\tau=t}^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$$

Ya que $\tau < t$, es claro que la segunda integral de la derecha es cero y en consecuencia, se tiene:

$$\mathcal{L}\left\{f(t) \otimes g(t)\right\} = G(s)\int_{\tau=0}^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$$

Finalmente, usando la definición de la transformada, resulta:

$$\mathcal{L}\left\{f(t) \otimes g(t)\right\} = G(s)F(s)$$

Puesto que la convolución es conmutativa, se puede escribir:

$$\mathcal{L}\left\{f(t) \otimes g(t)\right\} = G(s)F(s) = F(s)G(s)$$

***Ejemplo:* 4.15.** Determine la transformada de Laplace de la función $y(t)$ para el siguiente problema de valor inicial:

$$y'(t) + 2y(t) + \int_0^t y(u)(t-u)^2 du = u(t) \quad \text{con } y(0) = 0$$

Solución: Con base en la definición de convolución temporal, el problema de valor inicial se puede escribir en la forma:

$$y'(t) + 2y(t) + y(t) \otimes t^2 = u(t) \quad \text{con } y(0) = 0$$

Aplicando la transformada de Laplace, resulta:

$$sY(s) + 2Y(s) + Y(s)\frac{2}{s^3} = \frac{1}{s}$$

Simplificando, resulta:

$$Y(s) = \frac{s^2}{s^4 + 2s^3 + 2}$$

***Ejemplo:* 4.16.** Halle la transformada de Laplace de la función:

$$g(t) = t\int_0^t x^2 e^{-(t-x)} dx$$

Solución: Puede verse que la función dada se puede escribir como: $g(t) = t(t^2 \otimes e^{-t})$
En consecuencia, aplicando las propiedades de convolución y multiplicación por t, se tiene:

$$G(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^3} \cdot \frac{1}{s+1}\right)$$

Finalmente, resolviendo la derivada resulta:

$$G(s) = \frac{2(4s+3)}{s^4(s+1)^2}$$

4.3.10. Transformada de Laplace de una función periódica

Consideremos una señal $g(t)$ definida por tramos en el intervalo $[0, T)$, tal como lo muestra la línea sólida de la figura 4.2. Si la función se desplaza hacia la derecha las cantidades $T, 2T, 3T, \ldots, nT$, resulta la función periódica $f(t)$ que aparece en línea punteada. La expresión matemática para la función periódica, para $t > 0$ es la siguiente:

$$f(t) = g(t) + g(t-T) + g(t-2T) + g(t-3T) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} g(t-nT)$$

La transformada de Laplace de la función periódica se determina aplicando las propiedades

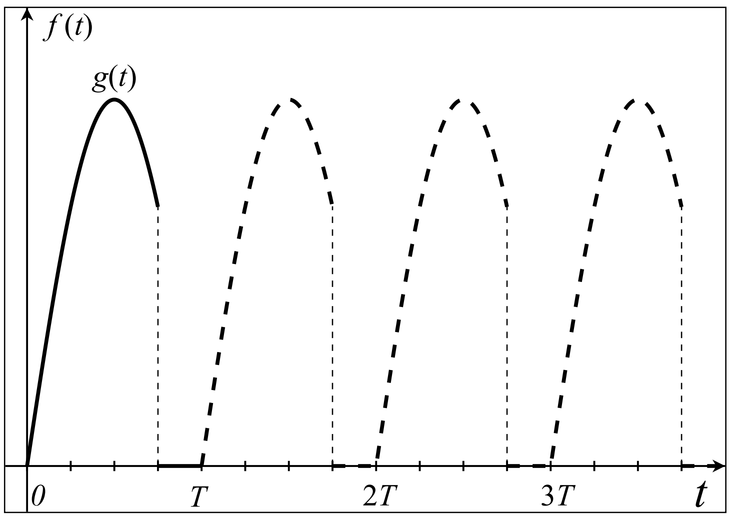


Figura 4.2: Función periódica

de linealidad (4.2) y desplazamiento temporal (4.3), así:

$$\begin{aligned} F(s) =& G(s) + e^{-Ts}G(s) + e^{-2Ts}G(s) + e^{-3Ts}G(s) + \cdots + e^{-nTs}G(s) + \cdots \\ =& \left(1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + e^{-3Ts} + \cdots\right) G(s) \\ =& \left(\frac{1}{1-e^{-Ts}}\right) G(s) \end{aligned}$$

Ya que $g(t)$ solo existe en $0 < t < T$ entonces $G(s) = \int_0^T e^{-st} g(t)dt$.
Finalmente, la transformada de la señal periódica $f(t)$, de periodo T, se escribe como:

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{\int_0^T e^{-st} g(t)dt}{1-e^{-Ts}}} \tag{4.14}$$

Por otro lado, podemos encontrar una equivalencia de la integral $\int_0^T e^{-st} g(t)dt$, usando el cororario de la propiedad 4.5, así:

Sea la función $y(t) = g(t)[u(t) - u(t-T)]$, definida en el intervalo $0 < t < T$ y $g(t)$ existente $\forall\, t$, cuya transformada es:

$$Y(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt = \int_0^T e^{-st} g(t)dt$$

Aplicando la transformada en ambos lados de la expresión para $y(t)$, nos queda:

$$Y(s) = \mathcal{L}\left\{g(t)u(t)\right\} - \mathcal{L}\left\{g(t)u(t-T)\right\}$$

De donde:

$$\int_0^T e^{-st} g(t)dt = G(s) - e^{-sT}\mathcal{L}\left\{g(t+T)\right\} \tag{4.15}$$

Ejemplo: 4.17. Determine la transformada de Laplace de la función periódica definida como:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & , \text{ si } 1 < t < 2 \end{cases} \quad \text{con } T = 2$$

Solución: Aplicando la ecuación (4.14), resulta:

$$F(s) = \frac{\int_0^1 e^{-st}dt + \int_1^2 e^{-st}0dt}{1 - e^{-2s}}$$

Evaluando las integrales, se tiene:

$$F(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - e^{-2s})}$$

Ya que el denominador de la expresión anterior es una diferencia de cuadrados perfectos, nos queda:

$$F(s) = \frac{1}{s(1 + e^{-s})}$$

Ejemplo: 4.18. Determine la transformada de Laplace de la función: $f(t) = |\sin(t)|$

Solución: La función dada es periódica con periodo $T = \pi$ y se conoce como la onda seno rectificada de onda completa. Su representación gráfica se ilustra en la figura 4.3. Aplicando la transformada, resulta:

$$\mathcal{L}\left\{|\sin(t)|\right\} = \frac{\int_0^\pi e^{-st}\sin(t)dt}{1 - e^{-\pi s}}$$

Con base en la ecuación (4.15), se tiene:

