Ejercicios resueltos de Ecuaciones Diferenciales

ÍNDICE GENERAL

Capítulo 1

Métodos elementales de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias

1. La población $P(t)$ de un suburbio de una gran ciudad en un instante cualquiera se rige por
$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = P(10^{-1} - 10^{-7}P) \\ P(0) = 5000 \end{cases},$$
en donde t se mide en meses. ¿Cuál es el valor límite de la población? ¿En qué momento será la población igual a la mitad de su valor límite?

Solución : Calculamos en primer lugar el tamaño de la población, $P(t)$, resolviendo el problema de valores iniciales. La ecuación diferencial tiene sus variables separadas:
$$\frac{P'}{P(10^{-1} - 10^{-7}P)} = 1\,,$$
donde hemos denotado $P' = \frac{dP}{dt}$. Integrando los dos miembros de esta identidad entre 0 y t obtenemos
$$10^7 \int_{5000}^{P(t)} \frac{dQ}{Q(10^6 - Q)} = t\,,$$
donde hemos efectuado el cambio de variable $Q = P(t)$. Teniendo en cuenta ahora que
$$\frac{1}{Q(10^6 - Q)} = 10^{-6}\left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{10^6 - Q}\right),$$

concluimos tras una serie de cálculos simples que la única solución de nuestro problema es

$$P(t) = \frac{10^6\, e^{\frac{t}{10}}}{199 + e^{\frac{t}{10}}}\,.$$

El valor límite de la población es por tanto

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = 10^6\,,$$

como se desprende de una simple aplicación de la regla de L'Hôpital.

Para responder a la segunda cuestión tenemos que encontrar el valor t_0 para el que $P(t_0) = \frac{10^6}{2}$. Basta entonces con resolver la ecuación

$$10^6\, \frac{e^{\frac{t_0}{10}}}{199 + e^{\frac{t_0}{10}}} = \frac{10^6}{2} \Leftrightarrow e^{\frac{t_0}{10}} = 199\,.$$

Tomando logaritmos neperianos en ambos miembros concluimos que

$$t_0 = 10\log(199) \text{ meses} \approx 4{,}41 \text{ años}\,.$$

■

2. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $x' = e^t - \frac{2t}{t^2-1}$

   (b) $(x^2+9)y' + xy = 0$

   (c) $\frac{dy}{dx} = 2xe^{-y}$

   (d) $x' = \frac{1+t}{t^2x^2}$

   (e) $x' = e^{t+x}$

Solución : (a) La ecuación tiene sus variables separadas. Integrando obtenemos

$$x(t) = e^t - \log(|t^2-1|) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

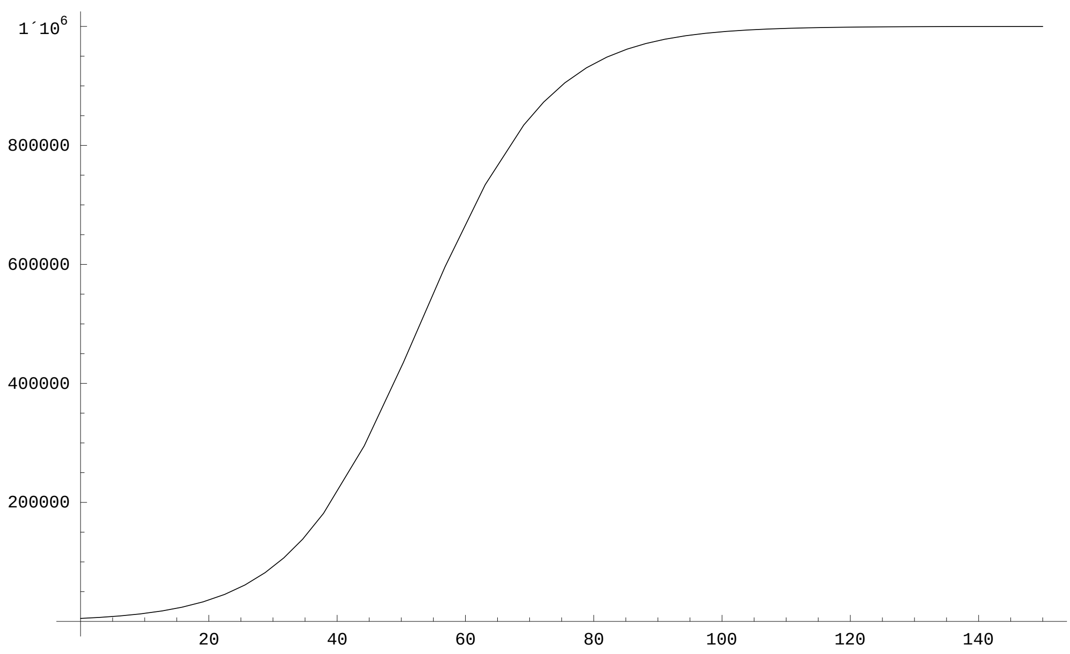


Figura 1.1: Representación gráfica de la solución del Ejercicio 1 en el intervalo $[0, 150]$.

(b) Separando las variables obtenemos

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x}{x^2+9}$$

e integrando con respecto a x llegamos a

$$y(x) = \frac{C}{\sqrt{x^2+9}}\,.$$

(c) Separando las variables resulta $e^y \frac{dy}{dx} = 2x$, de donde se obtiene la solución general

$$y(x) = \log(x^2 + C)\,, \quad C \in \mathbb{R} : x^2 + C > 0\,,$$

sin más que integrar ambos miembros con respecto a la variable x. Obsérvese que, dado cualquier dato inicial $y(x_0) = y_0$, la solución sólo existe si

$$x^2 > -C = x_0^2 - e^{y_0}\,.$$

(d) Separando las variables obtenemos

$$x^2 x' = \frac{1+t}{t^2}\,.$$

Integrando entonces con respecto a t en ambos miembros de la ecuación encontramos que la solución general de la misma viene dada por

$$x(t) = \left[3\left(\log(|t|) - \frac{1}{t}\right) + C\right]^{\frac{1}{3}}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(e) Separando las variables resulta $e^{-x}\,x' = e^t$, de donde obtenemos la solución general

$$x(t) = -\log(C - e^t)\,, \quad C > e^t\,,$$

integrando la ecuación con respecto a la variable t. Obsérvese que, dado cualquier dato inicial $x(t_0) = x_0$, la solución sólo existe si

$$t < \log(C) \text{ con } C = e^{t_0} + e^{-x_0}\,.$$

■

3. Un reactor transforma plutonio 239 en uranio 238 que es relativamente estable para uso industrial. Después de 15 años se determina que el 0.0043 por ciento de la cantidad inicial A_0 de plutonio se ha desintegrado. Determina la semivida[1] de este isótopo si la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad restante.

   Solución : Llamemos $x(t)$ a la cantidad de plutonio 239 que queda en el instante t, con lo que $x'(t)$ indicará la velocidad o rapidez de desintegración del mismo. Como la velocidad de desintegración es proporcional a la cantidad de isótopo restante, la ley diferencial que rige el proceso de desintegración es

$$x' = \lambda x \quad \text{sujeta a la condición inicial } x(0) = A_0\,,$$

   cuya única solución viene dada por $x(t) = A_0\, e^{\lambda t}$. Para tener completamente determinada la solución necesitamos conocer el valor de la constante de desintegración λ, el cual puede encontrarse a través de la relación (establecida en el enunciado del problema)

$$x(15) = \left(1 - \frac{0{,}0043}{100}\right) A_0 = \frac{99{,}9957}{100}\, A_0\,,$$

   por lo que ha de ser

$$A_0\, e^{15\lambda} = \frac{99{,}9957}{100}\, A_0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{15} \log\left(\frac{99{,}9957}{100}\right).$$

   Finalmente, la semivida de este isótopo es el valor t_0 para el que se cumple la condición $x(t_0) = \frac{A_0}{2}$, por lo que

$$\begin{aligned} A_0\, e^{\left[\frac{1}{15}\log\left(\frac{99{,}9957}{100}\right)\right] t_0} &= \frac{A_0}{2} \\ \Leftrightarrow t_0 &= \frac{15\,\log(2)}{\log(100) - \log(99{,}9957)} = 241790 \text{ años}\,. \end{aligned}$$

   ■

4. Dadas dos funciones f, g derivables, sabemos que la identidad

$$(fg)' = f'g'$$

[1] Tiempo necesario para que la cantidad inicial de átomos se reduzca a la mitad

es falsa en general. Si fijamos $f(x) = e^{x^3+2x}$, determina las funciones g que verifican dicha identidad.

Solución : Por un lado

$$(fg)'(x) = (3x^2+2)\, e^{x^3+2x} g(x) + e^{x^3+2x} g'(x)$$

mientras que, por otro lado,

$$f'(x)g'(x) = (3x^2+2)\, e^{x^3+2x} g'(x)\,.$$

Entonces ha de cumplirse

$$(3x^2+1)\, e^{x^3+2x} g'(x) = (3x^2+2)\, e^{x^3+2x} g(x)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{3x^2+2}{3x^2+1}\,.$$

Resolviendo esta ecuación diferencial en variables separadas obtenemos

$$g(x) = C\, e^{x+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}x)}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

■

5. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $3x + y - 2 + y'(x-1) = 0$

   (b) $(t^2x^2 - 1)x' + 2tx^3 = 0$, haciendo $x = z^\alpha$

   (c) $x + (x-t)x' = 0$

   (d) $2t + 3x + (x+2)x' = 0$

Solución : (a) La ecuación puede ser reescrita en forma canónica (con la derivada despejada) de la siguiente forma:

$$y' = \frac{3x+y-2}{1-x}\,.$$

Veamos cómo podemos reducir esta ecuación diferencial a una homogénea. Consideramos las rectas de ecuaciones

$$3x + y - 2 = 0\,, \quad 1 - x = 0\,,$$

de las que resulta el punto de corte $(x = 1, y = -1)$. A continuación se procede vía el siguiente cambio de variable:

$$X = x - 1\,, \quad Y = y + 1\,.$$

Entonces se tiene que

$$Y' = y' = -\frac{Y + 3X}{X} = \frac{Y}{X} + 3\,, \tag{1.1}$$

que es una ecuación diferencial homogénea. Haciendo ahora el cambio de función incógnita $u = \frac{Y}{X}$ y usando (1.1) obtenemos

$$Y' = u + Xu' = u + 3\,,$$

de donde se deduce que

$$u' = \frac{3}{X}\,.$$

Por tanto

$$u(X) = 3\log(|X|) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Deshaciendo los cambios de variable efectuados para recuperar las variables originales llegamos a

$$y(x) = 3(x-1)\log(|x-1|) + C(x-1) - 1\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Obviamente $x \equiv 0$ es solución. Busquemos todas las demás soluciones. Efectuando el cambio de función incógnita $x = z^\alpha$ en la ecuación obtenemos

$$\alpha(t^2 z^{2\alpha} - 1)z^{\alpha-1}z' + 2tz^{3\alpha} = 0\,,$$

de donde resulta

$$\alpha(t^2 z^{2\alpha} - 1)z' + 2tz^{2\alpha+1} = 0$$

o, equivalentemente,

$$z' = -\frac{2}{\alpha}\left(\frac{tz^{2\alpha+1}}{t^2 z^{2\alpha} - 1}\right) = -\frac{2}{\alpha}\left(\frac{(z/t)^{2\alpha+1}}{(z/t)^{2\alpha} - (1/t^{2\alpha+2})}\right)$$

que es una ecuación homogénea. Haciendo el cambio de variable $u = \frac{z}{t}$ obtenemos la siguiente ecuación equivalente:

$$\left(\frac{t^{2\alpha+2} u^{2\alpha} - 1}{u} \right) u' = \frac{1}{t} \,.$$

Integrando los dos miembros de esta ecuación con respecto a la variable t llegamos a la siguiente expresión implícita para u:

$$\frac{1}{2\alpha}\, t^{2\alpha+2}\, u^{2\alpha} - \log(|u|) = C + \log(|t|)\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Deshaciendo finalmente los dos cambios de variable efectuados[2] obtenemos

$$x^2 t^2 - 2\log(|x|) = C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(c) La ecuación admite la solución trivial. Busquemos las restantes soluciones. Resolviendo la ecuación con respecto a la derivada obtenemos

$$x' = \frac{x}{t-x} = \frac{\frac{x}{t}}{1 - \frac{x}{t}}\,,$$

que es homogénea. El consabido cambio de variable $u = \frac{x}{t}$ nos conduce a

$$u' = \frac{1}{t} \left(\frac{u^2}{1-u} \right)\,,$$

cuyas soluciones satisfacen la relación implícita

$$-\frac{1}{u} - \log(|u|) = \log(|t|) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Deshaciendo el cambio de variable obtenemos finalmente

$$x\log(|x|) + t + Cx = 0\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(d) Resolviendo la ecuación con respecto a la derivada obtenemos

$$x' = -\frac{3x+2t}{x+2}\,,$$

que adopta la forma de una ecuación diferencial reducible a homogénea. Consideramos las rectas de ecuaciones

$$3x + 2t = 0\,, \quad x + 2 = 0\,,$$

[2] $u = \frac{z}{t}$ y $x = z^{\alpha}$

de las que resulta el punto de corte $(t = 3, x = -2)$. Efectuamos el siguiente cambio de variable:

$$T = t - 3\,, \quad X = x + 2\,.$$

Entonces se tiene que

$$X' = x' = -\frac{3X + 2T}{X} = -\frac{3\frac{X}{T} + 2}{\frac{X}{T}}\,, \tag{1.2}$$

que es homogénea. Haciendo ahora $u = \frac{X}{T}$ y usando (1.2) obtenemos

$$X' = u + Tu' = -\frac{3u + 2}{u}\,,$$

de donde se deduce que

$$u' = -\frac{1}{T}\left(\frac{u^2 + 3u + 2}{u}\right)\,.$$

Por tanto, la siguiente relación implícita

$$\frac{\Big(u(T) + 2\Big)^2}{u(T) + 1} = C|T|\,, \quad C > 0\,,$$

es satisfecha. Deshaciendo los cambios de variable efectuados para recuperar las variables originales llegamos primero a

$$\frac{(X + 2T)^2}{X + T} = CT^2$$

y después a

$$\frac{(x + 2t - 4)^2}{x + t - 1} = C(t - 3)^2\,.$$

■

6. Encuentra la curva plana que pasa por $(1, 1)$ y verifica que dado un punto cualquiera (x, y), al considerar el corte de la recta tangente a la curva en ese punto con el eje de ordenadas y el corte de la recta normal con el eje de abscisas, su distancia al origen es la misma.

Solución : Las ecuaciones de la recta tangente y normal en el punto (t, x) son, respectivamente,

$$(T-t)x' = X - x\,, \quad (T-t)\Big(-\frac{1}{x'}\Big) = X - x\,,$$

donde las variables están representadas con letras mayúsculas (T para las ordenadas y X para las abscisas).

La condición inicial que nos proporciona el problema es $x(1) = 1$. Sustituyendo en las ecuaciones anteriores los datos del problema obtenemos:

$$-tx' = b - x\,, \quad (a-t)\Big(-\frac{1}{x'}\Big) = -x\,.$$

Además, ha de verificarse

$$|x - tx'| = |xx' + t|\,.$$

Esta última ecuación nos conduce a la resolución de los siguientes problemas de valores iniciales:

$$\begin{cases} x' = \frac{x-t}{x+t} \\ x(1) = 1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x' = \frac{x+t}{t-x} \\ x(1) = 1 \end{cases},$$

correspondientes ambos a ecuaciones homogéneas. El primero de ellos puede reescribirse de la siguiente forma

$$\begin{cases} x' = \frac{\frac{x}{t}-1}{\frac{x}{t}+1} \\ x(1) = 1 \end{cases}.$$

Haciendo el cambio de variable $u = \frac{x}{t}$ se llega a la siguiente ecuación diferencial con variables separadas

$$u' = -\frac{1}{t}\left(\frac{u^2+1}{u+1}\right),$$

con dato inicial asociado $u(1) = x(1) = 1$, cuya única solución[3] satisface la siguiente relación implícita:

$$2\arctan\left(\frac{x}{t}\right) + \log(x^2 + t^2) = \frac{\pi}{2} + \log(2)\,.$$

[3]Es inmediato verificar las condiciones del teorema de existencia y unicidad de soluciones

El tratamiento del segundo problema es análogo. La ecuación diferencial que se obtiene ahora tras hacer el cambio de variable anterior es

$$u' = \frac{1}{t}\left(\frac{u^2+1}{1-u}\right),$$

con dato inicial asociado $u(1) = x(1) = 1$. La única solución de este problema de valores iniciales satisface

$$2\arctan\left(\frac{x}{t}\right) - \log(x^2+t^2) = \frac{\pi}{2} - \log(2)\,.$$

■

7. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales buscando (si es el caso) factores integrantes de la forma que se indica:

   (a) $\mathrm{sen}(tx) + tx\cos(tx) + t^2\cos(tx)x' = 0$

   (b) $\frac{\mathrm{sen}(2x)}{y} + x + \Big(y - \frac{\mathrm{sen}^2(x)}{y^2}\Big)y' = 0$

   (c) $(3xy^2 - 4y) + (3x - 4x^2y)y' = 0$ con $\mu(x,y) = x^n y^m$

   (Febrero 1993)

   (d) $xy'(y-1) - y = 0$ con $\mu(x,y) = \mu(y)$

   (e) $(t+1)^2 + (1+t^2)x' = 0$ con $\mu(t,x) = \mu(t+x)$

   (Febrero 1996)

   (f) $(1+xy+y^2) + (1+xy+x^2)y' = 0$ con $\mu(x,y) = \mu(xy)$

   (g) $(x+y^2) + 2(y^2+y+x-1)y' = 0$ con $\mu(x,y) = \mu(e^{ax+by})$

   (h) $2xyy' = x^2+y^2+1$ con $\mu(x,y) = \mu(y^2-x^2)$

Solución : (a) Es exacta con

$$P(t,x) = \mathrm{sen}(tx) + tx\cos(tx)\,, \quad Q(t,x) = t^2\cos(tx)\,.$$

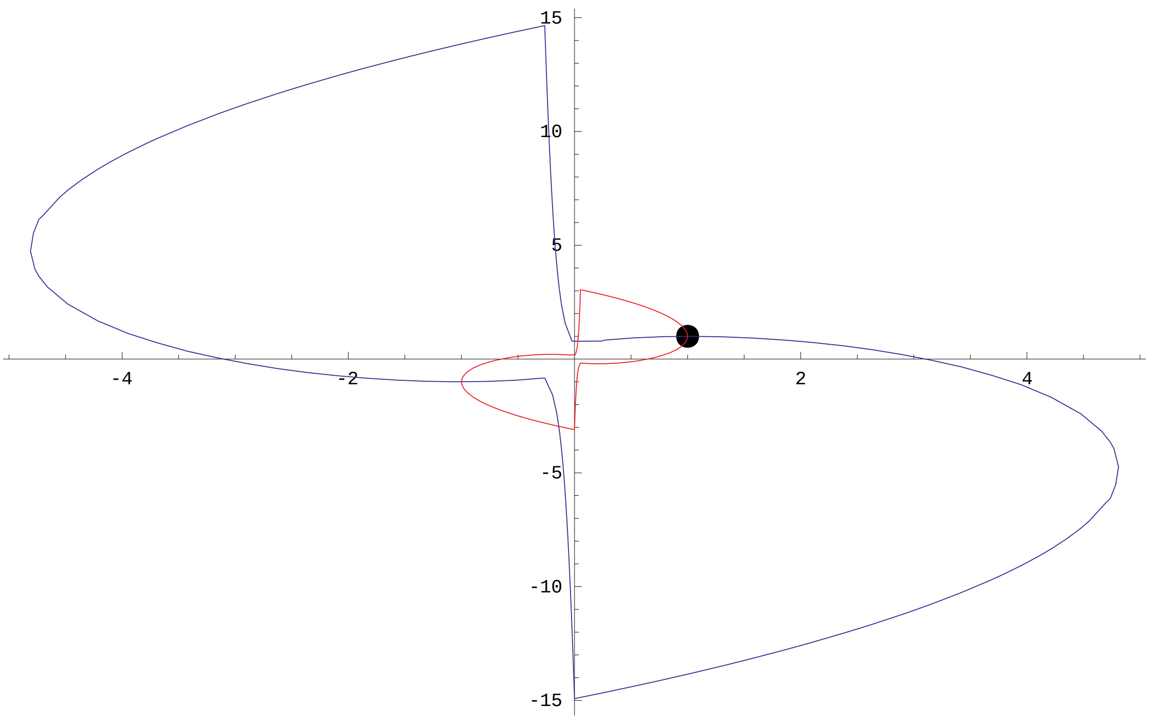


Figura 1.2: Representación gráfica de las soluciones del Ejercicio 6.

En efecto,
$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2t\cos(tx) - t^2 x \operatorname{sen}(tx) = \frac{\partial Q}{\partial t}\,.$$
Entonces
$$\frac{\partial F}{\partial t} = P \Rightarrow F(t,x) = t\operatorname{sen}(tx) + H(x)\,.$$
Por otro lado
$$\frac{\partial F}{\partial x} = Q \Rightarrow H' \equiv 0 \Rightarrow H \equiv k \in \mathbb{R}\,.$$
Por tanto, la solución general responde a la siguiente relación implícita:
$$t\operatorname{sen}(tx) = C \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Es exacta con
$$P(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{y} + x\,, \quad Q(x,y) = y - \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{y^2}\,.$$
En efecto,
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$
Entonces
$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \Rightarrow F(x,y) = -\frac{\cos(2x)}{2y} + \frac{x^2}{2} + H(y)\,.$$
Por otro lado
$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q \Rightarrow H'(y) = y - \frac{1}{2y^2} \Rightarrow H(y) = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y}\,.$$
Por tanto, la solución general responde a la siguiente relación implícita:
$$y^2 + x^2 + \frac{1}{y}\Big(1 - \cos(2x)\Big) = C \in \mathbb{R}\,.$$

(c) La ecuación no es exacta, ya que para las funciones
$$P(x,y) = y(3xy - 4)\,, \quad Q(x,y) = x(3 - 4xy)$$
no se satisface la condición de exactitud. En efecto,
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2(3xy - 2) \neq 3 - 8xy = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Buscamos $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que la función $\mu(x,y) = x^n y^m$ sea un factor integrante. Para ello imponemos exactitud sobre las funciones

$$P^\star(x,y) = y(3xy-4)x^n y^m\,, \quad Q^\star(x,y) = x(3-4xy)x^n y^m\,.$$

Entonces resulta

$$\begin{aligned} 2(3xy-2)x^n y^m &+ y(3xy-4)x^n(my^{m-1}) \\ &= (3-8xy)x^n y^m + x(3-4xy)y^m(nx^{n-1}) \end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$x^n y^m[(3m+4n)xy - (3n+4m) - (7-14xy)] = 0\,. \tag{1.3}$$

Por tanto, para que $\mu(x,y) = x^n y^m$ sea un factor integrante para nuestra ecuación se ha de cumplir

$$3m + 4n = -14\,, \quad 3n + 4m = -7\,,$$

es decir, $m = 2$ y $n = -5$. Luego $\mu = x^{-5}y^2$. Buscamos ahora $F(x,y)$ tal que, en primer lugar,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^3 x^{-5}(3xy-4) \Rightarrow F(x,y) = -x^{-3}y^4 + x^{-4}y^3 + H(y)\,.$$

Por otro lado

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^{-4}y^2(3-4xy) = -4x^{-3}y^3 + 3x^{-4}y^2 + H'(y) \Rightarrow H \equiv k \in \mathbb{R}\,.$$

Consecuentemente, la solución responde al siguiente esquema implícito:

$$x^{-4}y^3(1-xy) = C \in \mathbb{R}\,.$$

(d) Sean $P(x,y) = -y$ y $Q(x,y) = x(y-1)$. En este caso la ecuación no es exacta, ya que

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv -1\,, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y - 1\,.$$

Buscamos un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = \mu(y)$. Para ello multiplicamos la ecuación por $\mu(y)$ e imponemos la condición de exactitud a las funciones

$$P^\star(x,y) = -y\mu(y)\,, \quad Q^\star(x,y) = x(y-1)\mu(y)\,.$$

Entonces ha de cumplirse

$$-y\mu'(y) - \mu(y) = (y-1)\mu(y) \Rightarrow \mu(y) = e^{-y}\,.$$

Buscamos finalmente $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -ye^{-y}\,, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x(y-1)e^{-y}\,.$$

Se tiene que

$$F(x,y) = -xye^{-y} + H(y) \text{ y } x(y-1)e^{-y} = -xe^{-y} + xye^{-y} + H'(y)\,,$$

de lo cual resulta finalmente que $H \equiv k \in \mathbb{R}$, por lo que la solución de la ecuación de partida responde a la siguiente relación implícita:

$$xye^{-y} = C \in \mathbb{R}\,.$$

(e) La ecuación no es exacta, ya que si

$$P(t,x) = (t+1)^2\,, \quad Q(t,x) = 1+t^2\,,$$

se tiene que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \neq 2t = \frac{\partial Q}{\partial t}\,.$$

Buscamos un factor integrante de la forma $\mu(t,x) = \mu(t+x)$. La condición suficiente y necesaria que ha de cumplirse para que en nuestro caso $\mu(t+x)$ sea factor integrante es

$$(t+1)^2\mu'(t+x) = 2t\mu(t+x) + (1+t^2)\mu'(t+x)\,.$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos $\mu(t+x) = e^{t+x}$. Buscamos entonces $F(t,x)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = (t+1)^2 e^{t+x} \Rightarrow F(t,x) = (1+t^2)e^{t+x} + H(x)\,.$$

Finalmente, la función $H(x)$ queda determinada sin más que imponer la condición

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (1+t^2)e^{t+x} + H'(x) = Q(t,x)\mu(t+x) = (1+t^2)e^{t+x}\,,$$

que nos conduce a $H \equiv k \in \mathbb{R}$. Por tanto, la solución $x(t)$ viene dada por la ley implícita

$$(1+t^2)\,e^{t+x} = C \in \mathbb{R}\,.$$

(f) La ecuación no es exacta. En efecto, si llamamos

$$P(x,y) = 1 + xy + y^2, \quad Q(x,y) = 1 + xy + x^2,$$

se tiene que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x + 2y \neq y + 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Buscamos un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = \mu(xy)$. La condición suficiente y necesaria que ha de cumplirse para que en nuestro caso $\mu(xy)$ sea factor integrante es

$$\begin{aligned}(x+2y)\mu(xy) &+ x(1+xy+y^2)\mu'(xy)\\ &= (y+2x)\mu(xy) + y(1+xy+x^2)\mu'(xy).\end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos $\mu(xy) = e^{xy}$. Buscamos entonces $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (1+xy+y^2)e^{xy} \Rightarrow F(x,y) = (x+y)e^{xy} + H(y).$$

Finalmente, la función $H(y)$ queda determinada al imponer la condición

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^2+xy+1)e^{xy} + H'(y) = Q(x,y)\mu(xy) = (1+xy+x^2)e^{xy},$$

que nos conduce a $H \equiv k \in \mathbb{R}$. Por tanto, la solución $y(x)$ viene dada por la ley implícita

$$(x+y)\, e^{xy} = C \in \mathbb{R}.$$

(g) La ecuación no es exacta, ya que si llamamos

$$P(x,y) = x + y^2, \quad Q(x,y) = 2(y^2 + y + x - 1),$$

se tiene que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq 2 = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Buscamos un factor integrante de la forma $\mu = \mu(e^{ax+by})$, el cual habrá de verificar la siguiente condición suficiente y necesaria:

$$\begin{aligned}2y\mu(e^{ax+by}) &+ b(x+y^2)e^{ax+by}\mu'(e^{ax+by})\\ &= 2\mu(e^{ax+by}) + 2a(y^2+y+x-1)e^{ax+by}\mu'(e^{ax+by}),\end{aligned}$$

que nos conduce como única opción a elegir un factor integrante de la forma específica $\mu(x,y) = e^{x+2y}$. Buscamos ahora $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x+y^2)e^{x+2y} \Rightarrow F(x,y) = (x-1+y^2)e^{x+2y} + H(y)\,.$$

Finalmente, la función $H(y)$ queda determinada al imponer la condición

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y} &= 2(y+x-1+y^2)e^{x+2y} + H'(y)\\ &= Q(x,y)\mu(x,y) = 2(y^2+y+x-1)e^{x+2y}\,,\end{aligned}$$

que nos conduce nuevamente a $H \equiv k \in \mathbb{R}$. Por tanto, la solución $y(x)$ viene dada por la ley implícita

$$(x-1+y^2)\,e^{x+2y} = C \in \mathbb{R}\,.$$

(h) La ecuación no es exacta, ya que si llamamos

$$P(x,y) = x^2+y^2+1\,, \quad Q(x,y) = -2xy\,,$$

se tiene que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq -2y = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Buscamos un factor integrante de la forma $\mu = \mu(y^2-x^2)$, el cual habrá de verificar la siguiente condición suficiente y necesaria:

$$\begin{aligned}2y\mu(y^2-x^2) &+ 2y(x^2+y^2+1)\mu'(y^2-x^2)\\ &= -2y\mu(y^2-x^2) + 4x^2y\mu'(y^2-x^2)\,.\end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación en variables separadas obtenemos

$$\mu(y^2-x^2) = \frac{1}{(y^2-x^2+1)^2}\,.$$

Buscamos ahora $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x^2+y^2+1}{(y^2-x^2+1)^2} \Rightarrow {}^4F(x,y) = \frac{x}{y^2-x^2+1} + H(y)\,.$$

[4]Para calcular una primitiva de $\frac{x^2+y^2+1}{(y^2-x^2+1)^2}$ con respecto a x basta con observar que la siguiente descomposición es satisfecha:

$$\frac{x^2+y^2+1}{(y^2-x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x-\sqrt{1+y^2})^2} + \frac{1}{(x+\sqrt{1+y^2})^2}\right)\,.$$

Finalmente, la función $H(y)$ queda determinada al imponer la condición

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y} &= -\frac{2xy}{(y^2-x^2+1)^2} + H'(y)\\ &= Q(x,y)\mu(y^2-x^2) = -\frac{2xy}{(y^2-x^2+1)^2},\end{aligned}$$

que nos conduce a $H \equiv k \in \mathbb{R}$. Por tanto, la solución general $y(x)$ tiene las dos siguientes ramas:

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2+Cx-1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

■

8. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

   (a) ¿Puede ser la función $\phi(t) = t^2$ (definida para $t \in \mathbb{R}$) solución de una ecuación lineal de primer orden homogénea? ¿Y de una ecuación lineal de primer orden no homogénea?

   (b) ¿Pueden ser las funciones $\phi(t) = e^t$ y $\psi(t) = e^{-t}$ (definidas para $t \in \mathbb{R}$) soluciones de una misma ecuación lineal de primer orden homogénea? ¿y de una ecuación lineal de primer orden no homogénea?

   En caso afirmativo proporciona ejemplos explícitos.

Solución : (a) La función $\phi(t) = t^2$ (definida en $\mathbb{R}$) NO puede ser solución de una ecuación lineal de primer orden homogénea $x'(t) = a(t)x(t)$, ya que de serlo habría de ocurrir

$$2t = a(t)t^2 \Rightarrow a(t) = \frac{2}{t} \ \forall\, t \neq 0$$

y, en cualquier caso, el coeficiente $a(t)$ sólo estaría definido en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (no en $\mathbb{R}$).

Sin embargo, la respuesta es SI para el caso no homogéneo $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$. En efecto, bastaría con encontrar funciones continuas

$a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $2t = a(t)t^2 + b(t)$. Por ejemplo, $a \equiv 0$ y $b(t) = 2t$.

(b) Las funciones $\phi(t) = e^t$ y $\psi(t) = e^{-t}$ (definidas en $\mathbb{R}$) NO pueden ser soluciones de una misma ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea, ya que de serlo tendrían que verificarse simultáneamente las dos siguientes condiciones:

$$e^t = a(t)e^t\,, \quad -e^{-t} = a(t)e^{-t}\,,$$

que a la postre se traducen en que simultáneamente $a \equiv 1$ y $a \equiv -1$.

Para el caso no homogéneo los análogos de las condiciones anteriores son

$$e^t = a(t)e^t + b(t)\,, \quad -e^{-t} = a(t)e^{-t} + b(t)\,,$$

que tras un cálculo sencillo conducen a las siguientes expresiones de los coeficientes:

$$a(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}\,, \quad b(t) = -\frac{2}{e^t - e^{-t}}\,.$$

Estas expresiones son sólo válidas en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, luego $\phi(t)$ y $\psi(t)$ NO pueden ser soluciones de una misma ecuación lineal de primer orden no homogénea.

■

9. Calcula los valores de la constante $\mu \in \mathbb{R}$ que hacen que la ecuación diferencial $x' = (\mu + \cos^2 t)x$ tenga una solución π-periódica[5] no trivial.

Solución : Se trata de una ecuación diferencial en variables separadas, por lo que se puede encontrar fácilmente su solución general[6]:

$$x(t) = Ce^{(\mu+\frac{1}{2})t+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t)}\,.$$

[5]Es decir, $x(t) = x(t+\pi)\ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$

[6]Para llegar a la expresión final de la misma es necesario calcular previamente una primitiva de $\cos^2(t)$, tarea la cual resulta bastante simple si se escribe

$$\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}\,.$$

Al evaluarla en $t+\pi$ se obtiene

$$x(t+\pi) = Ce^{(\mu+\frac{1}{2})(t+\pi)+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t+2\pi)} = Ce^{(\mu+\frac{1}{2})(t+\pi)+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t)},$$

luego la condición de periodicidad equivale a imponer

$$e^{(\mu+\frac{1}{2})\pi} = 1\,,$$

es decir, $\mu = -\frac{1}{2}$.

■

10. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales lineales usando el método de variación de las constantes:

    (a) $x' - tx = 3t$

    (b) $y' = 5y + \cos(x)$

    (c) $x' = \left(\frac{2t}{t^2+1}\right)x + t^3$

    (d) $x' - 2x = 4e^{2t}$

Solución : (a) Resolviendo en primer lugar la correspondiente ecuación diferencial homogénea, $x' = tx$, la cual tiene sus variables separadas obtenemos

$$x_h(t) = C\,e^{\frac{t^2}{2}}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Asumimos ahora $C = C(t)$ y reconsideramos la ecuación diferencial completa. En este caso se tiene que

$$x' = (C' + Ct)e^{\frac{t^2}{2}} = t\left(Ce^{\frac{t^2}{2}}\right) + 3t\,,$$

luego $C'(t) = 3te^{-\frac{t^2}{2}}$. Por tanto

$$C(t) = -3e^{-\frac{t^2}{2}} + K\,, \quad K \in \mathbb{R}\,.$$

(b) La solución general de la ecuación homogénea, $y' = 5y$, es

$$y_h = Ce^{5x}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Variando la constante y considerando ahora la ecuación completa obtenemos

$$(C' + 5C)e^{5x} = 5Ce^{5x} + \cos(x) \Rightarrow C'(x) = \cos(x)\, e^{-5x}\,,$$

luego ha de ser

$$C(x) = \frac{1}{26}\, e^{-5x}(\operatorname{sen}(x) - 5\cos(x)) + K\,, \quad K \in \mathbb{R}$$

y, por tanto,

$$y(x) = \frac{1}{26}\,(\operatorname{sen}(x) - 5\cos(x)) + K\, e^{5x}\,, \quad K \in \mathbb{R}\,.$$

(c) La solución general de la ecuación homogénea, $x' = \frac{2t}{t^2+1}x$, es

$$x_h = C(t^2 + 1)\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Variando la constante y considerando ahora la ecuación completa obtenemos

$$C'(t^2 + 1) + 2Ct = 2Ct + t^3 \Rightarrow C'(t) = \frac{t^3}{t^2 + 1}\,,$$

luego ha de ser

$$C(t) = \frac{1}{2}\Big(t^2 - \log(t^2 + 1)\Big) + K\,, \quad K \in \mathbb{R}$$

y, por tanto,

$$x(t) = \frac{1}{2}\Big(t^2 - \log(t^2 + 1) + K\Big)(t^2 + 1)\,, \quad K \in \mathbb{R}\,.$$

(d) La solución general de la ecuación homogénea, $x' - 2x = 0$, es

$$x_h = Ce^{2t}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Si asumimos $C = C(t)$ y recuparamos la ecuación completa, resulta que

$$(C' + 2C - 2C)\, e^{2t} = 4\, e^{2t} \Rightarrow C' \equiv 4 \Rightarrow C(t) = 4t + K\,,\; K \in \mathbb{R}\,.$$

Entonces

$$x(t) = (4t + K)\, e^{2t}\,, \quad K \in \mathbb{R}\,.$$

■

11. Resuelve los siguientes problemas de valores iniciales mediante la fórmula de variación de las constantes:

(a) $x' + 3x = e^{-3t}\,, \quad x(1) = 5$

(b) $x' - \frac{x}{t} = \frac{1}{1+t^2}\,, \quad x(2) = 0$

(c) $x' = \cosh(t)x + e^{\operatorname{senh}(t)}\,, \quad x(0) = 1$

Solución : (a) La solución general de la ecuación homogénea, $x' + 3x = 0$, es

$$x_h(t) = C\,e^{-3t}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Variando la constante, $x(t) = C(t)\,e^{-3t}$, y volviendo a la ecuación completa obtenemos

$$(C' - 3C)\,e^{-3t} + 3C\,e^{-3t} = e^{-3t} \Rightarrow C(t) = t + K\,, \quad K \in \mathbb{R}\,.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación completa es

$$x(t) = (t + K)\,e^{-3t}\,, \quad K \in \mathbb{R}\,.$$

Imponiendo la condición inicial $x(1) = 5$ concluimos que

$$(1 + K)\,e^{-3} = 5 \Rightarrow K = 5e^3 - 1\,,$$

luego

$$x(t) = (t + 5e^3 - 1)\,e^{-3t}\,.$$

(b) Resolviendo la ecuación homogénea (que tiene sus variables separadas) obtenemos $x_h(t) = Ct$ con $C \in \mathbb{R}$. Sustituyendo entonces la expresión $x(t) = C(t)t$ en la ecuación completa llegamos a

$$\begin{aligned} C't + C - C = \frac{1}{1+t^2} &\Rightarrow C'(t) = \frac{1}{t(1+t^2)} \\ &\Rightarrow C(t) = \log\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) + K\,, \quad K \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Entonces la solución general de la ecuación completa es

$$x(t) = \left[\log\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) + K\right] t\,, \quad K \in \mathbb{R}\,.$$

Imponiendo finalmente la condición inicial obtenemos

$$2\left(\log\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+K\right)=0\Rightarrow K=-\log\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Por consiguiente, la solución buscada es

$$x(t)=t\log\left(\frac{\sqrt{5}\,t}{2\sqrt{1+t^2}}\right).$$

(c) La solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t)=C\,e^{\operatorname{senh}(t)}\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.$$

Si variamos la constante y ensayamos en la ecuación completa con $x(t)=C(t)\,e^{\operatorname{senh}(t)}$ obtenemos

$$\begin{aligned}(C'+C\cosh(t))\,e^{\operatorname{senh}(t)}&=C\cosh(t)\,e^{\operatorname{senh}(t)}+e^{\operatorname{senh}(t)}\\&\Rightarrow C'\equiv 1\Rightarrow C(t)=t+K\,,\quad K\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Por tanto

$$x(t)=(t+K)\,e^{\operatorname{senh}(t)}\,,\quad K\in\mathbb{R}\,.$$

Al imponer finalmente $x(0)=1$ obtenemos $K=1$ y, en consecuencia, la única solución de nuestro problema de valores iniciales es

$$x(t)=(t+1)\,e^{\operatorname{senh}(t)}\,.$$

■

12. Sean $a,b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones continuas tales que $a(t)\geq c>0$ para todo $t\in\mathbb{R}$ y

$$\lim_{t\to\infty}b(t)=0\,.$$

Demuestra que todas las soluciones de la ecuación diferencial

$$x'=-a(t)x+b(t)$$

tienden a cero cuando $t\to\infty$. (*Indicación*: usa la regla de L'Hôpital en el segundo término de la fórmula de variación de las constantes).

Solución : Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea, $x' = -a(t)x$, obteniendo

$$x(t) = Ce^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Variando ahora la constante, es decir, asumiendo $C = C(t)$, concluimos que la solución general de la ecuación lineal $x' = -a(t)x + b(t)$ es

$$x(t) = x_0\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} + \left(\int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{\int_{t_0}^{s} a(\tau)\,d\tau}\, ds \right) e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}\,,$$

donde hemos asumido $x(t_0) = x_0$ con t_0 y x_0 arbitrarios.

Estudiamos en primer lugar el límite en infinito del primer término de la solución:

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{t\to\infty} \left\{ \left| x_0\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \right| \right\} &\leq |x_0| \lim_{t\to\infty} \left\{ e^{-\int_{t_0}^{t} c\,ds} \right\} \\ &= |x_0| \lim_{t\to\infty} \left\{ e^{-c(t-t_0)} \right\} = 0\,. \end{aligned}$$

Para el segundo término obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \left\{ \frac{\int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{\int_{t_0}^{s} a(\tau)\,d\tau}\, ds}{e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}} \right\} &= \lim_{t\to\infty} \left\{ \frac{b(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}}{a(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}} \right\} \\ &= \lim_{t\to\infty} \left\{ \frac{b(t)}{a(t)} \right\} = 0\,, \end{aligned}$$

ya que $\lim_{t\to\infty}\{b(t)\} = 0$ y $\left|\frac{1}{a(t)}\right| \leq \frac{1}{c}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Obsérvese que hemos utilizado la regla de L'Hôpital y el teorema fundamental del cálculo para resolver la eventual indeterminación en el límite anterior.

■

13. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli:

(a) $3tx' - 2x = \frac{t^3}{x^2}$

(b) $x' = e^t x^7 + 2x$

(c) $y' + \frac{y}{x} = \frac{\log(x)}{x}\, y^2$

Solución : (a) Dividiendo la ecuación por $3t$, $t \neq 0$, obtenemos

$$x' - \frac{2}{3t}x = \frac{t^2}{3}x^{-2}\,. \tag{1.4}$$

Multiplicando ahora la ecuación (1.4) por x^2 llegamos a

$$x^2x' - \frac{2}{3t}x^3 = \frac{t^2}{3}\,,$$

que es equivalente a la ecuación

$$z' - \frac{2}{t}z = \frac{t^2}{3} \tag{1.5}$$

vía el cambio de variable $z = \frac{x^3}{3}$. La solución general de la ecuación (1.5) es

$$z(t) = t^2\Big(\frac{t}{3} + C\Big)\,, \quad C \in \mathbb{R}\,,$$

luego deshaciendo el cambio de variable obtenemos

$$x(t) = (t^3 + Ct^2)^{\frac{1}{3}}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Multiplicando la ecuación por x^{-7} obtenemos $x^{-7}x' = e^t + 2x^{-6}$. Planteamos el cambio de variable $z = \frac{1}{6}x^{-6}$, en cuyo caso la ecuación anterior se puede reformular del siguiente modo:

$$z' + 12z = -\,e^t\,.$$

La solución general de esta ecuación es

$$z(t) = -\frac{1}{13}\,e^t + C\,e^{-12t}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Deshaciendo el cambio de variable obtenemos

$$x(t) = \left(C\,e^{-12t} - \frac{6}{13}\,e^t\right)^{-\frac{1}{6}}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(c) Multiplicando la ecuación por y^{-2} obtenemos $y^{-2}y' = \frac{\log(x)}{x} - \frac{1}{xy}$. Planteamos el cambio de variable $z = -\frac{1}{y}$, en cuyo caso la ecuación anterior se puede reformular del siguiente modo:

$$z' = \frac{z}{x} + \frac{\log(x)}{x}\,.$$

La solución general de esta ecuación es

$$z(x) = Cx - \log(x) - 1\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Deshaciendo el cambio de variable obtenemos

$$y(x) = \frac{1}{1 + \log(x) - Cx}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

$\blacksquare$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales de Riccati usando la solución particular proporcionada:

 (a) $y' = y^2 - xy + 1\,, \quad y_p(x) = x$

 (b) $y' = x^{-4} - y^2\,, \quad y_p(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

Solución : (a) Efectuamos el cambio de función incógnita

$$u(x) = \frac{1}{y(x) - x}\,,$$

de modo que

$$\begin{aligned} -\frac{u'}{u^2} = \left(\frac{1}{u}\right)' = y' - 1 = y^2 - xy \\ = \left(\frac{1}{u} + x\right)^2 - x\left(\frac{1}{u} + x\right) = \frac{1}{u^2} + \frac{x}{u} \end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$u' = -xu - 1$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden cuya solución general es

$$u(x) = \left(C - \int e^{\frac{x^2}{2}}\, dx\right) e^{-\frac{x^2}{2}}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Deshaciendo el cambio de variable concluimos que la solución de la ecuación de Riccati de partida es

$$y(x) = x + e^{\frac{x^2}{2}} \left(C - \int e^{\frac{x^2}{2}}\, dx\right)^{-1}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Efectuamos el cambio de función incógnita

$$u(x) = \frac{1}{y(x) - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}},$$

de modo que

$$-\frac{u'}{u^2} = \left(\frac{1}{u}\right)' = y' + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{1}{x^4} - y^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$
$$= \frac{1}{x^4} - \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = -\frac{1}{u^2} - \frac{2}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{u}$$

o, equivalentemente,

$$u' = 1 + \frac{2}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)u$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden cuya solución general es

$$u(x) = x^2\left(Ce^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{2}\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Deshaciendo el cambio de variable concluimos que la solución de la ecuación de Riccati de partida es

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left(x - 1 + \frac{1}{Ce^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{2}}\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

■

15. Se considera la ecuación diferencial de Riccati

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2. \tag{1.6}$$

(a) Busca una solución particular de la forma $y = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Encuentra la solución que cumple $y(1) = 2$ y calcula, si es posible, el límite cuando $x \to \infty$ de dicha solución.