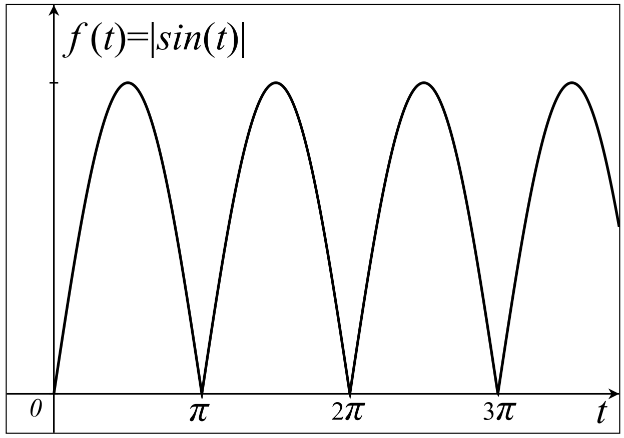


Figura 4.3: Función seno rectificada de onda completa

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{st}\sin(t)dt &= \mathcal{L}\left\{\sin(t)\right\} - e^{-\pi s}\mathcal{L}\left\{\sin(t+\pi)\right\} \\ &= \frac{s}{s^2+1} - e^{-\pi s}\mathcal{L}\left\{-\sin(t)\right\} \\ &= \frac{s}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1} = \frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}\end{aligned}$$

Entonces, la transformada de la función periódica seno rectificada de onda completa es:

$$\mathcal{L}\left\{|\sin(t)|\right\} = \frac{1+e^{-\pi s}}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}$$

La cual se puede escribir como:

$$\mathcal{L}\left\{|\sin(t)|\right\} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}s}+e^{-\frac{\pi}{2}s}}{e^{\pi/2s}-e^{-\frac{\pi}{2}s}}\frac{1}{s^2+1} = \frac{\coth(\frac{\pi}{2}s)}{s^2+1}$$

De la misma manera como se procedió anteriormente, se puede demostrar que la transformada de Laplace de la función $|\sin(\omega_0 t)|$ es:

$$\mathcal{L}\left\{|\sin(\omega_0 t)|\right\} = \frac{\omega_0\coth(\frac{\pi}{2\omega_0}s)}{s^2+\omega_0^2}$$

***Ejemplo:* 4.19.** Determine la transformada de Laplace de la función periódica, definida como:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{, si } 0 < t < 1 \\ 2-t & \text{, si } 1 < t < 2 \end{cases} \quad \text{Con } T = 2$$

Solución: La función $f(t)$ corresponde a la señal triangular con periodo $T = 2$, ilustrada en la figura 4.4.

Aplicando la transformada de Laplace para una señal periódica, resulta:

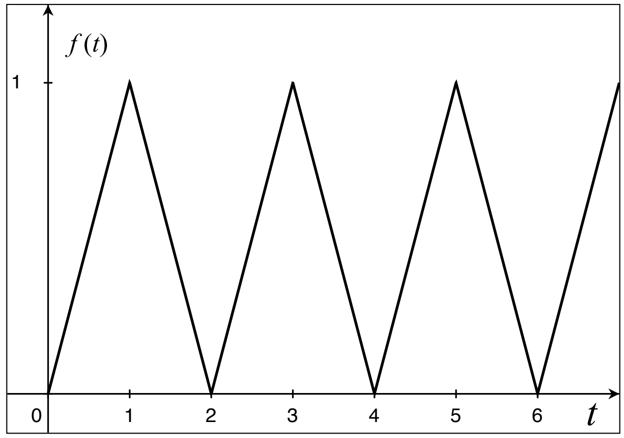


Figura 4.4: Función triangular

$$F(s) = \frac{\int_0^1 te^{-t}dt + \int_1^2 e^{-st}(2-t)dt}{1-e^{-2s}}$$

Efectuando las integrales, tenemos:

$$F(s) = \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})} = \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2(1-e^{-2s})}$$

En el denominador tenemos una diferencia de cuadrados, entonces, simplificando nos queda:

$$F(s) = \frac{1-e^{-s}}{s^2(1+e^{-s})} = \frac{\tanh(s/2)}{s^2}$$

Procediendo de la misma manera, se puede demostrar que la transformada de la señal triangular de periodo T, viene dada por:

$$F(s) = \frac{\tanh\left(\frac{T}{2}s/2\right)}{\frac{T}{2}s^2}$$

Como puede verse, mediante las propiedades de la transformada de Laplace se simplifica enormemente el cálculo directo de ésta. Finalmente en la tabla 4.2 se muestra un resumen de las propiedades.

Propiedad	**Dominio de t**	**Dominio de s**
Linealidad	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
Translación lineal	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
Translación temporal	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
Cororario	$f(t)u(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$
Cambio de escala	$f(at)$	$\frac{1}{a}F(s/a)$
Derivada temporal	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
Cororario	$D^n f(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - D^{n-1}f(0)$
Integración temporal	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\dfrac{F(s)}{s}$
Multiplicación por t	$tf(t)$	$-F'(s)$
Cororario	$t^n f(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^nF(s)}{ds^n}$
División por t	$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(z)dz$
Convolución temporal	$f(t) \otimes g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$
Función periódica	$f(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g(t-nT)$	$\dfrac{\int_0^T e^{-st}g(t)dt}{1-e^{-Ts}}$

Tabla 4.2: Resumen de propiedades de la transformada de Laplace

EJERCICIOS 4.2.

Determine la transformada de Laplace de las funciones:

1. $f(t) = [1 - \cos(t)]u(t)$
2. $f(t) = e^{-t}\sin(t)u(t-\pi)$
3. $f(t) = \dfrac{te^{-2t}}{\sqrt{t}}$
4. $f(t) = \dfrac{e^{-2t} - e^{-t}}{t}$
5. $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{t}\sin^2(t)$
6. $f(t) = te^{-2t}\int_0^t \sqrt{x}\,dx$
7. $f(t) = te^{-2t}\int_0^t \sqrt{t-\tau}\,\sin(\tau)d\tau$
8. $f(t) = (t+1)^2 u(t-2)$
9. $f(t) = t(1-e^{-t})u(t-1)$
10. $f(t) = \delta(t) + u(t) - u(t-1) + \delta(t-1)$

Determine la transformada de Laplace de las siguientes funciones periódicas:

11. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{, si } 0 \le t < 1 \\ -1 & \text{, si } 1 \le t < 2 \end{cases}$ con $T = 2$
12. $f(t) = \begin{cases} t & \text{, si } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{, si } 1 \le t < 2 \end{cases}$ con $T = 2$
13. $f(t) = \begin{cases} \sin(\pi t) & \text{, si } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{, si } 1 \le t < 2 \end{cases}$ con $T = 2$
14. $f(t) = \begin{cases} 1 - |1-t| & \text{, si } 0 \le t < 2 \\ 0 & \text{, si } 2 \le t < 4 \end{cases}$ con $T = 4$
15. $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{, si } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{, si } 1 \le t < 2 \end{cases}$ con $T = 2$

4.4. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Dada una función en el dominio de la frecuencia $F(s)$, su inversa es una función de tiempo y viene dada por:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{ts}F(s)ds$$

La integral se conoce como integral de inversión compleja y la solución es de una naturaleza completamente diferente a las de las integrales tradicionales de variable real. En un curso de matemáticas avanzadas se estudia la manera de resolver la integral de inversión compleja. Usaremos métodos indirectos para determinar la inversa de una función $F(s)$.
Básicamente son dos métodos, así:

1 **Mediante tablas:**
Mediante procedimientos algebraicos se expresa la función $F(s)$ en expresiones canónicas simples cuyas inversas se pueden obtener de las tablas. Cuando $F(s)$ es una función racional se procede a descomponer en fracciones parciales. De ser necesario, se aplican las propiedades de la transformada.