Solución : (a) La función $y = x^\alpha$ resuelve la ecuación diferencial (1.6) si y solamente si

$$\alpha x^{\alpha-1} = -x^{-2} - x^{\alpha-1} + x^{2\alpha},$$

luego ha de ser $\alpha = -1$.
(b) Para la solución particular encontrada en (a), $y_0(x) = \frac{1}{x}$, consideramos el cambio de función incógnita

$$u(x) = \frac{1}{y(x) - x^{-1}} \,. \tag{1.7}$$

Entonces

$$\begin{aligned} -\frac{u'}{u^2} = \left(\frac{1}{u}\right)' &= y' + \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{y}{x} \\ &= \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

luego resolver el problema de valores iniciales asociado a (1.6) con dato inicial $y(1) = 2$ equivale a resolver la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden

$$u' + \frac{u}{x} = -1$$

con dato inicial $u(1) = 1$. La (única) solución de este último problema se puede calcular fácilmente, obteniéndose

$$u(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3 - x^2}{x}\right).$$

Por tanto, deshaciendo el cambio de variable (1.7) llegamos a la solución del problema de Riccati de partida:

$$y(x) = \frac{x^2 + 3}{x(3 - x^2)} \,.$$

Finalmente, por la propia definición de solución de un problema de valores iniciales concluimos que en nuestro caso no se puede tomar $\lim_{x\to\infty} y(x)$ porque $y(x)$ tiene una asíntota en $x = \sqrt{3}$.

■

16. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales usando el método que convenga en cada caso:

(a) $3e^t \tan(x) + (2 - e^t)\sec(x)^2 x' = 0$

(b) $(3t^2x + x^3)x' + 2t^3 = 0$

(c) $xy' + y = y^2 \log(x)$

(d) $t\cos(t + x) + \operatorname{sen}(t + x) + t\cos(t + x)x' = 0$

(e) $(3tx + x^2) + (3tx + t^2)x' = 0$

(f) $tx\cos(tx) + \operatorname{sen}(tx) + (t^2\cos(tx) + e^x)x' = 0$

(g) $3x + 3e^t x^{\frac{2}{3}} + tx' = 0$

(h) $x' = \frac{1}{x+t}$

(i) $y' = \frac{y}{2y\log(y)+y-x}$

(j) $y' = 1 + e^{2x}$

(k) $y' = \frac{y}{x}(\log(y) - \log(x))$

(l) $xy' + y = 2x$

(m) $y' = \log(x^y)$

Solución : (a) Variables separadas: $x(t) = \arctan\left[\frac{C}{(2-e^t)^3}\right]$, $C \in \mathbb{R}$.

(b) Homogénea: $x' = -\frac{2t^3}{3t^2x+x^3} = -\frac{2}{3(x/t)+(x/t)^3}$. La solución general viene dada por la siguiente relación implícita[7]:

$$(x + t)^3(x^4 + 3t^2x^2 + 2t^4) = C(x + 2t)^3\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(c) Bernoulli: $y' + \frac{y}{x} = \frac{\log(x)}{x}\, y^2$. La solución general es[8]

$$y(x) = \frac{1}{Cx + \log(x) + 1}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

[7]El siguiente cálculo es útil:

$$\begin{aligned}\int \frac{u\,du}{u^4 + 3u^2 + 2} &= \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^2 + 3v + 2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{dv}{v+1} - \int \frac{dv}{v+2}\right) = \frac{1}{2}\Big(\log(v+1) - \log(v+2)\Big).\end{aligned}$$

[8]La integral $\int \frac{\log(x)dx}{x^2}$ se resuelve por partes

(d) Exacta con

$$P(t,x) = t\cos(t+x) + \operatorname{sen}(t+x)\,, \quad Q(t,x) = t\cos(t+x)\,.$$

En efecto,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \cos(t+x) - t\operatorname{sen}(t+x) = \frac{\partial Q}{\partial t}\,.$$

La solución general viene dada por[9]

$$x(t) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{C}{t}\right) - t\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(e) Homogénea: $x' = -\frac{3tx+x^2}{3tx+t^2} = -\frac{3(x/t)+(x/t)^2}{3(x/t)+1}$. La solución general viene dada por la siguiente relación implícita:

$$\frac{tx}{(t-x)^4} = C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(f) Exacta con

$$P(t,x) = tx\cos(tx) + \operatorname{sen}(tx)\,, \quad Q(t,x) = t^2\cos(tx) + e^x\,.$$

En efecto,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2t\cos(tx) - t^2 x\operatorname{sen}(tx) = \frac{\partial Q}{\partial t}\,.$$

La solución general viene dada por la siguiente relación implícita[10]:

$$e^x + t^2\cos(tx) = C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(g) Bernoulli: Para $t \neq 0$ se tiene que $x' + \frac{3}{t}\,x = -\frac{3e^t}{t}\,x^{\frac{2}{3}}$. La solución general es

$$x(t) = \left(\frac{C-e^t}{t}\right)^3, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(h) Haciendo el cambio de variable $u = x + t$ obtenemos la siguiente ecuación diferencial equivalente:

$$u' = \frac{u+1}{u}\,,$$

[9] $\int t\cos(t+x)\,dt = t\operatorname{sen}(t+x) + \cos(t+x)$ por partes
[10] $\int t\cos(tx)\,dt = \frac{t}{x}\operatorname{sen}(tx) + \frac{1}{x^2}\cos(tx)$ por partes

que es una ecuación en variables separadas cuya solución general es

$$u - \log(|u+1|) = C + t\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Deshaciendo finalmente el cambio de variable obtenemos la siguiente expresión implícita para la solución:

$$x = \log(|x+t+1|) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(i) Exacta con $P(x,y) = -y$ y $Q(x,y) = 2y\log(y) + y - x$. En efecto,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

La solución general viene dada por

$$y(x) = y(y\log(|y|) - x) = C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(j) Variables separadas: Integrando en los dos miembros con respecto a x obtenemos

$$y(x) = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(k) Homogénea: $y' = \frac{y}{x}\log\left(\frac{y}{x}\right)$. La solución general viene dada por la siguiente expresión:

$$y(x) = x\,e^{Cx+1}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(l) Lineal de primer orden: Si $x \neq 0$ se tiene $y' + \frac{y}{x} = 2$. La solución general de la correspondiente ecuación homogénea es

$$y_h(x) = \frac{C}{x}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Usando el método de variación de las constantes encontramos que la solución general de la ecuación completa es

$$y(x) = x + \frac{C}{x}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(m) Variables separadas: $\frac{y'}{y} = \log(x)$, de donde

$$y(x) = Ce^{x(\log(x)-1)}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

En particular, esta ecuación admite la solución trivial $y \equiv 0$.

■

17. Decide de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    (a) Una solución del problema de valores iniciales

    $$\begin{cases} x' = x^2 + t^2 \\ x(1) = 2 \end{cases}$$

    definida en un intervalo abierto que contenga a $[1,2]$ satisface $x(2) = 1$.

    (b) La ecuación de Riccati $y' + y + y^2 + e^x = 0$ se transforma en una ecuación diferencial lineal de orden dos,

    $$z'' + a(x)z' + b(x)z + c(x) = 0\,,$$

    mediante el cambio de variable $y = \frac{z'}{z}$.

(Septiembre 2003)

Solución : (a) FALSA. Claramente $x' \geq 0$, por lo que cualquier solución es creciente y si ha de satisfacer $x(1) = 2$ no puede ser $x(2) = 1$, ya que en ese caso decrecería.

(b) VERDADERA. Derivando el cambio de variable obtenemos

$$y' = \frac{z''}{z} - \left(\frac{z'}{z}\right)^2,$$

luego la ecuación resultante en la nueva función incógnita $z(x)$ es

$$z'' + z' + e^x z = 0\,,$$

que es lineal de segundo orden.

■

CAPÍTULO 2

La ecuación lineal I: aspectos teóricos sobre la existencia y unicidad de solución y matrices fundamentales

1. Se considera la ecuación diferencial

$$x' = F(t, x)\,, \tag{2.1}$$

donde $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una función continua que satisface:

(a) Para cualquier $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ existe una única solución $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ del problema de valores iniciales constituido por la ecuación diferencial (2.1) y la condición inicial $x(t_0) = x_0$.

(b) El conjunto de todas las soluciones de la ecuación (2.1) definidas en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial real.

Demuestra que (2.1) es una ecuación lineal homogénea.

Solución : Se trata de probar que, bajo las condiciones (a) y (b), el segundo miembro de la ecuación diferencial (2.1) ha de ser de la forma

$$F(t, x) = a(t)x$$

para alguna función $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. La condición (a) es necesaria para que (2.1) sea lineal. De (b) se deduce que si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones de (2.1), entonces cualquier combinación lineal de las mismas, léase $\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)$ para cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, también lo es. Por tanto

$$\begin{aligned} F(t, \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)) &= (\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t))' \\ &= \lambda_1 x_1'(t) + \lambda_2 x_2'(t) = \lambda_1 F(t, x_1) + \lambda_2 F(t, x_2)\,, \end{aligned}$$

de lo cual se deduce que $F(t,x)$ ha de ser lineal en la segunda variable, luego $F(t,x) = a(t)x$.

$\blacksquare$

2. Se considera el problema de valores iniciales

$$t^\sigma x' = A(t)x\,, \quad x(0) = x_0\,, \quad t \in (0,\infty)\,, \tag{2.2}$$

donde $\sigma \in (0,1)$, $A : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{R})$ es continua y $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Por una solución de (2.2) entenderemos una función

$$x \in C([0,\infty), \mathbb{R}^N) \cap C^1((0,\infty), \mathbb{R}^N)$$

que satisface la condición inicial y la ecuación diferencial en $(0,\infty)$.

(a) ¿Se puede aplicar el teorema de existencia y unicidad conocido para la ecuación diferencial lineal?

(b) Prueba que (2.2) es equivalente a encontrar una función $x \in C([0,\infty), \mathbb{R}^N)$ que satisfaga

$$x(t) = x_0 + \int_0^t s^{-\sigma} A(s) x(s)\, ds\,, \quad t \in (0,\infty)\,. \tag{2.3}$$

(c) Define la sucesión de iterantes de Picard asociada a (2.3) y prueba que converge uniformemente en compactos de $[0,\infty)$ hacia una función $\rho(t) \in C([0,\infty), \mathbb{R}^N)$.

(d) Prueba que $\rho(t)$ es solución de (2.3), justificando de modo riguroso el paso al límite en la integral.

(e) Demuestra que la solución de (2.2) es única.

(f) Construye un problema de valores iniciales del tipo (2.2) cuya solución no pertenezca a $C^1([0,\infty), \mathbb{R}^N)$.

(Febrero 1990)

Solución : (a) En general NO. La ecuación puede reescribirse como $x' = B(t)x$ con $B(t) = \frac{A(t)}{t^\sigma}$, función que no podemos garantizar que sea continua en $t = 0$. Por tanto, no se puede aplicar el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones lineales.

(b) De la formulación diferencial (2.2) se pasa a la formulación integral (2.3) sin más que integrar *prudentemente* la ecuación entre 0 y t. Sean $x(t)$ una solución de (2.2) y $\varepsilon > 0$. Entonces

$$x(t) - x(\varepsilon) = \int_\varepsilon^t x'(s)\, ds = \int_\varepsilon^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds\,,$$

luego

$$x(t) = x(\varepsilon) + \int_\varepsilon^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds\,.$$

Comprobemos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds = \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds\,.$$

Para ello demostraremos que la diferencia

$$\int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds - \int_\varepsilon^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds = \int_0^\varepsilon \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds \tag{2.4}$$

tiende a cero cuando $\varepsilon \to 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\varepsilon \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds \right\| &\le \int_0^\varepsilon \frac{\| A(s)x(s) \|}{s^\sigma}\, ds \\ &\le M \int_0^\varepsilon s^{-\sigma}\, ds = \frac{M}{1-\sigma}\, \varepsilon^{1-\sigma} \to 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0\,, \end{aligned}$$

de donde se desprende (2.4).

El enunciado recíproco se comprueba derivando *prudentemente* la ecuación integral (2.3). Supongamos para ello que $x(t)$ es una solución de (2.3), es decir, $x \in C([0,\infty), \mathbb{R}^N)$ tal que

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds\,.$$

En primer lugar, por la continuidad de $x(t)$ en 0 es inmediato comprobar que se recupera la condición inicial $x(0) = x_0$. Por otro lado, si $t > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} x(t) = x_0 + \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds \\ = x_0 + \int_0^{t_0} \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds + \int_{t_0}^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds \\ = C + \int_{t_0}^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds\,, \end{aligned}$$

donde

$$C = \int_0^{t_0} \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds \in \mathbb{R}\,.$$

Finalmente, como la función $t \mapsto \frac{A(t)}{t^\sigma} x(t)$ es continua en $(0, \infty)$ podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo para concluir que

$$x'(t) = \frac{A(t)}{t^\sigma}\, x(t)\,, \quad t \in (0, \infty)\,.$$

(c) Definimos la sucesión de iterantes de Picard de la siguiente forma:

$$x_0(t) \equiv x_0\,, \quad x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x_n(s)\, ds\,.$$

Veamos que la definición recursiva de la sucesión de iterantes tiene sentido:

- En primer lugar, es obvio que la función $x_0(t)$ está bien definida.

- Supongamos entonces que $x_n(t)$ está bien definida y es continua en $[0, t]$ y comprobemos que $x_{n+1}(t)$ también está bien definida y es continua en $[0, t]$. La correcta definición de $x_{n+1}(t)$ es consecuencia de que $A(s)$ y $x_n(s)$ son acotadas en $[0, t]$ (por ser continuas) y de que $s^{-\sigma}$ es integrable en $[0, t]$ (por ser $0 < \sigma < 1$), de donde se deduce que el producto de las tres funciones, $\frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)$, es integrable en $[0, t]$. Además, la función

$$t \mapsto \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x_n(s)\, ds$$

  es continua, luego todas las iterantes $x_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}^N$ están bien definidas y son continuas.

Estudiamos a continuación la convergencia uniforme de la sucesión de iterantes de Picard sobre compactos $[0, T]$ de $[0, \infty)$. Aplicando el principio de inducción se puede demostrar fácilmente que

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq \frac{\|x_0\| \; M_T^{n+1}}{(n+1)!(1-\sigma)^{n+1}} \, t^{(n+1)(1-\sigma)} \tag{2.5}$$

para todo $t \in [0, T]$, donde hemos denotado

$$M_T = \max_{0 \leq t \leq T} \{\|A(t)\|\} .$$

En efecto, si evaluamos en primer lugar las dos primeras diferencias, $x_1(t) - x_0(t)$ y $x_2(t) - x_1(t)$, ya podemos intuir que la cota que aparece en el segundo miembro de (2.5) es la adecuada:

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_0(t)\| &= \left\| \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x_0 \, ds \right\| \\ &\leq \|x_0\| M_T \int_0^t s^{-\sigma} \, ds = \|x_0\| M_T \, \frac{t^{1-\sigma}}{1-\sigma} , \\ \|x_2(t) - x_1(t)\| &\leq \int_0^t \frac{\|A(s)\|}{s^\sigma} \|x_1(s) - x_0(s)\| \, ds \\ &\leq \frac{\|x_0\| M_T^2}{1-\sigma} \int_0^t s^{1-2\sigma} \, ds = \frac{\|x_0\| M_T^2}{2(1-\sigma)^2} \, t^{2(1-\sigma)} . \end{aligned}$$

Supongamos entonces cierta la siguiente estimación (hipótesis de inducción):

$$\|x_n(t) - x_{n-1}(t)\| \leq \frac{\|x_0\| \; M_T^n}{n!(1-\sigma)^n} \, t^{n(1-\sigma)} .$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| &\leq \int_0^t \frac{\|A(s)\|}{s^\sigma} \|x_n(s) - x_{n-1}(s)\| \, ds \\ &\leq \frac{\|x_0\| \; M_T^{n+1}}{n!(1-\sigma)^n} \, t^{n(1-\sigma)} \int_0^t s^{n-(n+1)\sigma} \, ds \\ &\leq \frac{\|x_0\| \; M_T^{n+1}}{(n+1)!(1-\sigma)^{n+1}} \, t^{(n+1)(1-\sigma)} . \end{aligned}$$

Como la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|x_0\| \; M_T^k}{k!(1-\sigma)^k} \, t^{k(1-\sigma)}$ es convergente[1], se puede aplicar

[1]En efecto, se fuede comprobar fácilmente que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|x_0\| \; M_T^k}{k!(1-\sigma)^k} \, t^{k(1-\sigma)} = \|x_0\| e^{\frac{M_T t^{1-\sigma}}{1-\sigma}}$$

el criterio de Weierstrass para concluir que la serie

$$x_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \Big(x_{k+1}(t) - x_k(t) \Big) \tag{2.6}$$

y, por consiguiente, la sucesión de sumas parciales

$$\{x_n(t)\} = \Big\{ x_0(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \Big(x_{k+1}(t) - x_k(t) \Big) \Big\}$$

convergen absoluta y uniformemente en $[0, T]$. Finalmente, como las iterantes $x_n(t)$ son todas continuas (lo cual se comprobó previamente) el límite uniforme de (2.6) ha de ser una función $\rho(t)$ continua en $[0, T]$. Además, como T es arbitrario y por tanto $\rho(t)$ es continua sobre cualquier compacto $[0, T]$, lo ha de ser también en todo el dominio $[0, \infty)$. Luego $\rho \in C([0, \infty), \mathbb{R}^N)$.

(d) Para $t > 0$ fijo tomamos el límite puntual $n \to \infty$ en la ecuación integral

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x_n(s)\, ds$$

de modo que

$$\rho(t) = x_0 + \lim_{n\to\infty} \Big\{ \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x_n(s)\, ds \Big\} .$$

Para concluir comprobamos que la diferencia

$$\begin{aligned} D(t) = \Big\| \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x_n(s)\, ds - \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} \rho(s)\, ds \Big\| \\ = \Big\| \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} (x_n(s) - \rho(s))\, ds \Big\| \end{aligned}$$

converge hacia cero. En efecto,

$$\begin{aligned} 0 \le D(t) \le \int_0^t \frac{\|A(s)\|}{s^\sigma} \|x_n(s) - \rho(s)\|\, ds \\ \le \max_{0\le s\le t} \|x_n(s) - \rho(s)\| \max_{0\le s\le t} \|A(s)\| \frac{t^{1-\sigma}}{1-\sigma} , \end{aligned}$$

de donde se deduce lo pretendido en virtud de la convergencia uniforme de $\{x_n\}$ hacia ρ en $[0, t]$ (cf. apartado (c)). Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x_n(s)\, ds \right\} = \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x_n(s)\, ds\,,$$

por lo que podemos concluir que $\rho(t)$ resuelve la ecuación integral (2.3).

(e) Comprobaremos que la ecuación (2.3) admite una única solución. Supongamos para ello que $\rho_1(t)$ y $\rho_2(t)$ son dos soluciones de

$$\rho(t) = x_0 + \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma}\, \rho(s)\, ds$$

que satisfacen la condición inicial $\rho_1(0) = \rho_2(0) = x_0$. Demostraremos que

$$J = \{t \in [0, \infty) : \rho_1(t) = \rho_2(t)\} = [0, \infty) = I\,, \tag{2.7}$$

para lo cual haremos uso de la siguiente

Proposición 1. Sean $I \subset \mathbb{R}$ conexo y J un subconjunto no vacío de I que es simultáneamente abierto y cerrado relativo a I. Entonces $J = I$.

Por tanto, hemos de demostrar que el conjunto J definido en (2.7) es no vacío, abierto y cerrado relativo a $[0, \infty)$.

- Que J contiene algún elemento es evidente, ya que al menos $0 \in J$ porque $\rho_1(0) = \rho_2(0) = x_0$.
- También es inmediato concluir que J es un cerrado relativo a I, ya que el conjunto de puntos en que coinciden dos funciones continuas es cerrado.
- Comprobaremos para acabar que J es un abierto relativo a I o, lo que es lo mismo, que cualquier punto $t_0 \in J$ es interior a J. Dicho de otro modo, demostraremos que dado cualquier $t_0 \in J$ existe $\varepsilon > 0$ para el que $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap I \subset J$.

  Evaluamos en primer lugar $\rho_1(t)$ y $\rho_2(t)$ en t_0:

$$\rho_1(t_0) = x_0 + \int_0^{t_0} \frac{A(s)}{s^\sigma} \rho_1(s)\, ds\,,$$

$$\rho_2(t_0) = x_0 + \int_0^{t_0} \frac{A(s)}{s^\sigma} \rho_2(s)\, ds\,.$$

Restando ambas expresiones obtenemos

$$0=\rho_1(t_0)-\rho_2(t_0)=\int_0^{t_0}\frac{A(s)}{s^\sigma}(\rho_1(s)-\rho_2(s))\,ds\,,$$

de donde se deduce que

$$\int_0^{t_0}\frac{A(s)}{s^\sigma}\rho_1(s)\,ds=\int_0^{t_0}\frac{A(s)}{s^\sigma}\rho_2(s)\,ds\,.$$

Podemos escribir entonces

$$\begin{aligned}\rho_1(t)=x_0+\int_0^{t_0}\frac{A(s)}{s^\sigma}\rho_1(s)\,ds+\int_{t_0}^{t}\frac{A(s)}{s^\sigma}\rho_1(s)\,ds\,,\\ \rho_2(t)=x_0+\int_0^{t_0}\frac{A(s)}{s^\sigma}\rho_2(s)\,ds+\int_{t_0}^{t}\frac{A(s)}{s^\sigma}\rho_2(s)\,ds\,.\end{aligned}$$

Restando nuevamente ambas expresiones obtenemos

$$\rho_1(t)-\rho_2(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{A(s)}{s^\sigma}(\rho_1(s)-\rho_2(s))\,ds$$

para todo $t\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]\cap[0,\infty)$. Sea ahora

$$\tau\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]\cap[0,\infty)$$

tal que

$$\|\rho_1(t)-\rho_2(t)\|\leq\|\rho_1(\tau)-\rho_2(\tau)\|$$

para todo $t\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]\cap[0,\infty)$. Obsérvese que tal τ existe porque la función

$$t\mapsto\|\rho_1(t)-\rho_2(t)\|$$

es continua. Entonces

$$\begin{aligned}\|\rho_1(\tau)-\rho_2(\tau)\|&\leq\int_{t_0}^{\tau}\frac{\|A(s)\|}{s^\sigma}\|\rho_1(s)-\rho_2(s)\|\,ds\\ &\leq\|\rho_1(\tau)-\rho_2(\tau)\|\,M_\varepsilon(t_0)\,\frac{(t_0+\varepsilon)^{1-\sigma}-t_0^{1-\sigma}}{1-\sigma}\,,\end{aligned}$$

donde hemos denotado

$$M_\varepsilon(t_0)=\max_{0\leq s\leq t_0+\varepsilon}\{\|A(s)\|\}\,.$$

Luego

$$\|\rho_1(\tau)-\rho_2(\tau)\|\left(1-M_\varepsilon(t_0)\,\frac{(t_0+\varepsilon)^{1-\sigma}-t_0^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right)\le 0\,. \quad (2.8)$$

Si elegimos ε *suficientemente pequeño*, por ejemplo

$$\varepsilon<\text{mín}\left\{t_0,\left(\frac{1-\sigma}{M_\varepsilon(2t_0)}+t_0^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}-t_0\right\},$$

en particular se tiene que

$$M_\varepsilon(t_0)\,\frac{(t_0+\varepsilon)^{1-\sigma}-t_0^{1-\sigma}}{1-\sigma}<1\,,$$

por lo que sólo puede ser $\|\rho_1(\tau)-\rho_2(\tau)\|=0$ para que se satisfaga (2.8). Consecuentemente

$$\|\rho_1(t)-\rho_2(t)\|=0\quad\forall\,t\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]\cap[0,\infty)$$

o, lo que es lo mismo,

$$[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]\cap[0,\infty)\subset J$$

lo cual concluye la prueba.

(f) Considérese por ejemplo el siguiente problema de valores iniciales unidimensional ($N=1$):

$$\begin{cases} x'=\frac{x}{2\sqrt{t}} \\ x(0)=1 \end{cases}.$$

Obsérvese que hemos elegido $\sigma=\frac{1}{2}$, $A(t)\equiv\frac{1}{2}$ y $x_0=1$. La única solución de este problema es $x(t)=e^{\sqrt{t}}$, de modo que $x'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}\,e^{\sqrt{t}}$ si $t>0$. Observamos, por tanto, que $x(t)$ no es derivable en $t=0$.

■

3. Sea $\Phi:I\to M_N(\mathbb{R})$ tal que $\Phi\in C^1(I)$. Demuestra que una condición necesaria y suficiente para que Φ sea matriz fundamental de un sistema del tipo $x'=A(t)x$, con $A:I\to M_N(\mathbb{R})$ continua, es

$$\det(\Phi(t))\neq 0\quad\forall\,t\in I\,.$$

Solución : Es evidente que $\det(\Phi(t)) \neq 0\ \forall t \in I$ es una condición necesaria por la propia definición de matriz fundamental. Para ver que también es suficiente basta con comprobar que Φ es matriz solución de un sistema del tipo $x' = A(t)x$ con $A : I \to M_N(\mathbb{R})$ continua, es decir, que $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$. Tómese entonces como matriz de coeficientes de dicho sistema

$$A(t) = \Phi'(t)\Phi(t)^{-1},$$

que tiene sentido porque $\Phi(t)^{-1}$ existe para todo $t \in I$ en virtud de la condición $\det(\Phi(t)) \neq 0$ y es continua en I porque $\Phi \in C^1(I)$.

■

4. Sea $\rho \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Demuestra que ρ es solución de un sistema del tipo $x' = A(t)x$, con $A : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$ continua, si y solamente si $\rho(t) = (0,0)\ \forall t \in \mathbb{R}$ o bien $\rho(t) \neq (0,0)\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Solución : De izquierda a derecha: Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\rho(t_0) = (0,0)$. Se trata entonces de probar que ha de ser $\rho(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En efecto, las funciones $\rho(t)$ y $x(t) \equiv (0,0)$ son ambas soluciones (la primera de ellas por hipótesis) del problema de valores iniciales

$$x' = A(t)x\,, \quad x(t_0) = (0,0)$$

las cuales, por la propiedad de unicidad de solución del mismo[2], han de ser iguales. Luego $\rho(t) \equiv 0$.

De derecha a izquierda: Es evidente que $\rho(t) \equiv (0,0)$ es solución de $x' = A(t)x$. Supongamos entonces

$$\rho(t) = (\rho_1(t), \rho_2(t)) \neq (0,0) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,. \tag{2.9}$$

Construimos la matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \rho_1(t) & -\rho_2(t) \\ \rho_2(t) & \rho_1(t) \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es

$$\det(\Phi(t)) = \rho_1(t)^2 + \rho_2(t)^2 \neq 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

[2]Se trata de un problema de valores iniciales asociado a una ecuación diferencial lineal con coeficientes continuos, ya que por hipótesis $A : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$ es continua

gracias a (2.9). Por tanto, si $\Phi(t)$ fuese una matriz solución entonces

$$\begin{pmatrix} \rho_1(t) \\ \rho_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\rho_2(t) \\ \rho_1(t) \end{pmatrix}$$

serían soluciones linealmente independientes de $x' = A(t)x$. En particular, $\rho(t)$ resolvería la ecuación $x' = A(t)x$ y habríamos concluido. Por tanto, buscamos que la matriz $\Phi(t)$ resuelva una ecuación del tipo $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, para lo cual basta con calcular

$$\begin{aligned} A(t) &= \Phi'(t)\Phi(t)^{-1} = \\ &\begin{pmatrix} \rho_1'(t) & -\rho_2'(t) \\ \rho_2'(t) & \rho_1'(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\rho_1(t)^2 + \rho_2(t)^2} \begin{pmatrix} \rho_1(t) & \rho_2(t) \\ -\rho_2(t) & \rho_1(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\rho_1(t)\rho_1'(t)+\rho_2(t)\rho_2'(t)}{\rho_1(t)^2+\rho_2(t)^2} & \frac{\rho_1'(t)\rho_2(t)-\rho_1(t)\rho_2'(t)}{\rho_1(t)^2+\rho_2(t)^2} \\ \frac{\rho_1(t)\rho_2'(t)-\rho_2(t)\rho_1'(t)}{\rho_1(t)^2+\rho_2(t)^2} & \frac{\rho_2(t)\rho_2'(t)+\rho_1(t)\rho_1'(t)}{\rho_1(t)^2+\rho_2(t)^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego para esta elección de $A(t)$ se tiene que $\rho' = A(t)\rho$.

■

5. Se considera la matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{3t} & \frac{1}{t+1} \\ t+1 & 0 & e^{-3t} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Discute los valores de t para los que Φ puede ser matriz fundamental de una ecuación diferencial lineal homogénea. Halla una matriz fundamental principal en cero.

Solución : Como $\det(\Phi(t)) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(t)$ es matriz fundamental de alguna ecuación lineal homogénea para cualquier $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ en virtud del Ejercicio 3.[3]

Para calcular una matriz fundamental principal en $t = 0$ usaremos el siguiente resultado:

[3]La razón de excluir el punto $t = -1$ hay que buscarla en la correcta definición del dominio de la función $\frac{1}{t+1}$, que interviene como coeficiente de la matriz $\Phi(t)$

Proposición 2. Sean $\Phi(t)$ una matriz fundamental de $x'(t) = A(t)x(t)$ y $C \in M_N(\mathbb{R})$ una matriz de coeficientes constantes con $\det(C) \neq 0$. Entonces

(i) $\Phi(t)C$ es una matriz fundamental de $x'(t) = A(t)x(t)$.

(ii) Si $\Psi(t)$ es otra matriz fundamental de $x'(t) = A(t)x(t)$, entonces existe $C \in M_N(\mathbb{R})$ constante con $\det(C) \neq 0$ tal que

$$\Psi(t) = \Phi(t)C \quad \forall\, t \in I\,.$$

Basta entonces con considerar

$$\Psi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0) \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\,,$$

que es una matriz fundamental en virtud del resultado anterior. Además

$$\Psi(0) = \Phi(0)\Phi^{-1}(0) = \Phi(0)\Phi(0)^{-1} = I_N\,,$$

luego Ψ es una matriz fundamental principal en cero. Calculémosla:

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & \frac{1}{t+1} - e^{3t} & e^{3t} - \frac{1}{t+1} \\ 0 & e^{-3t} & t+1-e^{-3t} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

6. Se considera la matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\frac{\pi}{t}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\frac{\pi}{t}) \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) ¿Para qué intervalos de $\mathbb{R}$ puede ser $\Phi(t)$ matriz fundamental de una ecuación diferencial lineal homogénea?

(b) Construye dicha ecuación.

Solución : (a) Como

$$\det(\Phi(t)) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{t}\right)\cos\left(\frac{\pi}{t}\right),$$

$\Phi(t)$ será matriz fundamental de una ecuación lineal homogénea[4] si

$$\frac{\pi}{t} \neq \left\{k\pi, \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right\} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z},$$

es decir, para cualquier

$$t \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{2}{2k+1}, \frac{1}{k}\right).$$

(b) Se ha de cumplir $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, luego para todo t localizado en algún intervalo de los del apartado anterior se puede despejar

$$\begin{aligned} A(t) &= \Phi'(t)\Phi(t)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{t^2}\cos(\frac{\pi}{t}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{t^2}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{t}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{t})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{t})} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{t^2}\operatorname{cotan}(\frac{\pi}{t}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{t^2}\tan(\frac{\pi}{t}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación satisfecha por $\Phi(t)$ es

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{t^2}\operatorname{cotan}(\frac{\pi}{t}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{t^2}\tan(\frac{\pi}{t}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t).$$

■

7. Sean

$$f_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ e^t \end{pmatrix}, \quad f_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

dos soluciones de $x' = A(t)x$. Se pide:

[4]Nuevamente en virtud del Ejercicio 3

(a) Encontrar $A(t)$ y determinar el conjunto I de valores de t para los que existe solución.

(b) Dado $t_0 \in I$, hallar la matriz fundamental principal en t_0.

Solución : (a) Claramente

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & e^{-t} \\ e^t & \cos(t) \end{pmatrix}$$

es una matriz solución cuyo determinante,

$$\det(\Phi(t)) = \cos(t)^2 - 1 = -\operatorname{sen}(t)^2\,,$$

se anula si y solamente si $t = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Luego $\Phi(t)$ es una matriz fundamental si y solamente si $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. En particular, si $t \neq k\pi$ existe $\Phi(t)^{-1}$. En ese caso podemos despejar $A(t)$ de la identidad $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, de donde concluimos que

$$\begin{aligned} A(t) &= \Phi'(t)\Phi(t)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(t) & -e^{-t} \\ e^t & -\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\operatorname{sen}(t)^2} \begin{pmatrix} -\cos(t) & e^{-t} \\ e^t & -\cos(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{sen}(t)\cos(t)-1}{\operatorname{sen}(t)^2} & \frac{\cos(t)-\operatorname{sen}(t)}{e^t \operatorname{sen}(t)^2} \\ -\frac{e^t(\operatorname{sen}(t)+\cos(t))}{\operatorname{sen}(t)^2} & \frac{\operatorname{sen}(t)\cos(t)+1}{\operatorname{sen}(t)^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

para todo $t \in I = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

(b) Calculamos

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & e^{-t} \\ e^t & \cos(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\operatorname{sen}(t)^2} \begin{pmatrix} -\cos(t_0) & e^{-t_0} \\ e^{t_0} & -\cos(t_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{t_0-t}-\cos(t_0)\cos(t)}{\operatorname{sen}(t_0)^2} & \frac{e^{-t_0}\cos(t)-e^{-t}\cos(t_0)}{\operatorname{sen}(t_0)^2} \\ \frac{e^{t_0}\cos(t)-e^t\cos(t_0)}{\operatorname{sen}(t_0)^2} & \frac{e^{t-t_0}-\cos(t_0)\cos(t)}{\operatorname{sen}(t_0)^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

8. Se considera el problema

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = 2x_1 + x_2 + \cos(t) \\ x_2' = 3x_1 + 4x_2 + t \end{array} \right. , \quad x_1(0) = x_2(0) = 1\,.$$

Se pide:

(a) Comprobar que las funciones

$$f_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}, \quad f_2(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{pmatrix},$$

constituyen un sistema fundamental de soluciones.

(b) Comprobar la fórmula de Jacobi–Liouville.

(c) Encontrar la (única) solución que verifica las condiciones dadas.

Solución : (a) Por un lado es inmediato comprobar que $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son ambas soluciones del correspondiente sistema homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 4x_2 \end{array} \right.$$

o, lo que es lo mismo, que

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix}$$

es una matriz solución del siguiente sistema con coeficientes constantes:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son linealmente independientes ya que

$$\det(\Phi(t)) = \det(f_1(t)|f_2(t)) = 4\,e^{6t} \neq 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Por consiguiente, $f_1(t)$ y $f_2(t)$ forman un sistema fundamental de soluciones de nuestro problema.

(b) La fórmula de Jacobi–Liouville establece la siguiente identidad

$$\det(\Phi(t)) = \det(\Phi(t_0))\, e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{traza}(A(s))\, ds}$$

para cualquier matriz solución $\Phi(t)$[5] y cualquier $t_0 \in I$ fijo.

En nuestro caso
$$A(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
tiene traza$(A) = 6$ y
$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$
es una matriz solución (de hecho es una matriz fundamental) con $\det(\Phi(t)) = 2\,e^{6t}$. Entonces la fórmula de Jacobi–Liouville es satisfecha:
$$\det(\Phi(t_0))\, e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{traza}(A(s))\,ds} = 2\,e^{6t_0}\,e^{6(t-t_0)} = 2\,e^{6t} = \det(\Phi(t))\,.$$

(c) Buscamos en primer lugar una matriz fundamental principal en cero, $\Psi(t)$, para aplicar la fórmula de variación de las constantes:
$$x(t) = \Psi(t)x_0 + \Psi(t)\int_{t_0}^{t} \Psi(s)^{-1}b(s)\,ds\,,$$
donde en nuestro caso $t_0 = 0$, $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es la condición inicial y $b(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix}$ es el vector de términos independientes del sistema a resolver. Para ello consideramos la matriz fundamental $\Phi(t)$ de (2.10) y calculamos
$$\begin{aligned}\Psi(t) &= \Phi(t)\Phi(0)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3e^t - e^{5t} & e^{5t} - e^t \\ 3e^t - 3e^{5t} & 3e^{5t} - e^t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$
Además, necesitamos calcular
$$\Psi(t)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3e^{-t} - e^{-5t} & e^{-5t} - e^{-t} \\ 3e^{-t} - 3e^{-5t} & 3e^{-5t} - e^{-t} \end{pmatrix}.$$
Finalmente
$$\Psi(t)x_0 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix},$$
$$\Psi(t)\Psi(s)^{-1}b(s) = \begin{pmatrix} 2\Big(3e^{t-s} - e^{5(t-s)}\Big)\cos(s) - 2\Big(e^{t-s} - e^{5(t-s)}\Big)s \\ 6\Big(e^{t-s} - e^{5(t-s)}\Big)\cos(s) + 2\Big(3e^{5(t-s)} - e^{t-s}\Big)s \end{pmatrix},$$

[5] No es necesario que sea una matriz fundamental

luego

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3I_1(t) - I_2(t) - I_3(t) + I_4(t) \\ 3I_1(t) - 3I_2(t) - I_3(t) + 3I_4(t) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_0^t e^{t-s}\cos(s)\,ds = \frac{1}{2}(e^t + \mathrm{sen}(t) - \cos(t))\,, \\ I_2(t) &= \int_0^t e^{5(t-s)}\cos(s)\,ds = \frac{1}{26}(5e^{5t} + \mathrm{sen}(t) - 5\cos(t)) \\ I_3(t) &= \int_0^t s\,e^{t-s}\,ds = e^t - t - 1\,, \\ I_4(t) &= \int_0^t s\,e^{5(t-s)}\,ds = \frac{1}{25}(e^{5t} - 5t - 1)\,. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - \frac{99}{325}e^{5t} + \frac{38}{13}\mathrm{sen}(t) - \frac{34}{13}\cos(t) + \frac{8}{5}t + \frac{48}{25} \\ 2e^t - \frac{99}{325}e^{5t} + \frac{38}{13}\mathrm{sen}(t) - \frac{34}{13}\cos(t) + \frac{8}{5}t + \frac{48}{25} \end{pmatrix}.$$

■

9. Sea $A : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{R})$ continua tal que existe $M > 0$ con

$$\|A(t)\| \le M \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Sea $x(t)$ una solución de $x' = A(t)x$.

(a) Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, obtén la ecuación satisfecha por $y_\lambda(t) = e^{-\lambda t}x(t)$.

(b) Demuestra que la función $\varphi(t) = \|y_\lambda(t)\|^2$ es derivable y que

$$-(M+\lambda)\varphi(t) \le \frac{1}{2}\varphi'(t) \le (M-\lambda)\varphi(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

(c) Deduce del apartado anterior la existencia de intervalos de valores de λ para los que el límite cuando $t \to \infty$ de $y_\lambda(t)$ es o bien 0 o bien ∞.

Solución : (a) Claramente

$$y'_\lambda = e^{-\lambda t}(x' - \lambda x) = e^{-\lambda t}A(t)x - \lambda y_\lambda = A(t)y_\lambda - \lambda y_\lambda\,,$$

luego la ecuación diferencial satisfecha por y_λ es

$$y'_\lambda = [A(t) - \lambda I_N]y_\lambda\,. \tag{2.11}$$

(b) Si denotamos por $y^j_\lambda(t)$, $1 \le j \le N$, a las componentes del vector $y_\lambda(t)$, el cuadrado de su norma puede escribirse como

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{N}\left(y^j_\lambda(t)\right)^2,$$

luego la función φ es claramente derivable y

$$\varphi'(t) = 2\sum_{j=1}^{N} y^j_\lambda(t)(y^j_\lambda)'(t) = 2\langle y_\lambda(t), y'_\lambda(t)\rangle\,.$$

Usando entonces la ecuación (2.11) obtenemos

$$\frac{1}{2}\varphi'(t) = y_\lambda(t)^T[A(t) - \lambda I_N]y_\lambda(t)\,.$$

Por un lado

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\varphi'(t) = y_\lambda(t)^T A(t)y_\lambda(t) - \lambda\varphi(t) &\le |y_\lambda(t)^T A(t)y_\lambda(t)| - \lambda\varphi(t)\\ &\le \|y_\lambda(t)\|\|A(t)y_\lambda(t)\| - \lambda\varphi(t)\\ &\le \|A(t)\|\varphi(t) - \lambda\varphi(t) \le (M-\lambda)\varphi(t)\,.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2}\varphi'(t)\right| &\le \|y_\lambda(t)\|\|[A(t) - \lambda I_N]y_\lambda(t)\|\\ &\le \|A(t) - \lambda I_N\|\varphi(t) \le \frac{1}{2}\varphi'(t)\,.\end{aligned}$$

Combinando ambas estimaciones obtenemos el resultado deseado.

(c) Por el apartado (b) sabemos que

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \le 2(M-\lambda)\,,$$

de donde se concluye que

$$\varphi(t) \leq C_1\, e^{2(M-\lambda)t}\,, \quad C_1 > 0\,.$$

Por otra parte

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \geq -2(M+\lambda)\,,$$

luego

$$\varphi(t) \geq C_2\, e^{-2(M+\lambda)t}\,, \quad C_2 > 0\,.$$

Combinando ambas estimaciones obtenemos

$$C_2\, e^{-2(M+\lambda)t} \leq \varphi(t) \leq C_1\, e^{2(M-\lambda)t}\,.$$

Por consiguiente:

- Si $\lambda \in (M, \infty)$ entonces $\text{lím}_{t\to\infty}\{\varphi(t)\} = 0$, luego

$$\lim_{t\to\infty}\{\|y_\lambda(t)\|\} = 0\,.$$

- Si $\lambda \in (-\infty, -M)$ entonces $\text{lím}_{t\to\infty}\{\varphi(t)\} = \infty$, luego

$$\lim_{t\to\infty}\{\|y_\lambda(t)\|\} = \infty\,.$$

■

10. Sea $A : I \to M_N(\mathbb{R})$ continua y consideremos las ecuaciones diferenciales matriciales siguientes:

$$Y'(t) = A(t)Y(t)\,, \tag{2.12}$$

$$Z'(t) = -Z(t)A(t) \tag{2.13}$$

y

$$W'(t) = A(t)W(t) - W(t)A(t)\,, \tag{2.14}$$

donde I es un intervalo real.

(a) Demuestra que cada una de estas ecuaciones admite una única solución una vez prefijada una condición inicial en $t_0 \in I$.

(b) Dadas Y y Z soluciones de (2.12) y (2.13), respectivamente, definidas en I y verificando que $Y(t_0)Z(t_0) = I_N$, demuestra que $W = YZ$ es solución de (2.14) y deduce que, para todo $t \in I$, se tiene que $YZ = I_N$.

(c) Supongamos que para cada $t \in I$ la matriz $A(t)$ es antisimétrica ($A(t)^T = -A(t)$). Sea Y una solución de (2.12) definida en I que satisface que $Y(t_0)$ es una matriz ortogonal. Demuestra que entonces $Y(t)$ es ortogonal para todo $t \in I$.

Solución : (a) Lo hacemos para la ecuación (2.12), entendiendo que para las otras dos el proceso es completamente análogo. Sean

$$Y(t) = (Y_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq N}\,, \quad A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq N}\,,$$

de modo que

$$Y'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}(t) Y_{kj}(t) \quad \forall\, 1 \leq i, j \leq N\,.$$

Definimos el siguiente vector

$$X(t) = \begin{pmatrix} Y_{11}(t) \\ Y_{12}(t) \\ \vdots \\ Y_{1N}(t) \\ Y_{21}(t) \\ \vdots \\ Y_{2N}(t) \\ \vdots \\ Y_{N1}(t) \\ \vdots \\ Y_{NN}(t) \end{pmatrix}.$$

Entonces el problema

$$Y'(t) = A(t)Y(t)\,, \quad Y(t_0) = Y_0 \in M_N(\mathbb{R})\,,$$

es equivalente a

$$X'(t) = B(t)X(t)\,, \quad X(t_0) = X_0 = \begin{pmatrix} Y_{11}(0) \\ Y_{12}(0) \\ \vdots \\ Y_{1N}(0) \\ Y_{21}(0) \\ \vdots \\ Y_{2N}(0) \\ \vdots \\ Y_{N1}(0) \\ \vdots \\ Y_{NN}(0) \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

con $B : I \to M_{N^2}(\mathbb{R})$ continua definida como

$$B(t) = (D_{ij}(t))\,, \quad D_{ij}(t) = \mathrm{diag}(a_{ij}(t))\,.$$

Por tanto, existe una única solución del sistema lineal homogéneo (2.15).

(b) Se tiene que

$$\begin{aligned}(YZ)'(t) &= Y'(t)Z(t) + Y(t)Z'(t) \\ &= A(t)(YZ)(t) + Y(t)(-Z(t)A(t)) \\ &= A(t)(YZ)(t) - (YZ)(t)A(t)\,,\end{aligned}$$

luego $W = YZ$ es solución de (2.14). Consideramos ahora el problema de valores iniciales

$$W'(t) = A(t)W(t) - W(t)A(t)\,, \quad W(t_0) = I_N\,,$$

cuya única solución es $W(t) = I_N$ ya que en ese caso

$$W'(t) = 0_{N\times N} = A(t)I_N - I_N A(t)\,.$$

Como por hipótesis $Y(t_0)Z(t_0) = I_N$, se tiene que $Y(t)Z(t) = I_N$ para todo $t \in I$ por un argumento de unicidad de solución.

(c) Trasponiendo la ecuación (2.12) obtenemos

$$Y'(t)^T = Y(t)^T A(t)^T = -Y(t)^T A(t)\,,$$

por lo que podemos concluir que si Y es solución de (2.12) entonces Y^T es solución de (2.13). Como además $Y(t_0)$ es ortogonal se tiene que $Y(t_0)Y(t_0)^T = I_N$, por lo que podemos aplicar los enunciados (a) y (b) para concluir que, en particular,

$$Y(t)Y(t)^T = I_N \quad \forall\, t \in I$$

o, lo que es lo mismo, que $Y(t)$ es ortogonal para todo $t \in I$.

■

11. Discute razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

 (a) La matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{sen}(t) \\ \mathrm{sen}(t) & 1 \end{pmatrix}$$

 es matriz fundamental de un sistema lineal $x' = A(t)x$ con $A(t)$ continua y definida en $\mathbb{R}$.

 (Septiembre 2003)

 (b) Se considera la ecuación

$$x'' - 2tx' + (t^2 - 1)x = 0\,. \tag{2.16}$$

 El cambio de variable $x(t) = e^{\frac{t^2}{2}}u(t)$ reduce la ecuación (2.16) a una lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

 (Septiembre 2003)

 (c) Las funciones

$$x(t) = \int_0^1 \mathrm{sen}(t^2 + s^2)\, ds\,, \quad y(t) = \int_0^1 \cos(t^2 + s^2)\, ds$$

 forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación $x'' + 4t^2 x = 0$.

 (Diciembre 2002)

Solución : (a) FALSA. Como $\det(\Phi(t)) = 1 - \operatorname{sen}(t)^2 = \cos(t)^2$, la matriz $\Phi(t)$ sólo podrá ser matriz fundamental de $x' = A(t)x$ si

$$t \neq \Big(\frac{1}{2} + k\Big)\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

(b) VERDADERA. Se tiene que

$$x'(t) = e^{\frac{t^2}{2}}(tu(t) + u'(t))\,,$$
$$x''(t) = e^{\frac{t^2}{2}}(t^2u(t) + 2tu'(t) + u(t) + u''(t))\,,$$

por lo que reescrita en términos de la nueva función incógnita $u(t)$ la ecuación resultante es

$$0 = e^{\frac{t^2}{2}}\Big(t^2u(t) + 2tu'(t) + u(t) + u''(t)\Big) - 2te^{\frac{t^2}{2}}\Big(tu(t) + u'(t)\Big) + e^{\frac{t^2}{2}}(t^2-1)u(t) = e^{\frac{t^2}{2}}u''(t)\,,$$

de donde deducimos que la ecuación original se reduce a

$$u'' = 0\,,$$

que es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

(c) FALSA. Basta con comprobar que ni siquiera son soluciones:

$$x'(t) = 2t\int_0^1 \cos(t^2+s^2)\,ds = 2ty(t)\,,$$
$$x''(t) = 2\int_0^1 \cos(t^2+s^2)\,ds - 4t^2\int_0^1 \operatorname{sen}(t^2+s^2)\,ds = 2(y(t) - 2t^2x(t))\,,$$
$$y'(t) = -2t\int_0^1 \operatorname{sen}(t^2+s^2)\,ds = -2tx(t)\,,$$
$$y''(t) = -2\int_0^1 \operatorname{sen}(t^2+s^2)\,ds - 4t^2\int_0^1 \cos(t^2+s^2)\,ds = -2(x(t) + 2t^2y(t))\,.$$

Por tanto,

$$x'' + 4t^2x = 2y \neq 0\,, \quad y'' + 4t^2y = -2x \neq 0\,.$$

■

CAPÍTULO 3

La ecuación lineal II: forma canónica de Jordan, exponencial de una matriz y fórmula de variación de las constantes

1. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

(a) $x' = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}$,

(b) $x' = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ -9 & -4 & -12 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(c) $x' = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$,

(d) $x' = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 14 & -13 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix} x$.

Obtén además las soluciones de los problemas de valores iniciales correspondientes a los sistemas (b) y (c) con condiciones iniciales

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente.

Solución : (a) Escribimos $x' = A(t)x + b(t)$ con

$$A(t) = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}.$$

Como $A(t) \equiv A$ tiene coeficientes constantes, podemos obtener explícitamente una matriz fundamental de la ecuación homogénea y así resolver la ecuación completa mediante la fórmula de variación de las constantes. Los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 2$ con subespacios propios asociados

$$E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

respectivamente. Por tanto, la matriz A es diagonalizable y satisface que $A = PDP^{-1}$ con

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Phi(t) = e^{At} &= Pe^{Dt}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{8}{3}\,e^{-t} - \frac{5}{3}\,e^{2t} & \frac{2}{3}\,e^{-t} + e^t - \frac{5}{3}\,e^{2t} & -\frac{16}{3}\,e^{-t} + 2\,e^t + \frac{10}{3}\,e^{2t} \\ -\frac{4}{3}\,e^{-t} + \frac{4}{3}\,e^{2t} & -\frac{1}{3}\,e^{-t} + \frac{4}{3}\,e^{2t} & \frac{8}{3}\,e^{-t} - \frac{8}{3}\,e^{2t} \\ \frac{2}{3}\,e^{-t} - \frac{2}{3}\,e^{2t} & \frac{1}{6}\,e^{-t} + \frac{1}{2}\,e^t - \frac{2}{3}\,e^{2t} & -\frac{4}{3}\,e^{-t} + e^t + \frac{4}{3}\,e^{2t} \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental (principal en $t=0$) de la ecuación homogénea. Por consiguiente, si asumimos $x(0)=x_0$ se tiene

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}(0,0,\mathrm{sen}(s))^T\,ds \\
&= \begin{pmatrix} \frac{8}{3}e^{-t}-\frac{5}{3}e^{2t} & \frac{2}{3}e^{-t}+e^{t}-\frac{5}{3}e^{2t} & -\frac{16}{3}e^{-t}+2e^{t}+\frac{10}{3}e^{2t} \\ -\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{4}{3}e^{2t} & -\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{4}{3}e^{2t} & \frac{8}{3}e^{-t}-\frac{8}{3}e^{2t} \\ \frac{2}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{6}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{t}-\frac{2}{3}e^{2t} & -\frac{4}{3}e^{-t}+e^{t}+\frac{4}{3}e^{2t} \end{pmatrix} x_0 \\
&\quad + \int_0^t \begin{pmatrix} -\frac{16}{3}e^{-(t-s)}+2e^{t-s}+\frac{10}{3}e^{2(t-s)} \\ \frac{8}{3}e^{-(t-s)}-\frac{8}{3}e^{2(t-s)} \\ -\frac{4}{3}e^{-(t-s)}+e^{t-s}+\frac{4}{3}e^{2(t-s)} \end{pmatrix} \mathrm{sen}(s)\,ds \\
&= \begin{pmatrix} \frac{8}{3}e^{-t}-\frac{5}{3}e^{2t} & \frac{2}{3}e^{-t}+e^{t}-\frac{5}{3}e^{2t} & -\frac{16}{3}e^{-t}+2e^{t}+\frac{10}{3}e^{2t} \\ -\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{4}{3}e^{2t} & -\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{4}{3}e^{2t} & \frac{8}{3}e^{-t}-\frac{8}{3}e^{2t} \\ \frac{2}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{6}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{t}-\frac{2}{3}e^{2t} & -\frac{4}{3}e^{-t}+e^{t}+\frac{4}{3}e^{2t} \end{pmatrix} x_0 \\
&\qquad + \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-t}(e^{t}-1)^2(16+5e^{t}) \\ \frac{4}{3}e^{-t}(e^{3t}+e^{t}-2) \\ \frac{2}{3}e^{2t}+e^{t}+\frac{4}{3}e^{-t}-3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(b) Escribimos $x'=A(t)x+b(t)$ con

$$
A(t)=\begin{pmatrix} 10 & 4 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ -9 & -4 & -12 \end{pmatrix}, \quad b(t)=\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Procediendo como en (a), los valores propios de A son $\lambda_1=1$ (doble) y $\lambda_2=-1$, con subespacios propios asociados

$$
E_1=\mathrm{Ker}[A-I]=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_2=\mathrm{Ker}[A+I]=\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle,
$$

respectivamente. La forma canónica de Jordan de la matriz A es entonces

$$
J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Para encontrar la matriz de paso P que satisface $e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}$ calculamos

$$
\mathrm{Ker}[(A-I)^2]=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.
$$

Elegimos entonces un vector

$$P_1 \in \mathrm{Ker}[(A-I)^2] \setminus \mathrm{Ker}[A-I]\,,$$

por ejemplo $(1,-2,0)^T$, como primera columna de P. La segunda columna de P, llamémosla P_2, viene dada por

$$P_2 = (A-I)P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Finalmente elegimos $P_3 \in \mathrm{Ker}[A+I]$ como tercera columna de P, por ejemplo

$$P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Por consiguiente

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} , \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} .$$

Para calcular la matriz exponencial de Jt consideramos la siguiente descomposición

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

de modo que

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ te^t & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} .$$

Luego

$$e^{At} = \begin{pmatrix} (t+5)e^t - 4e^{-t} & 2(e^t - e^{-t}) & (t+6)e^t - 6e^{-t} \\ (t+2)e^t - 2e^{-t} & 2e^t - e^{-t} & (t+3)e^t - 3e^{-t} \\ 4e^{-t} - (t+4)e^t & 2(e^{-t} - e^t) & 6e^{-t} - (t+5)e^t \end{pmatrix} .$$

Empleando la fórmula de variación de las constantes con $x(t_0) = x_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)^T$ obtenemos finalmente

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}(s,0,0)^T\, ds \\
&= \begin{pmatrix} (t-t_0+5)e^{t-t_0} - 4e^{t_0-t} & 2(e^{t-t_0} - e^{t_0-t}) & (t-t_0+6)e^{t-t_0} - 6e^{t_0-t} \\ (t-t_0+2)e^{t-t_0} - 2e^{t_0-t} & 2e^{t-t_0} - e^{t_0-t} & (t-t_0+3)e^{t-t_0} - 3e^{t_0-t} \\ 4e^{t_0-t} - (t-t_0+4)e^{t-t_0} & 2(e^{t_0-t} - e^{t-t_0}) & 6e^{t_0-t} - (t-t_0+5)e^{t-t_0} \end{pmatrix} x_0 \\
&\qquad + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} s[(t-s+5)e^{t-s} - 4e^{s-t}] \\ s[(t-s+2)e^{t-s} - 2e^{s-t}] \\ s[4e^{s-t} - (t-s+4)e^{t-s}] \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} (t-t_0+5)e^{t-t_0} - 4e^{t_0-t} & 2(e^{t-t_0} - e^{t_0-t}) & (t-t_0+6)e^{t-t_0} - 6e^{t_0-t} \\ (t-t_0+2)e^{t-t_0} - 2e^{t_0-t} & 2e^{t-t_0} - e^{t_0-t} & (t-t_0+3)e^{t-t_0} - 3e^{t_0-t} \\ 4e^{t_0-t} - (t-t_0+4)e^{t-t_0} & 2(e^{t_0-t} - e^{t-t_0}) & 6e^{t_0-t} - (t-t_0+5)e^{t-t_0} \end{pmatrix} x_0 \\
&\quad + \begin{pmatrix} ((t_0+1)t + 3t_0 + 3 - t_0^2)e^{t-t_0} - 4(1-t_0)e^{t_0-t} - 8t + 1 \\ ((t_0+1)t - t_0^2)e^{t-t_0} + 2(t_0-1)e^{t_0-t} - 3t + 2 \\ (t_0^2 - (t+2)t_0 - t - 2)e^{t-t_0} + 4(1-t_0)e^{t_0-t} + 7t - 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Resolviendo para el dato inicial $x(0) = (0,0,1)^T$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \begin{pmatrix} (t+5)e^{t} - 4e^{-t} & 2(e^{t} - e^{-t}) & (t+6)e^{t} - 6e^{-t} \\ (t+2)e^{t} - 2e^{-t} & 2e^{t} - e^{-t} & (t+3)e^{t} - 3e^{-t} \\ 4e^{-t} - (t+4)e^{t} & 2(e^{-t} - e^{t}) & 6e^{-t} - (t+5)e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\qquad + \begin{pmatrix} (t+3)e^{t} - 4e^{-t} - 8t + 1 \\ te^{t} - 2e^{-t} - 3t + 2 \\ -(t+2)e^{t} + 4e^{-t} + 7t - 2 \end{pmatrix} \\
&\qquad\qquad = \begin{pmatrix} (2t+9)e^{t} - 10e^{-t} - 8t + 1 \\ (2t+3)e^{t} - 5e^{-t} - 3t + 2 \\ -(2t+7)e^{t} + 10e^{-t} + 7t - 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(c) En este caso

$$
J = A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = 3I_2 + 5M, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Es fácilmente comprobable que

$$
M^{2n} = -I_2, \quad M^{2n+1} = (-1)^n M, \quad n \in \mathbb{N}.
$$

Por tanto, una matriz fundamental de nuestra ecuación diferencial es

$$e^{Jt} = e^{3tI_2+5tM} = e^{3t}e^{5tM} = e^{3t}\Big(\cos(5t)I_2 + \operatorname{sen}(5t)M\Big)$$
$$= e^{3t}\begin{pmatrix} \cos(5t) & \operatorname{sen}(5t) \\ -\operatorname{sen}(5t) & \cos(5t) \end{pmatrix}.$$

Aplicando la fórmula de variación de las constantes con $x(t_0) = x_0 = (x_0^1, x_0^2)^T$ obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}(e^{-s},0)^T\, ds \\ &= e^{3(t-t_0)}\begin{pmatrix} \cos(5(t-t_0)) & \operatorname{sen}(5(t-t_0)) \\ -\operatorname{sen}(5(t-t_0)) & \cos(5(t-t_0)) \end{pmatrix} x_0 \\ &\quad + \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} e^{3t-4s}\cos(5(t-s)) \\ -e^{3t-4s}\operatorname{sen}(5(t-s)) \end{pmatrix} ds \\ &= e^{3(t-t_0)}\begin{pmatrix} \cos(5(t-t_0)) & \operatorname{sen}(5(t-t_0)) \\ -\operatorname{sen}(5(t-t_0)) & \cos(5(t-t_0)) \end{pmatrix} x_0 \\ &\quad + \frac{1}{41}\begin{pmatrix} e^{3t}(5\sin(5t)+4\cos(5t))-4 \\ e^{3t}(5\cos(5t)-4\operatorname{sen}(5t))-5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Resolviendo finalmente para el dato inicial $x(0) = (0,1)^T$ obtenemos

$$x(t) \;=\; e^{3t}\begin{pmatrix} \cos(5t) & \operatorname{sen}(5t) \\ -\operatorname{sen}(5t) & \cos(5t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} e^{3t}\operatorname{sen}(5t) \\ e^{3t}\cos(5t) \end{pmatrix}.$$

(d) Escribimos $x' = A(t)x$ con

$$A(t) = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 14 & -13 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

El único valor propio de A es $\lambda = -1$ (triple), que tiene como subespacio propio asociado

$$E = \operatorname{Ker}[A+I] = \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

La forma canónica de Jordan de la matriz A es entonces

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar la matriz de paso P que satisface $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$ observamos que $\mathrm{Ker}[(A+I)^2] = \mathbb{R}^3$. Elegimos

$$P_1 \in \mathrm{Ker}[(A+I)^2] \setminus \mathrm{Ker}[A-I]\,,$$

por ejemplo $(1,0,0)^T$, como primera columna de P. La segunda columna de P, llamémosla P_2, viene dada por

$$\mathrm{Ker}[A+I] \ni P_2 = (A+I)P_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Finalmente elegimos $P_3 \in \mathrm{Ker}[A+I]$ como tercera columna de P, por ejemplo

$$P_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Por consiguiente

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} , \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{6}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & \frac{1}{14} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} .$$

Para calcular la matriz exponencial de Jt consideramos la siguiente descomposición

$$J = -I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

de modo que

$$e^{Jt} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} .$$

Luego

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t}(1+7t) & -6te^{-t} & 5te^{-t} \\ 14te^{-t} & e^{-t}(1-12t) & 10te^{-t} \\ 7te^{-t} & -6te^{-t} & e^{-t}(1+5t) \end{pmatrix} .$$

Entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)}x_0 \\ &= \begin{pmatrix} e^{t_0-t}(1+7(t-t_0)) & -6(t-t_0)e^{t_0-t} & 5(t-t_0)e^{t_0-t} \\ 14(t-t_0)e^{t_0-t} & e^{t_0-t}(1-12(t-t_0)) & 10(t-t_0)e^{t_0-t} \\ 7(t-t_0)e^{t_0-t} & -6(t-t_0)e^{t_0-t} & e^{t_0-t}(1+5(t-t_0)) \end{pmatrix} x_0 . \end{aligned}$$

■

2. Halla una base del espacio vectorial de soluciones del sistema $x' = A_i\, x$, $1 \leq i \leq 3$, en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (c) $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(Febrero 1992).

Solución : (a) En este caso podemos descomponer la matriz de coeficientes como suma de dos matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

una de ellas diagonal y la otra nilpotente. Entonces

$$e^{A_1 t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de soluciones.

(b) En este caso la forma canónica de Jordan asociada a A_2 es $J_2 = A_2$ y la matriz de paso (para la semejanza) es $P = I_2$. Entonces

$$\begin{aligned} e^{A_2 t} = e^{J_2 t} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} J_2^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} (-1)^n I_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n J_2 \\ &= \cos(t) I_2 + \operatorname{sen}(t) J_2 = \begin{pmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de soluciones.

(c) Llamemos $\Phi(t)$ a la matriz fundamental que se construye a partir de la base obtenida en el apartado (a), es decir,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Es inmediato comprobar que las matrices $\Phi(t)^T$ y A_3 conmutan. Teniendo en cuenta entonces que $A_3 = A_1^T$ se tiene que

$$\left(\Phi(t)^T\right)' = \Phi'(t)^T = [A_1\Phi(t)]^T = \Phi(t)^T A_1^T = \Phi(t)^T A_3 = A_3\Phi(t)^T,$$

luego

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de soluciones.

■

3. Sea $A : I \to M_N(\mathbb{R})$ continua tal que $A(t)A(s) = A(s)A(t)$. Demuestra los siguientes enunciados:

   (a) $A(t)$ y $\int_0^t A(s)\,ds$ conmutan.

   (b) Si $A \in C^1(I)$ entonces A y A' conmutan.

   (c) Si $A \in C^1(I)$ entonces

   $$\frac{d}{dt}e^{A(t)} = A'(t)\,e^{A(t)} = e^{A(t)}A'(t).$$

   (d) Como consecuencia del apartado anterior, demuestra que si A y B conmutan entonces

   $$e^{A+B} = e^A e^B.$$

(e) Si $A(t)$ y $\int_0^t A(s)\,ds$ conmutan, entonces $F(t) = e^{\int_0^t A(s)\,ds}$ es una matriz fundamental de $x' = A(t)x$. Calcula la matriz fundamental del sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es

$$A(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ -t & t^2 \end{pmatrix}.$$

Solución : (a) Sea $P : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = t$ una partición del intervalo $[0, t]$ y denotemos por $S(A, P)$ a la correspondiente suma de Riemann:

$$S(A,P) = \sum_{k=0}^{n-1} A(s_k)|t_{k+1} - t_k|\,,$$

con $s_k \in (t_k, t_{k+1})$. Como por hipótesis $A(t)A(s) = A(s)A(t)$, se tiene que $A(t)S(A,P) = S(A,P)A(t)$. Haciendo entonces tender a cero la norma de la partición [1] obtenemos

$$\|P\| \to 0 \Rightarrow \{S(A,P)\} \to \int_0^t A(s)\,ds\,.$$

Por tanto,

$$A(t)\int_0^t A(s)\,ds = \Big(\int_0^t A(s)\,ds\Big)A(t)\,.$$

(b) Es evidente que podemos escribir

$$A'(t) = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{A(t+h) - A(t)}{h}\right\},$$

ya que esta propiedad es cierta para cada uno de los coeficientes de la matriz $A(t)$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} A(t)A'(t) &= A(t)\lim_{h\to 0}\left\{\frac{A(t+h) - A(t)}{h}\right\} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{A(t)\left(\frac{A(t+h) - A(t)}{h}\right)\right\} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{A(t+h) - A(t)}{h}\right\}A(t) = A'(t)A(t)\,, \end{aligned}$$

[1] $\|P\| = \text{máx}\{|t_{k+1} - t_k|\,,\ k = 0, 1, \ldots, n-1\}$

para lo que hemos vuelto a usar la hipótesis general

$$A(t)A(s) = A(s)A(t) \quad \forall\, t, s \in I\,.$$

(c) Haremos uso de la siguiente

Proposición 3. Sea $I \subset \mathbb{R}$ acotado y $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de clase $C^1(I)$. Supongamos que la sucesión de derivadas $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente hacia una función g y que existe $t_0 \in I$ tal que la sucesión $\{f_n(t_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Entonces $\{f_n\} \to f$ uniformemente cuando $n \to \infty$, f es de clase $C^1(I)$ y $f' = g$.

Demostración. Llamemos α al límite de la sucesión $\{f_n(t_0)\}$ cuando $n \to \infty$. Definimos

$$f(t) := \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds + \alpha\,.$$

Entonces claramente $f \in C^1(I)$ y, en virtud del teorema fundamental del cálculo, $f' = g$ (que es una función continua por ser límite uniforme de una sucesión de funciones continuas). Para comprobar que $\{f_n\} \to f$ uniformemente cuando $n \to \infty$ escribimos

$$f_n(t) = \int_{t_0}^{t} f_n'(s)\,ds + f_n(t_0)\,. \tag{3.1}$$

Usando la convergencia uniforme de la sucesión de derivadas se tiene que

$$\int_{t_0}^{t} f_n'(s)\,ds \to \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds$$

cuando $n \to \infty$. Por otro lado $\lim_{n\to\infty}\{f_n(t_0)\} = \alpha = f(t_0)$, por lo que pasando al límite $n \to \infty$ en la ecuación (3.1) obtenemos que

$$\{f_n(t)\} \to f \quad \text{puntualmente cuando } n \to \infty\,.$$

Estudiamos finalmente la convergencia uniforme de $\{f_n\}$. Se tiene

$$\begin{aligned} f(t) - f_n(t) &= \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds + \alpha - f_n(t) \\ &= \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds + \alpha - \left(\int_{t_0}^{t} f_n'(s)\,ds + f_n(t_0)\right)\,, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}|f_n(t)-f(t)| &\le \int_{t_0}^{t} |f_n'(s)-g(s)|\,ds + |f_n(t_0)-\alpha| \\ &\le \max_{t\in I}\{|f_n'(t)-g(t)|\}|t-t_0| + |f_n(t_0)-\alpha| \to 0\,, \quad n\to\infty\,.\end{aligned}$$

■

Para cada $t \in I$,

$$e^{A(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(t)^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{A(t)^k}{k!} \right\}.$$

Denotamos por $\{S_n(t)\}$ a la sucesión de sumas parciales de $e^{A(t)}$:

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A(t)^k}{k!}\,.$$

Un simple argumento inductivo nos permite afirmar que

$$\Big(A(t)^k\Big)' = kA'(t)A(t)^{k-1}\,.$$

En efecto: eesta condición es trivialmente satisfecha para $k=1$. Suponiéndola cierta para $k-1$, se tiene que

$$\begin{aligned}\Big(A(t)^k\Big)' &= \Big(A(t)A(t)^{k-1}\Big)' \\ &= A'(t)A(t)^{k-1} + A(t)(k-1)A'(t)A(t)^{k-2} = kA'(t)A(t)^{k-1}\,,\end{aligned}$$

donde hemos usado la propiedad de conmutación demostrada en (b). Entonces tenemos

$$\begin{aligned}S_n'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Big(A(t)^k\Big)'}{k!} &= \sum_{k=1}^{n} A'(t)\,\frac{A(t)^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= A'(t)S_{n-1}(t) = S_{n-1}(t)A'(t)\,, \quad (3.2)\end{aligned}$$

ya que $A(t)$ y $A'(t)$ conmutan (nuevamente conforme a lo probado en (b)). Sea finalmente $J \subset I$ un intervalo compacto. Comprobaremos para concluir el ejercicio que la restricción de $e^{A(t)}$ a J es derivable y $\frac{d}{dt}\left(e^{A(t)}\right) = A'(t)\, e^{A(t)}$. Para ello estimamos

$$\begin{aligned}\|S_n'(t) - A'(t)\, e^{A(t)}\| &= \|A'(t) S_{n-1}(t) - A'(t) e^{A(t)}\| \\ &\leq \|A'(t)\| \|S_{n-1}(t) - e^{A(t)}\| \leq C_J \|S_{n-1}(t) - e^{A(t)}\|\,,\end{aligned}$$

con $\|A'(t)\| \leq C_J$ para todo $t \in J$ (ya que A' es continua sobre un compacto y, por tanto, acotada). Por otro lado

$$\begin{aligned}\left\|S_n(t) - e^{A(t)}\right\| &= \left\|\sum_{k=0}^{n} \frac{A(t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A(t)^k}{k!}\right\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{A(t)^k}{k!}\right\| \\ &= \left\|\lim_{m\to\infty,\, m>n+1} \left\{\sum_{k=n+1}^{m} \frac{A(t)^k}{k!}\right\}\right\| \leq \lim_{m\to\infty} \left\{\sum_{k=n+1}^{m} \left\|\frac{A(t)^k}{k!}\right\|\right\} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\|A(t)\|^k}{k!} \leq \frac{M_J^k}{k!} \to 0\,, \quad n \to \infty\,,\end{aligned}$$

donde $\|A(t)\| \leq M_J$ para todo $t \in J$ (ya que A es continua sobre un compacto y, por tanto, acotada). Por tanto, se ha probado que $\{S_n'(t)\} \to A'(t)\, e^{A(t)}$ cuando $n \to \infty$, uniformemente en J (en cada componente). Además es claro que, por la propia definición de exponencial de una matriz, $\{S_n(t)\} \to e^{A(t)}$ cuando $n \to \infty$ puntualmente. Estamos entonces en condiciones de aplicar la Proposición 3 para concluir que

$$\frac{d}{dt}\left(e^{A(t)}\right) = A'(t)\, e^{A(t)}\,.$$

Una argumentación completamente análoga permite concluir también que

$$\frac{d}{dt}\left(e^{A(t)}\right) = e^{A(t)} A'(t)\,,$$

sin más que proceder de la forma ya conocida a partir de la identidad conmutada $S_n'(t) = S_{n-1}(t) A'(t)$ de (3.2).

(d) Definimos $A(t) := tA + B$, $t \in \mathbb{R}$. Como A y B conmutan por hipótesis, se tiene que

$$\begin{aligned}A(t)A(s) &= (tA+B)(sA+B) = tsA^2 + tAB + sBA + B^2 \\ &= stA^2 + tBA + sAB + B^2 = (sA+B)(tA+B) = A(s)A(t)\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Definimos ahora $\Psi(t) := e^{A(t)} = e^{tA+B}$, de donde se deduce que

$$\Psi'(t) = \left(e^{tA+B}\right)' = A\,e^{tA+B} = A\Psi(t)$$

usando (c), lo cual quiere decir que $\Psi(t)$ es una matriz solución de la ecuación lineal homogénea $x' = Ax$. Como también

$$\begin{aligned}\det(\Psi(t)) &= \det(\Psi(0))\,e^{\int_0^t \mathrm{traza}(A(s))\,ds} = \det(e^B)\,e^{\int_0^t \mathrm{traza}(sA+B)\,ds}\\ &= e^{\mathrm{traza}(B)(1+t)}\,e^{\int_0^t \mathrm{traza}(sA)\,ds} = e^{\mathrm{traza}(B)(1+t)+\frac{1}{2}\mathrm{traza}(A)\,t^2} > 0\end{aligned}$$

en virtud de la fórmula de Jacobi–Liouville, $\Psi(t)$ es además una matriz fundamental de $x' = Ax$. Pero es sabido que e^{At} es también una matriz fundamental de $x' = Ax$, luego ha de existir una matriz regular C con coeficientes constantes tal que $\Psi(t) = e^{At}C$ para todo $t \in \mathbb{R}$. De evaluar esta expresión en $t = 0$ se desprende que

$$e^B = \Psi(0) = C\,,$$

luego ha de ser

$$e^{tA+B} = e^{At}\,e^B\,.$$

Evaluando finalmente en $t = 1$ la última expresión obtenemos el resultado esperado.

(e) Definimos $B(t) := \int_0^t A(s)\,ds$, expresión de la cual se deduce que $B'(t) = A(t)$ en virtud del teorema fundamental del cálculo, por lo que podemos afirmar que $B \in C^1(I)$. Además se tiene que $B(t)$ y $B'(t)$ conmutan. Procediendo entonces como en (c) obtenemos

$$F'(t) = \frac{d}{dt}e^{B(t)} = B'(t)\,e^{B(t)} = A(t)\,e^{B(t)} = A(t)F(t)\,.$$

Como también

$$\det(e^{B(t)}) = \det(e^{B(0)})\,e^{\int_0^t \mathrm{traza}(A(s))\,ds} = e^{\int_0^t \mathrm{traza}(A(s))\,ds} > 0 \quad \forall\, t \in I\,,$$

se concluye que $F(t)$ es una matriz fundamental de $x' = A(t)x$ (además, se puede comprobar fácilmente que es principal en cero).

En nuestro caso

$$\int_0^t A(s)\,ds = \begin{pmatrix} \frac{t^3}{3} & \frac{t^2}{2} \\ -\frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \end{pmatrix}.$$

Las matrices $A(t)$ e $\int_0^t A(s)\,ds$ conmutan, por lo cual basta con calcular

$$F(t) = e^{\begin{pmatrix} \frac{t^3}{3} & \frac{t^2}{2} \\ -\frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{\frac{t^3}{3}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{t^3}{3}} \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 0 & \frac{t^2}{2} \\ -\frac{t^2}{2} & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\frac{t^3}{3}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{t^3}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{t^2}{2}) & \operatorname{sen}(\frac{t^2}{2}) \\ -\operatorname{sen}(\frac{t^2}{2}) & \cos(\frac{t^2}{2}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\frac{t^3}{3}} \cos(\frac{t^2}{2}) & e^{\frac{t^3}{3}} \operatorname{sen}(\frac{t^2}{2}) \\ -e^{\frac{t^3}{3}} \operatorname{sen}(\frac{t^2}{2}) & e^{\frac{t^3}{3}} \cos(\frac{t^2}{2}) \end{pmatrix}.$$

■

4. Se considera la ecuación diferencial lineal $x' = Ax$ con $A \in M_N(\mathbb{R})$. Demuestra que si Φ es una matriz solución de dicha ecuación, también lo es $\Phi^{(m)}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. ¿Se puede asegurar que si Φ es una matriz fundamental de la ecuación, entonces $\Phi^{(m)}$ también lo es? Proporciona un ejemplo que justifique la respuesta. Demuestra también que si A es una matriz nilpotente, entonces $\Phi^{(p)} = 0$ para cualquier p tal que $A^p = 0$ y, como consecuencia, todos los coeficientes de $\Phi(t)$ son polinomios.

Solución : Razonamos por inducción. En efecto, Φ es una matriz solución de $x' = Ax$ por hipótesis y admitimos (hipótesis de inducción) que $\Phi^{(m-1)}$ también lo es, es decir,

$$\left(\Phi^{(m-1)}\right)' = A\Phi^{(m-1)}.$$

Entonces

$$\left(\Phi^{(m)}\right)' = \left[\left(\Phi^{(m-1)}\right)'\right]' = \left[A\Phi^{(m-1)}\right]' = A\Phi^{(m)},$$

luego $\Phi^{(m)}$ también es una matriz solución de $x' = Ax$.

No se puede asegurar que si Φ es matriz fundamental de $x' = Ax$ entonces $\Phi^{(m)}$ también lo es. En efecto, si $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ y la matriz A no es invertible se deduce inmediatamente que tampoco lo es

Φ'. Sirva como ejemplo la ecuación $x' = 0$, de la que $\Phi(t) = I_N$ es la única matriz fundamental principal mientras que obviamente $\Phi'(t) = 0_{N\times N}$ no es matriz fundamental.

Sean finalmente A una matriz nilpotente para la que $A^p = 0$ y Φ una matriz solución de $x' = Ax$. Entonces

$$\Phi^{(p)}(t) = A\Phi^{(p-1)}(t) = A^2\Phi^{(p-2)}(t) = \cdots = A^p\Phi(t) = 0_{N\times N}\,.$$

Para ver que todos los coeficientes de $\Phi(t)$ son polinomios basta con hacer notar que las soluciones de la ecuación son todas de la forma

$$x(t) = e^{At}x_0\,, \quad x_0 \in \mathbb{R}^N\,,$$

con la particularidad de que en nuestro caso e^{At} viene dada por una suma finita ya que, a partir de la p–ésima, todas las potencias de A son nulas. Es decir, toda solución es polinómica:

$$x(t) = x_0 + (Ax_0)t + \left(\frac{A^2}{2}x_0\right)t^2 + \ldots \left(\frac{A^{p-1}}{(p-1)!}x_0\right)t^{p-1}\,,$$

luego todos los coeficientes de $\Phi(t)$ son polinomios.

■

5. Sea $A \in M_N(\mathbb{R})$ y consideremos la ecuación diferencial matricial

$$X' = AX - XA \tag{3.3}$$

con la condición inicial $X(0) = X_0 \in M_N(\mathbb{R})$. Se pide:

(a) Demostrar que el problema de valores iniciales anterior tiene una única solución definida en $\mathbb{R}$.

(b) Demostrar que el problema de valores iniciales anterior es equivalente a la ecuación integral

$$X(t) = e^{At}X_0 - \int_0^t e^{A(t-s)}X(s)A\,ds\,,$$

donde $X : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{R})$ es continua.

(c) Se define la sucesión

$$X_{n+1}(t) = e^{At}X_0 - \int_0^t e^{A(t-s)}X_n(s)A\,ds$$

para $t \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$ y donde $X_0(t) = e^{At}X_0$. Demostrar que X_n converge a la solución del problema de valores iniciales y que la convergencia es uniforme sobre compactos.

(d) Se efectúa en la ecuación (3.3) el cambio de variable

$$X(t) = Y(t)\,e^{-At}\,.$$

Resolver la ecuación en Y y obtener como consecuencia una expresión explícita de la solución del problema de valores iniciales para la ecuación (3.3).

(e) Supongamos que los valores propios de A están en el eje imaginario y son simples. Demostrar entonces que todas las soluciones de (3.3) están acotadas en $(-\infty, \infty)$.

(Febrero 1994).

Solución : (a) Se trata simplemente de reescribir el problema de valores iniciales asociado a la ecuación (3.3) como un problema lineal en $\mathbb{R}^{N^2}$ y aplicar entonces el resultado conocido de existencia y unicidad de soluciones al sistema lineal de coeficientes constantes resultante.

(b) Sea $X(t) = (X_1(t)|\ldots|X_N(t))$ una solución de (3.3) que satisface $X(0) = X_0$, donde $X_j(t)$, $1 \leq j \leq N$, representan las columnas de la matriz solución $X(t)$. Claramente $X_j' = AX_j - XA_j$, $1 \leq j \leq N$. Entendiendo entonces $b(t) = -X(t)A$ como la matriz de términos independientes del sistema y aplicando la fórmula de variación de las constantes obtenemos

$$X_j(t) = e^{At}(X_0)_j - \int_0^t e^{A(t-s)}\Big(X(s)A\Big)_j\,ds\,,$$

por lo que concluimos que $X(t)$ también resuelve la ecuación integral. Recíprocamente, si partimos ahora de una solución $X(t)$ de la ecuación integral

$$X(t) = e^{At}X_0 - \int_0^t e^{A(t-s)}X(s)A\,ds = e^{At}X_0 - e^{At}\int_0^t e^{-As}X(s)A\,ds$$

y derivamos se obtiene

$$
\begin{aligned}
X'(t) &= Ae^{At}X_0 - Ae^{At}\int_0^t e^{-As}X(s)A\,ds - e^{At}\left(e^{-At}X(t)A\right)\\
&= A\left(e^{At}X_0 - e^{At}\int_0^t e^{-As}X(s)A\,ds\right) - X(t)A = AX(t) - X(t)A\,,
\end{aligned}
$$

donde hemos usado el apartado (c) del Ejercicio 3 y el teorema fundamental del cálculo integral.

(c) Claramente $X_0(t)$ está bien definida y es continua. Supuesto que $X_n(t)$ está bien definida y es continua en $[0,t]$ entonces $X_{n+1}(t)$ también está bien definida y es continua en $[0,t]$, ya que

$$
\left\| \int_0^t e^{A(t-s)}X_n(s)A\,ds \right\| \le \max_{0\le s\le t}\{\|X_n(s)\|\}\|A\| \int_0^t e^{\|A\|(t-s)}\,ds < \infty\,.
$$

Estudiamos a continuación la convergencia uniforme de la sucesión de iterantes de Picard sobre compactos $[0,T]$ de $[0,\infty)$. Aplicando el principio de inducción se puede demostrar fácilmente que

$$
\|X_{n+1}(t) - X_n(t)\| \le \frac{\|X_0\|\|A\|^{n+1}}{(n+1)!}\,e^{\|A\|t}t^{n+1} \tag{3.4}
$$

para todo $t\in[0,T]$. En efecto, si evaluamos en primer lugar las dos primeras diferencias $X_1(t)-X_0(t)$ y $X_2(t)-X_1(t)$ ya podemos intuir que la cota que aparece en el segundo miembro de (3.4) es la adecuada:

$$
\begin{aligned}
\|X_1(t)-X_0(t)\| &= \left\|\int_0^t e^{A(t-s)}X_0(s)A\,ds\right\|\\
&\le \int_0^t e^{\|A\|(t-s)}\|X_0(s)\|\|A\|\,ds \le \int_0^t e^{\|A\|t}\|X_0\|\|A\|\,ds\\
&= e^{\|A\|t}\|A\|\|X_0\|t\,,\\
\|X_2(t)-X_1(t)\| &= \left\|\int_0^t e^{A(t-s)}(X_1(s)-X_0(s))A\,ds\right\|\\
&\le \int_0^t e^{\|A\|(t-s)}\|X_1(s)-X_0(s)\|\|A\|\,ds\\
&\le \int_0^t e^{\|A\|(t-s)}\left(e^{\|A\|s}\|A\|\|x_0\|s\right)\|A\|\,ds\\
&= e^{\|A\|t}\|A\|^2\|X_0\|\frac{t^2}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Consideramos la hipótesis de inducción siguiente:

$$\|X_n(t) - X_{n-1}(t)\| \leq e^{\|A\|t} \, \|A\|^n \, \|X_0\| \, \frac{t^n}{n!}\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\|X_{n+1}(t) - X_n(t)\| &\leq \int_0^t e^{\|A\|(t-s)} \|X_n(s) - X_{n-1}(s)\| \, \|A\| \, ds \\
&\leq \int_0^t e^{\|A\|(t-s)} \Big(e^{\|A\|s} \|A\|^n \|X_0\| \frac{s^n}{n!} \Big) \|A\| \, ds \\
&= \frac{\|X_0\| \; \|A\|^{n+1}}{(n+1)!} \, e^{\|A\|t} t^{n+1}\,.
\end{aligned}$$

Como la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|X_0\| \; \|A\|^{n+1}}{(n+1)!} \, e^{\|A\|t} t^{n+1}$ es convergente[2] podemos aplicar el criterio de comparación de Weierstrass para concluir que la serie

$$X_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \Big(X_{k+1}(t) - X_k(t) \Big) \tag{3.5}$$

y, por consiguiente, la sucesión de sumas parciales

$$\{X_n(t)\} = \Big\{ X_0(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \Big(X_{k+1}(t) - X_k(t) \Big) \Big\}$$

convergen absoluta y uniformemente en $[0, T]$. Finalmente, como las iterantes $X_n(t)$ son todas continuas, el límite uniforme de (3.5) ha de ser una función (matricial) continua en $[0, T]$.

(d) Consideramos la transformación $X(t) = Y(t)e^{-At}$. Entonces la ecuación $X'(t) = AX(t) - X(t)A$ se puede reescribir en términos de la función incógnita $Y(t)$ de la siguiente forma:

$$Y'(t)\, e^{-At} - Y(t) A\, e^{-At} = AY(t)\, e^{-At} - Y(t)\, e^{-At} A\,.$$

Si tenemos en cuenta que $e^{-At}A = A\, e^{-At}$ en virtud del Ejercicio 3 (c) (con $A(t) = -At$), obtenemos

$$Y'(t) = AY(t)$$

[2]En efecto, se fuede comprobar fácilmente que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|X_0\| \; \|A\|^{n+1}}{(n+1)!} \, e^{\|A\|t} t^{n+1} = \|X_0\| \, e^{2\|A\|t}$$

con dato inicial asociado $Y(0) = X_0$. La (única) solución de este nuevo problema es $Y(t) = e^{At}X_0$, por lo que deshaciendo el cambio de variable se deduce que

$$X(t) = e^{At}\, X_0\, e^{-At}\,.$$

(e) Bastará con comprobar que existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|e^{At}\| \leq M \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Si llamamos J a la forma canónica de Jordan de la matriz A y P a la correspondiente matriz de paso, es sabido que $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$, luego

$$\|e^{At}\| \leq \|P\|\|e^{Jt}\|\|P^{-1}\,\| = C\|e^{Jt}\|\,, \quad C \geq 1\,.$$

La cuestión entonces es: ¿Es $\|e^{Jt}\|$ acotada?

Bastaría con comprobar que los coeficientes de la matriz e^{Jt} son acotados, en cuyo caso la norma del máximo de e^{Jt} estaría acotada y, por equivalencia, todas las demás normas. Admitamos que la matriz J se expresa del siguiente modo:

$$J = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \Lambda_{\frac{N}{2}-1} & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \Lambda_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix},$$

donde los bloques de Jordan son todos de la forma

$$\Lambda_j = \begin{pmatrix} 0 & b_j \\ -b_j & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq \frac{N}{2}\,,$$

por ser todos los valores propios de A imaginarios y simples. Por consiguiente, todos los elementos no nulos de e^{Jt} son de la forma $\operatorname{sen}(b_j t)$ o bien $\cos(b_j t)$, por lo que podemos asegurar que

$$\|e^{Jt}\|_\infty \leq 2\,.$$

Como por el apartado anterior sabemos que

$$X(t) = e^{At}\, X_0\, e^{-At}\,,$$

se concluye que

$$\|X(t)\|_\infty \leq 4C^2\|X_0\|_\infty\,.$$

■

6. Se considera el problema de valores iniciales
$$x' = tAx\,, \quad x(0) = x_0\,, \tag{3.6}$$
donde $A \in M_N(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}^N$.
   (a) Justifica que (3.6) tiene una única solución definida en $\mathbb{R}$.
   (b) Construye la sucesión de iterantes de Picard asociada a (3.6).
   (c) Utilizando el apartado anterior, encuentra la solución de (3.6) y exprésala en términos de la exponencial de una matriz.
   (d) Prueba que si todos los valores propios de A tienen parte real negativa, entonces todas las soluciones tienden a cero cuando $t \to \infty$.

(Diciembre 1993)

Solución : (a) La aplicación $B : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{R})$ definida como $B(t) = tA$ es continua, luego la existencia y unicidad de solución del problema (3.6) es inmediata a la luz del teorema de existencia y unicidad para el problema de Cauchy asociado a una ecuación diferencial lineal.