2 **Mediante la integral de convolución:**
Cuando la función dada $F(s)$ se pueda expresar mediante un producto de la forma $F(s) = X(s)Y(s)$, la inversa viene dada por:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = x(t)\otimes y(t) = \int_0^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_0^t y(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

A partir de la tabla 4.1 de transformadas directas se obtiene la tabla 4.3 de transformadas inversas.

***Ejemplo:* 4.20.** Determine la transformada inversa de Laplace de la función:

$$F(s) = \frac{5s+7}{s^2+3s+2}$$

Solución: La función se puede escribir en la forma: $F(s) = \dfrac{5s+7}{(s+1)(s+2)}$
Descomponiendo en fracciones parciales, resulta:

$$F(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$

Con base en la tabla de transformadas resulta y teniendo en cuenta la primera propiedad de la inversa, se tiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = (2e^{-t} + 3e^{-2t})u(t)$$

$F(s)$	$f(t)$
1	$\delta(t)$
$\dfrac{K}{s}$ para $s > 0$	$Ku(t)$
$\dfrac{1}{s-a}$ para $s > a$	$e^{at}u(t)$
$\dfrac{1}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega}\sin(\omega t)u(t)$
$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)u(t)$
$\dfrac{1}{s^\alpha}$ para $\alpha \neq -1, -2, -3, \ldots$	$\dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u(t)$
$\dfrac{1}{s^n}$ para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$
$\dfrac{1}{s^2-b^2}$ para $\lvert s\rvert > b$	$\dfrac{1}{b}\sinh(bt)u(t)$
$\dfrac{s}{s^2-b^2}$ para $\lvert s\rvert > b$	$\cosh(bt)u(t)$
$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ para $\lvert s\rvert > 0$	$J_0(t)u(t)$

Tabla 4.3: Resumen de transformadas inversas de Laplace

La transformada inversa de Laplace presenta las propiedades que se indican en la tabla 4.4. Se omitirán las demostraciones ya que son similares a las de la transformación directa.

***Ejemplo:* 4.21.** Encuentre la transformada inversa de Laplace de la función:

$$F(s) = \frac{1}{s^3+s}$$

Solución: Se expresa la función en fracciones parciales, así:

$$F(s) = \frac{a}{s} + \frac{bs+c}{s^2+1}$$

Propiedad	**Dominio de s**	**Dominio de t**
Linealidad	$aF(s)+bG(s)$	$af(t)+bg(t)$
Translación lineal	$F(s-a)$	$e^{at}f(t)$
Translación temporal	$e^{-as}F(s)$	$f(t-a)u(t-a)$
Cambio de escala	$F(as)$	$\frac{1}{a}f(t/a)$
Multiplicación por s	$sF(s)$	$f'(t)+f(0)\delta(t)$
División por s	$\dfrac{F(s)}{s}$	$\int_0^t f(\tau)d\tau$
Derivación en s	$F'(s)$	$-tf(t)$
Integración en s	$\int_s^\infty F(z)dz$	$\dfrac{f(t)}{t}$
Convolución temporal	$F(s)G(s)$	$f(t)\otimes g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
Funciones periódicas	$\dfrac{F(s)}{1-e^{-Ts}}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}e^{-kTs}F(s)$ $\dfrac{F(s)}{1+e^{-Ts}}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-kTs}F(s)$	$f(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}f(t-kT)u(t-kT)$ $f(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k f(t-kT)u(t-kT)$

Tabla 4.4: Resumen de propiedades de la transformada Inversa de Laplace

Las constantes se pueden determinar mediante el procedimiento usual, sin embargo, se presenta una alternativa diferente, así:

$$F(s)=\frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{1+s^2-s^2}{s(s^2+1)}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}$$

Usando la tabla 4.3, la transformada inversa es:

$$f(t)=[1-\cos(t)]u(t)$$

***Ejemplo:* 4.22.** Encuentre la transformada inversa de Laplace de la función:

$$G(s)=e^{-\pi s}\frac{1}{s^3+s}$$

Solución: Puede verse que: $G(s) = e^{-\pi s}F(s)$. Del ejemplo anterior 4.21.
Por tanto, se puede aplicar la propiedad de translación temporal, esto es:

$$f(t) = g(t-\pi) = [1-\cos(t-\pi)]u(t-\pi)$$

Ejemplo: 4.23. Determine la transformada inversa de Laplace de la función:

$$H(s) = \frac{2(s^2+3s+3)}{s^3+4s^2+6s+4}$$

Solución: El denominador de la función se puede factorizar por división sintética, resultando:

$$H(s) = \frac{2(s^2+3s+3)}{(s+2)(s^2+2s+2)}$$

Las fracciones parciales asociadas a la fracció, son:

$$H(s) = \frac{2(s^2+3s+3)}{(s+2)(s^2+2s+2)} = \frac{a}{s+2} + \frac{bs+c}{s^2+2s+2}$$

Las constantes se evalúan a partir de la siguiente identidad:

$$a(s^2+2s+2) + (bs+c)s \equiv 2s^2+6s+6$$

Resolviendo, resulta:

$$H(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{s+2}{s^2+2s+2} = \frac{1}{s+2} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

Aplicando la propiedad de translación lineal y teniendo en cuenta la tabla de transformadas inversas 4.3, se tiene:

$$h(t) = [e^{-2t} + e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\sin(t)]u(t)$$

Ejemplo: 4.24. Encuentre la transformada inversa de Laplace de la función:

$$F(s) = \frac{2s}{(s^2+4)^2}$$

Solución: Primero se resuelve mediante la transformada de la convolución de dos funciones, así:

$$F(s) = \left(\frac{2}{s^2+4}\right)\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = \sin(2t) \otimes \cos(2t) = \int_0^t \sin(2\tau)\cos(2(t-\tau))d\tau$$

La solución de la integral es bastante laboriosa ya que es necesario hacer uso de las identidades trigonométricas, así:

$$f(t) = \int_0^t \sin(2\tau)[\cos(2t)\cos(2\tau) + \sin(2t)\sin(2\tau)]d\tau$$

Resultan dos integrales, así:

$$f(t) = \cos(2t)\int_0^t \sin(2\tau)\cos(2\tau)d\tau + \sin(2t)\int_0^t \sin^2(2\tau)d\tau$$

Después de evaluar las integrales y simplficar, resulta: $f(t) = \frac{1}{2}t\sin(2t)$

Una alternativa de solución es la que se presenta a continuación y que consiste en partir de la transformada de la función seno, así:

$$X(s) = \frac{2}{s^2+4} \Rightarrow X'(s) = \frac{-4s}{(s^2+4)^2}$$

Comparando, se tiene:

$$F(s) = -\frac{1}{2}X'(s)$$

Si se aplica la propiedad de multiplicación por s, resulta que:

$$f(t) = \frac{1}{2}t\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2}t\sin(2t)$$

Ejemplo: 4.25. Encuentre la transformada inversa de Laplace de la función:

$$Y(s) = \frac{2}{(s^2+4)^2}$$

Solución: Puede verse que la función resulta de dividir por s a la función del ejemplo anterior 4.24, es decir:

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s}$$

En consecuencia, aplicando la propiedad de división por s, se tiene:

$$y(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \tau\sin(2\tau)d\tau$$

Evaluando la integral, se tiene:

$$y(t) = \frac{1}{8}\sin(2t) - \frac{1}{4}t\cos(2t)$$

***Ejemplo:* 4.26.** Encuentre la transformada inversa de Laplace de la función:

$$F(s) = \tan^{-1}(1/s)$$

Solución: Para poder hallar la transformada inversa es necesario tomar la primera derivada de la función, así:

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\tan^{-1}(1/s) = \frac{1}{1+s^{-2}}\left(-s^{-2}\right) = -\frac{1}{s^2+1}$$

Transformando inversamente a ambos lados y usando la propiedad de derivación en s, se tiene:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}}\left\{F'(s)\right\} &= -\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \\ -tf(t) &= -\sin(t)u(t) \\ \Rightarrow f(t) &= \frac{\sin(t)}{t}u(t) \end{aligned}$$

***Ejemplo:* 4.27.** Encuentre la transformada inversa de Laplace de la función:

$$F(s) = \tan^{-1}(\sqrt{s})$$

Solución: Procediendo como en el ejercicio 4.26 anterior, se tiene:

$$F'(s) = \frac{1}{2\sqrt{s}(s+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^{1/2}}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

Por otro lado, tenemos:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}}\left\{\frac{1}{s^{1/2}}\right\} &= \frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} = \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}u(t) \\ \boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} &= e^{-t}u(t) \end{aligned}$$

Con esto, la transformada inversa de $F(S)$ es la convolución de las funciones anteriores, así:

$$f(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(t^{-1/2}\otimes e^{-t}\right)$$

El resultado puede expresarse de dos maneras, así:

$$f(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{e^{t-\tau}}{\sqrt{\tau}}d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau$$

Ejemplo: 4.28. Encuentre la transformada inversa de Laplace de la función:

$$F(s) = \ln\left(\frac{s+1}{s+2}\right)$$

Solución: La función se puede expresar en la forma:$F(s) = \ln(s+1) - \ln(s+2)$.
Tomando la primera derivada, se tiene:

$$F'(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Transformando inversamente a ambos lados de la ecuación y usando la propiedad de derivación en s, resulta:

$$-tf(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

En consecuencia, el resultado es:

$$f(t) = \left(\frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t}\right)u(t)$$

Ejemplo: 4.29. Encuentre la transformada inversa de la siguiente función y represente gráficamente:

$$F(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s^2(1 + e^{-s})}$$

Solución: Hacemos uso de la serie geométrica, así:

$$\frac{1}{1+e^{-s}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-ks} = 1 - e^{-s} + e^{-2s} + e^{3s} + \cdots$$

Por tanto, la función original queda en la forma:

$$F(s) = \frac{1-e^{-s}}{s^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-ks} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-ks}\frac{1}{s^2} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-k(s+1)}\frac{1}{s^2}$$

Puesto que $\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = tu(t)$, resulta:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(t-k)u(t-k) - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[t-(k+1)]u(t-(k+1))$$

Expandiendo resulta la función triangular de periodo $T = 2$:

$$f(t) = tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + 2(t-2)u(t-2) - 2(t-3)u(t-3) + 2(t-4)u(t-4) + \cdots$$

La figura 4.4 del ejercicio 4.19 ilustra la gráfica de la señal $f(t)$

EJERCICIOS 4.3.

Determine la transformada inversa de Laplace para las funciones descritas a continuación:

1. $X(s) = \dfrac{s+3}{s^2+2s+5}$
2. $Y(s) = \dfrac{3s^3+4s^2+s+8}{s(s+1)(s^2+4)}$
3. $Z(s) = e^{-2s}\dfrac{8}{s^3(s+2)}$
4. $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$
6. $G(s) = \tan^{-1}(s+1)$
7. $R(s) = \dfrac{s^3+s^2+9s+4}{s^4+13s^2+36}$
8. $W(s) = \dfrac{3}{s(s^3+1)}$
9. $P(s) = \dfrac{8(s+1)}{s^4+4}$
10. $U(s) = \dfrac{1-e^{-s}-se^{-s}}{s^2(1-e^{-s})}$

4.5. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL MEDIANTE LAPLACE

Un problema de valor inicial de segundo orden se formula de la siguiente manera:

$$a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(t) \quad y(0) = y_0, y'(0) = p_0$$

Cuando los coeficientes de la ecuación diferencial son constantes, la ecuación se pasa al dominio de la frecuencia, así:

$$a_2\left[s^2Y(s) - sy_0 - p_0\right] + a_1\left[sY(s) - y_0\right] + a_0Y(s) = F(s)$$

Despejando, resulta:

$$Y(s) = \frac{a_2y_0s + a_2p_0 + a_1y_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0} + \frac{F(s)}{a_2s^2 + a_1s + a_0} \tag{4.16}$$

La primera parte de la ecuación (4.16) proporciona la solución transitoria mientras que la otra corresponde a la solución de estado estacionario. Si las condiciones iniciales son iguales a cero, es decir, cuando el sistema está inicialmente en reposo, la solución del problema de valor inicial es:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{a_2s^2 + a_1s + a_0}\right\}$$

***Ejemplo:* 4.30.** Resuelva el problema de valor inicial:

$$y'(t) + 2y(t) = e^{-2t} \quad , \; y(0) = 0$$

Solución: Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial, nos queda:

$$sY(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s+2} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

Usando la tabla de transformadas inversas 4.3 y la propiedad de translación lineal, resulta:

$$y(t) = te^{-2t}u(t)$$

***Ejemplo:* 4.31.** Resuelva el problema de valor inicial:

$$y'(t) + 2y(t) = t[u(t) - u(t-1)] \quad , \; y(0) = 0$$

Solución: La ecuación diferencial debe escribirse en la forma:

$$y'(t) + 2y(t) = tu(t) - (t-1)u(t-1) - u(t-1)$$

Aplicando las propiedades, se tiene:

$$(s+2)Y(s) = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s}$$

Despejando, resulta:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+2)} - e^{-s}\frac{1}{s^2(s+2)} - e^{-s}\frac{1}{s(s+2)}$$

El primer término de la derecha se puede escribir en la forma:

$$\frac{1}{s^2(s+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^2(s+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2+s-s}{s^2(s+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s(s+2)}\right)$$

De manera similar, se tiene que:

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2+s-s}{s(s+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)$$

En consecuencia, resulta:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{4s} + \frac{1}{4(s+2)} - e^{-s}\left(\frac{1}{2s^2} - \frac{1}{4s} + \frac{1}{4(s+2)}\right) - e^{-s}\left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+2)}\right) \\ &= \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{4s} + \frac{1}{4(s+2)} - e^{-s}\left(\frac{1}{2s^2} + \frac{1}{4s} - \frac{1}{4(s+2)}\right) \end{aligned}$$

Finalmente, usando las propiedades, la transformada inversa es:

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t}\right)u(t) - \left(\frac{1}{2}(t-1) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2(t-1)}\right)u(t-1)$$

***Ejemplo:* 4.32.** Resuelva el problema de valor inicial:

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0 \qquad y(0) = 1,\, y'(0) = 0$$

Solución: Se aplican las propiedades, así:

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - s + 2sY(s) - 2 + 5Y(s) =& 0 \\ \Rightarrow Y(s) =& \frac{s+2}{s^2+2s+5} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{(s+1)^2+4} \end{aligned}$$

La inversa correspondiente viene a ser:

$$y(t) = \left[e^{-t}\cos(2t) + \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)\right]u(t) = \left[\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]e^{-t}u(t)$$

***Ejemplo:* 4.33.** Resuelva el problema de valor inicial:

$$y'(t) + \int_0^t e^{-2u}y(t-u)du = 0 \quad y(0) = 1$$

Solución: La ecuación integro-diferencial se puede escribir en la forma:

$$y'(t) + e^{-2t} \otimes y(t) = 0$$

Aplicando las propiedades, resulta:

$$sY(s) - 1 + \frac{Y(s)}{s+2} = 0$$

Despejando, resulta:

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Por tanto, la solución del problema es: $y(t) = te^{-t}u(t)$

EJERCICIOS 4.4.