(b) Definimos la sucesión de iterantes de Picard de la forma estándar, basándonos en la ecuación integral equivalente a (3.6):
$$x_0(t) \equiv x_0\,, \quad x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t sAx_n(s)\,ds\,.$$
Se puede comprobar fácilmente por inducción que
$$x_n(t) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \Big(A\frac{t^2}{2} \Big)^k \right) x_0\,. \tag{3.7}$$
(c) Para ello tomamos el límite puntual en la expresión (3.7) cuando $n \to \infty$. En efecto,
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n(t) &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \Big(A\frac{t^2}{2} \Big)^k \right) x_0 \right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \Big(A\frac{t^2}{2} \Big)^k \right\} x_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Big(A\frac{t^2}{2} \Big)^k \right) x_0 = e^{A\frac{t^2}{2}} x_0\,. \end{aligned}$$

(d) Si llamamos J a la forma canónica de Jordan de la matriz A y P a la correspondiente matriz de paso se tiene que

$$\left\| e^{A\frac{t^2}{2}} \right\| \leq \|P\| \left\| e^{J\frac{t^2}{2}} \right\| \|P^{-1}\| = C \left\| e^{J\frac{t^2}{2}} \right\|, \quad C \geq 1\,.$$

Como

$$\|x(t)\| \leq \left\| e^{A\frac{t^2}{2}} \right\| \|x_0\| \leq C \left\| e^{J\frac{t^2}{2}} \right\| \|x_0\|$$

basta con estudiar el comportamiento de $\left\| e^{J\frac{t^2}{2}} \right\|$. Sea $\lambda < 0$ cualquiera de los valores propios reales de A. Entonces el bloque de Jordan asociado a λ es de la forma

$$J_\lambda = \lambda I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

luego

$$e^{J_\lambda \frac{t^2}{2}} = e^{\frac{\lambda t^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{t^2}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{t^4}{8} & \frac{t^2}{2} & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{t^4}{8} & \frac{t^2}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Claramente $\left\| e^{J_\lambda \frac{t^2}{2}} \right\| \to 0$ cuando $t \to \infty$ por ser $\lambda < 0$. Por otro lado, si $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ con $a < 0$, el bloque de Jordan asociado a λ es de la forma

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -b & a & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a & b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -b & a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & b & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -b & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -b & a \end{pmatrix},$$

luego

$$e^{J_\lambda \frac{t^2}{2}} = e^{\frac{at^2}{2}} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{t^2}{2} & t & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos(\frac{bt^2}{2}) & \operatorname{sen}(\frac{bt^2}{2}) \\ -\operatorname{sen}(\frac{bt^2}{2}) & \cos(\frac{bt^2}{2}) \end{pmatrix},$$

y claramente $\left\{ \left\| e^{J_\lambda \frac{t^2}{2}} \right\| \right\} \to 0$ cuando $t \to \infty$ por ser $a < 0$.

■

7. Dada una matriz $A \in M_N(\mathbb{R})$ se define su seno por medio de la serie

$$\operatorname{sen}(A) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}.$$

Prueba que

(a) La serie dada es convergente y, por tanto, el seno de una matriz está bien definido.

(b) $\|\operatorname{sen}(A)\| \leq e^{\|A\|} \quad \forall\, A \in M_N(\mathbb{R})$.

(c) La función $t \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{sen}(tA) \in M_N(\mathbb{R})$ es de clase $C^2(\mathbb{R})$ y satisface la ecuación matricial $X'' + A^2 X = 0$.

(d) Calcular $\operatorname{sen}(tA)$ para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Junio 1989).

Solución : (b) $\|\operatorname{sen}(A)\| \leq \sum_{n \geq 0} \frac{\|A\|^{2n+1}}{(2n+1)!} = e^{\|A\|}$ para toda $A \in M_N(\mathbb{R})$.

(a) Inmediato a partir de (b) en virtud del principio de comparación de Weierstrass.

(c) Lo comprobamos para la correspondiente sucesión de sumas parciales y pasamos después al límite $n \to \infty$. Definimos para ello el término general de la sucesión de sumas parciales como sigue:

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (tA)^{2k+1} .$$

Entonces

$$S_n'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k+1} t^{2k} ,$$

$$S_n''(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} A^{2k+3} t^{2k+1} ,$$

$$A^2 S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+3} t^{2k+1} ,$$

de donde se desprende que $S_n''(t) = -A^2 S_{n-1}(t)$. Razonando finalmente como en el Ejercicio 3 (c) podemos efectuar el paso al límite cuando $n \to \infty$ y obtenemos el resultado deseado.

(d) Calculamos

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} .$$

Se pretende resolver la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

o, equivalentemente, el siguiente sistema lineal:

$$X_{11}''(t) + X_{11}(t) = 0 , \tag{3.8}$$

$$X_{12}''(t) + X_{12}(t) = 0 , \tag{3.9}$$

$$X_{21}''(t) + 9X_{11}(t) + 4X_{21}(t) = 0 , \tag{3.10}$$

$$X_{22}''(t) + 9X_{12}(t) + 4X_{22}(t) = 0 . \tag{3.11}$$

Claramente en $t = 0$ ha de satisfacerse

$$X_{11}(0) = X_{12}(0) = X_{21}(0) = X_{22}(0) = 0$$

y también $X'(0) = A$, luego

$$X'_{11}(0) = 1\,, \quad X'_{12}(0) = 1\,, \quad X'_{21}(0) = 3\,, \quad X'_{22}(0) = 2\,.$$

Resolviendo (3.8) y (3.9) junto con las condiciones iniciales anteriores obtenemos

$$X_{11}(t) = \operatorname{sen}(t)\,, \quad X_{12}(t) = 0\,.$$

Entonces las ecuaciones (3.10) y (3.11) pueden reescribirse de la siguiente forma:

$$X''_{21}(t) + 9\operatorname{sen}(t) + 4X_{21}(t) = 0\,, \tag{3.12}$$

$$X''_{22}(t) + 4X_{22}(t) = 0\,. \tag{3.13}$$

Resolviendo ahora la ecuación (3.13) junto con los datos iniciales correspondientes obtenemos

$$X_{22}(t) = \operatorname{sen}(2t)\,.$$

■

8. Dada una matriz $A \in M_N(\mathbb{R})$, ¿cómo deben definirse las funciones hiperbólicas $\operatorname{senh}(A)$ y $\cosh(A)$? ¿Se satisface la identidad

$$\cosh(A)^2 - \operatorname{senh}(A)^2 = I_N?$$

Solución : De la forma más natural posible. Se definen

$$\operatorname{senh}(A) = \frac{e^A - e^{-A}}{2}\,, \quad \cosh(A) = \frac{e^A + e^{-A}}{2}$$

y se cumple

$$\begin{aligned}&\cosh(A)^2 - \operatorname{senh}(A)^2 \\ &= \left(\frac{e^A + e^{-A}}{2}\right)\left(\frac{e^A + e^{-A}}{2}\right) - \left(\frac{e^A - e^{-A}}{2}\right)\left(\frac{e^A - e^{-A}}{2}\right) = I_N\,.\end{aligned}$$

■

9. Se considera la ecuación diferencial lineal

$$x''' + 6x'' + 12x' + 8x = e^{-2t}\,. \tag{3.14}$$

Se pide:

(a) Construir un sistema equivalente.

(b) Determinar, para dicho sistema, una matriz fundamental principal en $t = 0$ y resolverlo. Hallar la solución particular que para $t_0 = 0$ vale $(1, 1, 1)^T$.

(c) A partir de (b), encontrar la solución de la ecuación diferencial (3.14).

Solución : (a) Considerando

$$x := x_1\,, \quad x' = x_1' := x_2\,, \quad x'' = x_2' = x_1'' := x_3$$

se obtiene

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

(b) Resolvemos en primer lugar el sistema homogéneo

$$x' = Ax\,, \quad x = (x_1, x_2, x_3)^T\,, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix}.$$

El único valor propio de la matriz A es $\lambda = -2$ (triple) y

$$\mathrm{Ker}[A + 2I] = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\mathrm{Ker}[(A + 2I)^2] = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\mathrm{Ker}[(A + 2I)^3] = \mathbb{R}^3\,.$$

Por tanto la forma canónica de Jordan de A es

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos ahora la matriz de paso P que satisface $A = PJP^{-1}$. Elegimos para ello en primer lugar un vector

$$v \in \mathrm{Ker}[(A+2I)^3] \setminus \mathrm{Ker}[(A+2I)^2],$$

por ejemplo $v = (1,0,0)^T$. Elegimos después $w \in \mathrm{Ker}[(A+2I)^2]$ de la siguiente forma:

$$w = (A+2I)v = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -8 & -12 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Finalmente tomamos $u \in \mathrm{Ker}[A+2I]$ de la siguiente forma:

$$u = (A+2I)w = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -8 & -12 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & -8 & 16 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}.$$

Atendiendo a la siguiente descomposición de la matriz de Jordan como suma de una diagonal y otra nilpotente,

$$J = -2I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

se puede calcular

$$\Psi(t) = e^{At} = P\, e^{Jt} P^{-1} = P(e^{-2t} I) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix} P^{-1} =$$

$$e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & -8 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= e^{-2t} \begin{pmatrix} 2t^2 + 2t + 1 & t(1+2t) & \frac{t^2}{2} \\ -4t^2 & -4t^2 + 2t + 1 & t(1-t) \\ 8t(t-1) & 4t(2t-3) & 2t^2 - 4t + 1 \end{pmatrix},$$

que es la matriz fundamental principal en $t = 0$ que buscábamos.

Para resolver el sistema empleamos la fórmula de variación de las constantes:

$$x(t) = \Psi(t) x(t_0) + \Psi(t) \int_{t_0}^{t} \Psi(s)^{-1} b(s)\, ds\,,$$

siendo en nuestro caso $\Psi(t)$ la matriz fundamental principal que acabamos de calcular, $t_0 = 0$,

$$\Psi(t)^{-1} = e^{2t} \begin{pmatrix} 2t^2 - 2t + 1 & t(2t-1) & \frac{t^2}{2} \\ -4t^2 & -4t^2 - 2t + 1 & t(t+1) \\ 8t(t+1) & 4t(2t+3) & 2t^2 + 4t + 1 \end{pmatrix}$$

y $b(t) = (0, 0, e^{-2t})^T$. Resulta entonces

$$\begin{aligned}
x(t) &= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \\
&= e^{-2t} \begin{pmatrix} 2t^2+2t+1 & t(1+2t) & \frac{t^2}{2} \\ -4t^2 & -4t^2+2t+1 & t(1-t) \\ 8t(t-1) & 4t(2t-3) & 2t^2-4t+1 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \left\{ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t \frac{s^2}{2}\, ds \\ \int_0^t s(s+1)\, ds \\ \int_0^t (2s^2+4s+1)\, ds \end{pmatrix} \right\} \\
= e^{-2t} &\left\{ \begin{pmatrix} 2t^2+2t+1 & t(1+2t) & \frac{t^2}{2} \\ -4t^2 & -4t^2+2t+1 & t(1-t) \\ 8t(t-1) & 4t(2t-3) & 2t^2-4t+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{pmatrix} \frac{t^3}{6}(8t^2+16t+7) \\ -\frac{t^2}{6}(16t^3+16t^2-14t-9) \\ \frac{t}{3}(16t^4-34t^2-6t+3) \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

La solución particular que en $t_0 = 0$ vale $(1, 1, 1)^T$ es

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-2t} \\
\times &\begin{pmatrix} 2t^2+2t+1+t(1+2t)+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}(8t^2+16t+7) \\ -4t^2-4t^2+2t+1+t(1-t)-\frac{t^2}{6}(16t^3+16t^2-14t-9) \\ 8t(t-1)+4t(2t-3)+2t^2-4t+1+\frac{t}{3}(16t^4-34t^2-6t+3) \end{pmatrix} \\
&= e^{-2t} \begin{pmatrix} \frac{4t^5}{3}+\frac{8t^4}{3}+\frac{7t^3}{6}+\frac{9t^2}{2}+3t+1 \\ -\frac{8t^5}{3}-\frac{8t^4}{3}+\frac{7t^3}{3}-\frac{15t^2}{2}+3t+1 \\ \frac{16t^5}{3}-\frac{34t^3}{3}+16t^2-23t+1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(c) La (única) solución de la ecuación diferencial (3.14) que satisface $x(0) = x'(0) = x''(0) = 1$ es la primera componente de la solución (vectorial) encontrada en (b), es decir,

$$x(t) = \frac{4t^5}{3} + \frac{8t^4}{3} + \frac{7t^3}{6} + \frac{9t^2}{2} + 3t + 1\,.$$

■

10. Por el método de los coeficientes indeterminados, halla una solución particular de

    (a) $x'' - 3x' + 7x = 5te^{2t}$

    (b) $x'' + 4x = 5\,\mathrm{sen}(3t) + \cos(3t) + \mathrm{sen}(2t)$

    (c) $x'' - 2x' + 3x = t^3 + \mathrm{sen}(t)$

Solución : (a) Podemos considerar el cambio de función incógnita $x(t) = e^{2t}u(t)$ y reducirnos al caso en que el segundo miembro es un polinomio. En efecto, se tiene

$$u''(t) + 5u'(t) + u(t) = 5t\,. \tag{3.15}$$

Ensayamos entonces con una solución particular del tipo

$$u_p(t) = At + B\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

De este modo obtenemos

$$5A + At + B = 5t\,,$$

luego comparando términos del mismo orden ha de ser $A = 5$ y $B = -25$. Por tanto, $u_p(t) = 5t - 25$ es una solución particular de (3.15). Deshaciendo finalmente el cambio de variable se llega a que

$$x_p(t) = e^{2t}(5t - 25)$$

es una solución particular de la ecuación de partida.

(b) Resolvemos el problema en tres etapas:

(i) Consideramos la ecuación $x'' + 4x = 5\,\mathrm{sen}(3t) = \mathrm{Im}(5e^{3it})$. Como $\lambda = 3i$ no resuelve la ecuación característica $\lambda^2 + 4 = 0$, buscamos una solución particular de la ecuación

$$y'' + 4y = 5e^{3it} \tag{3.16}$$

de la forma $u_1(t) = Ae^{3it}$ con $A \in \mathbb{C}$. Sustituyendo $u_1(t)$ en (3.16) obtenemos fácilmente que ha de ser $A = -1$. Por tanto, la solución particular de (3.16) que hemos encontrado es

$$u_1(t) = -\,e^{3it}\,.$$

Concluimos entonces que una solución particular de la ecuación $x'' + 4x = 5\,\mathrm{sen}(3t)$ es

$$v_1(t) = \mathrm{Im}(u_1(t)) = -\,\mathrm{sen}(3t)\,.$$

(ii) Consideramos ahora la ecuación $x'' + 4x = \cos(3t) = \mathrm{Re}(e^{3it})$. Buscamos entonces una solución particular de

$$y'' + 4y = e^{3it} \tag{3.17}$$

de la forma $u_2(t) = Be^{3it}$ con $B \in \mathbb{C}$. Sustituyendo $u_2(t)$ en (3.17) obtenemos fácilmente que ha de ser $B = -\frac{1}{5}$. Por tanto, la solución particular de (3.17) que hemos encontrado es

$$u_2(t) = -\frac{1}{5}\,e^{3it}\,.$$

Concluimos entonces que una solución particular de la ecuación $x'' + 4x = \cos(3t)$ es

$$v_2(t) = \mathrm{Re}(u_2(t)) = -\frac{1}{5}\cos(3t)\,.$$

(iii) Consideramos finalmente $x'' + 4x = \mathrm{sen}(2t) = \mathrm{Im}(e^{2it})$. En este caso $\lambda = 2i$ resuelve la ecuación característica, luego hemos de buscar una solución particular de

$$y'' + 4y = e^{2it} \tag{3.18}$$

de la forma $u_3(t) = Ct\,e^{2it}$ con $C \in \mathbb{C}$. Sustituyendo $u_3(t)$ en (3.18) obtenemos fácilmente que ha de ser $C = -\frac{i}{4}$. Por tanto, la solución particular de (3.18) que hemos encontrado es

$$u_3(t) = -\frac{t}{4}\,e^{2it}\,.$$

Concluimos entonces que una solución particular de la ecuación $x'' + 4x = \mathrm{sen}(2t)$ es

$$v_3(t) = \mathrm{Im}(u_2(t)) = -\frac{t}{4}\cos(2t)\,.$$

Como $L[x] := x'' + 4x$ es lineal se tiene que

$$\begin{aligned} L[v_1 + v_2 + v_3] &= L[v_1] + L[v_2] + L[v_3] \\ &= 5\,\mathrm{sen}(3t) + \cos(3t) + \mathrm{sen}(2t)\,, \end{aligned}$$

luego

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = -\,\mathrm{sen}(3t) - \frac{1}{5}\cos(3t) - \frac{1}{4}t\cos(2t)$$

es una solución particular de la ecuación de partida. Conocida la solución general de la ecuación homogénea $x'' + 4x = 0$,

$$x_h(t) = A\cos(2t) + B\,\mathrm{sen}(2t)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,,$$

la solución general de $x'' + 4x = 5\,\mathrm{sen}(3t) + \cos(3t) + \mathrm{sen}(2t)$ es

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + v(t) \\ &= A\cos(2t) + B\,\mathrm{sen}(2t) - \mathrm{sen}(3t) - \frac{1}{5}\cos(3t) - \frac{t}{4}\cos(2t)\,, \end{aligned}$$

con $A, B \in \mathbb{R}$.

(c) Como $L[x] := x'' - 2x' + 3x$ es lineal podemos resolver el problema en dos etapas:

(i) Consideramos en primer lugar la ecuación $x'' - 2x' + 3x = t$ y conjeturamos la existencia de una solución particular de la forma $x_1(t) = At + B$ con $A, B \in \mathbb{R}$. Tenemos

$$-2A + 3(At + B) = t\,.$$

Comoparando términos del mismo orden en t concluimos que ha de ser $A = \frac{1}{3}$ y $B = \frac{2}{9}$, luego

$$x_1(t) = \frac{t}{3} + \frac{2}{9}$$

constituye una solución particular del problema planteado en esta etapa.

(ii) Buscamos ahora una solución particular de

$$x'' - 2x' + 3x = \mathrm{sen}(t) = \mathrm{Im}(e^{it})\,.$$

Como $\lambda = i$ no resuelve la ecuación característica $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$, buscamos una solución particular de la ecuación

$$y'' - 2y' + 3y = e^{it} \tag{3.19}$$

de la forma $y(t) = Ae^{it}$ con $A \in \mathbb{C}$. Sustituyendo $u_2(t)$ en (3.19) obtenemos fácilmente que ha de ser $A = \frac{1+i}{4}$. Por tanto, la solución particular de (3.19) que hemos encontrado es

$$y(t) = \frac{1+i}{4} e^{it} .$$

Concluimos entonces que una solución particular de la ecuación $x'' - 2x' + 3x = \text{sen}(t)$ es

$$x_2(t) = \text{Im}(y(t)) = \frac{1}{4}(\text{sen}(t) + \cos(t)) .$$

Por consiguiente,

$$x(t) = \frac{1}{4}(\text{sen}(t) + \cos(t)) + \frac{t}{3} + \frac{2}{9}$$

es una solución particular de la ecuación diferencial de partida.

■

11. Por el método de variación de las constantes, halla una solución particular de

(a) $x'' + x = \text{cotan}(t)$

(b) $x'' + 4x = \sec(2t)$

(c) $x'' - 6x' + 9x = \frac{e^{3t}}{t^2}$

(d) $x'' - x = e^{-t}\,\text{sen}(e^{-t}) + \cos(e^{-t})$

Solución : (a) Un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea es $\{\cos(t), \text{sen}(t)\}$. Por tanto, buscamos una solución particular de $x'' + x = \text{cotan}(t)$ del tipo

$$x(t) = A(t)\cos(t) + B(t)\,\text{sen}(t) . \tag{3.20}$$

Tenemos

$$x' = A' \cos(t) - A \operatorname{sen}(t) + B' \operatorname{sen}(t) + B \cos(t)\,,$$
$$x'' = A'' \cos(t) - 2A' \operatorname{sen}(t) - A \cos(t)$$
$$+ B'' \operatorname{sen}(t) + 2B' \cos(t) - B \operatorname{sen}(t)\,.$$

Sustituyendo entonces (3.20) en la ecuación obtenemos

$$(A'' + 2B') \cos(t) + (B'' - 2A') \operatorname{sen}(t) = \operatorname{cotan}(t)\,.$$

Como condición adicional podemos usar

$$A' \cos(t) + B' \operatorname{sen}(t) = 0 \tag{3.21}$$

para simplificar los cálculos, de modo que se tiene $B' = -A'\operatorname{cotan}(t)$ y, por tanto,

$$x'(t) = B \cos(t) - A \operatorname{sen}(t)\,,$$
$$x''(t) = (B' - A) \cos(t) - (B + A') \operatorname{sen}(t)$$
$$= -A' \left(\frac{\cos(t)^2}{\operatorname{sen}(t)} + \operatorname{sen}(t) \right) - A \cos(t) - B \operatorname{sen}(t) = -\frac{A'}{\operatorname{sen}(t)} - x(t)\,.$$

De aquí se desprende inmediatamente que para que (3.20) sea una solución particular se ha de cumplir

$$-\frac{A'}{\operatorname{sen}(t)} = \operatorname{cotan}(t)\,,$$

es decir, $A(t) = -\operatorname{sen}(t)$. De la condición (3.21) se deduce finalmente que

$$B(t) = \int \frac{\cos(t)^2}{\operatorname{sen}(t)}\, dt = \cos(t) + \log\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)\,.$$

Por consiguiente,

$$x(t) = \log\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) \operatorname{sen}(t)$$

es una solución particular de $x'' + x = \operatorname{cotan}(t)$.

(b) Un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea es $\{\cos(2t), \operatorname{sen}(2t)\}$. Buscamos entonces una solución particular de $x'' + 4x = \sec(2t)$ de la forma

$$x(t) = A(t) \cos(2t) + B(t) \operatorname{sen}(2t)\,. \tag{3.22}$$

Derivando obtenemos

$$\begin{aligned} x'(t) &= A'\cos(2t) - 2A\,\mathrm{sen}(2t) + B'\,\mathrm{sen}(2t) + 2B\cos(2t)\,, \\ x'' &= A''\cos(2t) - 4A'\,\mathrm{sen}(2t) - 4A\cos(2t) \\ &\quad + B''\,\mathrm{sen}(2t) + 4B'\cos(2t) - 4B\,\mathrm{sen}(2t)\,. \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.22) en la ecuación se tiene

$$(A'' + 4B')\cos(2t) + (B'' - 4A')\,\mathrm{sen}(2t) = \sec(2t)\,.$$

Como condición adicional consideramos

$$A'\cos(2t) + B'\,\mathrm{sen}(2t) = 0\,, \tag{3.23}$$

de modo que $B' = -A'\mathrm{cotan}(2t)$ y, por tanto, las expresiones de x' y x'' se reducen a

$$\begin{aligned} x' &= 2B\cos(2t) - 2A\,\mathrm{sen}(2t)\,, \\ x''(t) &= 2(B' - 2A)\cos(2t) - 2(2B + A')\,\mathrm{sen}(2t) \\ &= -2A'\left(\frac{\cos(2t)^2}{\mathrm{sen}(2t)} + \mathrm{sen}(2t)\right) - 4A\cos(2t) - 4B\,\mathrm{sen}(2t) \\ &= -\frac{2A'}{\mathrm{sen}(2t)} - 4x(t)\,. \end{aligned}$$

De aquí se desprende inmediatamente que para que (3.22) sea una solución particular se ha de cumplir

$$-\frac{2A'}{\mathrm{sen}(2t)} = \sec(2t)\,,$$

es decir, $A(t) = \frac{1}{4}\log(\cos(2t))$. De la condición (3.23) se deduce finalmente que

$$B(t) = \frac{t}{2}\,,$$

luego

$$x(t) = \frac{1}{4}\log(\cos(2t))\cos(2t) + \frac{t}{2}\,\mathrm{sen}(2t)$$

es una solución particular de $x'' + 4x = \sec(2t)$.

(c) Un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea es $\{e^{3t}, te^{3t}\}$. Buscamos entonces una solución particular de

$$x'' - 6x' + 9x = \frac{e^{3t}}{t^2} \tag{3.24}$$

del tipo
$$x(t) = (A(t) + B(t)t)\, e^{3t}\,. \tag{3.25}$$
Derivando obtenemos
$$x'(t) = (A' + B + B't + 3A + 3Bt)\, e^{3t}\,.$$
Las condiciones que imponemos para encontrar $A(t)$ y $B(t)$ son
$$A' + B't = 0\,, \quad B'(1+3t) + 3A' = \frac{1}{t^2} \Rightarrow B' = \frac{1}{1+3t}\Big(\frac{1}{t^2} - 3A'\Big)\,.$$
La primera de ellas (elegida libremente siempre que sea compatible con la segunda) contribuye a simplificar los cálculos mientras que la segunda es necesaria para que (3.25) resuelva la ecuación diferencial. Entonces obtenemos
$$A(t) = \log(|t|)\,, \quad B(t) = -\frac{1}{t}\,,$$
por lo que
$$x(t) = (\log(|t|) - 1)\, e^{3t}$$
es una solución particular de (10.7).

(d) Un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea es $\{e^{-t}, e^{t}\}$. Buscamos entonces una solución particular de la forma
$$x(t) = A(t)\, e^{-t} + B(t)\, e^{t}\,. \tag{3.26}$$
Se tiene
$$x'(t) = (A' - A)\, e^{-t} + (B' + B)\, e^{t}\,,$$
$$x''(t) = (A'' - 2A' + A)\, e^{-t} + (B'' + 2B' + B)\, e^{t}\,.$$
Imponemos como primera condición
$$A'\, e^{-t} + B'\, e^{t} = 0 \Rightarrow B' = -A'\, e^{-2t}\,, \tag{3.27}$$
de modo que las expresiones de x' y x'' se reducen a
$$x'(t) = -A\, e^{-t} + B\, e^{t}\,, \quad x''(t) = (A - 2A')\, e^{-t} + B\, e^{t}\,.$$
Entonces (3.26) resuelve la ecuación diferencial
$$x'' - x = e^{-t}\,\mathrm{sen}(e^{-t}) + \cos(e^{-t}) \tag{3.28}$$

si y solamente si

$$
\begin{aligned}
-2A'e^{-t} &= e^{-t}\operatorname{sen}(e^{-t}) + \cos(e^{-t}) \\
&\Rightarrow A' = -\frac{1}{2}\Big(\operatorname{sen}(e^{-t}) + e^{t}\cos(e^{-t})\Big) \\
&\qquad\Rightarrow A = -\frac{1}{2}\, e^{t}\cos(e^{-t})\,.
\end{aligned}
$$

Volviendo a (3.27) obtenemos

$$
\begin{aligned}
B' &= \frac{1}{2}\, e^{-2t}\Big(\operatorname{sen}(e^{-t}) + e^{t}\cos(e^{-t})\Big) \\
&\qquad\Rightarrow B = \frac{1}{2}\, e^{-t}\cos(e^{-t}) - \operatorname{sen}(e^{-t})\,.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente,

$$x(t) = -e^{t}\operatorname{sen}(e^{-t})$$

es una solución particular de (3.28).

■

12. Previo rebajamiento del orden de las correspondientes ecuaciones diferenciales lineales, resuelve

    (a) $t^2x'' + t(t-4)x' + 2(3-t)x = 2t^4e^t$, con $x_1(t) = t^2$.

    (b) $(t^2-t)x''' + (3t-t^2-3)x'' - tx' + x = 0$, con $x_1(t) = \frac{1}{t}$ y $x_2(t) = t$.

    (c) $tx'' - (2t+1)x' + (t+1)x = (t^2+t-1)\, e^{2t}$, con $x_1(t) = e^t$.

    (d) $(1+t)x'' + (4t+5)x' + (4t+6)x = e^{-2t}$, con $x_1(t) = e^{at}$ y $a \in \mathbb{R}$ por determinar.

Solución : (a) Tomando $t_0 = 1$ se tiene $x_1(1) = 1$, $x_1'(1) = 2$. Para resolver la ecuación homogénea necesitamos encontrar otra solución $x_2(t)$ tal que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ sean linealmente independientes. Elegimos para ello los siguientes datos iniciales para $x_2(t)$: $x_2(1) = 0$, $x_2'(1) = 1$. El wronskiano de ambas soluciones en el punto $t_0 = 1$ es entonces

$$W(x_1,x_2)(1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\,,$$

por lo que tenemos garantizado que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ serán linealmente independientes. Para construir $x_2(t)$ usamos la fórmula de Jacobi–Liouville:

$$\begin{aligned} t^4\, e^{1-t} = e^{-\int_1^t \left(\frac{s-4}{s}\right) ds} &= W(x_1, x_2)(t) \\ &= \begin{vmatrix} t^2 & x_2(t) \\ 2t & x_2'(t) \end{vmatrix} = t^2 x_2'(t) - 2t x_2(t)\,, \end{aligned}$$

de donde se deduce la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden (obsérvese que es aquí donde hemos conseguido rebajar el orden de la ecuación de partida en una unidad) para $x_2(t)$:

$$x_2' - \frac{2}{t} x_2 = t^2\, e^{1-t}\,,$$

que junto con la condición $x_2(1) = 0$ admite únicamente la solución

$$x_2(t) = t(t-1)\,.$$

Por tanto, $\{t^2, t(t-1)\}$ es una base del espacio de soluciones de la ecuación homogénea

$$t^2 x'' + t(t-4)x' + 2(3-t)x = 0\,. \tag{3.29}$$

Podemos construir entonces la siguiente matriz fundamental de (3.29):

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t(t-1) \\ 2t & 2t-1 \end{pmatrix},$$

a partir de la cual podemos construir a su vez la matriz fundamental principal en $t = 1$:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} t(2-t) & t(t-1) \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando finalmente la fórmula de variación de las constantes con dato inicial $x_0 = (x_0^1, x_0^2)^T$ para resolver la ecuación completa obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) = &\begin{pmatrix} t(2-t)x_0^1 + t(t-1)x_0^2 \\ 2(1-t)x_0^1 + (2t-1)x_0^2 \end{pmatrix} \\ &+ 2\,e \begin{pmatrix} t[(2t+9) + e^{t-1}(t^3 - 6t^2 + 18t - 24)] \\ (4t+9) + e^{t-1}(t^4 - 2t^3 + 12t - 24)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Tomando $t_0 = 2$ se tiene

$$x_1(2) = \frac{1}{2}\,, \quad x_1'(2) = -\frac{1}{4}\,, \quad x_1''(2) = \frac{1}{4}\,,$$
$$x_2(2) = 2\,, \quad x_2'(2) = 1\,, \quad x_2''(2) = 0\,.$$

Para resolver la ecuación necesitamos encontrar otra solución $x_3(t)$ de modo que $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ sean linealmente independientes. Para ello elegimos, por ejemplo, los siguientes datos iniciales para $x_3(t)$: $x_3(2) = 0$, $x_3'(2) = 0$ y $x_3''(2) = 1$. El wronskiano de las tres soluciones en $t_0 = 2$ es entonces

$$W(x_1, x_2, x_3)(2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\,,$$

por lo que tenemos garantizado que $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ serán linealmente independientes. Para construir $x_3(t)$ usamos nuevamente la fórmula de Jacobi–Liouville:

$$\frac{8(t-1)}{t^3}\,e^{t-2} = e^{-\int_2^t \left(\frac{3s-s^2-3}{s(s-1)}\right) ds} = W\left(\frac{1}{t}, t, x_3\right)(t)$$
$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{t} & t & x_3(t) \\ -\frac{1}{t^2} & 1 & x_3'(t) \\ \frac{2}{t^3} & 0 & x_3''(t) \end{vmatrix} = \frac{2}{t}x_3''(t) + \frac{2}{t^2}x_3'(t) - \frac{2}{t^3}x_3(t)\,,$$

de donde se deduce la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden (obsérvese que es aquí donde hemos conseguido rebajar el orden de la ecuación de partida en una unidad) para $x_3(t)$:

$$t^2 x_3'' + t x_3' - x_3 = 4(t-1)\,e^{t-2}\,, \tag{3.30}$$

a resolver junto con las condiciones $x_3(2) = 0$ y $x_3'(2) = 0$. Es fácilmente comprobable que $\{t, \frac{1}{t}\}$ es una base de soluciones de la ecuación homogénea, de modo que podemos buscar una solución particular de la ecuación completa del tipo

$$x_3(t) = A(t)t + \frac{B(t)}{t}$$

vía el método de variación de las constantes. Tenemos

$$x_3'(t) = A'(t)t + A(t) + \frac{B'(t)}{t} - \frac{B(t)}{t^2}\,.$$

Podemos encontrar las funciones $A(t)$ y $B(t)$ imponiendo, por ejemplo, que $A't + \frac{B'}{t} = 0$ junto con la condición de resolubilidad

$$2A't^2 = 4(t-1)\, e^{t-2}\,,$$

de las cuales resultan

$$A = \frac{2}{t}\, e^{t-2}\,, \quad B = -2(t-2)\, e^{t-2}\,.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación (3.30) es

$$x_3(t) = \lambda_1 t + \frac{\lambda_2}{t} + 2\, e^{t-2} - \frac{2(t-2)}{t}\, e^{t-2} = \lambda_1 t + \frac{\lambda_2}{t} + \frac{4}{t}\, e^{t-2}$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. De imponer $x_3(2) = 0$ y $x_3'(2) = 0$ resulta finalmente

$$x_3(t) = \frac{4}{t}\, e^{t-2} - t\,.$$

Por tanto, una base de soluciones de la ecuación

$$(t^2 - t)x''' + (3t - t^2 - 3)x'' - tx' + x = 0$$

es $\left\{t, \frac{1}{t}, \frac{4}{t}\, e^{t-2} - t\right\}$.
(c) Como en (a), podemos considerar $t_0 = 1$ de modo que

$$x_1(1) = x_1'(1) = e$$

y buscamos $x_2(t)$ tal que, por ejemplo,

$$x_2(1) = 0\,, \quad x_2'(1) = 1\,.$$

De este modo tenemos garantizado que las dos soluciones serán linealmente independientes. En efecto,

$$W(x_1, x_2)(1) = \begin{vmatrix} e & 0 \\ e & 1 \end{vmatrix} = e \neq 0\,.$$

Para construir $x_2(t)$ usamos la fórmula de Jacobi–Liouville:

$$\begin{aligned} t\, e^{2t-1} = e^{1+\int_1^t \left(\frac{2s+1}{s}\right) ds} &= W(e^t, x_2)(t) \\ &= \begin{vmatrix} e^t & x_2(t) \\ e^t & x_2'(t) \end{vmatrix} = e^t(x_2'(t) - x_2(t))\,, \end{aligned}$$

de donde se deduce la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden para $x_2(t)$:
$$x_2' - x_2 = t\, e^{t-1}\,,$$
que junto con la condición $x_2(1) = 0$ admite únicamente la solución
$$x_2(t) = \frac{t^2-1}{2}\, e^{t-1}\,.$$
Por tanto, una base de soluciones de la ecuación homogénea es
$$\mathcal{B} = \left\{ e^t, \frac{t^2-1}{2}\, e^{t-1} \right\}.$$
Resolvemos finalmente la ecuación completa. Para ello construimos en primer lugar una matriz fundamental del sistema:
$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & \frac{1}{2}(t^2-1)\, e^{t-1} \\ e^t & \frac{1}{2}(t^2+2t-1)\, e^{t-1} \end{pmatrix},$$
a partir de la cual podemos construir (multiplicando por la matriz de paso adecuada) la correspondiente matriz fundamental principal en $t = 1$:
$$\Psi(t) = \frac{e^{t-1}}{2} \begin{pmatrix} 3-t^2 & t^2-1 \\ 3-2t-t^2 & t^2+2t-1 \end{pmatrix}.$$
Aplicando entonces la fórmula de variación de las constantes con dato inicial $x_0 = (x_0^1, x_0^2)^T$ obtenemos
$$x(t) = \frac{e^{t-1}}{2} \begin{pmatrix} x_0^1(3-t^2) + x_0^2(t^2-1) \\ x_0^1(3-2t-t^2) + x_0^2(t^2+2t-1) \end{pmatrix} + e^{t+1} \begin{pmatrix} t(e^{t-1}-t) \\ (2t+1)\, e^{t-1} - t(t+2) \end{pmatrix}.$$

(d) Para que $x_1(t) = e^{at}$ resuelva la ecuación homogénea ha de ser $a = -2$. Podemos considerar entonces $t_0 = 0$ de modo que $x_1(0) = 1$ y $x_1'(0) = -2$. Buscamos entonces $x_2(t)$ tal que $x_2(0) = 0$, $x_2'(0) = 1$. Se tiene
$$W(x_1, x_2)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\,,$$

luego en virtud de la fórmula de Jacobi–Liouville

$$\begin{aligned}\frac{1}{t+1}\,e^{-4t} = e^{-\int_0^t \left(\frac{4s+5}{s+1}\right) ds} &= W(x_1,x_2)(t) \\ &= \begin{vmatrix} e^{-2t} & x_2(t) \\ -2\,e^{-2t} & x_2'(t) \end{vmatrix} = e^{-2t}(x_2'(t)+2x_2(t))\,.\end{aligned}$$

De este modo obtenemos la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden para $x_2(t)$:

$$x_2' + 2x_2 = \frac{1}{t+1}\,e^{-2t}\,,$$

que junto con la condición $x_2(0)=0$ admite únicamente la solución

$$x_2(t) = \log(t+1)\,e^{-2t}\,.$$

Por tanto, $\{e^{-2t}, \log(t+1)\,e^{-2t}\}$ es una base de soluciones del sistema homogéneo. Para resolver el sistema completo construimos en primer lugar una matriz fundamental, a saber

$$\Phi(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 & \log(t+1) \\ -2 & \frac{1}{t+1} - 2\log(t+1) \end{pmatrix},$$

a partir de la cual se obtiene fácilmente la matriz fundamental principal en $t=0$:

$$\Psi(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} 2\log(t+1)+1 & \log(t+1) \\ -\frac{2}{t+1}[t+2(t+1)\log(t+1)] & \frac{1}{t+1} - 2\log(t+1) \end{pmatrix}.$$

Entonces la fórmula de variación de las constantes proporciona la siguiente solución (considerando el vector $x_0 = (x_0^1, x_0^2)^T$ como dato inicial):

$$\begin{aligned} x(t) = e^{-2t}\Bigg\{ &\begin{pmatrix} x_0^1 + (2x_0^1 + x_0^2)\log(t+1) \\ \frac{1}{t+1}(x_0^2 - 2x_0^1 t) - 2(2x_0^1 + x_0^2)\log(t+1) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{1}{4}[t(t+2) - 2\log(t+1)] \\ \log(t+1) - \frac{t^2(t+2)}{2(t+1)}] \end{pmatrix} \Bigg\}\,. \end{aligned}$$

■

13. Decide de forma razonada si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

(a) Existe una ecuación del tipo $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ con $a, b \in C(\mathbb{R})$ tal que $y(t) = t^5$ es solución.

(Febrero 1989)

(b) Existe una matriz nilpotente $A \in M_N(\mathbb{R})$ tal que e^A es también nilpotente.

(Febrero 1989)

(c) Dadas $\Phi(t)$ y $\Psi(t)$ matrices fundamentales de un mismo sistema lineal homogéneo, se cumple que $\Phi(t)\Psi(t)^{-1}$ es constante.

(Septiembre 1989)

(d) Sea $A \in M_N(\mathbb{R})$. Si A es antisimétrica (respectivamente simétrica), entonces e^A es antisimétrica (respectivamente simétrica).

(Febrero 1991)

(e) Existe una solución no trivial de $x'' + \text{sen}(t)x' = 0$ que satisface $x(0) = x(\pi) = 0$.

(Febrero 1994)

(f) $\{e^t, \text{sen}(t)\}$ es un sistema fundamental de soluciones de una ecuación diferencial de la forma $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ con $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas.

(Junio 1994)

(g) Sean f_1 y f_2 dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $x'' + a_1x' + a_2x = 0$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Entonces el wronskiano $W(f_1, f_2)$ es constante si y sólo si $a_1 = 0$.

(h) Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ con un valor propio α tal que
$$\dim(\text{Ker}[A - \alpha I]) = 3\,.$$
Entonces su forma canónica de Jordan es
$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(Septiembre 2003)

Solución : (a) FALSA. De ser $y(t) = t^5$ una solución se tendría que

$$b(t) = -\frac{5ta(t) + 20}{t^2}$$

como fruto de una verificación inmediata, función la cual resulta no ser continua en $t = 0$.

(b) FALSA. En efecto, supongamos que A fuese una matriz nilpotente de orden k, es decir, $A^k = 0$. Razonamos por reducción al absurdo. En caso de que existiera $n \in \mathbb{N}$ tal que $(e^A)^n = 0$ se concluye que

$$0 = \det\Big((e^A)^n\Big) = \Big(\det(e^A)\Big)^n \neq 0\,,$$

lo cual nos conduce a contradicción.

(c) FALSA. En efecto,

$$\begin{aligned}\Big(\Phi(t)\Psi(t)^{-1}\Big)' &= \Phi'(t)\Psi(t)^{-1} - \Phi(t)\Psi(t)^{-1}\Psi'(t)\Psi(t)^{-1}\\ &= A\Phi(t)\Psi(t)^{-1} - \Phi(t)\Psi(t)^{-1}A\Psi(t)\Psi(t)^{-1}\\ &= A\Phi(t)\Psi(t)^{-1} - \Phi(t)\Psi(t)^{-1}A\,,\end{aligned}$$

que es la matriz nula si y sólo si $\Phi(t)\Psi(t)^{-1}$ y A conmutan. Baste por ejemplo considerar la ecuación $x'' = 0$ para observar que

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi(t) = \begin{pmatrix} 2 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son dos matrices fundamentales tales que

$$\Phi(t)\Psi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{t}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{t}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no es una matriz constante.

(d) VERDADERA para el caso simétrico y FALSA para el caso antisimétrico. El contraejemplo para el caso antisimétrico es obvio: 0_N es antisimétrica mientras que $e^{0_N} = I_N$ no lo es. Demostramos ahora la veracidad del enunciado para el caso simétrico. Para ello denotamos por $S_n(X)$ a la sucesión de sumas parciales de e^X. Se tiene

$$S_n(A^T) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(A^T)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(A^k)^T}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \right)^T = [S_n(A)]^T \, ,$$

de donde al pasar al límite $n \to \infty$ se obtiene $e^{A^T} = (e^A)^T$. Se concluye entonces teniendo en cuenta que $e^{A^T} = e^A$, ya que por hipótesis $A = A^T$.

(e) FALSA. Si asumimos $y = x'$, la ecuación se puede reescribir como una de primer orden de la siguiente forma: $y' + \text{sen}(t) y = 0$, que tiene sus variables separadas. En efecto,

$$\frac{y'}{y} = -\text{sen}(t) \Rightarrow y = C\, e^{\cos(t)} \Rightarrow x(t) = x(0) + C \int_0^t e^{\cos(s)}\, ds \, , \; C \in \mathbb{R} \, .$$

Si asumimos $x(0) = 0$ entonces ha de ser

$$x(\pi) = C \int_0^{\pi} e^{\cos(s)}\, ds \, ,$$

que sólo se anula si $C = 0$.

(f) FALSA. En efecto,

$$W(e^t, \text{sen}(t)) = \begin{vmatrix} e^t & \text{sen}(t) \\ e^t & \cos(t) \end{vmatrix} = e^t(\cos(t) - \text{sen}(t)) \, ,$$

que se anula para los valores $t = \frac{\pi}{4}(1 + 2k)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

(g) VERDADERA. La matriz de coeficientes del sistema 2×2 asociado a la ecuación $x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} .$$

Entonces la fórmula de Jacobi–Liouville establece que

$$W(f_1(t), f_2(t)) = W(f_1(t_0), f_2(t_0))\, e^{-a_1(t - t_0)} \, ,$$

de modo que $W(f_1(t), f_2(t))$ sólo puede ser constante si $a_1 = 0$.

(h) VERDADERA. De hecho, la única matriz $A \in M_3$ que cumple la condición $\dim(\text{Ker}[A - \alpha I]) = 3$ es $A = \alpha I_3$, ya que el subespacio propio asociado al valor propio α es $\mathbb{R}^3$, es decir, $Ax = \alpha x$ para cualquier vector $x \in \mathbb{R}^3$.

■

14. Se considera la ecuación diferencial $x'' + x = 0$. Denotemos por $S(t)$ a la única solución de esta ecuación que satisface $S(0) = 0$ y $S'(0) = 1$ y por $C(t)$ a la única solución que satisface $C(0) = 1$ y $C'(0) = 0$. Prueba las siguientes afirmaciones:

    (a) Las soluciones $S(t)$ y $C(t)$ son infinitamente derivables y están definidas en $\mathbb{R}$.

    (b) $S'(t) = C(t)$ y $C'(t) = -S(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

    (c) $S(t)^2 + C(t)^2 = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

    (d) El wronskiano de $S(t)$ y $C(t)$ vale -1.

    (e) $S(t \pm a) = S(t)C(a) \pm C(t)S(a)$ para cualesquiera $t, a \in \mathbb{R}$.

    (f) $C(t \pm a) = C(t)C(a) \mp S(t)S(a)$ para cualesquiera $t, a \in \mathbb{R}$.

    (g) Existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mínimo tal que $C(\alpha) = 0$. Llamaremos a ese número $\frac{\pi}{2}$.

    (h) $S(t + 2\pi) = S(t)$ y $C(t + 2\pi) = C(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Solución : (a) Es inmediato por la propia definición de solución, ya que $x^{(2k)}(t) = -x(t)$ es una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ y $x^{(2k+1)}(t) = -x'(t)$ también es continua y derivable en $\mathbb{R}$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

(b) Como $S(t)$ resuelve $x'' + x = 0$ con $S(0) = 0$ y $S'(0) = 1$, se tiene que

$$S''' + S' = 0\,, \quad 1 = S'(0) = S'''(0)\,, \quad 0 = S(0) = -S''(0)\,.$$

Sabemos que $C(t)$ también resuelve $C'''(t) + C'(t) = 0$ con datos iniciales $C(0) = 1$ y $C'(0) = 0$, luego por unicidad ha de ser $S' = C$ y también $C' = S'' = -S$.

(c) Definimos $r(t) := S(t)^2 + C(t)^2$. Entonces

$$r'(t) = 2S(t)S'(t) + 2C(t)C'(t) = 2S(t)C(t) - 2C(t)S(t) = 0\,,$$

para lo que hemos utilizado el apartado (b). Como consecuencia la función $r(t)$ ha de ser constante, y al saber que

$$r(0) = S(0)^2 + C(0)^2 = 1$$

se deduce que $r \equiv 1$.

(d) En efecto,

$$\begin{aligned} W(S(t), C(t)) &= \begin{vmatrix} S(t) & C(t) \\ S'(t) & C'(t) \end{vmatrix} \\ &= S(t)C'(t) - S'(t)C(t) = -S(t)^2 - C(t)^2 = -1 \end{aligned}$$

en virtud de lo demostrado en (c).

(e) Definimos $g^a_\pm(t) := S(t)C(a) \pm C(t)S(a)$. Tenemos

$$\begin{aligned} (g^a_\pm)'(t) &= S'(t)C(a) \pm C'(t)S(a)\,, \\ (g^a_\pm)''(t) &= S''(t)C(a) \pm C''(t)S(a) \\ &= -S(t)C(a) \mp C(t)S(a) = -g^a_\pm(t)\,. \end{aligned}$$

Luego $g^a_\pm(t)$ satisface $x'' + x = 0$ con

$$\begin{aligned} g^a_\pm(0) = \pm S(a)\,, \quad (g^a_\pm)'(0) = C(a)\,, \quad g^a_-(a) = 0\,, \\ (g^a_-)'(a) = S'(a)C(a) - C'(a)S(a) = C(a)^2 + S(a)^2 = 1\,. \end{aligned}$$

Es evidente que $S(t \pm a)$ resuelve la ecuación diferencial $x'' + x = 0$ sujeta a las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} S(t+a)(t=0) &= S(a) = g^a_+(0)\,, \\ S'(t+a)(t=0) &= S'(a) = C(a) = (g^a_+)'(0)\,, \\ S(t-a)(t=a) &= S(0) = 0 = g^a_-(a)\,, \\ S'(t-a)(t=a) &= S'(0) = 1 = (g^a_-)'(a)\,. \end{aligned}$$

Concluimos entonces que ha de ser $S(t \pm a) = g^a_\pm(t)$ por unicidad.

(f) De (b) se deduce que $C(t \pm a) = S'(t \pm a)$, que a su vez es igual a $S'(t)C(a) \pm C'(t)S(a)$ gracias a (e). Por tanto

$$\begin{aligned} C(t \pm a) &= S'(t)C(a) \pm C'(t)S(a) \\ &= C(t)C(a) \pm (-S(t)S(a)) = C(t)C(a) \mp S(t)S(a)\,, \end{aligned}$$

donde se ha vuelto a utilizar (b).

(g) Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos para ello que $C(t) \neq 0$ para todo $t \in (0, \infty)$. Como $C(t)$ es continua y $C(0) = 1$, se ha de verificar que $C(t) > 0$ para todo $t \in [0, \infty)$. Entonces $C''(t) = -C(t) < 0$ en $[0, \infty)$, por lo que $C(t)$ ha de ser cóncava y $C'(t)$ decreciente en $[0,\infty)$. Luego para cualquier $t_0 > 0$ se tiene que $C'(t_0) < 0$, es decir, la recta tangente a $C(t)$ en $t = t_0$ corta al eje de abscisas en algún punto, de modo que necesariamente ha de existir $\alpha \in [0,\infty)$ tal que $C(\alpha) = 0$. Esto contradice nuestra hipótesis de partida. Por consiguiente, $C(t)$ se anula en el intervalo $(0,\infty)$. Consideremos entonces el conjunto de todos los puntos en que $C(t)$ se anula,

$$A = \{\alpha > 0 : C(\alpha) = 0\}\,,$$

y veamos que admite un mínimo. Sea $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ una sucesión minimizante, es decir, $\{\alpha_n\} \to \alpha_0$ cuando $n \to \infty$, siendo $\alpha_0 \geq 0$ el ínfimo de A. Se trata finalmente de comprobar que $\alpha_0 = \text{mín}\{A\}$. Pero gracias a la continuidad de $C(t)$ se tiene que

$$\{0\} = \{C(\alpha_n)\} \to C(\alpha_0) = 0$$

cuando $n \to \infty$, luego $\alpha_0 \in A$ y por tanto es su mínimo.

(h) Usando repetidamente lo demostrado en (e) se tiene que

$$\begin{aligned} S(t+2\pi) &= S(t)C(2\pi) + C(t)S(2\pi) \\ &= S(t)C(2\pi) + C(t)\Big(2C(\pi)S(\pi)\Big) \\ &= S(t)C(2\pi) + C(t)\left(4C(\pi)S\Big(\frac{\pi}{2}\Big)C\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\right) = S(t)C(2\pi)\,, \end{aligned}$$

donde hemos empleado también el resultado de (g). Por otro lado, en base a (f) y (c) se tiene que

$$C(2\pi) = C(\pi)^2 - S(\pi)^2 = 1 - 2S(\pi)^2 = 1\,,$$

de donde se deduce que

$$S(t+2\pi) = S(t)\,, \quad C(t+2\pi) = C(t)C(2\pi) - S(t)S(2\pi) = C(t)\,,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

■

15. Sean

$$u(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma}\text{sen}(t\sigma)}{\sqrt{\sigma}}\,d\sigma\,, \quad v(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma}\cos(t\sigma)}{\sqrt{\sigma}}\,d\sigma\,.$$

Demuestra que $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ es solución de un sistema lineal homogéneo y resuelve dicho sistema[3].

Solución : Tenemos

$$u'(t) = \int_0^\infty \sqrt{\sigma}\, e^{-\sigma} \cos(t\sigma)\, d\sigma\,, \quad v'(t) = -\int_0^\infty \sqrt{\sigma}\, e^{-\sigma} \operatorname{sen}(t\sigma)\, d\sigma\,,$$

de cuyas expresiones se deducen fácilmente (integrando por partes en repetidas ocasiones) las siguientes relaciones:

$$u' = \frac{1}{2(1+t^2)}\,(v - tu)\,, \quad v' = -\frac{1}{2(1+t^2)}\,(u + tv)\,.$$

Por tanto, se tiene que $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ resuelve el sistema lineal homogéneo $x' = A(t)x$ con

$$A(t) = \frac{1}{2(1+t^2)} \begin{pmatrix} -t & 1 \\ -1 & -t \end{pmatrix}.$$

■

16. Sea $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ solución del sistema $x' = Ax$ con $A \in M_N(\mathbb{R})$. Demuestra que $t\varphi(t)$ es solución de $x' = Ax + \varphi(t)$ y aplica este resultado para resolver

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

(Julio 2004)

Solución : Como φ es solución de $x' = Ax$ se tiene que

$$(t\varphi(t))' = t\varphi'(t) + \varphi(t) = A(t\varphi(t)) + \varphi(t)\,,$$

luego $t\varphi$ es solución de $x' = Ax + \varphi$.

[3]Recuérdese que $\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Resolvemos en primer lugar el sistema homogéneo

$$x' = Ax\,, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = 0$ (doble) y $\lambda_2 = 1$ y la forma canónica de Jordan asociada a esta situación es, en nuestro caso,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ya que $\text{rango}(A - \lambda_1 I_3) = \text{rango}(A) = 2$. Para construir la matriz de paso elegimos

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - I_3)\,, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A)$$

y $w \in \mathbb{R}^3$ tal que $Aw = v$, por ejemplo

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Usando ahora la descomposición

$$J = B + N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tenemos

$$\begin{aligned} A = PJP^{-1} &\Rightarrow e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1} = Pe^{Bt}e^{Nt}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^t - 1 & 2(e^t - 1 - t) & 2(1 - e^t) + t \\ e^t - 1 & e^t - 2t & 1 - e^t + t \\ 2(e^t - 1) & 2(e^t - 1 - 2t) & 3 - 2(e^t - t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por otro lado es claro que $\varphi(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$ resuelve la ecuación homogénea $x' = Ax$, por lo que $t\varphi(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ 0 \\ te^t \end{pmatrix}$ es una solución particular de la ecuación completa (3.31). Finalmente, la solución general de (3.31) se puede expresar de la siguiente forma:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - 1 & 2(e^t - 1 - t) & 2(1 - e^t) + t \\ e^t - 1 & e^t - 2t & 1 - e^t + t \\ 2(e^t - 1) & 2(e^t - 1 - 2t) & 3 - 2(e^t - t) \end{pmatrix} x_0 + \begin{pmatrix} te^t \\ 0 \\ te^t \end{pmatrix}$$

con $x_0 \in \mathbb{R}^3$ arbitrario.

■

CAPÍTULO 4

Teoría de comparación de Sturm

1. Decide razonadamente si es verdadera o falsa la siguiente afirmación:

   Las soluciones de la ecuación

   $$x'' + \Big(\frac{\varepsilon t}{t+1}\Big)x = 0\,, \quad \varepsilon > 0\,, \tag{4.1}$$

   tienen infinitos ceros.

   (Septiembre 1990)

Solución : VERDADERA. En efecto, es claro que

$$\{q_\varepsilon(t)\} = \left\{\frac{\varepsilon t}{t+1}\right\} \to \varepsilon > 0 \quad \text{cuando } t \to \infty\,.$$

Por tanto, podemos garantizar la existencia de $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|q(t) - \varepsilon| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, t > t_0\,,$$

luego en particular $q(t) > \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall t > t_0$. Comparamos (4.1) con la ecuación

$$x'' + \frac{\varepsilon}{2}x = 0 \tag{4.2}$$

en (t_0, ∞). Por el teorema de comparación de Sturm, entre dos ceros de cualquier solución de (4.2) debe existir al menos un cero de toda solución de (4.1). Ahora bien,

$$x(t) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\,t\right)$$

es una solución de (4.2) con infinitos ceros en (t_0, ∞), luego toda solución de (4.1) tiene infinitos ceros en (t_0, ∞).

■

2. Estudia las propiedades de oscilación en $(0, \infty)$ de las ecuaciones

   (a) $x'' + x' + (\lambda + e^{-t})x = 0\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$

   (b) $t^2 x'' + tx' + \lambda t^2 x = 0\,,\ \lambda > 0$

   (c) $x'' - e^t x = 0$

Solución : (a) Multiplicando la ecuación por e^t conseguimos reescribirla en forma autoadjunta:

$$(e^t x')' + q(t)x = 0\,, \quad q(t) = \lambda e^t + 1\,. \tag{4.3}$$

Claramente $q(t) > \lambda e^t$ para todo $t > 0$, luego podemos comparar (4.3) con la ecuación $(e^t x')' + \lambda e^t x = 0$, que es equivalente a

$$x'' + x' + \lambda x = 0\,. \tag{4.4}$$

Las raíces de la ecuación característica asociada a (4.4) son de la forma

$$\mu = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2}\,,$$

luego debemos distinguir dos casos:

(i) $\lambda > \frac{1}{4}$ produce dos raíces complejas conjugadas de la ecuación característica, luego las soluciones de (4.4) son de la forma

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left\{ A \cos\left(\frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2}\, t \right) + B \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2}\, t \right) \right\}$$

para cualesquiera $A, B \in \mathbb{R}$, las cuales tienen infinitos ceros. Por consiguiente, toda solución de (4.3) tiene infinitos ceros.

(ii) Si $\lambda \leq \frac{1}{4}$ las soluciones de (4.4) tienen a lo sumo un cero, por lo que la teoría de Sturm no nos permite sacar conclusiones. Es necesario en este caso, por tanto, comparar con otra ecuación.

(iia) Si $0 < \lambda < \frac{1}{4}$, entonces $1 \leq \left(\frac{1}{4} - \lambda\right)e^t$ para valores *suficientemente grandes* de t. Por tanto, podemos afirmar que existe $t_0 > 0$ tal que

$$q(t) \leq \frac{e^t}{4} \quad \forall t > t_0 > 0\,.$$

Comparamos entonces (superiormente) la ecuación (4.3) con

$$x'' + x' + \frac{x}{4} = 0\,, \tag{4.5}$$

cuyas soluciones son de la forma

$$x(t) = A\,e^{-\frac{t}{2}} + Bt\,e^{-\frac{t}{2}}\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,,$$

las cuales tienen a lo sumo un cero. La teoría de Sturm indica entonces que las soluciones de (4.3) también tienen a lo sumo un cero.

(iib) Si $\lambda = \frac{1}{4}$ no podemos obtener conclusiones basándonos en la teoría de comparación de Sturm.

(b) Consideremos el cambio de variable

$$x(t) = u(\sqrt{\lambda}t)\,,$$

el cual conduce a la siguiente ecuación:

$$\lambda t^2 u''(\sqrt{\lambda}t) + \sqrt{\lambda}tu'(\sqrt{\lambda}t) + \lambda t^2 u(\sqrt{\lambda}t) = 0\,,$$

o bien

$$t^2u''(t) + tu'(t) + t^2u(t) = 0 \tag{4.6}$$

sin más que considerar la transformación $\sqrt{\lambda}t \mapsto t$. Obsérvese que esta ecuación ya no depende de λ, luego el comportamiento de las soluciones de

$$t^2x'' + tx' + \lambda t^2 x = 0 \tag{4.7}$$

tampoco. La ecuación (4.6), equivalente a (4.7), es una ecuación de Bessel de índice cero (ver Capítulo 6). Para analizarla planteamos el cambio de variable

$$u(t) = \frac{y(t)}{\sqrt{t}}\,, \tag{4.8}$$

el cual conduce a la siguiente nueva ecuación:

$$t^{\frac{3}{2}}y'' + \Big(\frac{1}{4\sqrt{t}} + t^{\frac{3}{2}}\Big)y = 0\,. \tag{4.9}$$

Como $t > 0$, podemos dividir la ecuación anterior por $t^{\frac{3}{2}}$ y obtenemos

$$y'' + q(t)y = 0\,, \quad q(t) = \frac{1}{4t^2} + 1\,.$$

Además, de (4.8) se deduce fácilmente que los ceros positivos de $u(t)$ y de $y(t)$ son los mismos. Es obvio que $q(t) \to 1$ cuando $t \to \infty$, por lo que ha de existir $t_0 > 0$ tal que

$$q(t) > \frac{1}{2} \quad \forall\, t > t_0 > 0\,.$$

Podemos comparar entonces la ecuación (4.9) con

$$y'' + \frac{y}{2} = 0$$

cuyas soluciones, las cuales responden a la forma

$$y(t) = A\cos\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\,t\Big) + B\,\mathrm{sen}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\,t\Big)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,,$$

tienen todas infinitos ceros (positivos). Consecuentemente, la teoría de comparación de Sturm se aplica para concluir que todas las soluciones de la ecuación de Bessel (4.6), y por consiguiente todas las soluciones de (4.7), tienen infinitos ceros (positivos).

(c) Se tiene que

$$q(t) = -e^t < -1 \quad \text{si} \;\; t > 0\,.$$

Las soluciones no triviales de

$$x'' - x = 0$$

son de la forma $x(t) = Ae^t + Be^{-t}$ y tienen a lo sumo un cero positivo, luego las soluciones de $x'' - e^t x = 0$ tienen a lo sumo un cero positivo.

■

CAPÍTULO 5

La ecuación periódica

1. Se considera la ecuación escalar $x' = a(t)x$ con $a \in C(\mathbb{R})$ y T–periódica. Se pide:

   (a) Probar que admite soluciones T–periódicas no triviales si y sólo si $\int_0^T a(t)\,dt = 0$.

   (b) Si dicha ecuación tiene soluciones nT–periódicas con $n \in \mathbb{N}$, entonces estas soluciones son T–periódicas.

   (c) Si $\varphi \in C(\mathbb{R})$ admite dos periodos $0 < T_1 < T_2$ y $T_2 \notin T_1\mathbb{Q}$, entonces φ es constante.

   (d) Deducir de los apartados anteriores que la ecuación no admite otras soluciones periódicas (no triviales) que las T–periódicas a menos que $a \equiv 0$.

Solución : (a) *De izquierda a derecha*: La solución general de la ecuación $x' = a(t)x$ es

$$x(t) = K\,e^{\int_0^t a(s)\,ds}\,, \quad K \in \mathbb{R}\,.$$

Por hipótesis $x(t) = x(t+T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, luego

$$\int_0^t a(s)\,ds = \int_0^{t+T} a(s)\,ds = \int_0^t a(s)\,ds + \int_t^{t+T} a(s)\,ds\,.$$

Esto implica que $\int_t^{t+T} a(s)\,ds = 0$. En particular, para $t = 0$ se concluye que $\int_0^T a(t)\,dt = 0$.

De derecha a izquierda: Consideremos una solución cualquiera

$$x(t) = k\, e^{\int_0^t a(s)\, ds}$$

para algún $k \in \mathbb{R}$. Esta solución será T–periódica si $x(t) = x(t+T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, si

$$\int_0^t a(s)\, ds = \int_0^{t+T} a(s)\, ds = \int_0^t a(s)\, ds + \int_t^{t+T} a(s)\, ds$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ o, equivalentemente, si

$$\Psi(t) = \int_t^{t+T} a(s)\, ds = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Pero $\Psi'(t) = a(t+T) - a(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ por ser $a(t)$ T–periódica. Por consiguiente $\Psi(t)$ es constante y, como $\Psi(0) = 0$ por hipótesis, ha de ser $\Psi \equiv 0$ lo que implica que $x(t)$ es T–periódica.

(b) Sea

$$x(t) = x(0)\, e^{\int_0^t a(s)\, ds}$$

una solución nT–periódica. Entonces $x(nT) = x(0)$, lo que se traduce en $e^{\int_0^{nT} a(t)\, dt} = 1$ o, equivalentemente, $\int_0^{nT} a(t)\, dt = 0$. En ese caso

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^{nT} a(t)\, dt \\ = \int_0^T a(t)\, dt + \int_T^{2T} a(t)\, dt + \cdots + \int_{(n-1)T}^{nT} a(t)\, dt \\ = n \int_0^T a(t)\, dt\,. \end{aligned} \tag{5.1}$$

En efecto, dado $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \le k \le n$ el cambio de variable $t = u + (k-1)T$ y la T–periodicidad de la función $a(t)$ permiten concluir que

$$\int_{(k-1)T}^{kT} a(t)\, dt = \int_0^T a(u + (k-1)T)\, du = \int_0^T a(u)\, du\,.$$

Por tanto, en virtud de (5.1) se obtiene que $\int_0^T a(t)\, dt = 0$, lo cual implica que $x(t)$ es T–periódica según lo probado en (a).

(c) Haremos uso del siguiente resultado algebraico:

Teorema 1. Todo subgrupo G de $\mathbb{R}$ o bien es denso en $\mathbb{R}$ o bien es de la forma $G = \alpha\mathbb{Z}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

En nuestro caso consideramos

$$G = \{T \in \mathbb{R} : \varphi(t+T) = \varphi(t) \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}\}\,,$$

es decir, el conjunto de los periodos de $\varphi \in C(\mathbb{R})$. En primer lugar observamos que G es un subgrupo aditivo, ya que si $T_1, T_2 \in G$ entonces $\varphi(t+T_1) = \varphi(t)$ y $\varphi(t+T_2) = \varphi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y, por tanto,

$$\varphi(t+(T_1+T_2)) = \varphi((t+T_1)+T_2) = \varphi(t+T_1) = \varphi(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Luego $\overline{G} = \mathbb{R}$ o bien $G = \alpha\mathbb{Z}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Si fuese $G = \alpha\mathbb{Z}$ y $T_1, T_2 \in G$, habrían de existir $p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $T_1 = \alpha p$ y $T_2 = \alpha q$, lo cual nos conduciría a la siguiente contradicción: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Por consiguiente ha de ser $\overline{G} = \mathbb{R}$, de donde se deduce que φ es necesariamente constante. En efecto, sean $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo, $x \in \mathbb{R}$ y $\{T_n\} \subset G$ tales que $\{T_n\} \to x - x_0 \in \mathbb{R}$ cuando $n \to \infty$. Entonces

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \varphi(x_0 + (x-x_0)) = \varphi\big(x_0 + \lim_{n\to\infty}\{T_n\}\big) = \\ \lim_{n\to\infty}\{\varphi(x_0+T_n)\} = \lim_{n\to\infty}\{\varphi(x_0)\} = \varphi(x_0) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

(d) Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que la ecuación $x' = a(t)x$ admite una solución, $x(t)$, $\tilde{T}$–periódica con $\tilde{T} \neq T$ y $\tilde{T} \neq T\mathbb{Q}$, ya que en caso contrario $x(t)$ también sería T–periódica según lo probado en (b). Entonces $a(t)$ es T–periódica (por hipótesis) y, como veremos a continuación, también $\tilde{T}$–periódica. En efecto, observamos en primer lugar que si una función f es T–periódica su derivada también lo es, ya que

$$\begin{aligned}f'(u+T) &= \lim_{x\to u+T}\left\{\frac{f(x)-f(u+T)}{x-u-T}\right\} \\ &= \lim_{v\to u}\left\{\frac{f(v+T)-f(u+T)}{v-u}\right\} \\ &= \lim_{v\to u}\left\{\frac{f(v)-f(u)}{v-u}\right\} = f'(u) \quad \forall\, u \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Ahora bien, si $x(t)$ es una solución $\tilde{T}$–periódica no trivial se tiene que

$$a(t)x(t) = x'(t) = x'(t+\tilde{T}) = a(t+\tilde{T})x(t+\tilde{T}) = a(t+\tilde{T})x(t)\,,$$

luego $a(t)$ también es $\tilde{T}$–periódica. Entonces, en virtud de lo demostrado en (c) la función $a(t)$ es constante, $a(t) \equiv a$, y por (a) se tiene que

$$\int_0^{\tilde{T}} a(t)\, dt = a\tilde{T} = 0 \Rightarrow a \equiv 0\,,$$

lo cual contradice una de las hipótesis satisfechas por la función $a(t)$.

■

2. Encuentra un sistema T–periódico con alguna solución periódica que no admita el periodo T.

Solución : Considérese el siguiente sistema 1–periódico:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \operatorname{sen}(2\pi t)x \\ y' = z \\ z' = -y \end{array} \right. ,$$

del cual

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

es una solución 2π–periódica que no es 1–periódica.

■

3. Sea C una matriz de monodromía del sistema T–periódico $x' = A(t)x$. Prueba que

$$\det(C) = \exp\left\{ \int_0^T \operatorname{traza}(A(s))\, ds \right\}\,.$$

Decide si existe algún sistema periódico 2×2 con los siguientes multiplicadores característicos:

(a) $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1\,.$

(b) $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i\,.$

(c) $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1\,.$

(d) $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$.

Solución : Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental principal en cero. Entonces $C = \Phi(T)$ es una matriz de monodromía. Usando la fórmula de Jacobi–Liouville para la matriz $\Phi(t)$ evaluada en $t = T$ obtenemos

$$\begin{aligned}\det(C) = \det(\Phi(T))& \\ &= \det(\Phi(0)) \exp\left\{ \int_0^T \mathrm{traza}(A(s))\, ds \right\} \\ &= \exp\left\{ \int_0^T \mathrm{traza}(A(s))\, ds \right\} . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Como todas las matrices de monodromía son semejantes entre sí todas tienen el mismo determinante, luego la identidad (5.2) es válida para cualquier matriz de monodromía.

Los casos (a) y (d) no pueden darse, ya que para cualquier matriz de monodromía C ha de verificarse $\det(C) = \lambda_1\lambda_2$, que no puede ser ni negativo ni nulo en virtud de la expresión (5.2). Los casos (b) y (c), por el contrario, sí pueden ocurrir. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ilustra el caso expresado en (b) y

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{16} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

el expresado en (c).

■

4. Dado el sistema T–periódico $x' = A(t)x$, denotemos por Z_T al conjunto de todas sus soluciones T–periódicas. Demuestra que Z_T es un subespacio vectorial del conjunto de soluciones del sistema tal que $\dim(Z_T) = \dim(\mathrm{Ker}[C - I])$, donde C es una matriz de monodromía.

Solución : Que Z_T es un subespacio vectorial del espacio de soluciones es de comprobación inmediata. Comprobemos entonces la igualdad entre las dimensiones. Sea para ello $\Phi(t)$ una matriz fundamental principal en t_0. Entonces podemos describir Z_T de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Z_T &= \{\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) : \varphi'(t) = A(t)\varphi(t),\ \varphi(t+T) = \varphi(t)\ \forall\, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) : \varphi(t) = \Phi(t)x_0,\ \varphi(t+T) = \varphi(t)\ \forall\, t \in \mathbb{R}\}\,. \end{aligned}$$

Definimos $L : \mathrm{Ker}(C - I) \to Z_T$ como $L(x_0) = \Phi(t)x_0$. La aplicación L está bien definida, ya que dado $x_0 \in \mathrm{Ker}[C - I]$ se tiene que la función

$$\varphi(t) = \Phi(t)x_0$$

(a) es solución, ya que $\Phi(t)$ es una matriz fundamental;

(b) es T–periódica. En efecto,

$$\begin{aligned} &x_0 \in \mathrm{Ker}[C - I] \Rightarrow Cx_0 = x_0 \\ &\quad \Rightarrow \Phi(t)x_0 = \Phi(t)Cx_0 = \Phi(t+T)x_0 \Rightarrow \varphi(t+T) = \varphi(t)\,. \end{aligned}$$

Además, es inmediato comprobar que L es un isomorfismo lineal, con lo que se concluye la igualdad entre las dimensiones de los espacios de partida y de llegada de L.

■

5. Se considera el sistema 2π–periódico

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p^2 & 0 \end{pmatrix} x\,, \quad p > 0. \tag{5.3}$$

Encuentra una matriz de monodromía y los multiplicadores característicos.

Solución : El sistema (5.3) es claramente equivalente a la ecuación lineal de segundo orden $x'' + p^2 x = 0$, de la cual un sistema fundamental de soluciones es $\{\mathrm{sen}(pt), \cos(pt)\}$. Por tanto, una matriz fundamental es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(pt) & \mathrm{sen}(pt) \\ -p\,\mathrm{sen}(pt) & p\cos(pt) \end{pmatrix}.$$

Esta matriz no es principal en cero, pero una manipulación algebraica sencilla en el coeficiente $\operatorname{sen}(pt)$ (y, por tanto, en su derivada) nos conduce a

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \cos(pt) & \frac{1}{p}\operatorname{sen}(pt) \\ -p\operatorname{sen}(pt) & \cos(pt) \end{pmatrix},$$

que sí es principal en cero.[1] Por consiguiente, para construir una matriz de monodromía basta con evaluar

$$C = \Psi(2\pi) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi p) & \frac{1}{p}\operatorname{sen}(2\pi p) \\ -p\operatorname{sen}(2\pi p) & \cos(2\pi p) \end{pmatrix}.$$

Para calcular los multiplicadores característicos basta con observar que el polinomio característico de la matriz C,

$$p_\lambda(C) = \det(C - \lambda I_2) = \lambda^2 - 2\cos(2\pi p)\lambda + 1\,,$$

se anula si y solamente si

$$\lambda = \cos(2\pi p) \pm i\operatorname{sen}(2\pi p)\,.$$

■

6. Sea $\tilde{C}$ una matriz semejante a una matriz de monodromía C del sistema T–periódico $x' = A(t)x$. ¿Es $\tilde{C}$ una matriz de monodromía de dicho sistema?

Solución : SI. Como $\tilde{C}$ y C son semejantes ha de existir una matriz regular P tal que $\tilde{C} = PCP^{-1}$. Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental de $x' = A(t)x$. Entonces $\Phi(t+T)$ también lo es y, como C es una matriz de monodromía, se tiene que $\Phi(t+T) = \Phi(t)C$. Por tanto,

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)P^{-1}\tilde{C}P \Leftrightarrow \Phi(t+T)P^{-1} = \Phi(t)P^{-1}\tilde{C}\,.$$

Finalmente, como $\Psi(t) = \Phi(t)P^{-1}$ también es una matriz fundamental (cf. Proposición 2) y se satisface $\Psi(t+T) = \Psi(t)C$, podemos concluir que $\tilde{C}$ también es una matriz de monodromía.

■

[1]Nótese que $\{\operatorname{sen}(pt), \frac{1}{p}\cos(pt)\}$ tiene el mismo derecho a ser una base de soluciones que $\{\operatorname{sen}(pt), \cos(pt)\}$

7. Se considera la ecuación de Hill $x'' + (a + bp(t))x = 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y donde $p \in C(\mathbb{R})$ es T–periódica. Sean $f_1(t)$ y $f_2(t)$ dos soluciones linealmente independientes tales que
$$f_1(0) = f_2'(0) = 1 \quad \text{y} \quad f_2(0) = f_1'(0) = 0\,.$$

   (a) Demuestra que los multiplicadores característicos satisfacen la ecuación
   $$\lambda^2 - D(a,b)\lambda + 1 = 0\,,$$
   donde $D(a,b) = f_1(T) + f_2'(T)$.

   (b) Demuestra que si $-2 < D(a,b) < 2$, entonces los multiplicadores característicos son complejos conjugados con módulo igual a 1 y las soluciones, al igual que sus primeras derivadas, están acotadas en $\mathbb{R}$.

   (c) Demuestra que si $D(a,b) < -2$ o bien $D(a,b) > 2$ entonces existe una solución no acotada.

   (d) Demuestra que si $D(a,b) = 2$ entonces existe una solución de periodo T. Asimismo, si $D(a,b) = -2$ entonces existe una solución de periodo $2T$ que no es T–periódica.

(Febrero 1978)

Solución : (a) La ecuación de Hill de nuestro problema es equivalente al sistema lineal
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a - bp(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Como por hipótesis $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son dos soluciones linealmente independientes, se tiene que
$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{pmatrix}$$
es una matriz fundamental que además es principal en $t = 0$ por las condiciones del problema. Por tanto,
$$C = \Phi(T) = \begin{pmatrix} f_1(T) & f_2(T) \\ f_1'(T) & f_2'(T) \end{pmatrix}$$

es una matriz de monodromía. Luego los multiplicadores característicos satisfacen la ecuación

$$\begin{aligned} p_\lambda(T) &= (f_1(T)-\lambda)(f_2'(T)-\lambda) - f_1'(T)f_2(T) \\ &= \lambda^2 - (f_1(T)+f_2'(T))\lambda + f_1(T)f_2'(T) - f_1'(T)f_2(T) \\ &= \lambda^2 - D(a,b)\lambda + 1 = 0\,, \end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$f_1(T)f_2'(T) - f_1'(T)f_2(T) = \det(C) = e^{\int_0^T \operatorname{traza}(A(s))\,ds} = 1$$

en virtud del Ejercicio 3.

(b) Resolvemos la ecuación característica encontrada en el apartado anterior: $\lambda^2 - D(a,b)\lambda + 1 = 0$. Se tiene que

$$\lambda = \frac{D(a,b) \pm \sqrt{D(a,b)^2-4}}{2} \quad \text{con } 0 \leq D(a,b)^2 < 4\,,$$

es decir,

$$\lambda = \frac{D(a,b)}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{4-D(a,b)^2}}{2}\,, \tag{5.5}$$

de donde se comprueba fácilmente que $|\lambda| = 1$. Como los dos multiplicadores característicos son complejos (conjugados) se tiene que el sistema es acotado, luego $x(t)$ y $x'(t)$ son funciones acotadas.

(c) En ambos casos se deduce fácilmente a partir de (5.5) que al menos uno de los multiplicadores característicos es o bien > 1 o bien < -1, luego en cualquier caso ha de tener módulo > 1. Denotemos por λ_0 dicho multiplicador característico. Entonces existe una solución no trivial de (5.4), a la cual denotaremos por $\varphi(t)$, que satisface $\varphi(t+T) = \lambda_0\varphi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Si suponemos cierta la propiedad

$$\varphi(t+(n-1)T) = \lambda_0^{n-1}\varphi(t)\,,$$

un simple argumento inductivo nos permite concluir que

$$\varphi(t+nT) = \varphi(t+(n-1)T+T) = \lambda_0\,\varphi(t+(n-1)T) = \lambda_0^n\,\varphi(t)\,.$$

Por tanto

$$\{\|\varphi(t+nT)\|\} = \{\|\lambda_0^n\varphi(t)\|\} = \{|\lambda_0|^n\|\varphi(t)\|\} \to \infty$$

cuando $n \to \infty$, luego $\varphi(t)$ no es acotada.

(d) Si $D(a,b) = 2$, $\lambda = 1$ resuelve claramente la ecuación (cf. (a))

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0\,.$$

Por tanto $\lambda = 1$ es un multiplicador característico del sistema (5.4), lo cual se traduce en la existencia de una solución T–periódica del mismo. Si por el contrario $D(a,b) = 2$, es inmediato comprobar que $\lambda = -1$ resuelve la ecuación

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0\,,$$

por lo que se trata de un multiplicador característico del sistema (5.4). Consecuentemente se tiene garantizada la existencia de una solución $2T$–periódica de (5.4) que no es T–periódica.

■

8. Demuestra que la ecuación de Hill $x'' + p(t)x = 0$ con p continua, T–periódica, negativa y no constantemente nula, no admite soluciones T–periódicas no triviales. Análogamente, encuentra criterios de no existencia de soluciones T–periódicas para la ecuación

$$x'' + cx' + p(t)x = 0\,, \quad c > 0\,.$$

Solución : Como $p(t) < 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ por hipótesis, podemos usar la teoría de Sturm para comparar las soluciones de $x'' + p(t)x = 0$ con las rectas $x(t) = A + Bt$, las cuales resuelven la ecuación $x'' = 0$. En efecto, si la ecuación de Hill $x'' + p(t)x = 0$ admitiese una solución T–periódica no trivial, $u(t)$, podrían plantearse los dos siguientes casos:

- $u(t)$ se anula infinitas veces (ya que, por periodicidad, si tuviese al menos un cero habría de tener infinitos). Esta posibilidad conduce inmediatamente a una contradicción, ya que entre dos ceros consecutivos de $u(t)$ tendría que haber al menos un cero de cualquier solución de $x'' = 0$, lo cual es obviamente falso (considérese, por ejemplo, $x(t) \equiv k \neq 0$).
- $u(t)$ es una función T–periódica que no se anula, en cuyo caso ha de tener signo constante. Entonces $u'' = -p(t)u$ también

tiene signo constante, es decir, no cambia la concavidad de $u(t)$. Pero la única posibilidad de que $u(t)$ sea continua, T–periódica y tal que su curvatura tenga signo constante es que $u(t) \equiv C \in \mathbb{R}$. Sin embargo la única solución constante de la ecuación $x'' + p(t)x = 0$ es $x \equiv 0$, lo cual nos conduce a una contradicción (cf. Ejercicio 14).

La misma condición sobre la función $p(t)$ es suficiente para concluir que la ecuación

$$x'' + cx' + p(t)x = 0\,, \quad c > 0\,, \tag{5.6}$$

no admite soluciones T–periódicas no triviales. En efecto:

- Si $u(t)$ fuese una solución T–periódica (no trivial) de (5.6) la misma discusión que en la situación anterior es pertinente. Podemos comparar (5.6) con la ecuación $x'' + cx' = 0$ para concluir que $u(t)$ no se puede anular, ya que en caso contrario entre dos ceros consecutivos de $u(t)$ tendría que existir al menos un cero de cualquier solución de $x'' + cx' = 0$. Pero todas las soluciones de $x'' + cx' = 0$ son de la forma

  $$x(t) = A + Be^{-ct}\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,,$$

  las cuales a lo más se anulan una vez.

- Si por el contrario $u(t)$ no se anulara habría de conservar el signo (bien sea positivo o negativo). Entonces $(u' + cu)' = -p(t)u$ tendría también signo constante (porque $p(t)$ lo tiene), lo cual se traduce en que $u' + cu$ sería estrictamente monótona. Pero sabemos que $u' + cu$ es T–periódica (cf. Ejercicio 1 (d), donde se prueba que la derivada de una función T–periódica es también T–periódica), lo cual genera una contradicción.

■

9. Se considera la ecuación $x' = A(t)x$, donde $A : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{R})$ es continua y T–periódica. Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental principal en cero y C la correspondiente matriz de monodromía. Demuestra las siguientes afirmaciones:

(a) $\Phi(t+nT) = \Phi(t)C^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}$.

(b) Si λ es un valor propio de C con $|\lambda| > 1$, entonces existe una solución no acotada.

(c) Si todos los multiplicadores característicos tienen módulo menor que 1, entonces todas las soluciones tienden a cero cuando $t \to \infty$.

Solución : (a) Razonamos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$. La propiedad es conocida para $n = 1$: $\Phi(t+T) = \Phi(t)C$. Formulamos la siguiente hipótesis de inducción:

$$\Phi(t+(n-1)T) = \Phi(t)C^{n-1}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\Phi(t+nT) = \Phi(t+(n-1)T+T) &= \Phi(t+(n-1)T)C \\ &= \Phi(t)C^{n-1}C = \Phi(t)C^n\,,\end{aligned}$$

lo que concluye la prueba.

(b) Sea x_0 un vector propio de C asociado al valor propio λ, es decir, $Cx_0 = \lambda x_0$ y sea $\Phi(t)x_0$ una solución del sistema $x' = A(t)x$. Entonces $\Phi(t+nT)x_0$ también es solución del sistema (por ser la matriz A T–periódica) y satisface

$$\begin{aligned}\{\|\Phi(t+nT)x_0\|\} = \{\|\Phi(t)C^n x_0\|\} &= \{\|\Phi(t)\lambda^n x_0\|\} \\ &= \{|\lambda|^n\|\Phi(t)x_0\|\} \to \infty\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, para lo cual hemos usado el resultado de (a).

(c) Como por hipótesis el radio espectral de C es < 1, es conocido que $\{\|C^n\|\} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por tanto se tiene que

$$\{\|\Phi(t+nT)\|\} = \{\|\Phi(t)C^n\|\} \leq \max_{0\leq t\leq T}\{\|\Phi(t)\|\}\{\|C^n\|\} \to 0$$

cuando $n \to \infty$, donde hemos hecho uso nuevamente de lo demostrado en (a).

■

10. Resuelve las siguientes cuestiones:

    (a) Demuestra que si la matriz A tiene un valor propio de la forma $\frac{2k\pi i}{T}$, con $k \in \mathbb{Z}$, entonces $x' = Ax$ tiene una solución T–periódica.

    (b) Demuestra que la ecuación $x'' = f(t)$, con f continua y T–periódica, tiene soluciones T–periódicas si y sólo si $\int_0^T f(t)\,dt = 0$.

    (c) Discute la existencia de soluciones 2π–periódicas de la ecuación $y'' + \lambda^2 y = p(t)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y p es continua y 2π–periódica.

    (d) Sea la ecuación diferencial $x' = A(t)x$, con $A(t)$ continua y T–periódica. Demuestra que si un multiplicador característico es raíz n–ésima de la unidad, entonces existe una solución periódica de periodo nT.

    (e) Halla una condición necesaria y suficiente para que la ecuación $x' + (\text{sen}(t))x = f(t)$, con f continua y 2π–periódica, tenga solución 2π–periódica.

    (Septiembre 1987)

    (f) Demuestra que si $\int_0^T \text{traza}(A(s))\,ds > 0$ entonces el sistema T–periódico $x' = A(t)x$ es no acotado.

    (g) Decide de forma razonada si cada una de las siguientes ecuaciones tiene solución π–periódica:

    $$x'' + 4x = \text{sen}(4t)\,, \quad x'' + 4x = \text{sen}(2t)\,, \quad x'' + 4x = \text{sen}(t)\,.$$

    (Junio 2004)

    (h) Prueba que el sistema lineal

    $$x' = \begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} x\,,$$

    con $a, b \in C(\mathbb{R})$ y T–periódicas, admite soluciones T–periódicas no triviales si y solamente si $\int_0^T a(t)\,dt = 0$.

    (Junio 2004)

Solución : (a) Si $\frac{2k\pi i}{T}$ es un valor propio de A también lo es su conjugado $-\frac{2k\pi i}{T}$. Por tanto, como $x' = Ax$ es un sistema lineal con coeficientes constantes se tiene que las funciones

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{T}\,t\right), \quad \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{T}\,t\right)$$

son soluciones. En particular, $x(t) = \cos\left(\frac{2k\pi}{T}\,t\right)$ es una solución T–periódica:

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{T}\,(t+T)\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{T}\,t + 2k\pi\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{T}\,t\right).$$

(b) La ecuación se puede expresar matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Como la matriz de coeficientes del sistema,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es nilpotente, podemos calcular fácilmente una matriz fundamental del mismo (que además es principal en $t = 0$):

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto una matriz de monodromía es

$$C = \Phi(T) = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cuyo único valor propio es $\mu = 1$ (doble). En virtud del teorema de la alternativa de Fredhölm, la ecuación $x'' = f(t)$ admite soluciones T–periódicas si y solamente si

$$\int_0^T y(t)^T \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} dt = 0$$

para toda $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ solución T–periódica de la ecuación adjunta

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Sabemos que

$$[\Phi(t)^{-1}]^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental de (5.7) y que sus soluciones T–periódicas son aquellas que responden a la siguiente forma:

$$y(t) = [\Phi(t)^{-1}]^T y_0\,,$$
$$y_0 \in \mathrm{Ker}[I - \Phi(T)^T] = \mathrm{Ker}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -T & 0 \end{pmatrix}\right] = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R}\right\}.$$

Por consiguiente, la ecuación $x'' = f(t)$ admite soluciones T–periódicas no triviales si y solamente si

$$u\int_0^T f(t)\,dt = 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{R}\,,$$

es decir, si y solamente si

$$\int_0^T f(t)\,dt = 0\,.$$

(c) La matriz fundamental principal en $t = 0$ del sistema homogéneo asociado es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) & \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{sen}(\lambda t) \\ -\lambda\,\mathrm{sen}(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{pmatrix}$$

y una matriz de monodromía es

$$C = \Phi(2\pi) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\lambda) & \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{sen}(2\pi\lambda) \\ -\lambda\,\mathrm{sen}(2\pi\lambda) & \cos(2\pi\lambda) \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica asociada a esta última matriz es

$$\mu^2 - 2\cos(2\pi\lambda)\mu + 1 = 0\,,$$

de donde concluimos que $\mu = 1$ es un multiplicador característico si y sólo si $\cos(2\pi\lambda) = 1$, es decir, si y sólo si $\lambda \in \mathbb{Z}$. Por tanto:

(i) Si $\lambda \notin \mathbb{Z}$ entonces $\mu = 1$ no es un multiplicador característico y podemos afirmar, en virtud del teorema de la alternativa de Fredhölm, que existe una única solución 2π–periódica de la ecuación $y'' + \lambda^2 y = p(t)$.

(ii) Nos queda por estudiar el caso $\lambda \in \mathbb{Z}$, para el que $\mu = 1$ sí es un multiplicador característico.

(iia) Si $\lambda = 0$, el problema está resuelto en (b).

(iib) Si $\lambda \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, el teorema de la alternativa de Fredhölm afirma que la ecuación $y'' + \lambda^2 y = p(t)$ admite soluciones 2π–periódicas si y solamente si

$$\int_0^{2\pi} y(t)^T \begin{pmatrix} 0 \\ p(t) \end{pmatrix} dt = 0$$

para toda $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ solución 2π–periódica de la ecuación adjunta

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} . \tag{5.8}$$

Sabemos que

$$[\Phi(t)^{-1}]^T = \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) & \lambda \operatorname{sen}(\lambda t) \\ -\frac{1}{\lambda} \operatorname{sen}(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental de (5.8) y que sus soluciones 2π–periódicas vienen dadas por

$$\begin{aligned} y(t) = [\Phi(t)^{-1}]^T y_0 \,, & \\ & y_0 \in \operatorname{Ker}[I - \Phi(2\pi)^T] \\ = \operatorname{Ker} & \left[\begin{pmatrix} 1 - \cos(2\pi\lambda) & \lambda \operatorname{sen}(2\pi\lambda) \\ -\frac{1}{\lambda} \operatorname{sen}(2\pi\lambda) & 1 - \cos(2\pi\lambda) \end{pmatrix} \right] = \mathbb{R}^2 \,. \end{aligned}$$

Por consiguiente, nuestra ecuación admite soluciones 2π–periódicas no triviales si y solamente si

$$-\frac{u}{\lambda} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\lambda t) p(t)\, dt + v \int_0^{2\pi} \cos(\lambda t) p(t)\, dt = 0$$

para cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}$, es decir, si y solamente si

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\lambda t) p(t)\, dt = 0 = \int_0^{2\pi} \cos(\lambda t) p(t)\, dt \,.$$

(d) Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental principal en $t = 0$, de modo que $C = \Phi(T)$ es una matriz de monodromía. Sea también μ un multiplicador característico tal que $\mu^n = 1$. Entonces ha de existir una solución no trivial $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ de $x' = A(t)x$ tal que

$$\begin{aligned} x(t+T) &= \mu x(t)\,, \\ x(t+2T) &= \mu x(t+T) = \mu^2 x(t)\,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x(t+nT) &= \cdots = \mu^n x(t) = x(t)\,. \end{aligned}$$

Por tanto, $x(t)$ es una solución nT–periódica.