Resuelva los siguientes problemas de valor inicial:

1. $y'(t) + y(t) = te^{-t} \quad y(0) = 0$

2. $y''(t) + y(t) = 1 \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

3. $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0 \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

4. $y''(t) + y(t) = u(t) - u(t-1) \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

5. $y''(t) + y(t) = sen(\pi t)[u(t) - u(t-1)] \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

6. $y'(t) + 4\int_0^t y(u)du = 1 \quad y(0) = 0$

7. $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-t} \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

8. $y'(t) + 2\int_0^t (t-u)y(u)du = 0 \quad y(0) = 1$

9. $y'(t) + 2y(t) = |\sin(t)| \quad y(0) = 0$

10. $y''(t) + y'(t) - 2\int_0^t y(u)du = 1 \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

11. $y''(t) + 5y(t) + 5\int_0^t \sinh(t-u)y(u)du = 16 \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

12. $y''(t) + y'(t) = \begin{cases} 0 & \text{, si } t < 0 \\ \sin(t) & \text{, si } 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{, si } t > \pi \end{cases} \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

13. $y'(t) + y'(t) = \begin{cases} 0 & \text{, si } t < 0 \\ |1-t| & \text{, si } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{, si } t > 2 \end{cases} \quad y(0) = 0$

14. $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + y(t) \end{cases} \quad x(0) = 8, y(0) = 3$

15. $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t) - \sin(2t) \\ y'(t) = -2x(t) - 2y(t) \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 0$

4.6. SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES

Un sistema lineal invariante de orden n está regido por una ecuación diferencial lineal de orden n de coeficientes constantes, así:

$$\left(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0\right) y(t) = \left(b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \cdots + b_1 D + b_0\right) x(t) \quad \text{con } n \geq$$

En donde $x(t)$ es la excitación de entrada en el sistema y $y(t)$ es la respuesta de salida.

Si el sistema está inicialmente en reposo, es decir, las condiciones iniciales son nulas, se obtiene:

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} X(s)$$

Se define la *función de transferencia* $H(s)$ del sistema, así:

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{4.17}$$

Así las cosas, la salida en el dominio de la frecuencia $Y(s)$, viene dada por:

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

Como puede verse, una función de transferencia es el cociente indicado de dos polinomios racionales enteros, es decir, tanto el numerador como el denominador se pueden expresar mediante factores lineales y cuadráticos.

Sacando la transformada inversa, obtenemos la función en el tiempo:

$$y(t) = \boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}} \left\{H(s)X(s)\right\} = h(t) \otimes x(t)$$

Como puede verse, la respuesta temporal es la convolución de la entrada con la inversa de Laplace de la función de transferencia.

Diagramas de polos y ceros

Los ceros de la función de transferencia son las raíces del numerador y los polos son las raíces del denominador. El diagrama de polos y ceros es una representación, en el plano complejo, de dichas raíces. Con base en lo planteado, la función de transferencia se puede expresar en la forma:

$$H(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2)(s - z_3) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \cdots (s - p_n)} \quad p_k = \sigma_k + j\omega_k$$

Estabilidad

La estabilidad del sistema está asociada con la ubicación de los polos de $H(s)$ así:

1. **Sistema estable:**
   El sistema es estable si todos los polos están a la izquierda del eje imaginario, es decir, para todo valor de k se verifica que $\sigma_k < 0$. En este caso, suponiendo que los polos son diferentes entre sí, la respuesta natural del sistema es de la forma:

   $$h(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k e^{\sigma_k t} e^{j\omega t}$$

   Es claro que: $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = 0$

2. **Sistema inestable:**
   El sistema es inestable si al menos uno de los polos está a la derecha del eje imaginario o si se tienen polos múltiples sobre el eje imaginario.

3. **Sistema marginalmente estable:**
   El sistema es marginalmente estable si presenta polos simples sobre el eje imaginario.

La figura 4.5 ilustra el diagrama de polos y ceros y la respuesta natural de tres ejemplos de los casos enunciados.

***Ejemplo:* 4.34.** Determine si los siguientes sistemas son estables, inestables o marginalmente estables:

1. $H(s) = \dfrac{3s}{s^2 + 3s + 2}$

2. $H(s) = \dfrac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + s^2 + 4s + 4}$

3. $H(s) = \dfrac{s - 1}{s^2(s + 3)}$

4. $H(s) = \dfrac{2s + 3}{s^3 + s^2 + 4}$

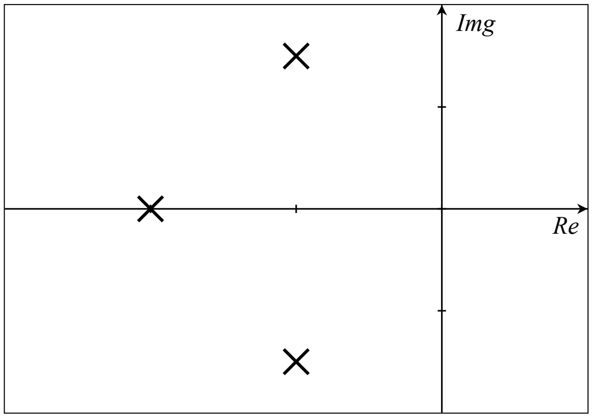
Solución: El estudiante puede verificar lo siguiente:

1. Estable.

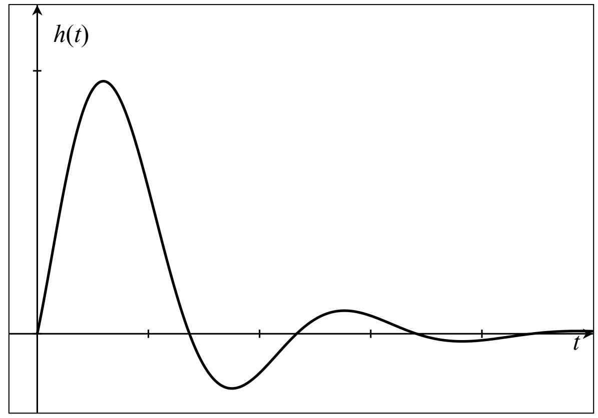
2. Marginalmente estable.

3. Inestable.

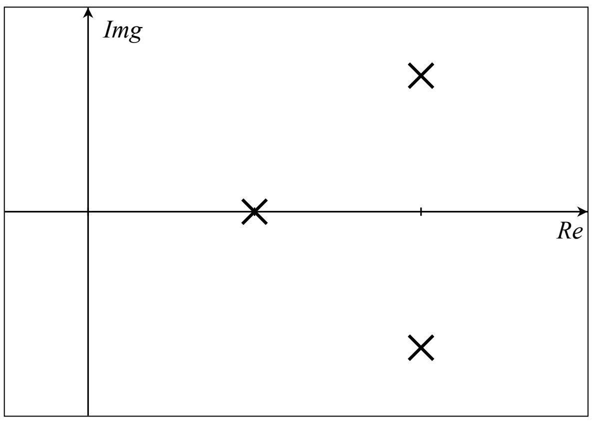
4. Inestable.



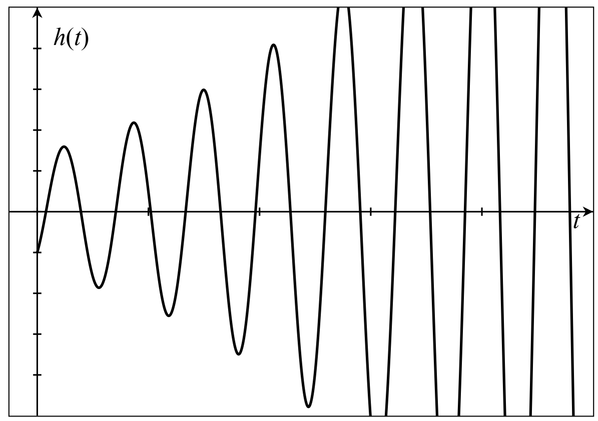
(a) Diagrama de polos y ceros de sistema estable



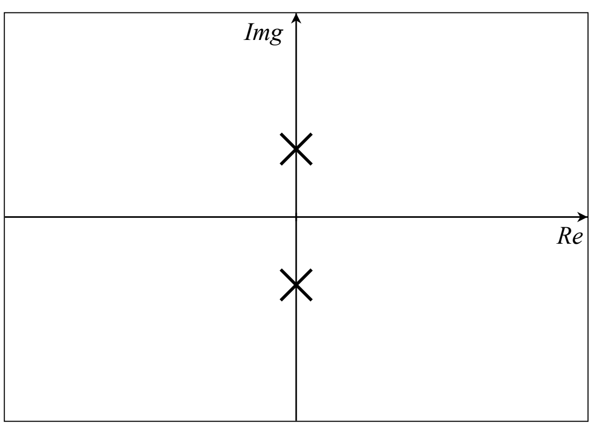
(b) Respuesta natural de sistema estable



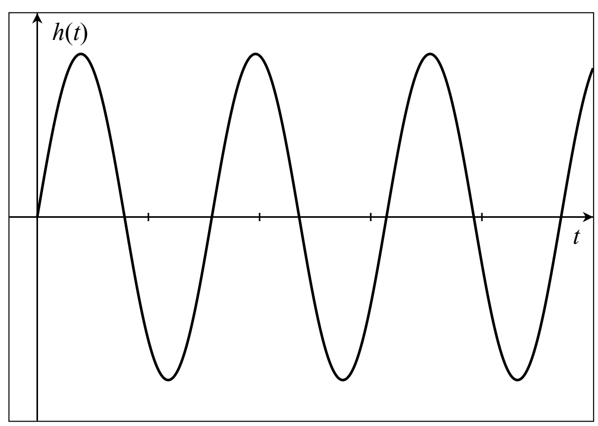
(c) Diagrama de polos y ceros de sistema inestable



(d) Respuesta natural de sistema inestable



(e) Diagrama de polos y ceros de sistema marginalmente estable



(f) Respuesta natural de sistema marginalmente estable

Figura 4.5: Ejemplos de diagrama de polos y ceros y respuesta natural de sistema estable, inestable y marginalmente estable

Polinomios de Hurwitz

Consideremos un polinomio racional entero, es decir, de coeficientes reales, así:

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0$$

El polinomio se puede expresar mediante una parte par y otra impar, así:

$$P(s) = [a_n s^n + a_{n-2}s^{n-2} + a_{n-4}s^{n-4} + \cdots + a_0] + [a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-3}s^{n-3} + \cdots + a_1 s]$$

Se dice que el polinomio es de Hurwitz si sus raíces están a la izquierda del eje imaginario o son simples sobre el eje imaginario. Una condición necesaria para que un polinomio sea de Hurwitz, es que todos los coeficientes del polinomio son positivos, a menos que sea estrictamente par o estrictamente impar.
Lo anterior significa que si alguno de los coeficientes es negativo, el polinomio tendrá raíces a la derecha del eje imaginario. De otro modo, si el polinomio no es par ni impar y uno de los coeficientes es cero, el polinomio no puede ser de Hurwitz.

Una condición de suficiencia para que un polinomio sea de Hurwitz es que la fracción continuada entre sus partes par e impar tenga todos sus cocientes positivos. Si escribimos el polinomio mediante sus partes par e impar, así $P(s) = M(s) + N(s)$, la fracción continuada es la siguiente:

$$\frac{M(s)}{N(s)} = q_1 s + \cfrac{1}{q_2 s + \cfrac{1}{q_3 s + \cdots}}$$

Ejemplo: 4.35. Determine si el siguiente polinomio es de Hurwitz: $2s^4 + 3s^3 + s^2 + 5s + 4$

Solución: La fracción continuada es la siguiente:

$$\frac{2s^4 + s^2 + 4}{3s^3 + 5s} = \frac{2}{3}s + \cfrac{1}{-\frac{9}{7}s + \cfrac{1}{-\frac{49}{213}s + \cfrac{1}{\frac{71}{28}s}}}$$

Con base en lo planteado previamente, el polinomio no es de Hurwitz. Se puede generalizar el hecho de que por cada cociente negativo hay una raíz a la derecha del eje imaginario.
Para nuestro ejemplo, el polinomio tiene dos raíces a la izquierda del eje imaginario y dos a la derecha. En efecto, si se usa un paquete de software, se puede verificar lo anterior. Usando Máxima, se puede ver que las raíces el polinomio son:

```
(%i1) allroots(s^4+3*s^3+s^2+5*s+4);
(%o1) [s=1.275926405230052*%i+0.39841823883901,
s=0.39841823883901-1.275926405230052*%i,
s=-0.72997513411928,s=-3.066861343558744]
```

Cuando el polinomio es estrictamente par o impar, la fracción continuada se hace entre el polinomio y su primera derivada, así:

$$\frac{P(s)}{P'(s)}$$

Ejemplo: 4.36. Determine si el siguiente polinomio es de Hurwitz: $P(s) = s^5 + 5s^3 + 3s$

Solución: La fracción continuada es la siguiente:

$$\frac{s^5 + 5s^3 + 3s}{5s^4 + 15s^2 + 3} = \frac{1}{5}s + \cfrac{1}{\frac{5}{2}s + \cfrac{1}{\frac{2}{9}s + \cfrac{1}{\frac{135}{26}s + \cfrac{1}{\frac{26}{45}s}}}}$$

Como puede verse, el polinomio es de Hurwitz.

Ejemplo: 4.37. La respuesta natural de un sistema lineal invariante viene dada por:

$$h(t) = [e^{-t} + te^{-2t}]u(t)$$

a) Encuentre la función de transferencia del sistema.

b) Encuentre la respuesta al escalón unitario y represente gráficamente.