(e) Se trata de una ecuación lineal no homogénea, cuya solución general es

$$x(t) = \left(\int_0^t f(s)\, e^{-\cos(s)}\, ds \right) e^{\cos(t)}\,.$$

Entonces $x(t) = x(t + 2\pi)$ si y solamente si

$$\left(\int_0^t f(s)\, e^{-\cos(s)}\, ds \right) e^{\cos(t)} = \left(\int_0^{t+2\pi} f(s)\, e^{-\cos(s)}\, ds \right) e^{\cos(t+2\pi)}\,,$$

luego una condición suficiente y necesaria para que $x(t)$ sea 2π–periódica es

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-\cos(t)}\, dt = 0\,,$$

ya que f es 2π–periódica por hipótesis.

(f) Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental principal en cero, con lo cual $C = \Phi(T)$ es una matriz de monodromía. Aplicando la fórmula de Jacobi–Liouville obtenemos (cf. Ejercicio 3)

$$\det(C) = e^{\int_0^T \mathrm{traza}(A(s))\, ds} > 1\,,$$

ya que por hipótesis $\mathrm{traza}(A(s)) > 0$. Esto quiere decir que necesariamente alguno de los multiplicadores característicos ha de ser mayor que 1. Por consiguiente, la propiedad demostrada en el Ejercicio 9 (b) nos permite concluir que existe una solución no acotada, luego el sistema es no acotado.

(g) La ecuación homogénea es la misma en los tres casos, $x'' + 4x = 0$, cuya solución general viene dada por

$$x(t) = A\cos(2t) + B\,\mathrm{sen}(2t)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Es claro, por tanto, que todas las soluciones de la ecuación homogénea son π–periódicas. Una matriz fundamental es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) & \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) \\ -2\operatorname{sen}(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix},$$

que además es principal en cero. Por tanto, según el teorema de la alternativa de Fredhölm la ecuación completa admite soluciones π–periódicas si y solamente si

$$\int_0^\pi y(t)^T \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} dt = 0$$

para toda $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ solución π–periódica de la ecuación adjunta

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

donde $f(t)$ denota eventualmente cada uno de los segundos miembros de las tres ecuaciones propuestas. Sabemos que

$$[\Phi(t)^{-1}]^T = \begin{pmatrix} \cos(2t) & 2\operatorname{sen}(2t) \\ -\operatorname{sen}(t)\cos(t) & \cos(2t) \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental de (5.9) y que sus soluciones π–periódicas vienen dadas por

$$y(t) = [\Phi(t)^{-1}]^T y_0, \quad y_0 \in \operatorname{Ker}[I - \Phi(\pi)^T] = \mathbb{R}^2.$$

Por consiguiente:

- La ecuación $x'' + 4x = \operatorname{sen}(4t)$ admite soluciones π–periódicas no triviales si y solamente si

  $$-u\int_0^\pi \operatorname{sen}(t)\cos(t)\operatorname{sen}(4t)\,dt + v\int_0^\pi \cos(2t)\operatorname{sen}(4t)\,dt = 0$$

  para cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}$, lo cual es siempre cierto porque ambas integrales son nulas.

- La ecuación $x'' + 4x = \operatorname{sen}(2t)$ admite soluciones π–periódicas no triviales si y solamente si

  $$-u\int_0^\pi \operatorname{sen}(t)\cos(t)\operatorname{sen}(2t)\,dt + v\int_0^\pi \cos(2t)\operatorname{sen}(2t)\,dt = 0$$

  para cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}$. Pero esta identidad sólo es satisfecha si $u = 0$, luego la ecuación no admite soluciones π–periódicas.

- La ecuación $x'' + 4x = \text{sen}(t)$ no admite soluciones π–periódicas pues el segundo miembro no es π–periódico.

(h) El sistema es triangular, luego puede resolverse explícitamente. En efecto,

$$x_1(t) = Ae^{\int_0^t a(s)\,ds}, \quad x_2(t) = \Big(A\int_0^t b(s)\,ds + B \Big)\, e^{\int_0^t a(s)\,ds}$$

con $A, B \in \mathbb{R}$ en virtud al método de los coeficientes indeterminados. Considerando sucesivamente $A = 0$, $B = 1$ y $A = 1$, $B = 0$ obtenemos una matriz fundamental (de hecho, principal en $t = 0$):

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\int_0^t a(s)\,ds} & 0 \\ \big(\int_0^t b(s)\,ds\big)e^{\int_0^t a(s)\,ds} & e^{\int_0^t a(s)\,ds} \end{pmatrix}.$$

Las soluciones del sistema son entonces de la forma

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} e^{\int_0^t a(s)\,ds} \\ \big(\int_0^t b(s)\,ds\big)e^{\int_0^t a(s)\,ds} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\int_0^t a(s)\,ds} \end{pmatrix}$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

- Si $\int_0^T a(s)\,ds = 0$ entonces $x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\int_0^t a(s)\,ds} \end{pmatrix}$ es una solución ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$) T–periódica, ya que claramente $x(0) = x(T)$.
- Para demostrar la implicación contraria, admitamos que

  $$\int_0^T a(s)\,ds \neq 0\,.$$

  Entonces cualquier solución T–periódica satisface

  $$\lambda_1 = \lambda_1\, e^{\int_0^T a(s)\,ds},$$
  $$\lambda_2 = \lambda_1 \Big(\int_0^T b(s)\,ds \Big)\, e^{\int_0^T a(s)\,ds} + \lambda_2\, e^{\int_0^T a(s)\,ds},$$

  de donde se desprende que sólo puede ser $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, es decir, la solución trivial, lo cual es contradictorio.

■

11. Se considera la ecuación diferencial $x' = A(t)x$, donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}(t)\cos(t) \\ -1 - \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}(t)\cos(t) & -1 + \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}^2(t) \end{pmatrix}.$$

Comprueba que los autovalores de $A(t)$ son

$$\lambda_1 = (-1 + i\sqrt{7})/4\,, \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1}\,.$$

Verifica que $e^{\frac{t}{2}}\,(-\cos(t), \mathrm{sen}(t))^T$ es una solución no acotada de la ecuación anterior y calcula los multiplicadores y exponentes característicos, concluyendo que la ecuación no tiene soluciones π–periódicas no triviales (*ejemplo de Markus y Yamabe*).

Solución : El polinomio característico de $A(t)$ es

$$p_\lambda(t) = (1+\lambda)^2 - \frac{3}{2}(1+\lambda) + 1 = \lambda^2 + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\,,$$

luego los valores propios de $A(t)$ son de la forma

$$\lambda = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}\,i}{4}\,.$$

Que $e^{\frac{t}{2}}\,(-\cos(t), \mathrm{sen}(t))^T$ es una función no acotada es obvio. Además es solución de nuestro sistema, ya que

$$\begin{pmatrix} -e^{\frac{t}{2}}\cos(t) \\ e^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{sen}(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}}[\mathrm{sen}(t) - \frac{1}{2}\cos(t)] \\ e^{\frac{t}{2}}[\cos(t) + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(t)] \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} -e^{\frac{t}{2}}\cos(t) \\ e^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{sen}(t) \end{pmatrix}.$$

Consideremos ahora el cambio de variables

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(t) & \mathrm{sen}(t) \\ -\mathrm{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Este cambio de variables reduce el sistema de Markus y Yamabe al siguiente sistema con coeficientes constantes

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

cuyas soluciones son fácilmente calculables:

$$y(t) = A \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Deshaciendo el cambio de variables obtenemos que las soluciones del sistema de partida son de la forma

$$y(t) = A\, e^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} + B\, e^{-t} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

En particular, volvemos a obtener la solución que nos indica el enunciado del problema sin más que considerar $A = -1$ y $B = 0$. Podemos construir finalmente la matriz fundamental principal en $t = 0$,

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} \cos(t) & e^{-t} \operatorname{sen}(t) \\ -\, e^{\frac{t}{2}} \operatorname{sen}(t) & e^{-t} \cos(t) \end{pmatrix},$$

de la cual obtenemos la siguiente matriz de monodromía:

$$C = \Psi(\pi) = \begin{pmatrix} -\, e^{\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & -\, e^{-\pi} \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, los multiplicadores característicos son $-\, e^{\frac{\pi}{2}}$ y $-\, e^{-\pi}$ y los exponentes característicos $\frac{1}{2}$ y -1. Es obvio que el sistema no tiene soluciones π–periódicas no triviales pues $\mu = 1$ no es un multiplicador característico.

■

12. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostraremos que si la ecuación diferencial $x'' = f(x, x')$ no tiene soluciones constantes, entonces tampoco tiene soluciones periódicas. Para ello se sugiere seguir los siguientes pasos:

    (a) Si la ecuación no tiene soluciones constantes $c \in \mathbb{R}$, prueba que $f(c, 0) \neq 0$.

    (b) Si existe una solución T–periódica $x(t)$ de la ecuación, prueba que existen t_1, t_2 tales que

    $$x'(t_1) = x'(t_2) = 0, \quad x''(t_1) \leq 0 \leq x''(t_2).$$

Solución : (a) $x(t) \equiv c \in \mathbb{R}$ es una solución constante de $x'' = f(x, x')$ si y solamente si $0 = c'' = f(c, c') = f(c, 0)$. Luego si la ecuación no tiene soluciones constantes se deduce que

$$f(c, 0) \neq 0 \quad \forall\, c \in \mathbb{R}\,.$$

(b) $x \in C^2(\mathbb{R})$ alcanza un máximo y un mínimo absolutos en $[0, T]$ y, por periodicidad, en todos los intervalos de la forma $[(n-1)T, nT]$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Ya podemos proceder a comprobar que $x'' = f(x, x')$ no tiene soluciones constantes ni, por tanto, periódicas. Razonaremos por reducción al absurdo asumiendo que la ecuación no admite soluciones constantes pero sí una solución T–periódica $x(t)$. En ese caso, por lo demostrado en (b) habrían de existir $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tales que $x'(t_1) = x'(t_2) = 0$ y $x''(t_1) \leq 0 \leq x''(t_2)$. Por tanto, usando también (a) se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \geq x''(t_1) = f(x(t_1), x'(t_1)) = f(x(t_1), 0) = f(x_1, 0) \neq 0\,, \\ 0 \leq x''(t_2) = f(x(t_2), x'(t_2)) = f(x(t_2), 0) = f(x_2, 0) \neq 0\,. \end{aligned}$$

Luego $f(x_1, 0) < 0$ y $f(x_2, 0) > 0$. Como $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua habría de existir $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c, 0) = 0$, lo cual es contradictorio con (a).

■

13. Se considera la ecuación

$$x' = \begin{pmatrix} -1 + \cos(t) & 0 \\ \cos(t) & -1 \end{pmatrix} x\,.$$

(a) Calcula una matriz fundamental.

(b) Encuentra un cambio de variables que la transforme en una ecuación homogénea con coeficientes constantes.

(c) Estudia el comportamiento de las soluciones de la ecuación cuando $t \to \infty$.

(d) ¿Existe una función $b(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ y 2π–periódica, de forma que $x' = A(t)x + b(t)$, $t \in \mathbb{R}$, admita una solución 4π–periódica que no sea 2π–periódica?

(Febrero 1990)

Solución : (a) Como el sistema

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1+\cos(t) & 0 \\ \cos(t) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

es triangular (inferior), las ecuaciones que lo componen están desacopladas y podemos optar por resolverlo para efectuar el cálculo de una matriz fundamental. La primera ecuación del sistema,

$$x_1'(t) = (-1+\cos(t))x_1(t)\,,$$

tiene por solución general

$$x_1(t) = A\, e^{\mathrm{sen}(t)-t}\,, \quad A \in \mathbb{R}\,.$$

La segunda ecuación se puede escribir como

$$x_2'(t) = \cos(t)x_1(t) - x_2(t) = A\cos(t)\, e^{\mathrm{sen}(t)-t} - x_2(t)\,,$$

cuya solución general es

$$x_2(t) = A\, e^{\mathrm{sen}(t)-t} + B\, e^{-t}\,, \quad B \in \mathbb{R}\,.$$

Para extraer de la solución general

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\, e^{\mathrm{sen}(t)-t} \\ A\, e^{\mathrm{sen}(t)-t} + B\, e^{-t} \end{pmatrix}$$

dos soluciones linealmente independientes, podemos considerar los datos iniciales $(1,0)^T$ y $(0,1)^T$ en $t=0$, de donde obtenemos

$$(e^{\mathrm{sen}(t)-t},\, e^{\mathrm{sen}(t)-t} - e^{-t})^T\,, \quad (0,\, e^{-t})^T\,.$$

Por tanto, una matriz fundamental es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\mathrm{sen}(t)-t} & 0 \\ \left(e^{\mathrm{sen}(t)} - 1\right)e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

la cual es además principal en $t=0$ (por la forma en que la hemos construido).

(b) Aplicamos la teoría de Floquet. Una matriz de monodromía es $C = \Phi(2\pi) = e^{-2\pi}I$, de donde $C^2 = e^{-4\pi}I$ y $-4\pi I$ es un logaritmo de C^2. Tenemos entonces que encontrar una matriz $R \in M_2(\mathbb{R})$ que satisfaga la relación $e^{2\cdot 2\pi\cdot R} = C^2$, de donde se deduce fácilmente que ha de ser $R = -I$. El cambio de variables que se pide lo proporciona el teorema de Lyapunov:

$$x(t) = P(t)y(t)\,, \quad P(t) = \Phi(t)\,e^{-Rt} = \begin{pmatrix} e^{\mathrm{sen}(t)} & 0 \\ e^{\mathrm{sen}(t)} - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En efecto, por una parte se tiene que

$$\begin{aligned} P'(t) &= \Phi'(t)\,e^{-Rt} - \Phi(t)\,e^{-Rt}R \\ &= A(t)\Phi(t)\,e^{-Rt} - \Phi(t)\,e^{-Rt}R = A(t)P(t) - P(t)R\,, \end{aligned}$$

donde hemos denotado

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \cos(t) & 0 \\ \cos(t) & -1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} A(t)P(t)y(t) &= A(t)x(t) = x'(t) = P'(t)y(t) + P(t)y'(t) \\ &= A(t)P(t)y(t) - P(t)Ry(t) + P(t)y'(t)\,, \end{aligned}$$

luego

$$P(t)y'(t) = P(t)Ry(t)\,.$$

Como la matriz $P(t)$ es regular, se concluye que

$$y'(t) = Ry(t) = -y(t)\,,$$

que es un sistema homogéneo con coeficientes constantes.

(c) El único multiplicador característico es $\mu = e^{-2\pi}$, que tiene módulo menor que uno. Entonces podemos aplicar el resultado del Ejercicio 9 (c) para concluir que todas las soluciones tienden a cero cuando $t \to \infty$, esto es, el sistema es convergente.

(d) Como $\mu = 1$ no es un multiplicador característico, la alternativa de Fredhölm nos permite deducir que el sistema admite una única solución 2π–periódica. Pero el sistema es también claramente 4π–periódico así como la función $b(t)$, de la cual ya sabíamos que era 2π–periódica. Entonces la alternativa de Fredhölm vuelve a aplicarse, ahora para el caso 4π–periódico, para concluir que la ecuación completa tiene una única solución 4π–periódica. El razonamiento concluye al observar que esta solución ha de ser también 2π–periódica, ya que en caso contrario existirían dos soluciones 4π–periódicas distintas.

■

14. Sea $a \in C(\mathbb{R})$, 2π–periódica, no negativa y no idénticamente nula. Se considera la ecuación

$$x'' + \lambda a(t)x = 0\,, \tag{5.10}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Demuestra que si $\lambda < 0$ entonces no existen soluciones 2π–periódicas distintas de la trivial.

(b) ¿Qué se puede decir si $\lambda = 0$?

(c) Da un ejemplo que ilustre que la conclusión del primer apartado no es cierta si $\lambda > 0$.

Solución : (a) Demostraremos en primer lugar que si $\lambda < 0$ entonces toda solución no trivial de (5.10) tiene a lo sumo un cero. Para ello comparamos con la ecuación $x'' = 0$. Aplicando el teorema de comparación de Sturm concluimos que entre dos ceros consecutivos de una solución no trivial de (5.10) existe, al menos, un cero de las soluciones de la ecuación $x'' = 0$, que son las rectas $x(t) = At + B$. Pero las rectas no han de tener ceros necesariamente (considérese, por ejemplo, $A = 0$ y $B \neq 0$). Por consiguiente, toda solución no trivial de (5.10) tiene, a lo más, un cero. Concluimos el razonamiento por reducción al absurdo. En efecto, supongamos que $x(t)$ es una solución 2π–periódica no trivial de (5.10). De anularse una vez lo haría infinitas veces (por periodicidad), luego $x(t)$ no puede anularse ni, por tanto, cambiar de signo. Luego de

$$x(t) = -\frac{x''(t)}{\lambda a(t)} \tag{5.11}$$

se deduce que $x''(t)$ no cambia de signo, es decir, que no varía la concavidad de $x(t)$. Ahora bien, el único modo de que $x(t)$ sea continua y 2π–periódica con curvatura de signo constante es $x(t) \equiv C \in \mathbb{R}$, lo cual combinado con (5.11) implica que $\lambda a(t)C = 0$, es decir, $C = 0$ lo cual es imposible.

(b) Que las soluciones son rectas, que sólo son periódicas si son constantes.

(c) Tómese $\lambda = 1$ y $a(t) \equiv 1 \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$. En este caso la ecuación que se obtiene es $x'' + x = 0$, de la que las funciones 2π–periódicas $\mathrm{sen}(t)$ y $\cos(t)$ conforman un sistema fundamental de soluciones.

■

15. Obtén la ecuación adjunta de la primera aproximación lineal de la ecuación del péndulo $x'' + \mathrm{sen}(x) = 0$ y aplica el teorema de la alternativa de Fredhölm a la ecuación $x'' + x = \cos(t)$ para determinar si la misma tiene o no soluciones periódicas.

Solución : La primera aproximación lineal de la ecuación del péndulo $x'' + \mathrm{sen}(x) = 0$ es $x'' + x = 0$, que se puede reescribir equivalentemente en términos del siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

La ecuación adjunta es entonces

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

es decir, la linealización de primer orden de la ecuación del péndulo es autoadjunta. La matriz fundamental principal en $t = 0$ asociada a la parte homogénea de la ecuación 2π–periódica $x'' + x = \cos(t)$ es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \mathrm{sen}(t) \\ -\mathrm{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

luego

$$C = \Phi(2\pi) = I_2$$

es una matriz de monodromía. Por consiguiente, el único multiplicador característico es $\mu = 1$ y, en virtud del teorema de la alternativa de Fredhölm, la ecuación $x'' + x = \cos(t)$ admite soluciones 2π–periódicas si y solamente si

$$\int_0^{2\pi} y(t)^T \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = 0$$

para toda $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ solución 2π–periódica de (5.12) o, equivalentemente, de $y'' + y = 0$. Sabemos que $\Phi(t)$ es una matriz fundamental de (5.12) y que todas sus soluciones, que son de la forma

$$\begin{aligned} y(t) = \Phi(t)y_0 = &\begin{pmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0^1 \\ y_0^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_0^1 \cos(t) + y_0^2 \operatorname{sen}(t) \\ y_0^2 \cos(t) - y_0^1 \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

para cualesquiera $y_0^1, y_0^2 \in \mathbb{R}$, son 2π–periódicas. Por consiguiente

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} y(t)^T \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &\qquad = y_0^2 \int_0^{2\pi} \cos(t)^2 \, dt - y_0^1 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t) \cos(t) \, dt = y_0^2 \pi \,, \end{aligned}$$

que sólo se anula si $y_0^2 = 0$. Por tanto, la ecuación $x'' + x = \cos(t)$ no tiene soluciones 2π–periódicas.

■

16. Decide, en cada caso, si existe una función que satisfaga

(a) $y'' + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(t) y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$, y no idénticamente nula.

(b) $y'' + \operatorname{sen}(t) y = 0$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 1$.

(c) $y'' + y' + \frac{1}{2} y = 0$, $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = 0$.

(d) $y'' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = 0$.

(e) $y'' + \frac{1}{2} y = \operatorname{sen}(t)$, y 2π–periódica.

(f) $y'' + y = \operatorname{sen}(t)$, y 2π–periódica.

Solución : (a) Como $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) \leq \frac{1}{2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, podemos comparar la ecuación $y'' + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t)y = 0$ con $y'' + \frac{1}{2}y = 0$. Las soluciones de esta última son de la forma

$$y(t) = A\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + B\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

En particular, eligiendo $A = B = 1$ obtenemos la solución

$$y(t) = \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right),$$

la cual no se anula en $(0, \pi)$. Por consiguiente, no existen soluciones (no triviales) de $y'' + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t)y = 0$ que satisfagan $y(0) = y(\pi) = 0$.

(b) Se trata de un problema de valores iniciales asociado a una ecuación diferencial lineal de segundo orden, por lo que existe una única solución.

(c) Se trata de una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes, cuya solución general es

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(A\cos\left(\frac{t}{2}\right) + B\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Al imponer las condiciones $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ obtenemos $A = 1$ y $B = -1$, luego el problema admite como única solución

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right).$$

(d) La solución general de la ecuación es

$$y(t) = A\,e^{\sqrt{2}t} + B\,e^{-\sqrt{2}t}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Al imponer las condiciones $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ obtenemos

$$A = \frac{1}{1 - e^{\sqrt{2}\pi}}, \quad B = -\frac{e^{\sqrt{2}\pi}}{1 - e^{\sqrt{2}\pi}},$$

luego el problema admite como única solución

$$y(t) = \frac{1}{1 - e^{\sqrt{2}\pi}} \left(e^{\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}(\pi - t)} \right) .$$

(e) Resolvemos el sistema 2π–periódico asociado a la ecuación homogénea:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} .$$

La matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\sqrt{2}}{2}t) & \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{2}}{2}t) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{2}}{2}t) & \cos(\frac{\sqrt{2}}{2}t) \end{pmatrix}$$

es fundamental y principal en $t = 0$, luego

$$C = \Phi(2\pi) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}\pi) & \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}\pi) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}\pi) & \cos(\sqrt{2}\pi) \end{pmatrix}$$

es una matriz de monodromía. Por tanto, calculando sus valores propios obtenemos los multiplicadores característicos del sistema: $\cos(\sqrt{2}\pi) \pm i\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}\pi)$. Como 1 no es uno de los multilpicadores característicos, podemos concluir que la ecuación homogénea no admite soluciones 2π–periódicas. Por consiguiente, la ecuación completa tiene una única solución 2π–periódica.

(f) La matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \mathrm{sen}(t) \\ -\mathrm{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

es fundamental y principal en $t = 0$ para el sistema homogéneo 2π–periódico

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

asociado a nuestro problema. Por consiguiente $C = \Phi(2\pi) = I$ es una matriz de monodromía, de lo cual se desprende que el único multiplicador característico del sistema es $\mu = 1$. Aplicando entonces el teorema de la alternativa de Fredhölm concluimos que la ecuación $y'' + y = \mathrm{sen}(t)$ admite soluciones 2π–periódicas si y solamente si

$$\int_0^{2\pi} (y_1(t), y_2(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{sen}(t) \end{pmatrix} dt = 0$$

para cualquier solución 2π–periódica $y(t)$ de la ecuación adjunta

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(obsérvese que en este caso es autoadjunta). Por tanto, las soluciones 2π–periódicas de la ecuación adjunta son de la forma

$$y(t) = \Phi(t) y_0 \,, \quad \text{con } y_0 \in \operatorname{Ker}[I - \Phi(2\pi)^T] = \mathbb{R}^2 \,.$$

Es decir,

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. De este modo $y'' + y = \operatorname{sen}(t)$ tendrá soluciones 2π–periódicas si y solamente si

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} (z_2 \cos(t) - z_1 \operatorname{sen}(t)) \operatorname{sen}(t) \, dt \\ &\qquad = x_2 \int_0^{2\pi} \cos(t) \operatorname{sen}(t) \, dt - z_1 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t)^2 \, dt = -z_1 \pi = 0 \end{aligned}$$

para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, lo cual es obviamente falso. Por consiguiente, nuestro problema no admite soluciones 2π–periódicas no triviales.

■

17. Se considera el siguiente sistema lineal

$$x' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} .$$

Aplica el teorema de la alternativa de Fredhölm para demostrar que existen soluciones 2π–periódicas.

Solución : Resolvemos en primer lugar el correspondiente sistema homogéneo

$$\left\{ \begin{aligned} x_1' &= -\tfrac{1}{2} x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2} x_3 \\ x_2' &= -\tfrac{1}{2} x_1 - \tfrac{1}{2} x_3 \\ x_3' &= -\tfrac{1}{2} x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2} x_3 \end{aligned} \right. . \tag{5.13}$$

Una forma conveniente de resolver este sistema consiste en efectuar el cambio de variables

$$y_1 = x_1 \,, \quad y_2 = x_1 - x_2 \,, \quad y_3 = x_1 - x_3 \,,$$

el cual conduce al siguiente sistema equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = y_1 - y_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 - y_3 \\ y_3' = 0 \end{array} \right. .$$

Por tanto $y_3 = k \in \mathbb{R}$ y, efectuando ahora los cambios de variable

$$z_1 = 2y_1 - y_2 \,, \quad z_2 = y_2 \,,$$

llegamos a

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1' = -z_2 \\ z_2' = z_1 - k \end{array} \right.$$

o, equivalentemente,

$$\left(\begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \end{array} \right)' = \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 0 \\ k \end{array} \right) . \tag{5.14}$$

La matriz fundamental principal en $t = 0$ para la parte homogénea del sistema (5.14) es

$$\Phi(t) = \left(\begin{array}{cc} \cos(t) & -\operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{array} \right) .$$

Empleando entonces la fórmula de variación de las constantes para resolver (5.14) con dato inicial $z(0) = z^0 = (z_1^0, z_2^0)^T$ obtenemos

$$\begin{aligned} z(t) &= \Phi(t)z^0 + \Phi(t) \int_0^t \Phi(s)^{-1} \left(\begin{array}{c} 0 \\ -k \end{array} \right) ds \\ &= \left(\begin{array}{cc} \cos(t) & -\operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} z_1^0 \\ z_2^0 \end{array} \right) - k \left(\begin{array}{c} \cos(t) - 1 \\ \operatorname{sen}(t) \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} (z_1^0 - k)\cos(t) - z_2^0 \operatorname{sen}(t) + k \\ (z_1^0 - k)\operatorname{sen}(t) + z_2^0 \cos(t) \end{array} \right) . \end{aligned}$$

Deshaciendo finalmente los cambios de variable concluimos que

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \Big(x_2^0 - \frac{k}{2}\Big) \operatorname{sen}(t) + \Big(x_1^0 - \frac{k}{2}\Big) \cos(t) + \frac{k}{2} \,, \\ x_2(t) &= \Big(x_2^0 - \frac{k}{2}\Big) \cos(t) - \Big(x_1^0 - \frac{k}{2}\Big) \operatorname{sen}(t) + \frac{k}{2} \,, \\ x_3(t) &= \Big(x_2^0 - \frac{k}{2}\Big) \operatorname{sen}(t) + \Big(x_1^0 - \frac{k}{2}\Big) \cos(t) - \frac{k}{2} \,. \end{aligned}$$

Una vez resuelto el sistema homogéneo (5.13) calculamos la matriz fundamental $\Psi(t)$ principal en $t = 0$ del mismo. Para ello hacemos las siguientes consideraciones:

(i) Para calcular la primera columna de $\Psi(t)$ elegimos $x_1^0 = 1$ y $x_2^0 = x_3^0 = 0$. En este caso

$$0 = x_3^0 = x_3(0) = 1 - k \Rightarrow k = 1\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} x_1(t) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\,, \\ x_2(t) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) - \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\,, \\ x_3(t) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

(ii) Para calcular la segunda columna de $\Psi(t)$ elegimos $x_2^0 = 1$ y $x_1^0 = x_3^0 = 0$. En este caso

$$0 = x_3^0 = x_3(0) = -k \Rightarrow k = 0\,.$$

Entonces

$$x_1(t) = \operatorname{sen}(t)\,, \quad x_2(t) = \cos(t)\,, \quad x_3(t) = \operatorname{sen}(t)\,.$$

(iii) Para calcular la tercera columna de $\Psi(t)$ elegimos $x_3^0 = 1$ y $x_1^0 = x_2^0 = 0$. En este caso

$$1 = x_3^0 = x_3(0) = -k \Rightarrow k = -1\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} x_1(t) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\,, \\ x_2(t) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\,, \\ x_3(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Por tanto, la matriz fundamental principal en $t = 0$ asociada al sistema (5.13) es

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2} & \operatorname{sen}(t) & -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) - \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2} & \cos(t) & -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2} & \operatorname{sen}(t) & \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

de modo que

$$C = \Psi(2\pi) = I_3$$

es una matriz de monodromía. Claramente, el único multiplicador característico es $\mu = 1$, por lo que existen soluciones 2π–periódicas de la ecuación homogénea. Usando el teorema de la alternativa de Fredhölm podremos concluir la existencia de soluciones 2π–periódicas de la ecuación completa si y solamente si

$$\int_0^{2\pi} y(t)^T \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} dt = 0 \tag{5.15}$$

para toda $y(t)$ solución 2π–periódica de la ecuación adjunta

$$y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} y\,. \tag{5.16}$$

Una matriz fundamental de la ecuación (5.16) es $[\Psi(t)^{-1}]^*$ (donde $*$ denota trasposición y conjugación en el caso de coeficientes complejos), que viene dada por

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) + \cos(t) + 1 & \operatorname{sen}(t) - \cos(t) + 1 & \operatorname{sen}(t) + \cos(t) - 1 \\ -2\operatorname{sen}(t) & 2\cos(t) & -2\operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) + \cos(t) - 1 & \operatorname{sen}(t) + \cos(t) - 1 & -\operatorname{sen}(t) + \cos(t) + 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, las soluciones 2π–periódicas de (5.16) son de la forma $[\Psi(t)^{-1}]^* y_0$, con $y_0 = (y_1, y_2, y_3)^T \in \operatorname{Ker}(I_3 - \Psi^\star(2\pi)) = \mathbb{R}^3$. Por consiguiente, la integral de (5.15) se traduce en

$$-y_1 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t)\, dt - y_2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t)\, dt + y_3 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t)\, dt\,,$$

que claramente vale cero para cualesquiera $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$. Podemos concluir entonces que existen soluciones 2π–periódicas de nuestro problema.

■

18. Se considera la ecuación $x'' + a(t)x = 0$, donde $a \in C^1([0,\infty),\mathbb{R})$, $a(t) > 0$ y $a'(t) \geq 0 \, \forall \, t \in [0,\infty)$. Demuestra que si $x(t)$ es una solución y t_1, t_2 son dos ceros consecutivos de $x'(t)$, con $t_1, t_2 \in [0,\infty)$, entonces $|x(t_1)| \leq |x(t_2)|$ (sugerencia: multiplicar la ecuación por $2x'(t)$ e integrar).

(Febrero 1990)

Solución : Multiplicando la ecuación $x'' + a(t)x = 0$ por $2x'(t)$ obtenemos

$$2x'x'' + 2a(t)xx' = 0 \Leftrightarrow [(x')^2]' + a(t)(x^2)' = 0\,.$$

Integrando esta última ecuación entre t_1 y t_2 (suponiendo $t_1 < t_2$) llegamos a

$$\begin{aligned} x'(t_2)^2 - x'(t_1)^2 + \int_{t_1}^{t_2} [a(t)x^2]'\,dt - \int_{t_1}^{t_2} a'(t)x^2\,dt \\ = \int_{t_1}^{t_2} [a(t)x^2]'\,dt - \int_{t_1}^{t_2} a'(t)x^2\,dt \\ = a(t_2)x(t_2)^2 - a(t_1)x(t_1)^2 - \int_{t_1}^{t_2} a'(t)x^2\,dt = 0\,, \end{aligned}$$

luego

$$a(t_2)x(t_2)^2 - a(t_1)x(t_1)^2 = \int_{t_1}^{t_2} a'(t)x^2\,dt \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a(t_2)}{a(t_1)} \geq \frac{x(t_1)^2}{x(t_2)^2}\,.$$

Como $a'(t) \geq 0$ sabemos que $a(t)$ es decreciente en $[0,\infty)$, por lo que $a(t_1) \geq a(t_2)$ y

$$1 \geq \frac{x(t_1)^2}{x(t_2)^2} \Leftrightarrow x(t_1)^2 \leq x(t_2)^2 \Leftrightarrow |x(t_1)| \leq |x(t_2)|\,.$$

■

19. Discute el comportamiento asintótico de las siguientes ecuaciones según los valores de $\omega > 0$ y $c > 0$:

(a) $y'' + \omega^2 y = 0\,.$

(b) $y'' - \omega^2 y = 0\,.$

(c) $y'' + 2cy' + \omega^2 y = 0\,.$

(d) $y'' - 2cy' + \omega^2 y = 0\,.$

Solución : (a) Reescrita en forma de sistema, la ecuación de segundo orden $y'' + \omega^2 y = 0$ adopta la forma

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz (de coeficientes del sistema) A son $\lambda = \pm\omega i$, luego

$$\mu = \text{máx}\{\text{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\} = 0\,.$$

Este es el caso en que hay que calcular el índice de cada uno de los valores propios:

$$\nu(\pm i\omega) = \text{mín}\Big\{k \in \mathbb{N} : \text{Ker}\Big([A \mp i\omega I]^k\Big) = \text{Ker}\Big([A \mp i\omega I]^{k+1}\Big)\Big\} = 1\,,$$

de lo cual se deduce que es sistema es acotado pero no convergente.
(b) En este caso la matriz de coeficientes del sistema equivalente es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda = \pm\omega$. Por tanto $\mu = \omega > 0$, de donde se concluye que el sistema es no acotado.
(c) Se trata de la ecuación del oscilador armónico amortiguado. La matriz de coeficientes del sistema equivalente depende ahora de $\omega > 0$ y $c > 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2c \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de A son $\lambda = -c \pm \sqrt{c^2 - \omega^2}$. Por tanto

- Si $c \leq \omega$ se tiene $\mu = -c < 0$. En consecuencia el sistema es convergente, luega todas las soluciones tienden asintóticamente hacia cero.

- Si $c > \omega$ se tiene $\mu = -c + \sqrt{c^2 - \omega^2} < 0$. Por tanto, en este caso el sistema es también convergente.

(d) En este caso la matriz de coeficientes del sistema equivalente es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 2c \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de A son $\lambda = c \pm \sqrt{c^2 - \omega^2}$. Por tanto

- Si $c \leq \omega$ se tiene $\mu = c > 0$, por lo que el sistema es no acotado.
- Si $c > \omega$ se tiene $\mu = c + \sqrt{c^2 - \omega^2} > 0$. Por tanto, en este caso el sistema tampoco es acotado.

■

20. Discute según el valor del parámetro $\gamma > 0$ la existencia de soluciones $\frac{2\pi}{\gamma}$–periódicas de la ecuación del oscilador armónico forzado $x'' + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen}(\gamma t)$ con $\omega > 0$. Calcula la solución de la ecuación con $x(0) = x'(0) = 0$ mediante la fórmula de variación de las constantes y estudia su comportamiento en infinito dependiendo del valor de γ.

Solución : Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

cuya matriz fundamental principal en $t = 0$ es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\omega} t) & \frac{1}{\sqrt{\omega}} \operatorname{sen}(\sqrt{\omega} t) \\ -\sqrt{\omega} \operatorname{sen}(\sqrt{\omega} t) & \cos(\sqrt{\omega} t) \end{pmatrix}.$$

Una matriz de monodromía viene dada entonces por

$$C = \Phi\Big(\frac{2\pi}{\gamma}\Big) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{\gamma}) & \frac{1}{\sqrt{\omega}} \operatorname{sen}(\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{\gamma}) \\ -\sqrt{\omega} \operatorname{sen}(\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{\gamma}) & \cos(\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{\gamma}) \end{pmatrix}$$

y los multiplicadores característicos son las raíces del polinomio

$$\mu^2 - 2\cos\Big(\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{\gamma}\Big)\mu + 1 = 0\,,$$

esto es,

$$\mu = \cos\Big(\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{\gamma}\Big) \pm i\,\mathrm{sen}\Big(\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{\gamma}\Big)\,.$$

Aplicamos finalmente el teorema de la alternativa de Fredholm para establecer los casos en que existen soluciones $\frac{2\pi}{\gamma}$–periódicas de la ecuación del oscilador armónico forzado. Claramente $\mu = 1$ es un multiplicador característico si y solamente si $\frac{\sqrt{\omega}}{\gamma} = k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Por tanto, si $\gamma \neq \frac{\sqrt{\omega}}{k}$ con $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, entonces existe una única solución $\frac{2\pi}{\gamma}$–periódica de la ecuación $x'' + \omega^2 x = F_0\,\mathrm{sen}(\gamma t)$ ($\omega > 0$). Si por el contrario $\gamma = \frac{\sqrt{\omega}}{k}$ para algún $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, entonces podremos garantizar la existencia de soluciones $\frac{2\pi}{\gamma}$–periódicas de la ecuación anterior si y solamente si se satisface la condición

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} y(t)^T \begin{pmatrix} 0 \\ F_0\,\mathrm{sen}(\gamma t) \end{pmatrix} dt = 0 \tag{5.17}$$

para toda solución $\frac{2\pi}{\gamma}$–periódica $y(t)$ de la ecuación adjunta

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y\,. \tag{5.18}$$

Para verificar bajo qué condiciones se cumple (5.17) calculamos en primer lugar las soluciones $\frac{2\pi}{\gamma}$–periódicas de la ecuación (5.18), que son de la forma

$$[\Phi(t)^{-1}]^T y_0\,, \quad y_0 \in \mathrm{Ker}\left(I_2 - \Phi^T\Big(\frac{2\pi}{\gamma}\Big)\right)\,.$$

Teniendo en cuenta que

$$[\Phi(t)^{-1}]^T = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\omega}t) & \sqrt{\omega}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\omega}t) \\ -\frac{1}{\sqrt{\omega}}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\omega}t) & \cos(\sqrt{\omega}t) \end{pmatrix}\,,$$

$$I_2 - \Phi^\star\Big(\frac{2\pi}{\gamma}\Big) = \begin{pmatrix} 1-\cos(\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{\gamma}) & \sqrt{\omega}\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{\gamma}) \\ -\frac{1}{\sqrt{\omega}}\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{\gamma}) & 1-\cos(\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{\gamma}) \end{pmatrix}\,,$$

se puede comprobar fácilmente que $\text{Ker}\left(I_2 - \Phi^T\left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)\right) = \mathbb{R}^2$ toda vez que $\frac{\sqrt{\omega}}{\gamma} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Por consiguiente, las soluciones $\frac{2\pi}{\gamma}$–periódicas de (5.18) son

$$[\Phi(t)^{-1}]^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \cos(\sqrt{\omega} t) + \sqrt{\omega}\, y_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\omega} t) \\ y_2 \cos(\sqrt{\omega} t) - \frac{1}{\sqrt{\omega}}\, y_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\omega} t) \end{pmatrix}$$

para cualesquiera $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. En definitiva, en virtud de (5.17) podemos afirmar que la ecuación $x'' + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen}(\gamma t)$ admite soluciones $\frac{2\pi}{\gamma}$–periódicas si y solamente si

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} \left(F_0\, y_2 \operatorname{sen}(\gamma t) \cos(\sqrt{\omega} t) - \frac{F_0}{\sqrt{\omega}}\, y_1 \operatorname{sen}(\gamma t) \operatorname{sen}(\sqrt{\omega} t)\right) dt = 0$$

o, equivalentemente,

$$y_2 \int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} \operatorname{sen}(\gamma t) \cos(k\gamma t)\, dt = \frac{y_1}{k\gamma} \int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} \operatorname{sen}(\gamma t) \operatorname{sen}(k\gamma t)\, dt \qquad (5.19)$$

para cualesquiera $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. De hecho podemos restringirnos al caso $k \in \mathbb{N}$, ya que la identidad (5.19) permanece inalterada si consideramos $k \in -\mathbb{N}$. Si $k = 1$ (es decir, $\gamma = \sqrt{\omega}$) es obvio que no existen soluciones $\frac{2\pi}{\gamma}$–periódicas, ya que (5.19) no se verifica para cualesquiera $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Estudiemos entonces (5.19) para el caso en que $\mathbb{N} \ni k > 1$. Basta con calcular (integrando por partes repetidamente)

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} \operatorname{sen}(\gamma t) \cos(k\gamma t)\, dt = 0\,, \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} \operatorname{sen}(\gamma t) \operatorname{sen}(k\gamma t)\, dt = 0\,,$$

luego si $\gamma = \frac{\sqrt{\omega}}{k}$ para algún $\mathbb{Z} \ni k \neq \{-1, 0, 1\}$ entonces existen soluciones $\frac{2\pi}{\gamma}$–periódicas. Usando ahora la fórmula de variación de las constantes para resolver la ecuación $x'' + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen}(\gamma t)$ con datos iniciales $x(0) = x'(0) = 0$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \int_0^t \Phi(s)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ F_0 \ \mathrm{sen}(\gamma s) \end{pmatrix} ds$$

$$= \Phi(t) \begin{pmatrix} -\frac{F_0}{\sqrt{\omega}} \int_0^t \mathrm{sen}(\gamma s)\, \mathrm{sen}(\sqrt{\omega} s)\, ds \\ F_0 \int_0^t \mathrm{sen}(\gamma s) \cos(\sqrt{\omega} s)\, ds \end{pmatrix}$$

$$= \Phi(t) \begin{pmatrix} \frac{F_0}{\omega-\gamma^2} \left[\mathrm{sen}(\gamma t) \cos(\sqrt{\omega} t) - \frac{\gamma}{\sqrt{\omega}} \cos(\gamma t)\, \mathrm{sen}(\sqrt{\omega} t)\right] \\ \frac{F_0}{\omega-\gamma^2} \left[\sqrt{\omega}\, \mathrm{sen}(\gamma t)\, \mathrm{sen}(\sqrt{\omega} t) + \gamma \cos(\gamma t) \cos(\sqrt{\omega} t) - \gamma\right] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{F_0}{\omega-\gamma^2} \left[\mathrm{sen}(\gamma t) - \frac{\gamma}{\sqrt{\omega}}\, \mathrm{sen}(\sqrt{\omega} t)\right] \\ \frac{F_0 \gamma}{\omega-\gamma^2} \left[\cos(\gamma t) - \cos(\sqrt{\omega} t)\right] \end{pmatrix} .$$

Por consiguiente,

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega - \gamma^2} \left(\mathrm{sen}(\gamma t) - \frac{\gamma}{\sqrt{\omega}}\, \mathrm{sen}(\sqrt{\omega} t) \right) .$$

■

CAPÍTULO 6

Ecuaciones diferenciales con coeficientes analíticos

1. Se considera el problema de valores iniciales

$$\left\{\begin{array}{l} x'' - t^2x' - 2tx = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{array}\right. .$$

Decide razonadamente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) El problema de valores iniciales posee una única solución analítica en $t = 0$.

(b) El problema de valores iniciales no tiene soluciones analíticas.

(c) La única solución analítica del problema de valores iniciales viene dada por

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n}}{3^n\, n!}\,.$$

Solución : Todos los coeficientes de la ecuación son analíticos en $t = 0$, luego $t = 0$ es un punto regular. Por tanto, el problema de valores iniciales planteado admite una única solución

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \tag{6.1}$$

analítica en $t = 0$ y el enunciado (a) es verdadero, por lo que (b) ha de ser falso. Veamos que (c) es verdadero. Para ello sustituimos la expresión (6.1) en la ecuación diferencial, de donde obtenemos la relación

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n\, n(n-1)\, t^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, n\, t^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, t^{n+1} = 0\,.$$

Escribiendo la misma potencia de t en cada una de las series anteriores llegamos a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}\,(n+1)(n+2)\, t^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-1}\,(n-1)\, t^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}\, t^n = 0\,. \tag{6.2}$$

Observamos en primer lugar que el dato inicial $x(0) = 1$ equivale a considerar $c_0 = 1$, lo cual se desprende fácilmente de (6.1). Derivando término a término en (6.1) para obtener $x'(t)$ y evaluando la expresión resultante en $t = 0$ obtenemos que ha de ser $c_1 = 0$ para que $x'(0) = 0$. Finalmente, agrupando los coeficientes asociados a potencias de t del mismo orden en (6.2) se deduce que

$$c_2 = 0\,, \quad c_3 = \frac{c_0}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad c_n = \frac{c_{n-3}}{n} \ \text{si}\ n \geq 4\,. \tag{6.3}$$

En particular, de (6.3) se deduce que sólo los coeficientes etiquetados con un subíndice múltiplo de tres son distintos de cero. En efecto:

$$c_6 = \frac{c_3}{6} = \frac{c_0}{3\cdot 6} = \frac{1}{3^2\cdot 2}\,,$$
$$c_9 = \frac{c_6}{9} = \frac{c_0}{3\cdot 6\cdot 9} = \frac{1}{3^3\cdot(3\cdot 2)}\,,$$
$$c_{12} = \frac{c_9}{12} = \frac{c_0}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12} = \frac{1}{3^4\cdot(4\cdot 3\cdot 2)}\,, \ldots \tag{6.4}$$

Razonando según el principio de inducción se puede concluir fácilmente que la relación de recurrencia que liga a los coeficientes de $x(t)$ es la expresada en (c).