Solución:

a) La función de transferencia es la transformada de Laplace de la respuesta natural, así:

$$H(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+2)^2} = \frac{(s+2)^2 + s + 1}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{s^2 + 5s + 5}{(s+1)(s+2)^2}$$

Es claro que la función de transferencia tiene un polo simple en $s = -1$ y un polo doble en: $s = -2$.

Por otro lado, los ceros del sistema son reales y están ubicados en: $s = -\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$

b La respuesta al escalón unitario se determina de la siguiente manera:

$$x(t) = u(t) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s^2 + 5s + 5}{s(s+1)(s+2)^2}$$

Descomponiendo en fracciones parciales, se tiene:

$$Y(s) = \frac{5}{4s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s+2)^2}$$

Aplicando la transformada inversa, resulta:

$$y(t) = \left(\frac{5}{4} - e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t}\right) u(t)$$

La figura 4.6 ilustra gráfica $y(t)$ de respuesta al escalón unitario. Se puede ver que la respuesta es estable.

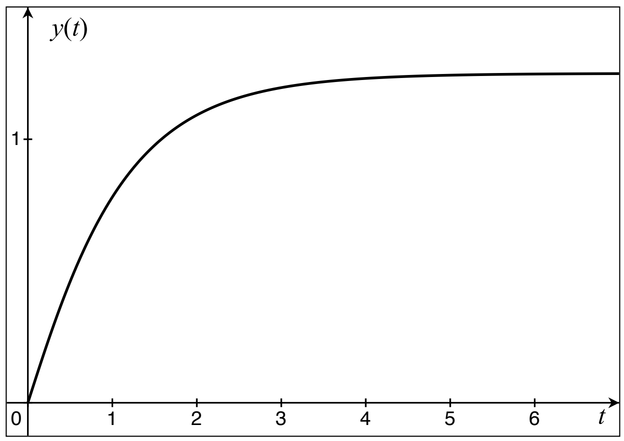


Figura 4.6: Respuesta al escalón unitario del ejemplo 4.37

***Ejemplo:* 4.38.** Un sistema lineal invariante, inicialmente en reposo, está regido por la ecuación diferencial:

$$\left(D^3 + 3D^2 + 7D + 5\right) y(t) = (D + 5)x(t)$$

a) Encuentre la función de transferencia del sistema y ubique sus polos y ceros.

b) Encuentre la respuesta al escalón unitario y represente gráficamente la solución.

Solución:

a) A partir de la ecuación diferencial, la función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{s + 5}{s^3 + 3^2 + 7s + 5} = \frac{s + 5}{(s + 1)(s^2 + 2s + 5)}$$

La función de transferencia tiene un cero simple en $s = -5$, un polo simple en $s = -1$ y dos polos complejos conjugados en $s = -1 \pm j2$

b) La transformada de Laplace de la respuesta al escalón unitario es:

$$Y(s) = \frac{s + 5}{s(s + 1)(s^2 + 2s + 5)}$$

Descomponiendo en fracciones parciales, se tiene:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s^2+2s+5} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2+4}$$

La transformada inversa de Laplace es:

$$y(t) = \left(1 - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)\right)u(t)$$

La figura 4.7 ilustra gráfica $y(t)$ de respuesta al escalón unitario. Se puede ver que la respuesta es estable.

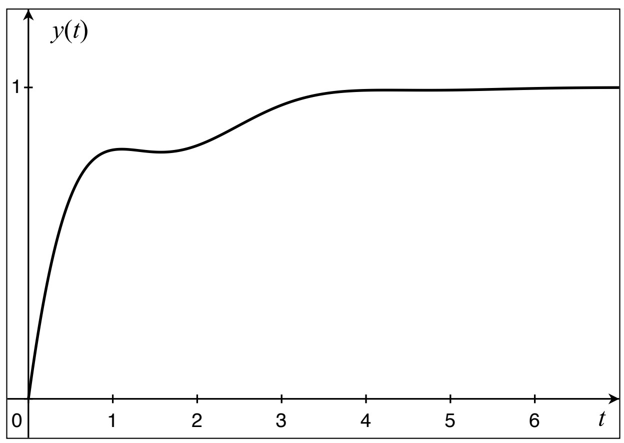


Figura 4.7: Respuesta al escalón unitario del ejemplo 4.38

***Ejemplo:* 4.39.** Un sistema lineal invariante, inicialmente en reposo, está regido por la ecuación diferencial:

$$\left(D^2 + 2D + 10\right)y(t) = r(t)$$

Encuentre ka respuesta forzada del sistema antes las siguientes excitaciones:

a) $r(t) = \sin(3t)$

b) $r(t) = \sin(\sqrt{10}\,t)$

Solución:

a) En el primer caso, al pasar al dominio de la frecuencia, resulta:

$$(s^2+2s+10)Y(s) = \frac{3}{s^2+9} \Rightarrow Y(s) = \frac{3}{(s^2+9)(s^2+2s+10)}$$

Descomponiendo en fracciones parciales, resulta:

$$Y(s) = \frac{3}{37}\left[\frac{2s+3}{s^2+2s+10} - \frac{(2s-1)}{s^2+9}\right]$$

Tomando la inversa, se tiene:

$$y(t) = \frac{1}{37}e^{-t}\left[\sin(3t) + 6\cos(3t)\right] + \frac{1}{37}\left[\sin(3t) - 6\cos(3t)\right]$$

Simplificando, la respuesta de estado estacionario puede expresarse en la forma:

$$y(t) = \frac{\sqrt{37}}{37}\sin(3t - \tan^{-1}(6))$$

La amplitud de la salida, en estado estacionario, es alrededor del 16 % de la amplitud de la excitación.

b) En el segundo caso, al pasar al dominio de la frecuencia, resulta:

$$(s^2+2s+10)Y(s) = \frac{\sqrt{10}}{s^2+10} \Rightarrow Y(s) = \frac{\sqrt{10}}{(s^2+10)(s^2+2s+10)}$$

Descomponiendo en fracciones parciales, resulta:

$$Y(s) = \frac{\sqrt{10}}{20}\left[\frac{s+2}{s^2+2s+10} - \frac{s}{s^2+10}\right]$$

Tomando la inversa, se tiene:

$$y(t) = \frac{\sqrt{10}}{20}e^{-t}\left[\frac{1}{3}\sin(3t) + \cos(3t)\right] - \frac{\sqrt{10}}{20}\cos(\sqrt{10}\,t)$$

La respuesta de estado estacionario corresponde al fenómeno de resonancia previamente analizado el capítulo 3.2.3.

Ejemplo: 4.40. La función de transferencia de un sistema lineal invariante está dada por:

$$H(s) = \frac{s^2+2s+3}{s^2+3s+2}$$

Determine la respuesta natural, la respuesta al escalón unitario y la respuesta a la excitación $x(t) = e^{-t}u(t)$.

Solución: La función de transferencia se puede expresar en la forma:

$$H(s) = 1 + \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+2}$$

En consecuencia, la respuesta natural está dada por:

$$h(t) = \delta(t) + 2e^{-t}u(t) - 3e^{-2t}u(t)$$

En cuanto a la respuesta al escalón unitario, se puede proceder de dos maneras distintas, a saber:

- Mediante la integral de la respuesta natural:

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau$$

- Mediante la inversa de:

$$Y(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{s^2 + 2s + 3}{s(s+1)(s+2)}$$

  Descomponiendo en fracciones parciales, tenemos:

$$H(s) = \frac{3}{2s} + \frac{3}{2(s+2)} - \frac{2}{s+1}$$

  En consecuencia, la respuesta al escalón unitario es:

$$y(t) = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t} - 2e^{-t}\right) u(t)$$

Para hallar la respuesta a la función $x(t) = e^{t-}u(t)$ partimos de la correspondiente transformada de Laplace, así:

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)(s^2 + 3s + 2)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^2(s+2)}$$

Descomponiendo en fracciones parciales, se tiene:

$$Y(s) = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace, se encuentra que:

$$y(t) = \left(2te^{-t} - 2e^{-t} + 3e^{-2t}\right) u(t)$$

EJERCICIOS 4.5.

1. Un sistema lineal invariante, inicialmente en reposo, está regido por la siguiente ecuación diferencial:

$$\left(D^3 + 3D^2 + 2D + 6\right) y(t) = (D^2 + D)x(t)$$

   a) Encuentre la función de transferencia del sistema y dibuje el diagrama de polos y ceros.

   b) Encuentre la repuesta natural del circuito y represente gráficamente.

   c) Encuentre la respuesta al escalón unitario y represente gráficamente.

2. La respuesta al escalón unitario de un sistema lineal invariante está dada por:

$$y(t) = [\sin(t) - t\cos(t)]\, u(t)$$

   a) Encuentre la respuesta natural del sistema.

   b) Encuentre la función de transferencia y dibuje el diagrama de polos y ceros.

   c) Encuentre la respuesta del sistema ante las siguientes excitaciones:

$$x_1(t) = tu(t) \quad , \quad x_2(t) = te^{-t}u(t) \quad , \quad x_3(t) = \cos(t)u(t)$$

3. La función de transferencia de un sistema lineal invariante está dada por:

$$H(s) = \frac{s^3 + 6s}{s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 2s + 5}$$

   a) Dibuje el diagrama de polos y ceros.

   b) Encuentre la respuesta natural.

   c) Encuentre la respuesta del sistema ante cada una de las siguientes excitaciones:

$$x_1(t) = u(t)\ ,\ x_2(t) = \sin(\sqrt{6}\,t)u(t)\ ,\ x_3(t) = \cos(t)u(t)\ ,\ x_4(t) = e^{-t}\cos(2t)u(t)$$

   (Solamente la forma, es decir, no determine las constante del desarrollo en fracciones parciales)

4. La función de transferencia de un sistema está dada por:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

   Donde ω_n es la frecuencia natural y ζ es el coeficiente de amortiguamiento del sistema.

   a) Tome $\omega_n = 2$ y $\zeta = 1.25$ y determine la respuesta ante las siguientes excitaciones y represente gráficamente.

$$x_1(t) = u(t)\ ,\ x_2(t) = e^{-t}\ ,\ x_3(t) = \sin(0.5t)u(t)\ ,\ x_4(t) = \sin(5t)u(t)$$

b) Repita el paso anterior con los siguientes datos: $\omega_n = 2$ y $\zeta = 1$

c) Repita el paso anterior con los siguientes datos: $\omega_n = \sqrt{5}$ y $\zeta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

5. La función de transferencia de un sistema lineal invariante está dada por:

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

   a) Dibuje el diagrama de polos y ceros.
   b) Determine la respuesta natural y represente gráficamente.
   c) Determine la respuesta al escalón unitario y represente gráficamente.
   d) Determine la respuesta del sistema ante las siguientes excitaciones y represente gráficamente.

$$x_1(t) = e^{-t}\cos(t)u(t)\ ,\ x_2(t) = \cos(3t)u(t)\ ,\ x_3(t) = \sin(t)u(t)$$

6. La función de transferencia de un sistema lineal invariante está dada por:

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + Ks + 1}$$

   a) Dibuje el diagrama de polos y ceros para diferentes valores de K.
   b) Para $K = 1$, determine la respuesta ante las siguientes excitaciones y represente gráficamente.

$$x_1(t) = u(t)\ ,\ x_2(t) = e^{-t}u(t)\ ,\ x_3(t) = \sin(t)u(t)\ ,\ x_4(t) = \sin(2t)u(t)$$

7. Determine los valores de k , de tal manera que los siguientes polinomios sean de Hurwitz.

   a) $P(s) = s^4 + 3s^3 + ks^2 + 5s + 4$
   b) $P(s) = s^4 + ks^2 + 3$
   c) $P(s) = s^3 + ks^2 + 3s + 2k$
   d) $P(s) = s^5 + 3s^3 + ks$

8. Responda si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y justifique:

   a) Si un polinomio tiene sus coeficientes positivos entonces es de Hurwitz.
   b) Si el denominador de la función de transferencia es un polinomio de Hurwitz entonces el sistema es estable o marginalmente estable.
   c) El producto de dos polinomios de Hurwitz es de Hurwitz.
   d) Una combinación lineal de dos polinomios de Hurwitz es de Hurwitz.

e) Si un sistema tiene la función de transferencia $H(s) = \dfrac{s+1}{s^5+2s^2+1}$, es estable.

9. Determine los valores de K para que la siguiente función circuital tenga sus polos y ceros reales y alternados:
$$F(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^3+Ks^2+8s}$$

10. Una masa de 20 gramos hace que un resorte se estire 20 centímetros. Si el resorte está conectado a un mecanismo amortiguador de aceite que tiene una constante de amortiguamiento de 400 $dinas \cdot segundos/$centímetros, determine la posición en todo instante sabiendo que inicialmente se estira centímetros y se suelta.

11. Un sistema masa-resorte sin amortiguamiento, con un peso de 30 Newton y un módulo de elasticidad de 300 N/m se pone repentinamente en movimiento por medio de una fuerza externa, en Newton, de $4\cos(7t)$.

    a) Determine la posición en todo instante y represente gráficamente.

    b) Repita el literal anterior si la fuerza aplicada es de $4\cos(10t)$ Newton.

12. Un sistema masa-resorte-amortiguador presenta los siguientes datos:
$$M = 1KgB = 5Ns/mk = 4N/m$$

    a) Encuentre y grafique la posición y la velocidad en todo instante si estando en su posición de equilibrio se le imprime hacia abajo una velocidad de 50 centímetros/segundo.

    b) Determine el desplazamiento máximo y verifique los resultados del último ejercicio de la sección anterior.

13. Un cuerpo de 32 libras de peso se cuelga de un resorte que tiene una constante de elasticidad de 8/3 libras / pié. La resistencia del medio es numéricamente igual a 7 veces la velocidad instantánea. En el instante $t = 0$ el cuerpo se desplaza 2 pies hacia abajo de la posición de equilibrio y se impulsa hacia arriba con una velocidad V_0.

    a) Determine el valor de la velocidad de tal forma que el cuerpo alcanza la posición de equilibrio en un segundo.

    b) Halle el mínimo valor de la velocidad inicial que impide que el cuerpo alcance la posición de equilibrio en un tiempo finito.