■

2. Se considera la ecuación diferencial

$$4(1+t)^2 x'' - 3(1-t^2)x' + 4x = 0\,.$$

Demuestra que el punto $t = -1$ es singular–regular y que la ecuación posee un sistema fundamental de soluciones con un elemento analítico y otro desarrollable en serie de Frobenius.

Solución : Los coeficientes de la ecuación

$$a_0(t) = 4(1+t)^2\,, \quad a_1(t) = -3(1-t^2)\,, \quad a_2(t) \equiv 4\,,$$

son analíticos. Además $a_0(-1) = 0$, por lo que $t = -1$ es un punto singular. Comprobemos que es singular–regular. Se tiene que la función

$$(1+t)\,\frac{a_1(t)}{a_0(t)} = -\frac{3(1+t)(1-t^2)}{4(1+t)^2} = -\frac{3(1-t)}{4}$$

es analítica en $t = -1$ por ser cociente de funciones analíticas. También

$$(1+t)^2\,\frac{a_2(t)}{a_0(t)} \equiv 1$$

es analítica en $t = -1$, por lo que $t = -1$ es un punto singular–regular. Reescribiendo la ecuación en la forma de Fuchs obtenemos

$$(1+t)^2 x'' + p_{-1}(t)(1+t)x' + q_{-1}(t)x = 0\,,$$

con

$$p_{-1}(t) = -\frac{3}{4}(1-t)\,, \quad q_{-1}(t) \equiv 1\,.$$

Haciendo ahora el cambio de variable $\tau = 1 + t$ podemos desplazar la singularidad al origen y aplicar, por tanto, el teorema de Fuchs. Obtenemos entonces la ecuación

$$\tau^2 x''(\tau-1) + p_{-1}(\tau)\,\tau\,x'(\tau-1) + q_{-1}(\tau)x(\tau-1) = 0\,,$$

con

$$p_{-1}(\tau) = -\frac{3}{4}(2-\tau)\,, \quad q_{-1}(\tau) \equiv 1\,.$$

De este modo la ecuación indicial asociada a $t = -1$ es

$$\begin{aligned} &s(s-1) + p_{-1}(\tau=0)\,s + q_{-1}(\tau=0) \\ &\qquad = s(s-1) - \frac{3s}{2} + 1 = s^2 - \frac{5s}{2} + 1 = 0\,, \end{aligned}$$

cuyas raíces son $s_1 = \frac{1}{2}$ y $s_2 = 2$. Como $s_2 - s_1 = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$, al aplicar el teorema de Fuchs encontramos un sistema fundamental de soluciones del siguiente tipo:

$$\varphi_1(\tau) = \sqrt{\tau} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tau^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tau^{n+\frac{1}{2}},$$

$$\varphi_2(\tau) = \tau^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tau^n = \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} \tau^n,$$

es decir, con un elemento analítico y otro desarrollable en serie de Frobenius.

■

3. Consideremos la ecuación diferencial $4t^2 x'' + (t^2+1)x = 0$. Demuestra que posee soluciones definidas en $\mathbb{R}$ y encuentra un sistema fundamental.

Solución : El punto $t = 0$ es singular–regular, ya que la función $q_0(t) = \frac{t^2+1}{4}$ es analítica en 0. La ecuación indicial asociada a este punto es

$$s(s-1) + q_0(0) = s(s-1) + \frac{1}{4} = s^2 - s + \frac{1}{4} = 0,$$

cuya única raíz es $s = \frac{1}{2}$ (doble). Por tanto, el teorema de Fuchs garantiza que

$$\varphi_1(t) = \sqrt{|t|} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \ \text{ con } c_0 = 1,$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= \varphi_1(t) \log(|t|) + \sqrt{|t|} \sum_{n=0}^{\infty} c'_n t^n \\ &= \sqrt{|t|} \left\{ \Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \Big) \log(|t|) + \sum_{n=0}^{\infty} c'_n t^n \right\} \ \text{ con } c'_0 = 0, \end{aligned}$$

es un sistema fundamental de soluciones (definidas en $\mathbb{R}$).

■

4. Estudia los puntos singulares–regulares y las raíces de la ecuación indicial asociada a la ecuación diferencial hipergeométrica:

$$t(1-t)x'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)t]x' - \alpha\beta x = 0\,, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\,.$$

Solución : Los coeficientes de la ecuación son analíticos:

$$a_0(t) = t(1-t)\,, \quad a_1(t) = \gamma - (1+\alpha+\beta)t\,, \quad a_2(t) = -\alpha\beta\,.$$

Además $a_0(0) = a_0(1) = 0$, por lo que $t = 0$ y $t = 1$ son puntos singulares. Veamos si son o no singulares–regulares. Se tiene en primer lugar que la función

$$t\,\frac{a_1(t)}{a_0(t)} = \frac{\gamma - (1+\alpha+\beta)t}{1-t}$$

es analítica en $t = 0$ por ser cociente de funciones analíticas. Por la misma razón

$$t^2\,\frac{a_2(t)}{a_0(t)} = -\frac{\alpha\beta t}{1-t}$$

es analítica en $t = 0$, por lo que $t = 0$ es un punto singular–regular. Si efectuamos un estudio análogo para el punto $t = 1$ obtenemos que las funciones

$$(t-1)\,\frac{a_1(t)}{a_0(t)} = \frac{(1+\alpha+\beta)t - \gamma}{t}\,, \quad (t-1)^2\,\frac{a_2(t)}{a_0(t)} = \alpha\beta\,\frac{t-1}{t}\,,$$

son analíticas en $t = 1$, luego el punto $t = 1$ también es singular–regular.

Estudiamos a continuación la ecuación indicial asociada a $t = 0$. Para ello, reescribiendo la ecuación hipergeométrica en la forma de Fuchs obtenemos

$$t^2x'' + p_0(t)tx' + q_0(t)x = 0\,,$$

con

$$p_0(t) = \frac{\gamma - (1+\alpha+\beta)t}{1-t}\,, \quad q_0(t) = -\frac{\alpha\beta t}{1-t}\,.$$

De este modo, la ecuación indicial asociada a $t = 0$ es

$$s(s-1) + p_0(0)s + q_0(0) = s(s-1) + \gamma s = s^2 + (\gamma - 1)s = 0\,,$$

cuyas raíces son $s = 0$ y $s = 1 - \gamma$. Por otra parte, podemos reescribir también la ecuación hipergeométrica de la siguiente forma:

$$(1-t)^2 x'' + p_1(t)(1-t)x' + q_1(t)x = 0\,,$$

donde

$$p_1(t) = \frac{\gamma - (1+\alpha+\beta)t}{t}\,, \quad q_1(t) = -\frac{\alpha\beta(1-t)}{t}\,.$$

Haciendo ahora el cambio de variable $\tau = 1 - t$ podemos desplazar la singularidad al origen y aplicar, por tanto, el teorema de Fuchs. Obtenemos entonces la ecuación

$$\tau^2 x''(1-\tau) + p_1(\tau)\,\tau\, x'(1-\tau) + q_1(\tau)x(1-\tau) = 0\,,$$

con

$$p_1(\tau) = \frac{\gamma - (1+\alpha+\beta)(1-\tau)}{1-\tau}\,, \quad q_1(\tau) = -\frac{\alpha\beta\tau}{1-\tau}\,.$$

De este modo la ecuación indicial asociada a $t = 1$ es

$$\begin{aligned} s(s-1) + p_1(\tau = 0)s + q_1(\tau = 0) \\ = s(s-1) + (\gamma - \alpha - \beta - 1)s \\ = s^2 + (\gamma - \alpha - \beta - 2)s = 0\,, \end{aligned}$$

cuyas raíces son $s = 0$ y $s = \alpha + \beta - \gamma + 2$.

■

5. Se considera la ecuación diferencial $tx'' + x' - tx = 0$. Encuentra la única solución de la ecuación que pasa por $(0, 1)$.

Solución : Los coeficientes de la ecuación son $a_0(t) = t$, $a_1(t) \equiv 1$ y $a_2(t) = -t$, los cuales vienen todos representados por funciones analíticas. Claramente $a_0(0) = 0$, luego $t = 0$ es un punto singular. Estudiemos si es o no singular–regular. Para ello comprobamos que

$$t\,\frac{a_1(t)}{a_0(t)} \equiv 1 \quad \text{es analítica en } t = 0\,,$$

$$t^2\,\frac{a_2(t)}{a_0(t)} = -t^2 \quad \text{es analítica en } t = 0\,,$$

luego $t = 0$ es un punto singular–regular. Podemos entonces reescribir la ecuación en la forma de Fuchs:

$$t^2 x'' + p(t) t x' + q(t) x = 0 \,,$$

donde $p(t) \equiv 1$ y $q(t) = -t^2$ son funciones analíticas en $t = 0$. La ecuación indicial es la siguiente:

$$s(s-1) + p(0)s + q(0) = s(s-1) + s = s^2 = 0 \,,$$

de la cual $s = 0$ es una raíz doble. Por tanto, una base de soluciones es

$$\varphi_1(t) = |t|^0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \ \text{ con } c_0 = 1 \,,$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= \varphi_1(t) \log(|t|) + |t|^0 \sum_{n=0}^{\infty} c'_n t^n \\ &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \Big) \log(|t|) + \sum_{n=0}^{\infty} c'_n t^n \ \text{ con } c'_0 = 0 \,, \end{aligned}$$

y la única solución que pasa por $(0,1)$ ha de ser necesariamente un múltiplo de $\varphi_1(t)$. Buscamos finalmente los coeficientes c_n. Para ello escribimos

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \,, \quad x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1} \,, \quad x''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} \,,$$

por lo que

$$t^2 x'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^n \,, \quad t x' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^n \,, \quad t^2 x = \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} t^n \,.$$

Entonces se tiene que

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} t^n = 0 \,.$$

Identificando términos del mismo orden en t obtenemos

$$c_1 = 0 \,; \quad n^2 c_n - c_{n-2} = 0 \,, \ n \geq 2 \,.$$

Por tanto, se puede concluir que $c_{2n+1} = 0$ para todo $n \geq 0$; es decir, que todos los coeficientes de orden impar han de ser nulos. Para los coeficientes de orden par se tiene que $c_n = \frac{c_{n-2}}{n^2}$ si $n \geq 2$, ley que escrita en términos de c_0 resulta

$$c_n = \frac{c_0}{2^n(\frac{n}{2}!)^2}\,, \quad n \text{ par}\,.$$

Luego

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_0}{2^{2n}(n!)^2}\, t^{2n}$$

y la única solución que pasa por $(0, 1)$ es aquella para la que $c_0 = 1$, es decir,

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\, t^{2n}\,.$$

■

6. Se considera la ecuación diferencial

$$t^2x'' + \Big(\alpha^2\beta^2t^{2\beta} + \frac{1}{4} - p^2\beta^2\Big)x = 0\,,$$

con $p, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Prueba que $x(t) = \sqrt{t}\, f(\alpha t^\beta)$ es solución de la misma, donde f es una solución de la ecuación de Bessel de orden p.

(b) Teniendo en cuenta que una solución de la ecuación de Bessel de orden $\frac{1}{2}$ es $\frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{t}}$, prueba que una solución de la ecuación dada con $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $p = \frac{1}{2}$ cumple $x(\sqrt{\pi}) = 0$.

(c) Demuestra que si $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $p = \frac{1}{2}$, entonces toda solución no trivial de la ecuación dada posee infinitos ceros positivos.

Solución : (a) Derivando sucesivamente el cambio de variable obtenemos

$$x'(t) = \alpha\beta t^{\beta-\frac{1}{2}} f'(\alpha t^\beta) + \frac{f(\alpha t^\beta)}{2\sqrt{t}}\,,$$

$$x''(t) = \alpha^2\beta^2 t^{2\beta-\frac{3}{2}} f''(\alpha t^\beta) + \alpha\beta^2 t^{\beta-\frac{3}{2}} f'(\alpha t^\beta) - \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{2}} f(\alpha t^\beta)\,.$$

Insertando las expresiones anteriores para $x'(t)$ y $x''(t)$ (en términos de f y sus derivadas) en la ecuación diferencial se tiene que $x(t) = \sqrt{t}\, f(\alpha t^\beta)$ es solución si y solamente si

$$\begin{aligned}&\alpha^2\beta^2 t^{2\beta+\frac{1}{2}} f''(\alpha t^\beta)\\ &\qquad + \alpha\beta^2 t^{\beta+\frac{1}{2}} f'(\alpha t^\beta) + \left(\alpha^2\beta^2 t^{2\beta} - \beta^2 p^2\right)\sqrt{t} f(\alpha t^\beta) = 0\end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$\alpha^2 t^{2\beta} f''(\alpha t^\beta) + \alpha t^\beta f'(\alpha t^\beta) + \left(\alpha^2 t^{2\beta} - p^2\right)\sqrt{t} f(\alpha t^\beta) = 0\,. \tag{6.5}$$

Denotando $\xi = \alpha t^\beta$, la ecuación (6.5) puede ser reescrita como

$$\xi^2 f''(\xi) + \xi f'(\xi) + (\xi^2 - p^2) f(\xi) = 0\,,$$

que es satisfecha si y sólo si f es una solución de la ecuación de Bessel de orden p.

(b) La ecuación resultante de elegir $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $p = \frac{1}{2}$ es

$$t^2 x'' + \left(4t^4 - \frac{3}{4}\right)x = 0\,. \tag{6.6}$$

Por lo demostrado en (a), $x(t) = \sqrt{t} f(t^2)$ resuelve (6.6) donde f es una solución de la ecuación de Bessel de orden $\frac{1}{2}$. En particular podemos elegir $f(t^2) = \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{t}$, de donde se concluye que $x(t) = \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{\sqrt{t}}$ es una solución que satisface $x(\sqrt{\pi}) = 0$.

(c) Para valores positivos de t, la ecuación (6.6) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$x'' + \left(\frac{16t^4 - 3}{4t^2}\right)x = 0\,.$$

Es sencillo comprobar que

$$\frac{16t^4 - 3}{4t^2} \geq 1 \quad \forall\, t \in \left[\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{8}}, \infty\right) = I\,.$$

Podemos entonces comparar en I con la ecuación $x'' + x = 0$, en cuyo caso el teorema de Sturm nos permite afirmar que las soluciones no triviales de (6.6) tienen infinitos ceros positivos.

■

CAPÍTULO 7

Análisis local de existencia y unicidad de soluciones

1. Se considera la sucesión de funciones

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}\,, \quad f_n(x) = \operatorname{sen}(nx)\,.$$

Decide razonadamente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) La sucesión es uniformemente acotada.

(b) La sucesión es equicontinua.

(c) Existe una sucesión parcial de $\{f_n\}$ que converge uniformemente en $[0,1]$.

Solución : (a) VERDADERA. Es evidente, ya que

$$|\operatorname{sen}(nx)| \leq 1 \quad \forall\, x \in [0,1]\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

(b) FALSA. En efecto, basta con elegir $\varepsilon < 1$ y cualquier pareja de puntos de la forma $(x = 0, y_n = \frac{\pi}{2n})$ con $n = n(\delta) \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que

$$|x - y_n| = \frac{\pi}{2n} < \delta\,.$$

De este modo se tiene que

$$|\operatorname{sen}(nx) - \operatorname{sen}(ny)| = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > \varepsilon\,.$$

(c) FALSA. De hecho, se puede comprobar que ni siquiera existe una subsucesión de $\{f_n\}$ que converja puntualmente. Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que existen $f \in C([0,1])$ y $\{f_{n_k}\}$ una subsucesión de $\{f_n\}$ tales que para todo $x \in [0,1]$ se verifica

$$\lim_{k\to\infty} \{f_{n_k}(x)\} = f(x)\,.$$

En particular, $f(0) = \lim_{k\to\infty}\{f_{n_k}(0)\} = 0$. Como las funciones f_{n_k} son todas continuas, dada cualquier sucesión $\{t_m\} \subset [0,1]$ tal que $\lim_{m\to\infty}\{t_m\} = 0$ se tiene que

$$\lim_{m\to\infty} \{f_{n_k}(t_m)\} = f_{n_k}(0) = 0 = f(0) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Podemos extraer entonces una subsucesión diagonal $\{f_{n_k}(t_{n_k})\}$ usando el principio de selección de Cantor de modo que

$$\lim_{k\to\infty} \{f_{n_k}(t_{n_k})\} = 0 = f(0)\,.$$

Sin embargo, podemos elegir por ejemplo $t_{n_k} = \frac{\pi}{2n_k}$ para observar que

$$f_{n_k}(t_{n_k}) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0 = f(0)\,,$$

lo cual conduce a contradicción.

■

2. Demuestra que la sucesión de funciones $\{f_n(t)\} = \left\{\frac{\operatorname{sen}(nt)}{\sqrt{n}}\right\}$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$. ¿Qué se puede decir acerca de la convergencia de $\{f_n'(t)\}$?

Solución : La convergencia uniforme de $\{f_n\}$ hacia cero en $\mathbb{R}$ es obvia, ya que

$$|f_n(t)| = \left|\frac{\operatorname{sen}(nt)}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Por otro lado

$$f_n'(t) = \sqrt{n}\,\cos(nt)$$

genera una sucesión oscilante que, por tanto, no tiene límite.

Basta por ejemplo con considerar

$$\lim_{n\to\infty} \{f_n'(0)\} = \lim_{n\to\infty} \{\sqrt{n}\} = \infty\,.$$

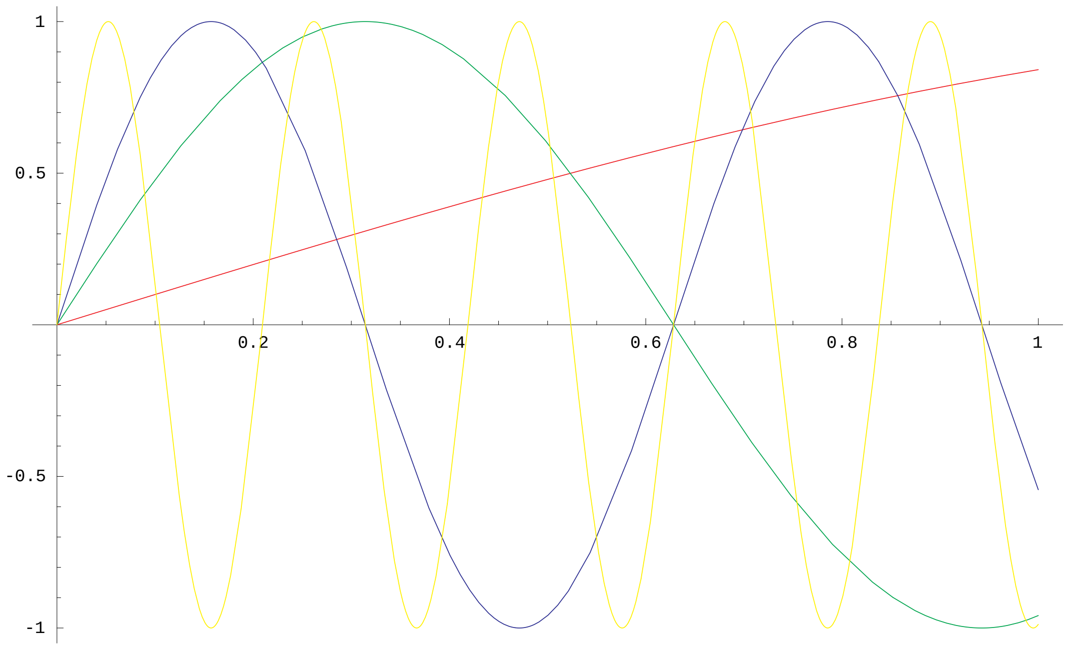


Figura 7.1: Representación gráfica de algunos términos de la sucesión de funciones del Ejercicio 1 en el intervalo $[0, 1]$.

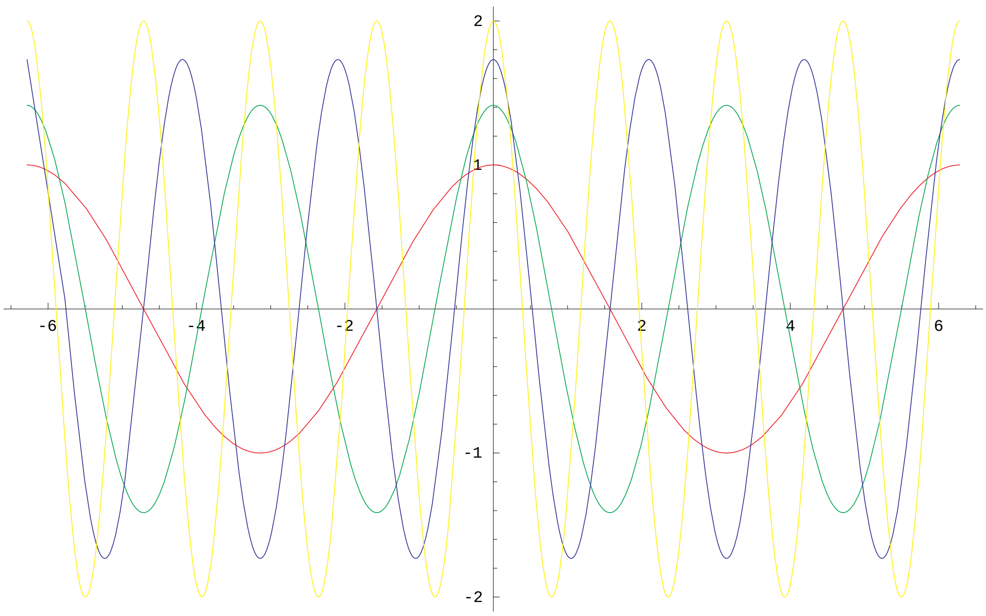


Figura 7.2: Representación gráfica de los cuatro primeros elementos de la sucesión $\{f_n'\}$ del Ejercicio 2 en el intervalo $(-2\pi, 2\pi)$.

■

3. Sean I un intervalo compacto y $f_n \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ una sucesión de funciones tal que $\{f_n'\}$ es uniformemente acotada. Demuestra que $\{f_n\}$ es equicontinua.

Solución : Como $\{f_n'\}$ es uniformemente acotada, ha de existir una constante $M > 0$ tal que

$$\| f_n'(x)\| < M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in I\,.$$

Como además $f_n \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos aplicar el teorema del valor medio para concluir que dados $x, y \in I$ tales que $|x - y| < \delta$, existe $z \in \mathrm{Int}(I)$ que satisface

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| \leq \|f_n'(z)\||x - y| < M\delta\,.$$

Fijado $\varepsilon > 0$, basta entonces con elegir $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ para deducir la equicontinuidad de $\{f_n\}$.

■

4. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones uniformemente acotada, equicontinua y tal que

$$\lim_{|t|\to\infty} f_n(t) = 0 \quad \text{uniformemente en } n\,.$$

Prueba que existe una sucesión parcial de $\{f_n\}$ que converge uniformemente en $\mathbb{R}$ hacia una función $f \in C(\mathbb{R})$.

Solución : Sea $\varepsilon > 0$. De la condición

$$\lim_{|t|\to\infty} f_n(t) = 0 \quad \text{uniformemente en } n \in \mathbb{N}$$

se desprende la existencia de $R = R(\varepsilon) > 0$ (¡independiente de n!) tal que

$$|f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, t \in \mathbb{R} : |t| > R\,.$$

Por otro lado, de la equicontinuidad de $\{f_n\}$ se deduce que si $t, s \in [-R, R]$ son tales que $|t-s| < \delta$, se tiene que

$$|f_n(t) - f_n(s)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Tomemos ahora un recubrimiento finito del compacto $[-R, R]$:

$$[-R, R] \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(a_i, \delta)\,, \quad a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Q}\,.$$

En virtud del principio de selección de Cantor, existe una sucesión parcial convergente en $H = \{a_1, \ldots, a_k\}$. En efecto, se dispone del siguiente resultado:

Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones uniformemente acotada y sea H un subconjunto numerable de $\mathbb{R}$. Entonces existe una sucesión parcial de $\{f_n\}$ que converge puntualmente en H hacia una función $f : H \to \mathbb{R}$.

Por tanto, para cualquier $a_i \in H$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon, a_i)$ tal que si $\sigma(n), \sigma(m) \geq n_0$ entonces

$$|f_{\sigma(n)}(a_i) - f_{\sigma(m)}(a_i)| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

De este modo, dado $t \in [-R, R]$ podemos afirmar que existe a_{i_0} tal que $|t - a_{i_0}| \leq \delta$ y

$$\begin{aligned} |f_{\sigma(n)}(t) - f_{\sigma(m)}(t)| &\leq |f_{\sigma(n)}(t) - f_{\sigma(n)}(a_{i_0})| \\ &\quad + |f_{\sigma(n)}(a_{i_0}) - f_{\sigma(m)}(a_{i_0})| + |f_{\sigma(m)}(a_{i_0}) - f_{\sigma(m)}(t)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Además

$$|f_{\sigma(n)}(t) - f_{\sigma(m)}(t)| \leq |f_{\sigma(n)}(t)| + |f_{\sigma(m)}(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $|t| > R$, por lo que la sucesión $\{f_{\sigma(n)}\}$ es uniformemente de Cauchy y, por tanto, converge uniformemente hacia una función continua (ya que todas las funciones f_n son continuas) f.

■

5. Se considera la sucesión de funciones

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f_n(t) = \begin{cases} 0\,, & t \le n \\ t-n\,, & n < t < n+1 \\ 1\,, & t \ge n+1 \end{cases}\,.$$

Prueba que es uniformemente acotada y equicontinua y que converge puntualmente hacia $f \equiv 0$ pero no lo hace uniformemente.

Solución : Es evidente que $|f_n(t)| \le 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, de lo que se desprende la acotación uniforme.

Pasemos a estudiar la equicontinuidad. Sea $\varepsilon \le 1$ y tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{1}{2}$.

- Si $t, s \le n$, entonces $|f_n(t) - f_n(s)| = 0 < \varepsilon$.
- Si $t, s \ge n+1$, entonces $|f_n(t) - f_n(s)| = 0 < \varepsilon$.
- Si $t, s \in (n, n+1)$, entonces
$$|f_n(t) - f_n(s)| = |t - n - s + n| = |t - s| < \delta < \varepsilon\,.$$
- Si $t \in (n, n+1)$ y $s \le n$, entonces
$$|f_n(t) - f_n(s)| = |t - n| \le |t - s| < \delta < \varepsilon\,.$$
- Si $t \ge n+1$ y $s \in (n, n+1)$, entonces
$$|f_n(t) - f_n(s)| = |1 - t + n| \le |t - s| < \delta < \varepsilon\,.$$

Dado $t \in \mathbb{R}$ siempre se puede encontrar $N = N(t)$ tal que para $n > N$ se tiene que $t \le n$, luego $f_n(t) = 0$ y, por tanto, la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente hacia cero cuando $n \to \infty$.

Comprobemos finalmente que $\{f_n\}$ no admite sucesiones parciales que converjan uniformemente. Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos para ello que existiese una tal sucesión parcial $\{f_{n_k}\}$. En ese caso el límite uniforme debería ser cero, que es el límite puntual. Es decir, habría de cumplirse que $\{f_{n_k}\} \to 0$ uniformemente cuando $k \to \infty$ o, dicho de otro modo, que para todo $\varepsilon > 0$ existe un índice $N = N(\varepsilon)$ tal que si $n_k \ge N$ entonces

$$|f_{n_k}(t)| < \varepsilon \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

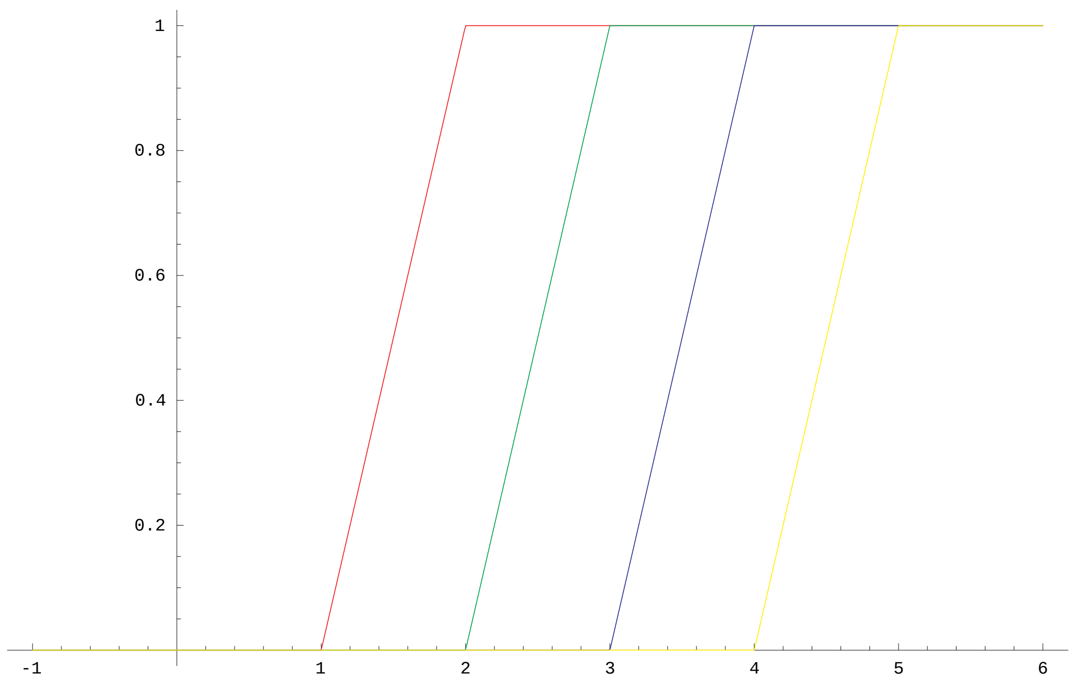


Figura 7.3: Representación gráfica de los cuatro primeros términos de la sucesión de funciones del Ejercicio 5.

Pero esto no es factible, ya que con sólo elegir $\varepsilon > 1$ y $t > n_k + 1$ se llega a una contradicción.

■

6. Se considera la ecuación diferencial

$$x'' - t^2 x = 0\,.$$

¿Para qué valores de ϵ la función $z(t) = e^{\frac{t^4}{12}}$ es una solución ϵ–aproximada de la ecuación en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$?

Solución : Una función Φ de clase C^1 a trozos es una solución ε–aproximada de $x' = F(t,x)$ en $[a,b]$ si

$$|\Phi'(t) - F(t, \Phi(t))| < \varepsilon \quad \forall\, t \in [a,b] \cap \mathrm{Dom}(\Phi)$$

donde Φ sea derivable. En nuestro caso, $x'' - t^2 x = 0$ puede reescribirse en forma vectorial como $(u_1, u_2)' = (u_2, t^2 u_1)$. Sea entonces $\Phi(t) = \Big(e^{\frac{t^4}{12}}, \frac{t^3}{3}\, e^{\frac{t^4}{12}}\Big)$, luego $\Phi'(t) = \Big(\frac{t^3}{3}\, e^{\frac{t^4}{12}}, t^2\, e^{\frac{t^4}{12}} + \frac{t^6}{9}\, e^{\frac{t^4}{12}}\Big)$. Tenemos

$$\|\Phi'(t) - F(t, \Phi(t))\| = \left\|\Big(0, \frac{t^6}{9}\, e^{\frac{t^4}{12}}\Big)\right\| = \frac{t^6}{9}\, e^{\frac{t^4}{12}} := h(t)\,.$$

La función $h(t)$ alcanza su valor máximo en los puntos $t = \pm\frac{1}{2}$:

$$h\Big(-\frac{1}{2}\Big) = h\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{576}\, e^{\frac{1}{192}}\,,$$

luego Φ es una solución ε–aproximada de $x'' - t^2 x = 0$ en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ si y sólo si

$$\varepsilon > \frac{1}{576}\, e^{\frac{1}{192}}\,.$$

■

7. Se considera el problema de valores iniciales

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} x' = F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

donde $F : \Omega \to \mathbb{R}^N$ es continua, $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ es un abierto y $(t_0, x_0) \in \Omega$. Sean $a, b > 0$ y $|\cdot|$ una norma vectorial en $\mathbb{R}^N$ tales que el conjunto

$$\mathcal{R} = \Big\{(t,x) \in \mathbb{R}^{N+1} : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\Big\}$$

satisface que $\mathcal{R} \subset \Omega$. Sea también $M \geq 0$ tal que

$$|F(t,x)| \leq M \quad \forall\,(t,x) \in \mathcal{R}\,.$$

Fijado $\alpha \leq \text{mín}\{a, \frac{b}{M}\}$, definimos la siguiente sucesión (llamada sucesión de *iterantes de Picard*):

$$\begin{cases} \phi_0(t) \equiv x_0\,, \\ \phi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \phi_k(s))\,ds\,, \quad k \in \mathbb{N}\,, \end{cases}$$

para cada $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

(a) Prueba que $\phi_k(t)$ está bien definida y es continua en $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(b) Prueba que si la función F es localmente lipschitziana respecto de la variable x, entonces la sucesión de iterantes de Picard converge uniformemente hacia la solución de (P).

Solución : (a) Las iterantes de Picard están bien definidas, ya que

$$\Big\| \int_{t_0}^t F(s, \phi_k(s))\,ds \Big\| \leq \int_{t_0}^t \|F(s, \phi_k(s))\|\,ds \leq M|t - t_0| < \infty$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y, si $x_0 \in \mathcal{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \|\, x_{n+1}(t) - x_0\| &\leq \int_{t_0}^t \|F(s, \phi_k(s))\|\,ds \\ &\leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq M \cdot \frac{b}{M} = b\,, \end{aligned}$$

luego $x_{n+1}(t) \in \mathcal{R}$ cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.

(b) Llamemos L a la constante de Lipschitz de F. Comprobaremos en primer lugar (usando un argumento inductivo) que se satisface la siguiente estimación para la diferencia entre dos iterantes de Picard consecutivas:

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq \frac{M\alpha L^k}{k!}|t - t_0|^k \,. \tag{7.1}$$

En efecto, la condición (7.1) es claramente satisfecha para $k = 1$ ya que

$$\begin{aligned}
\|x_2(t) - x_1(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|F(s, x_1(s)) - F(s, x_0(s))\| \, ds \\
&\leq L \int_{t_0}^{t} \|x_1(s) - x_0(s)\| \, ds \leq L \int_{t_0}^{t} \Big(\int_{t_0}^{\tau} \|F(s, x_0(s))\| \, ds \Big) \, d\tau \\
&\leq LM \int_{t_0}^{t} |\tau - t_0| \, d\tau \leq LM\alpha|t - t_0| \,.
\end{aligned}$$

Supongamos (hipótesis de inducción) que

$$\|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| \leq \frac{M\alpha L^{k-1}}{(k-1)!}|t - t_0|^{k-1} \,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|F(s, x_k(s)) - F(s, x_{k-1}(s))\| \, ds \\
&\leq L \int_{t_0}^{t} \|x_k(s) - x_{k-1}(s)\| \, ds \leq \frac{M\alpha L^k}{(k-1)!} \int_{t_0}^{t} |s - t_0|^{k-1} \, ds \\
&= \frac{M\alpha L^k}{k!}|t - t_0|^k \,.
\end{aligned}$$

Estudiemos ahora la convergencia de las iterantes de Picard. Para ello escribimos $x_n(t)$ como una serie telescópica de la siguiente forma:

$$x_n(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(x_k(t) - x_{k-1}(t) \big) \,, \quad t \in I \,.$$

Para cada $t \in I$, la serie

$$\sum_{k \geq 1} \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| \tag{7.2}$$

está dominada por la serie $\sum_{k \geq 1} \frac{M\alpha^k L^{k-1}}{(k-1)!}$, la cual es convergente.[1] Por tanto, el criterio de la mayorante de Weierstrass establece que la serie

[1] $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M\alpha^k L^{k-1}}{(k-1)!} = M\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{k-1} L^{k-1}}{(k-1)!} = M\alpha \, e^{L\alpha}$

(7.2) es absolutamente convergente en I y converge uniformemente en cada compacto de I, es decir: cuando $n \to \infty$,

$$\{x_n\} \to x \quad \text{uniformemente en } J \quad \forall\, J \subset I \text{ compacto}\,.$$

Además $x(t)$ es continua en I, pues dado $t \in I$ existe un compacto J de I para el que $t \in \mathrm{Int}(J) \subset J \subset I$ y en J la función $x(t)$ es continua. Sea $t \in I$ fijo (aunque arbitrario) y consideremos $J = [t_0, t]$ (o bien $J = [t, t_0]$). Como $\{x_n\} \to x$ uniformemente en J cuando $n \to \infty$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \int_J F(s, x_n(s))\, ds \right\} = \int_J \lim_{n\to\infty} \{F(s, x_n(s))\}\, ds = \int_J F(s, x(s))\, ds\,,$$

donde se ha empleado además la continuidad de F. Tomando ahora el límite $n \to \infty$ en la expresión

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_J F(s, x_n(s))\, ds$$

obtenemos

$$x(t) = x_0 + \int_J F(s, x(s))\, ds$$

y, por tanto, la existencia de soluciones de (P). Para observar la unicidad supongamos que $x(t)$ e $y(t)$ son dos soluciones de (P), esto es,

$$x(t) = x_0 + \int_J F(s, x(s))\, ds\,, \quad y(t) = x_0 + \int_J F(s, y(s))\, ds\,.$$

Entonces

$$\|x(t) - y(t)\| \le \int_J \|F(s, x(s)) - F(s, y(s))\|\, ds \le L \int_J \|x(s) - y(s)\|\, ds\,.$$

Una aplicación inmediata del lema de Gronwall nos conduce finalmente a que ha de ser

$$\|x(t) - y(t)\| \le 0 \quad \forall\, t \in I\,,$$

luego $x(t) = y(t)$ en I.

■

8. Escribe los primeros términos del esquema de iteración de Picard para cada uno de los siguientes problemas de valores iniciales y, cuando sea posible, encuentra explícitamente la solución:

(a) $x' = x + 2\,, \quad x(0) = 2.$

(b) $x' = x^{\frac{4}{3}}\,, \quad x(0) = 0.$

(c) $x' = x^{\frac{4}{3}}\,, \quad x(0) = 1.$

(d) $x' = \operatorname{sen}(x)\,, \quad x(0) = 0.$

(e) $x' = \frac{x}{2}\,, \quad x(1) = 1.$

Solución : El esquema iterativo de Picard es el siguiente:

$$x_0(t) \equiv \text{dato inicial} = x(t_0)\,, \quad x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x_n(s))\, ds\,.$$

(a) $F(t, x) = x + 2$, luego se trata de una ecuación lineal. Tenemos

$$\begin{aligned}
&x_0(t) \equiv 2\,,\\
&x_1(t) = 2 + \int_0^t 4\, ds = 2 + 4t = 2(1 + 2t)\,,\\
&x_2(t) = 2 + \int_0^t [2(1 + 2s) + 2]\, ds = 2 + 4\int_0^t (1 + s)\, ds\\
&\qquad = 2(1 + t)^2 = 2(1 + 2t + t^2)\,,\\
&x_3(t) = 2 + \int_0^t (4 + 4s + 4s^2)\, ds = 2\Big(1 + 2t + t^2 + \frac{1}{3}t^3\Big)\,,\\
&x_4(t) = 2 + \int_0^t \Big(4 + 4s + 2s^2 + \frac{2}{3}s^3\Big)\, ds = 2\Big(1 + 2t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{12}t^4\Big)\,.
\end{aligned}$$

En este caso la solución explícita es fácilmente calculable por tratarse de un problema lineal:

$$x(t) = 2(2e^t - 1)\,.$$

(b) $F(t, x) = x^{\frac{4}{3}}$, luego

$$0 \equiv x_0(t) = x_1(t) = x_2(t) \ldots$$

Por tanto, la sucesión de iterantes de Picard converge hacia cero. Si resolvemos el problema de valores iniciales por separación de variables obtenemos que $x \equiv 0$ es solución, pero en general no podemos garantizar la unicidad.

(c) $F(t,x) = x^{\frac{4}{3}}$, luego

$$x_0(t) \equiv 1\,,$$

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t ds = 1 + t\,,$$

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t (1+s)^{\frac{4}{3}}\,ds = \frac{4}{7} + \frac{3}{7}(1+t)^{\frac{7}{3}}\,,$$

$$x_3(t) = 1 + \int_0^t \left(\frac{4}{7} + \frac{3}{7}(1+t)^{\frac{7}{3}}\right) ds = 1 + \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{4}{3}} \int_1^{t+1} \left(4 + 3u^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{4}{3}} du\,,$$

sucesión que es convergente a pesar de que las integrales no sean expresables en términos de funciones elementales. Si resolvemos el problema de valores iniciales por separación de variables obtenemos

$$x(t) = \frac{27}{(3-t)^3}\,, \quad t \neq 3\,.$$

(d) $F(t,x) = \operatorname{sen}(x)$, luego

$$0 \equiv x_0(t) = x_1(t) = x_2(t) \ldots$$

Por tanto, la sucesión de iterantes de Picard converge hacia cero.

(e) $F(t,x) = \frac{x}{2}$, luego se trata de una ecuación lineal homogénea. Tenemos

$$x_0(t) \equiv 1\,,$$

$$x_1(t) = 1 + \int_1^t \frac{1}{2}\,ds = \frac{1}{2}(1+t)\,,$$

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t \frac{1}{4}(1+s)\,ds = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}(1+t)^2 = \frac{1}{4}\Big(\frac{5}{2} + t + \frac{1}{2}t^2\Big)\,,$$

$$\begin{aligned} x_3(t) &= 1 + \int_1^t \frac{1}{4}\Big(\frac{5}{4} + \frac{s}{2} + \frac{s^2}{4}\Big)\,ds \\ &= 1 + \frac{1}{4}\Big(\frac{5}{4}(t-1) + \frac{1}{4}(t^2-1) + \frac{1}{12}(t^3-1)\Big) \\ &= \frac{1}{16}\Big(\frac{29}{3} + 5t + t^2 + \frac{t^3}{3}\Big)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4(t) &= 2 + \int_0^t \Big(4 + 4s + 2s^2 + \frac{2}{3}s^3\Big)\,ds \\ &= 2\Big(1 + 2t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{12}t^4\Big)\,. \end{aligned}$$

■

9. (*Ejemplo de Müller*) Se considera el problema de valores iniciales

$$(P)\left\{\begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(0) = 0 \end{array}\right.$$

donde $f : (-\infty, 1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función

$$f(t,x) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } t \leq 0 \text{ y } x \in \mathbb{R} \\ 2t & \text{si } 0 < t < 1 \text{ y } x < 0 \\ 2t - \frac{4x}{t} & \text{si } 0 < t < 1 \text{ y } 0 \leq x \leq t^2 \\ -2t & \text{si } 0 < t < 1 \text{ y } t^2 < x \end{array}\right. .$$

(i) Prueba que (P) tiene una única solución.

(ii) Calcula la sucesión de iterantes de Picard. ¿Es convergente?

Solución : (i) Demostraremos en primer lugar que f es continua en $(-\infty, 1) \times \mathbb{R}$.

(a) *Continuidad de f en los puntos $(0, x)$ con $x \neq 0$.*
Sea $\{(t_n, x_n)\}$ una sucesión convergente hacia $(0, x)$ cuando $n \to \infty$. Se trata entonces de comprobar que

$$\lim_{n\to\infty} \{f(t_n, x_n)\} = f(0, x) = 0\,.$$

(a1) Si $x > 0$ y $\{t_n\} \to 0^+$, para valores de n suficientemente grandes se tiene que $x_n > t_n^2$, luego

$$\lim_{n\to\infty} \{f(t_n, x_n)\} = \lim_{n\to\infty} \{-2t_n\} = 0\,.$$

(a2) Si $x < 0$ y $\{t_n\} \to 0^+$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \{f(t_n, x_n)\} = \lim_{n\to\infty} \{2t_n\} = 0\,.$$

(b) *Continuidad de f en los puntos (t, t^2) con $0 < t < 1$.*
Sea $\{(t_n, x_n)\}$ una sucesión convergente hacia (t, t^2) cuando $n \to \infty$.

(b1) Si $x_n > t_n^2$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\{f(t_n,x_n)\} = \lim_{n\to\infty}\{-2t_n\} = -2t = f(t,t^2)\,.$$

(b2) Si $x_n \le t_n^2$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\{f(t_n,x_n)\} &= \lim_{n\to\infty}\left\{2t_n - \frac{4x_n}{t_n}\right\}\\ &= 2t - \frac{4t^2}{t} = -2t = f(t,t^2)\,.\end{aligned}$$

(c) *Continuidad de f en los puntos $(t,0)$ con $0 < t < 1$.*
Sea $\{(t_n,x_n)\}$ una sucesión convergente hacia $(t,0)$ cuando $n \to \infty$.

(c1) Si $x_n \ge 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\{f(t_n,x_n)\} = \lim_{n\to\infty}\left\{2t_n - \frac{4x_n}{t_n}\right\} = 2t = f(t,0)\,.$$

(c2) Si $x_n < 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\{f(t_n,x_n)\} = \lim_{n\to\infty}\{2t_n\} = 2t = f(t,0)\,.$$

(d) *Continuidad de f en $(0,0)$.*
Sea $\{(t_n,x_n)\}$ una sucesión convergente hacia $(0,0)$ cuando $n \to \infty$.

(d1) Si $t_n < 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\{f(t_n,x_n)\} = \lim_{n\to\infty}\{0\} = 0 = f(0,0)\,.$$

(d2) Si $0 < t_n < 1$ y $x_n > t_n^2$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\{f(t_n,x_n)\} = \lim_{n\to\infty}\{-2t_n\} = 0 = f(0,0)\,.$$

(d3) Si $0 < t_n < 1$ y $0 \le x_n \le t_n^2$, entonces

$$\begin{aligned}0 = \lim_{n\to\infty}\{-2t_n\} &\le \lim_{n\to\infty}\{f(t_n,x_n)\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{2t_n - \frac{4x_n}{t_n}\right\} \le \lim_{n\to\infty}\{2t_n\} = 0\,,\end{aligned}$$

luego

$$\lim_{n\to\infty}\{f(t_n,x_n)\} = 0 = f(0,0)\,.$$

(d4) Si $0 < t_n < 1$ y $x_n < 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \{f(t_n, x_n)\} = \lim_{n\to\infty} \{2t_n\} = 0 = f(0,0)\,.$$

Por consiguiente, el teorema de Cauchy–Peano garantiza la existencia de al menos una solución de (P). Veamos finalmente que (P) admite una única solución.

(a) Si $t \leq 0$, entonces $f(t,x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego el problema a resolver en este caso es

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 0 \\ x(0) = 0 \end{array} \right.$$

cuya única solución es la trivial.

(b) Si $0 < t < 1$ existen dos posibilidades:

(b1) Si fuese $f(t,x) = 2t$ en algún intervalo, entonces el problema a resolver sería

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 2t \\ x(0) = 0 \end{array} \right.$$

que admite por única solución a la función $x(t) = t^2$. Pero entonces se tendría

$$x' = f(t,x) = 2t - \frac{4x}{t} = 2t - \frac{4t^2}{t} = -2t\,,$$

lo cual nos conduciría a contradicción.

(b2) Si fuese $f(t,x) = -2t$ en algún intervalo, entonces el problema a resolver sería

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -2t \\ x(0) = 0 \end{array} \right.$$

que admite por única solución a la función $x(t) = -t^2$. Sin embargo, la función $x(t)$ habría de ser positiva para que $f(t,x) = -2t$, lo cual es contradictorio con el resultado obtenido.

La conclusión es, por consiguiente, que ha de ser $x' = 2t - \frac{4x}{t}$ si $0 < t < 1$. Resolviendo esta ecuación lineal junto con el dato inicial $x(0) = 0$ obtenemos $x(t) = \frac{t^2}{3}$. Luego

$$x(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \frac{t^2}{3} \text{ si } 0 < t < 1 \end{cases}$$

es una solución de (P). Veamos finalmente que de hecho se trata de la única solución de (P). Para ello demostraremos previamente la siguiente

Proposición 4 (UNICIDAD LOCAL A LA DERECHA). Sean $x_1 : [t_0, \alpha_1) \to \mathbb{R}$ y $x_2 : [t_0, \alpha_2) \to \mathbb{R}$ soluciones del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

donde F es una función continua en las dos variables y decreciente en x. Entonces

$$x_1(t) = x_2(t) \quad \forall\, t \in [t_0, \text{mín}\{\alpha_1, \alpha_2\})\,.$$

Demostración. Se define la función

$$d(t) := (x_1(t) - x_2(t))^2\,, \quad t \in [t_0, \text{mín}\{\alpha_1, \alpha_2\}) = I\,.$$

Claramente $d \in C^1(I)$. Además $d(t_0) = 0$ y $d(t) \geq 0\ \forall\, t \in I$. Derivando y usando que F es decreciente en x obtenemos

$$\begin{aligned} d'(t) &= 2(x_1(t) - x_2(t))(x_1'(t) - x_2'(t)) \\ &= 2(x_1(t) - x_2(t))(F(t, x_1(t)) - F(t, x_2(t)) \leq 0\,, \end{aligned}$$

por lo que sólo puede ser $d \equiv 0\ \forall\, t \in I$ o, lo que es lo mismo, $x_1 = x_2$ en I.

■

De este modo podríamos concluir, previa comprobación de que f es decreciente en x, la unicidad de solución a la derecha de 0 para el problema de valores iniciales (P). La unicidad a la izquierda de 0 es clara, pues si $t \leq 0$ necesariamente ha de ser $x \equiv 0$. Comprobemos, por tanto, que f es decreciente en la segunda variable.

(a) Si $t \leq 0$, entonces $f(t,x) = f(t,y) = 0$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Si $0 < t < 1$ podemos distinguir los siguientes casos:

(b1) Si $x < y < 0$ se tiene que $f(t,x) = f(t,y) = 2t$.

(b2) Si $t^2 < x < y$ se tiene que $f(t,x) = f(t,y) = -2t$.

(b3) Si $0 \leq x < y \leq t^2$ se tiene que

$$f(t,x) = 2t - \frac{4x}{t} > 2t - \frac{4y}{t} = f(t,y)\,.$$

(b4) Si $x < 0$ y $0 \leq y \leq t^2$ se tiene que $f(t,x) = 2t$ y $f(t,y) = 2t - \frac{4y}{t}$, luego $f(t,x) > f(t,y)$.

(b5) Si $x < 0 < t^2 < y$ se tiene que $f(t,x) = 2t$ y $f(t,y) = -2t$, luego $f(t,x) > f(t,y)$.

(b6) Si $0 \leq x \leq t^2 < y$ se tiene que

$$f(t,x) = 2t - \frac{4x}{t} > -2t = f(t,y)\,.$$

(ii) La sucesión de iterantes de Picard es la siguiente:

$$x_0(t) \equiv x_0 = 0\,,$$

$$x_1(t) = \int_0^t f(s,0)\,ds = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \int_0^t 2s\,ds = t^2 \text{ si } t > 0 \end{cases},$$

$$x_2(t) = \int_0^t f(s,x_1(s))\,ds$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \int_0^t f(s,s^2)\,ds = \int_0^t \left(2s - \frac{4s^2}{s}\right) ds = -t^2 \text{ si } t > 0 \end{cases},$$

$$x_3(t) = \int_0^t f(s,x_2(s))\,ds = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \int_0^t f(s,-s^2)\,ds = \int_0^t 2s\,ds = t^2 \text{ si } t > 0 \end{cases}.$$

En general, se puede argumentar por inducción que

$$x_{2n}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ -t^2 \text{ si } 0 < t < 1 \end{cases}, \quad x_{2n+1}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ t^2 \text{ si } 0 < t < 1 \end{cases},$$

lo cual permite concluir que las sucesiones parciales $\{x_{2n}\}$ y $\{x_{2n+1}\}$ convergen aunque no hacia la solución de (P). Por tanto, podemos afirmar que la sucesión de iterantes de Picard no es convergente.

■

10. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y localmente lipschitziana y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Prueba que la ecuación

$$x' = f(x)\,, \quad y' = g(x)y$$

tiene una única solución para unas condiciones iniciales dadas. Calcula la solución en el siguiente caso particular:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x' = 2|x|\,, & y' = \sqrt{|x|}y \\ x(0) = 1\,, & y(0) = 3 \end{array} \right. .$$

Solución : Consideremos en primer lugar el problema de valores iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. .$$

Este problema admite una única solución $x(t; t_0, x_0)$ por ser f continua y localmente lipschitziana. Sustituyendo esta solución en la segunda ecuación podemos plantear el siguiente otro problema de valores iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = G(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right. ,$$

con $G(t, y) = g(x(t; t_0, x_0))y(t)$. Como g es continua por hipótesis, la composición $g(x(t; t_0, x_0))$ es también continua. Además $G(t, y)$ es lineal en y, por lo que concluimos la existencia de una única solución. En efecto:

$$\begin{aligned} \|G(t, y) - G(t, z)\| &= \|G(t, y - z)\| \\ &= \|x(t; t_0, x_0)(y - z)\| \le \max_{t_0 - \alpha \le t \le t_0 + \alpha} \{|x(t; t_0, x_0)|\} \|y - z\|\,, \end{aligned}$$

es decir, $G(t, y)$ es localmente lipschitziana en la segunda variable.

Estudiamos finalmente el caso particular

$$\left\{ \begin{array}{ll} x' = 2|x|\,, & y' = \sqrt{|x|}y \\ x(0) = 1\,, & y(0) = 3 \end{array} \right. .$$

La única solución de

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 2|x| \\ x(0) = 1 \end{array} \right.$$

es $x(t) = e^{2t}$. Por tanto, para concluir hemos de resolver el problema

$$\begin{cases} y'(t) = e^t y \\ y(0) = 3 \end{cases},$$

que admite por única solución $y(t) = 3\, e^{e^t - 1}$.

■

11. Estudia la existencia y unicidad de solución de los siguientes problemas de valores iniciales:

(a) $x' = |x| + (2 - x^2 - t^2)\,, \quad x(t_0) = x_0$.

(b) $x' = g(x) + \frac{1}{t-2}\,, \quad x(t_0) = x_0$,

$$\text{donde} \quad g(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Solución : (a) La existencia de soluciones está garantizada por la continuidad de la función $F(t,x) = |x| + (2 - x^2 - t^2)$ en ambas variables. Además, F es sublineal en la segunda variable ya que

$$F(t,x) \leq |x| + 2$$

para todo (t,x), lo cual es suficiente para concluir la unicidad de solución.

(b) La función $F(t,x) = g(x) + \frac{1}{t-2}$ es continua porque $g(x)$ lo es, lo cual garantiza la existencia de soluciones. La unicidad puede deducirse como consecuencia de la sublinealidad de F, ya que

$$|F(t,x)| \leq |g(x)| + \frac{1}{|t-2|} \leq 1 + \frac{1}{|t-2|}$$

para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.

■

12. Para las siguientes funciones, halla una constante de Lipschitz en la región indicada o bien demuestra que no existe:

(a) $f(x) = |x|\,, \quad x \in (-\infty, \infty)$.

(b) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}\,, \quad x \in [-1, 1]$.

(c) $f(x) = \frac{1}{x}\,, \quad x \in [1, \infty)$.

(d) $f(x, y) = (x + 2y, -y)\,, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(e) $f(x, y) = \frac{xy}{1+x+y}\,, \quad x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$.

(f) $f(x) = x\log(|x|)\,, \quad x \neq 0\,, \quad f(0) = 0\,, \quad x \in [-1, 1]$.

Solución : (a) Se tiene

$$|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}\,,$$

luego podemos tomar $L = 1$.

(b) NO existe. Si existiese tal constante, llamémosla L, habría de satisfacer

$$\frac{|x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}|}{|x - y|} \leq L \quad \forall\, x, y \in [-1, 1]\,.$$

Para comprobar que no es posible basta con tomar $y = 0$ y $x = \varepsilon > 0$ tan pequeño como se desee.

(c) Se tiene

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|y|}\right| = \left|\frac{x - y}{xy}\right| \leq |x - y| \quad \forall\, x, y \geq 1\,,$$

luego podemos tomar $L = 1$.

(d) Se tiene

$$\begin{aligned}
&\|f(x, y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})\|_1 = \|(x + 2y, -y) - (\tilde{x} + 2\tilde{y}, -\tilde{y})\|_1 \\
&\quad = \|(x - \tilde{x} + 2(y - \tilde{y}), \tilde{y} - y)\|_1 = |x - \tilde{x} + 2(y - \tilde{y})| + |\tilde{y} - y| \\
&\qquad \leq |x - \tilde{x}| + 3|y - \tilde{y}| \leq 3\|(x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y})\|_1 \quad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\,,
\end{aligned}$$

luego podemos tomar $L = 3$.

(e) Se tiene

$$|f(x,y) - f(\tilde{x},\tilde{y})| = \Big|\frac{xy}{1+x+y} - \frac{\tilde{x}\tilde{y}}{1+\tilde{x}+\tilde{y}}\Big|$$

$$= \left|\frac{xy(1+\tilde{x}+\tilde{y}) - \tilde{x}\tilde{y}(1+x+y)}{(1+x+y)(1+\tilde{x}+\tilde{y})}\right| = \left|\frac{y\tilde{y}(x-\tilde{x}) + x\tilde{x}(y-\tilde{y}) + xy - \tilde{x}\tilde{y}}{(1+x+y)(1+\tilde{x}+\tilde{y})}\right|$$

$$= \left|\frac{y\tilde{y}(x-\tilde{x}) + x\tilde{x}(y-\tilde{y}) + y(x-\tilde{x}) + \tilde{x}(y-\tilde{y})}{(1+x+y)(1+\tilde{x}+\tilde{y})}\right|$$

$$= \left|\frac{y(1+\tilde{y})(x-\tilde{x}) + \tilde{x}(1+x)(y-\tilde{y})}{(1+x+y)(1+\tilde{x}+\tilde{y})}\right|$$

$$\leq \left|\frac{y(1+\tilde{y})}{(1+x+y)(1+\tilde{x}+\tilde{y})}\right| |x-\tilde{x}| + \left|\frac{\tilde{x}(1+x)}{(1+x+y)(1+\tilde{x}+\tilde{y})}\right| |y-\tilde{y}|$$

$$< \left|\frac{1+\tilde{y}}{1+\tilde{x}+\tilde{y}}\right| |x-\tilde{x}| + \left|\frac{1+x}{1+x+y}\right| |y-\tilde{y}| < 2\|(x,y)-(\tilde{x},\tilde{y})\|_1\,,$$

luego podemos tomar $L = 2$.

(f) NO existe. Si existiese tal constante, llamémosla L, habría de satisfacer

$$\frac{|x\log(|x|) - y\log(|y|)|}{|x-y|} \leq L \quad \forall\, x,y \in [-1,1]\,.$$

Para comprobar que no es posible basta con tomar $y = 0$ (obsérvese que $f(y) = 0$) y $x = \varepsilon > 0$ tan pequeño como se desee.

■

13. Se dice que una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *lineal a trozos* si existen

$$-\infty = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = +\infty$$

tales que f es lineal en cada intervalo $(x_i, x_{i+1})\,, i = 0,1,2,\cdots,k-1$; es decir,

$$f(x) = a_i x + b_i \quad x \in (x_i, x_{i+1})\,, \quad i = 0,1,2,\cdots,k-1\,, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}\,.$$

Prueba que las funciones lineales a trozos son globalmente lipschitzianas.

Solución : Es inmediato comprobar que la condición de Lipschitz es satisfecha en cada subintervalo (x_i, x_{i+1}). En efecto, dados cualesquiera $x, y \in (x_i, x_{i+1})$ se tiene que

$$|f(x) - f(y)| = |a_i x + b_i - (a_i y + b_i)| = |a_i||x-y|\,.$$

Consideremos ahora el caso en que $x \in (x_i, x_{i+1})$ e $y \in (x_j, x_{j+1})$ con $i, j = 0, 1, \cdots, k-1$, $i < j$. Se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\le |f(x) - f(x_{i+1})| + |f(x_{i+1}) - f(x_{i+2})| \\ &\quad + \cdots + |f(x_{j-1}) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(y)| \\ &\le |a_i||x - x_{i+1}| + |a_{i+1}||x_{i+1} - x_{i+2}| \\ &\quad + \cdots + |a_{j-1}||x_{j-1} - x_j| + |a_j||x_j - y| \\ &\le \Big(\sum_{n=i}^{j} |a_n| \Big) |x - y| \,. \end{aligned}$$

Por tanto, f es globalmente lipschitziana con constante de Lipschitz $L = \sum_{n=0}^{k-1} |a_n|$.

■

14. Sea $X = C([-1,1]; \mathbb{R})$ y consideremos la aplicación $T : X \to X$ definida por
$$[T(x)](t) = \frac{1}{2}\big(x(t)^2 + 1 - t^2\big) \,.$$

   (a) Demuestra que T tiene un único punto fijo $z(t)$ con
   $$0 \le z(t) \le 1 \quad \forall\, t \in [-1,1] \,.$$
   Encuentra dicho punto fijo.

   (b) Demuestra que si se toma $x_0(t) = 1$ y se define
   $$x_{k+1} = T(x_k) \,, \quad k \in \mathbb{N} \,,$$
   entonces $\{x_k\}$ converge uniformemente hacia z.

   (c) Como consecuencia, obtén una demostración del teorema de aproximación de Weierstrass (observa que cada x_k es un polinomio).

Solución : (a) $z(t)$ es un punto fijo de T si y solamente si

$$\frac{1}{2}\big(z(t)^2 + 1 - t^2\big) = z(t) \quad \forall\, t \in [-1,1] \,,$$

ecuación la cual produce dos soluciones: $z = 1 \pm |t|$. Por tanto, sólo existe un punto fijo,

$$z(t) = 1 - |t|\,, \tag{7.3}$$

que satisfaga la condición $0 \le z(t) \le 1$ para todo $t \in [-1, 1]$.

(b) Veamos en primer lugar que la sucesión $\{x_k\}$ es decreciente. Se tiene que

$$0 < 1 - \frac{t^2}{2} = T(x_0) = x_1 \le 1 = x_0\,.$$

Razonamos entonces conforme al principio de inducción suponiendo cierta la propiedad $x_k \le x_{k-1}$ y demostrando que $x_{k+1} \le x_k$. En efecto, se satisface

$$x_{k+1} = T(x_k) = \frac{1}{2}(x_k^2 + 1 - t^2) \le \frac{1}{2}(x_{k-1}^2 + 1 - t^2) = T(x_{k-1}) = x_k\,.$$

Por tanto podemos concluir que la sucesión $\{x_k\}$ es monótona (decreciente) y acotada ($0 \le x_k \le 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$), de donde se deduce la existencia de límite, es decir: existe una función $y(t)$ tal que $\lim_{k\to\infty}\{x_k(t)\} = y(t)$ para todo $t \in [-1, 1]$. Claramente ha de ser $y \equiv z$, ya que $y(t)$ es un punto fijo de T no negativo. En efecto, se comprueba fácilmente que

$$\begin{aligned} 0 \le [T(y)](t) = T\Big(\lim_{k\to\infty}\{x_k(t)\}\Big) \\ = \lim_{k\to\infty}\{[T(x_k)](t)\} = \lim_{k\to\infty}\{x_{k+1}(t)\} = y(t) \end{aligned}$$

gracias a la continuidad de T. Finalmente se puede aplicar el teorema de Dini[2] para argumentar que la convergencia es uniforme.

(c) Observamos en primer lugar que cualquier función continua en $[-1, 1]$ puede aproximarse uniformemente por poligonales. En efecto, basta con considerar una partición del intervalo $[-1, 1]$

$$-1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$$

tan fina como se desee y construir en cada subintervalo, pongamos $[t_{i-1}, t_i]$, el segmento

$$p_i \equiv \left[\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right] t + \frac{f(t_{i-1})t_i - f(t_i)t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\,,$$

[2]Si $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es una sucesión monótona de funciones continuas que converge puntualmente en I hacia una función continua f, entonces converge uniformemente hacia f en $[0, 1]$

el cual constituye el i–ésimo tramo de la poligonal aproximante de $f(t)$. La cuestión es: ¿podemos aproximar cualquier poligonal uniformemente por polinomios? La respuesta es afirmativa, ya que cualquier arco de poligonal puede escribirse en términos del *ángulo* definido en (7.3) sin más que someterlo a los cambios de variable canónicos pertinentes (homotecias y traslaciones). En efecto, si consideramos un arco de poligonal definido en el intervalo $[t_{i-2}, t_i]$, podemos *transportar* el primero de sus tramos (es decir, el definido sobre $[t_{i-2}, t_{i-1}]$) al intervalo $[-1, 0]$ mediante el cambio de variable lineal

$$t = (t_{i-1} - t_{i-2})(1 - |\tau|) + t_{i-2}\,, \quad \tau \in [-1, 0]\,,$$

mientras que el segundo tramo de poligonal (es decir, el definido sobre $[t_{i-1}, t_i]$) lo podemos *transportar* al intervalo $[0, 1]$ mediante el cambio de variable lineal

$$t = t_i - (t_i - t_{i-1})(1 - |\tau|)\,, \quad \tau \in [0, 1]\,.$$

En definitiva, cualquier poligonal puede ser expresada en términos de la función continua (7.3), de la cual sabemos por (b) que puede ser aproximada uniformemente por polinomios en $[-1, 1]$. Esto concluye la prueba.

■

15. Demuestra que existe una función continua en $[0, 1]$ que satisface

$$f(t) = \frac{1}{3}\int_0^t s^2 \operatorname{sen}(f(s))\, ds \quad \forall\, t \in [0, 1]\,.$$

¿Es única?

Solución : Denotamos $X = C([0, 1])$ y definimos una aplicación $T : X \to X$ de la siguiente forma:

$$[T(f)](t) = \frac{1}{3}\int_0^t s^2 \operatorname{sen}(f(s))\, ds\,.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}\|T(f)-T(g)\|_\infty &= \max_{0\le t\le 1}\{|[T(f)](t)-[T(g)](t)|\}\\ &\le \frac{1}{3}\int_0^1 s^2\,|\operatorname{sen}(f(s))-\operatorname{sen}(g(s))|\,ds\\ &\le \frac{1}{3}\int_0^1 s^2\,|f(s)-g(s)|\,ds \le \frac{1}{9}\|f-g\|_\infty\,,\end{aligned}$$

luego T es contractiva y, por el teorema de punto fijo de Banach, admite un único punto fijo.

■

16. Prueba que existe una única función continua en $[0,1]$ que cumple

$$x(t)=\operatorname{sen}(t)+\int_0^t \frac{x(s)}{\sqrt{s}}\,ds \quad \forall\, t\in[0,1]\,.$$

Solución : Probaremos en primer lugar la siguiente

Proposición 5. Sean X un espacio métrico completo y $T : X \to X$ una aplicación tales que existe $k\in\mathbb{N}$ para el que T^k es contractiva. Entonces T tiene un único punto fijo.

Demostración. Por el teorema de punto fijo de Banach, existe un único elemento $x\in X$ tal que $T^k(x)=x$. Entonces

$$T^k(T(x))=T(T^k(x))=T(x)\,,$$

por lo que $T(x)$ es también un punto fijo de T^k que ha de coincidir necesariamente con x. Por tanto, x es además un punto fijo de T. Veamos que es el único. En efecto, si $y\in X$ fuese otro punto fijo de T también lo sería de T^k, pues

$$\begin{aligned}T^k(y)=T^{k-1}(T(y))=T^{k-1}(y)&=T^{k-2}(T(y))\\ &=T^{k-2}(y)=\cdots=T(y)=y\,.\end{aligned}$$

Por consiguiente, ha de ser $y=x$.

■

Derivando en la ecuación integral obtenemos

$$x'(t) = \cos(t) + \frac{x(t)}{\sqrt{t}} := F(t,x) \quad \forall\, t \in [0,1]\,.$$

Es evidente que $F(t,x)$ no es lipschitziana en un entorno de $(0,x)$ (ni siquiera está definida en $t=0$), por lo que no podemos valernos del teorema de Cauchy–Picard–Lindelöf. Consideremos entonces el espacio $X = (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ y la aplicación $T : X \to X$ definida por

$$[T(x)](t) = \operatorname{sen}(t) + \int_0^t \frac{x(s)}{\sqrt{s}}\, ds\,.$$

La aplicación T está bien definida puesto que $x(t)$ es continua y $\frac{1}{\sqrt{t}}$ es integrable en $[0,t]$, luego su producto es integrable: $\left|\frac{x(t)}{\sqrt{t}}\right| \leq \frac{\|x\|_\infty}{\sqrt{t}}$. Sin embargo, T no es contractiva:

$$\|T(x) - T(y)\| \ \leq \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}} \|x-y\|_\infty\, ds = 2\sqrt{t}\|x-y\|_\infty \quad \forall\, t \in [0,1]\,.$$

Comprobamos finalmente que T^4 sí es contractiva, por lo que la proposición anterior nos permite deducir la existencia de un único punto fijo de T. En efecto:

$$\begin{aligned}
\|T^2(x) - T^2(y)\|_\infty &\leq \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}}\, \|T(x) - T(y)\|_\infty\, ds \leq 2t\|x-y\|_\infty\,,\\
\|T^3(x) - T^3(y)\|_\infty &\leq \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}}\, \|T^2(x) - T^2(y)\|_\infty\, ds \leq \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\|x-y\|_\infty\,,\\
\|T^4(x) - T^4(y)\|_\infty &\leq \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}}\, \|T^3(x) - T^3(y)\|_\infty\, ds\\
&\leq \frac{2}{3}t^2\|x-y\|_\infty \leq \frac{2}{3}\|x-y\|_\infty\,,
\end{aligned}$$

luego T^4 es contractiva.

$\blacksquare$

17. Demuestra el Teorema de Cauchy–Picard–Lindelöf usando un argumento de punto fijo.

Solución : El enunciado del teorema es el siguiente:

Considérese el siguiente problema de valores iniciales

$$(P)\left\{\begin{array}{l} x' = F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right. ,$$

donde $F : D \subseteq \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$ *y* $(t_0, x_0) \in D$*, siendo* D *un dominio de* $\mathbb{R}^{N+1}$*. Si* $F(t,x)$ *es continua en las dos variables y localmente lipschitziana con respecto a la segunda variable*[3]*, entonces (P) admite una única solución* $x(t)$ *definida en un entorno de* t_0*.*

El problema (P) se puede reescribir en términos del siguiente problema integral equivalente:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\, ds\,.$$

Sean $a, b > 0$ tales que (cf. Ejercicio 7)

$$\mathcal{R} = \Big\{(t,x) \in \mathbb{R}^{N+1} : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\Big\} \subset D\,,$$

$M \geq 0$ tal que

$$\|F(t,x)\| \leq M \quad \forall\,(t,x) \in \mathcal{R}$$

y $\alpha \leq \mathrm{mín}\{a, \frac{b}{M}\}$. Definimos

$$\tilde{\mathcal{R}} = \Big\{(t,x) \in \mathbb{R}^{N+1} : |t - t_0| \leq \alpha, \|x - x_0\| \leq b\Big\} \subseteq \mathcal{R}\,.$$

Sea $I \subseteq [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ un entorno compacto de t_0 y consideremos el espacio de Banach $X = C(I, \mathbb{R}^N)$ dotado de la norma del máximo:

$$\|x\|_\infty = \underset{t \in I}{\mathrm{máx}}\{\|x(t)\|\}\,.$$

Consideremos también el siguiente subconjunto (métrico) de X:

$$A = \{x \in X : x(t_0) = x_0,\ \|x(t) - x_0\|_\infty \leq b\}\,.$$

Veamos que A es cerrado (y, por tanto, completo). Sea para ello $\{x_n\}$ una sucesión de A tal que $\mathrm{lím}_{n\to\infty}\{x_n\} = x$ (nótese que esta convergencia es uniforme). Entonces

[3]Es decir: si $D = I \times \Omega$, para cada $x \in \Omega$ existen una bola abierta $B(x,r)$ y una constante $L = L(x)$ tales que si $y, z \in \Omega \cap B(x,r)$ se tiene que $\|f(y) - f(z)\| \leq L\|y - z\|$

- $x \in X$,
- $\lim_{n\to\infty}\{x_n(t_0)\} = x_0 = x(t_0)$,
- para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se tiene que
$$\|x(t) - x_0\| \leq \|x(t) - x_n(t)\| + \|x_n(t) - x_0\| < \varepsilon + b\,,$$
luego $\|x(t) - x_0\| \leq b$.

Por tanto $x \in A$ y A es cerrado, luego completo. Definimos entonces una aplicación $T : A \to A$ de la siguiente forma: $T(x) = T_x : I \to \mathbb{R}^N$ tal que
$$T_x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\, ds\,.$$
Veamos que T está bien definida:

(i) T_x es continua por tratarse de una composición de funciones continuas.

(ii) $T_x(t_0) = x_0$.

(iii) $\|T_x(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\, ds \right\| \leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq b$.

Luego $T_x \in A$. T es, por tanto, una aplicación de un espacio métrico completo en sí mismo. Si conseguimos demostrar que T es contractiva podremos aplicar el teorema de punto fijo de Banach para concluir la existencia de un único punto fijo de T que a la postre es la solución que buscamos.

Sean $x_1, x_2 \in A$. Se tiene que
$$\|T_{x_1}(t) - T_{x_2}(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} [F(s, x_1(s)) - F(s, x_2(s))]\, ds \right\|$$
$$\leq \int_{t_0}^{t} \|F(s, x_1(s)) - F(s, x_2(s))\|\, ds \leq L(x_0) \int_{t_0}^{t} \|x_1(s) - x_2(s)\|\, ds\,,$$
luego
$$\begin{aligned}\|T_{x_1} - T_{x_2}\| &\leq L(x_0) \max_{t\in I} \int_{t_0}^{t} \|x_1(s) - x_2(s)\|\, ds \\ &\leq L(x_0)\|x_1 - x_2\||t - t_0| \leq L(x_0)\alpha\|x_1 - x_2\|\,.\end{aligned}$$

Por consiguiente, si exigimos $L(x_0)\alpha < 1$ (lo cual es fácil de conseguir pues basta con tomar α suficientemente pequeño) tendremos demostrada la contractividad de T, de donde se concluye que existe un único elemento $x \in A$ tal que $T_x = x$ o, lo que es lo mismo,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\, ds \quad \forall\, t \in I\,.$$

■

CAPÍTULO 8

Análisis global de existencia y unicidad de soluciones

1. (a) Demuestra el siguiente principio de comparación de soluciones:

   Sean $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio y $f : D \to \mathbb{R}$ continua y localmente lipschitziana en la segunda variable. Sean también φ_1, φ_2 dos soluciones de $x' = f(t,x)$ definidas en un intervalo abierto I y $t_0 \in I$. Si $\varphi_1(t_0) < \varphi_2(t_0)$, entonces $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)\ \forall\, t \in I$.

   (b) Si en el apartado anterior se sustituye la ecuación $x' = f(t,x)$ por $x'' = f(t,x)$, ¿se sigue cumpliendo el principio de comparación?

   (c) Demuestra que el problema de valores iniciales

   $$\begin{cases} x' = x^2 + x - 2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

   tiene una única solución definida en $(-\infty, \infty)$ y que dicha solución admite límites en $-\infty$ y en ∞. Calcula dichos límites.

Solución : (a) Supongamos que existiese (un primer) $t_0 \leq t^\star \in I$ tal que $\varphi_1(t^\star) = \varphi_2(t^\star)$, de modo que $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)\ \forall\, t < t^\star$. Entonces, al ser f continua y localmente lipschitziana con respecto a la segunda variable el teorema de Cauchy–Picard–Lindelöff garantiza la unicidad (local) de solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t^\star) = \varphi_1(t^\star) \end{cases},$$

luego la situación anterior no es posible.

(b) Si la ecuación es de segundo orden el principio de comparación del apartado (a) ya no es válido. Un ejemplo sencillo viene dado por la ecuación del oscilador armónico $x'' + \omega^2 x = 0$, de la que es conocido que sus soluciones (combinaciones lineales de senos y cosenos) se cortan infinitas veces.

(c) En primer lugar observamos que los equilibrios (soluciones constantes) de la ecuación son $x \equiv 1$ y $x \equiv -2$. Como f es continua y localmente lipschitziana con respecto a la segunda variable (¡es un polinomio!) se tiene, por el principio de comparación de soluciones demostrado en (a), que la solución de nuestro problema de valores iniciales no puede cortar a ninguna otra solución de la ecuación (en particular a los equilibrios). Por tanto nuestra solución no puede tener asíntotas, de modo que está definida en $\mathbb{R}$.

Para demostrar que existen los límites en $-\infty$ e ∞ usaremos la siguiente

Proposición 6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y localmente lipschitziana. Entonces cualquier solución no constante de $x' = f(x)$ es estrictamente monótona.

De este modo, la solución $x(t)$ es estrictamente monótona. De hecho $x'(0) = -2 < 0$, luego $x(t)$ ha de ser estrictamente decreciente. Luego al ser $x(t)$ (estrictamente) monótona y acotada, existen $\lim_{t\to\pm\infty} x(t)$.

Comprobemos que $\lim_{t\to\infty} x(t) = -2$ (la comprobación de la propiedad $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 1$ es análoga). Para ello supongamos que $\lim_{t\to\infty} x(t) = k > -2$. Entonces ha de ser $\lim_{t\to\infty} x'(t) = 0$. Tomando límites en la ecuación obtenemos la identidad $0 = k^2 + k - 2$, de donde ha de ser $k = 1$ o bien $k = -2$, llegando así a una contradicción.

■

2. Demuestra el siguiente principio de comparación de soluciones de distintas ecuaciones diferenciales:

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio y sean $F_1, F_2 : D \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que

$$F_1(t,x) < F_2(t,x) \quad \forall\,(t,x) \in D\,.$$

Sea φ_i una solución de $x' = F_i(t, x)$ definida en un intervalo abierto I ($i = 1, 2$) y sea $t_0 \in I$. Entonces, si $\varphi_1(t_0) < \varphi_2(t_0)$ se tiene que

$$\varphi_1(t) < \varphi_2(t) \quad \forall\, t \geq t_0\,, \quad t \in I\,.$$

Solución : Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que existiese un primer instante $t_0 < t^\star \in I$ en el que $\varphi_1(t^\star) = \varphi_2(t^\star)$. Definimos entonces la siguiente *función distancia* entre ambas soluciones:

$$d(t) := \varphi_2(t) - \varphi_1(t)\,.$$

Es evidente que $d(t^\star) = 0$ y

$$d'(t) = \varphi_2'(t) - \varphi_1'(t) = F_2(t, \varphi_2(t)) - F_1(t, \varphi_1(t)) > 0\,,$$

por lo que $d(t)$ es estrictamente creciente. En particular

$$0 = d(t^\star) > d(t_0) = \varphi_2(t_0) - \varphi_1(t_0) > 0\,,$$

que es absurdo.

■

3. Sea $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ una función continua y globalmente lipschitziana con respecto a x.

   (a) Demuestra que la solución $x(t; y)$ de

   $$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = y \end{cases}$$

   está definida en $\mathbb{R}$.

   (b) Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ fijo. Se define $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de la siguiente forma:

   $$P(y) = x(t_0; y)\,.$$

   Demuestra que P es biyectiva.

Solución : (a) Como f es continua y (en particular) localmente lipschitziana tenemos garantizada la existencia local de una única solución $x(t)$ del problema de valores iniciales. Como f es además globalmente lipschitziana en la segunda variable (con constante de Lipschitz $L > 0$) se verifica

$$\|f(t,x)\| \leq \|f(t,x) - f(t,0)\| + \|f(t,0)\| \leq L\|x\| + \|f(t,0)\|\,,$$

es decir, f es sublineal. El resto del razonamiento lo hacemos por reducción al absurdo. Supongamos que la solución está definida en $I = (\omega_-, \omega_+)$ con (por ejemplo) $\omega_+ < \infty$ (el mismo argumento es válido para comprobar la prolongabilidad de la solución hacia la izquierda). Entonces habría de cumplirse

$$\lim_{t\to\omega_+,\ t<\omega_+} \{\|x(t)\|\} = \infty\,. \tag{8.1}$$

Reescribimos la ecuación en forma integral como

$$x(t) = y + \int_0^t f(s, x(s))\, ds\,,$$

expresión de la cual obtenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}\|x(t)\| \leq \|y\| &+ \int_0^t \|f(s,x(s))\|\, ds \\ &\leq \|y\| + \int_0^t \Big(L\|x(s)\| + \|f(s,0)\|\Big)\, ds \\ &\leq \|y\| + \sup_{0\leq t<\omega_+} \{\|f(t,0)\|\}\, \omega_+ + L\int_0^t \|x(s)\|\, ds\,.\end{aligned}$$

Usando finalmente el lema de Gronwall obtenemos

$$\|x(t)\| \leq \Big(\|y\| + \sup_{0\leq t<\omega_+} \{\|f(t,0)\|\}\, \omega_+\Big)\, e^{L\omega_+}\,,$$

es decir, $x(t)$ es acotada. Pero esto es incompatible con la condición (8.1), luego ha de ser $\omega_+ = \infty$.

(b) Estudiemos en primer lugar la inyectividad. Para ello supongamos que $P(x_0) = P(y_0)$, es decir, $x(t_0; x_0) = x(t_0; y_0)$. Esta condición conduce necesariamente a $x_0 = y_0$, ya que en caso contrario se violaría la unicidad de solución en un entorno de t_0. Por otro lado, demostrar la sobreyectividad de P equivale a encontrar $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $x(t_0; x_0) = v$, dado $v \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Para ello consideramos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = v \end{cases},$$

que sabemos (por el apartado (a)) admite una única solución definida en $\mathbb{R}$. Denotemos por $x(t; t_0, v)$ a dicha solución. Basta con tomar $x_0 = x(0; t_0, v)$.

■

4. Se considera la ecuación $x' = f(x)$, donde

$$f(x) = \begin{cases} -4 - x, & x \leq -1 \\ x(4 - x^2), & -1 < x < 1 \\ 4 - x, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Se pide:

(a) Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, demostrar que existe una única solución de la ecuación que cumple $x(0) = x_0$. Denotemos por $x(t; x_0)$ a dicha solución.

(b) Demostrar que $x(t; x_0)$ está definida en $(-\infty, \infty)$ para cada $x_0 \in \mathbb{R}$.

Solución : (a) La unicidad (local) de solución está garantizada por el teorema de Cauchy–Picard–Lindelöff, ya que f es continua y localmente lipschitziana (basta, por ejemplo, con observar que f' es acotada).

(b) Los equilibrios de la ecuación son $x \equiv 4, x \equiv 0$ y $x \equiv -4$. Si elegimos $x_0 > 4$ y aplicamos el teorema de comparación del Ejercicio 1 (comparamos con la solución $x \equiv 4$), tenemos que $x(t) > 4 \; \forall \, t \in I$. En este caso $f(x) = 4 - x$, que es globalmente lipschitziana. Esto nos permite concluir en virtud del Ejercicio 3 (a). El razonamiento es análogo si $x_0 < -4$, comparando con la solución $x \equiv -4$. Finalmente, si $x_0 \in (-4, 4)$ basta con aplicar el principio de comparación del Ejercicio 1 (a) como se hizo en el apartado (c) del mismo ejercicio.

■

5. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

   (a) ¿Admite el problema de valores iniciales

   $$\begin{cases} x' = \mathrm{sen}(tx) \\ x(t_0) = x_0 > 0 \end{cases}$$

   una solución positiva definida en $\mathbb{R}$? La solución que pasa por $(1, 1)$, ¿puede pasar por $(2, 3)$? Prueba que la solución que pasa por $(0, 2)$ tiene un mínimo local en $t = 0$.

   (b) ¿Puede ser $x(t) = t^2$ una solución en $(0, 1)$ de la ecuación $x' = f(t, x)$ si $|f(t, x)| < 1$ con $t, x \in (0, 1)$?

Solución : (a) La función $f(t, x) = \mathrm{sen}(tx)$ es continua y localmente lipschitziana, por lo que existe una única solución del problema de valores iniciales. Además f es sublineal: $|f(t, x)| \leq 1$, por lo que la solución está definida en $\mathbb{R}$.

Veamos que la solución ha de ser positiva. Si no lo fuese, habría de existir $t^\star \in \mathbb{R}$ tal que $x(t^\star) = 0$. Entonces x sería solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = \mathrm{sen}(tx) \\ x(t^\star) = 0 \end{cases},$$

pero la única solución de este problema es $x \equiv 0$, lo cual es absurdo porque $x(t_0) = x_0 > 0$ por hipótesis.

La solución que pasa por $(1, 1)$ NO puede pasar por $(2, 3)$. En efecto, si suponemos que $x(t)$ pasa por $(1, 1)$ se tendría que

$$x(t) = 1 + \int_1^t \mathrm{sen}(sx(s))\, ds\,,$$

por lo que

$$x(2) = 1 + \int_1^2 \mathrm{sen}(sx(s))\, ds \leq 1 + 1 = 2\,.$$

Finalmente demostramos que la solución que pasa por $(0, 2)$ tiene un mínimo local en $t = 0$. En primer lugar, es claro que $t = 0$ es un punto crítico de $x(t)$ ya que $x'(0) = \mathrm{sen}(0) = 0$. Como además $x''(0) = x(0)\cos(0) = 2 > 0$, $x(t)$ tiene un mínimo local en $t = 0$.

(b) NO. De serlo, se tendría $x'(t) = 2t = f(t,x)\ \forall\, t \in (0,1)$. Además, $|f(t,x)| = 2t < 1$ si y sólo si $0 < t < \frac{1}{2}$. Basta con elegir, por ejemplo, $\tau = \frac{3}{4}$ para observar que $f(\tau, x(\tau)) = 2\tau = \frac{3}{2} > 1$, lo cual contradice la condición de crecimiento sobre $|f|$.

■

6. Se considera el problema de valores iniciales
$$x' = \frac{1}{t^2 + x^2}\,, \quad x(0) = x_0 \geq 1\,. \tag{8.2}$$
Se pide:
   (a) Probar que existe una única solución $x(t)$ definida en $(-\infty, \infty)$.
   (b) Demostrar que existen $\lim_{t\to\infty} x(t)$ y $\lim_{t\to-\infty} x(t)$.
   (c) Encontrar acotaciones para dichos límites.

Solución : (a) Sea $F : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \to \mathbb{R}$ la función definida por
$$F(t,x) = \frac{1}{t^2 + x^2}\,.$$
La existencia de soluciones se deduce de la continuidad de $F(t,x)$ en $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ por medio del teorema de Cauchy–Peano. Por otro lado, la unicidad de solución maximal de (8.2) se desprende del teorema de Picard–Lindelöf, ya que $F(t,x)$ es (en particular) de clase C^1 en la segunda variable y, por tanto, localmente lipschitziana. Fijado $x_0 \geq 1$, sea $I = (\omega_-, \omega_+)$ el intervalo maximal en que está definida la solución $x(t)$ de (8.2) (el cual, por supuesto, ha de contener al punto $t_0 = 0$). Comprobemos entonces que ha de ser $\omega_+ = \infty$ y $\omega_- = -\infty$. Observamos en primer lugar que $x(t)$ es estrictamente creciente, ya que $x' > 0$ para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Claramente $x(t) > x_0$ para todo $t > 0$, luego $t^2 + x^2 > t^2 + x_0^2 \geq t^2 + 1$ si $t > 0$. Entonces podemos comparar la ecuación de partida con $y' = \frac{1}{t^2+1}$. En efecto, la solución general de $y' = \frac{1}{t^2+1}$ viene dada por
$$y(t) = \arctan(t) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,. \tag{8.3}$$

Entonces, al ser

$$\frac{1}{t^2+x^2} < \frac{1}{t^2+1} \quad \forall\,(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}\,,$$

podemos elegir $C = x_0 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño y concluir que

$$x(t) < \arctan(t) + x_0 + \varepsilon \quad \forall\, t \geq 0\,,\ \forall\, \varepsilon > 0\,,$$

en virtud del principio de comparación del Ejercicio 2. Se deduce entonces que $x(t)$ no tiene asíntotas a la derecha de cero, luego ha de ser $\omega_+ = \infty$[1]. Comprobamos finalmente que $\omega_- = -\infty$. Podemos distinguir las dos siguientes situaciones:

- Si $x(t) > -1$ para todo $t < 0$, entonces claramente $\omega_- = -\infty$.
- En caso contrario ha de existir t^* tal que $x(t^*) = -1$, de modo que
$$x(t) < -1 \quad \forall\, t < t^*$$
en virtud del crecimiento estricto de $x(t)$. Se tiene que
$$x(t)^2 > \lambda^2 \geq 1 \Rightarrow t^2 + x^2 > t^2 + 1 \Rightarrow F(t,x) < \frac{1}{t^2+1} \tag{8.4}$$
para todo $(t,x) \in (\omega_-, t^*) \times \mathbb{R}$. Usamos el siguiente resultado:

Proposición 7. Sean $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un abierto y $F_1, F_2 : D \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que

$$F_1(t,x) < F_2(t,x) \quad \forall\,(t,x) \in D\,.$$

Sean también $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}^n$ soluciones respectivas de $x' = F_1(t,x)$ y $x' = F_2(t,x)$. Entonces existe a lo más un punto $\bar{t}$ para el que $\varphi_1(\bar{t}) = \varphi_2(\bar{t})$.

[1]Nótese que una vez comprobado que la solución $x(t)$ no tiene asíntotas, cabría aún la posibilidad de que alcanzara en tiempo finito la frontera del dominio D en que está definida la ecuación, lo cual impediría su prolongación hasta ∞. Esto es, podría suceder lo siguiente:

$$\exists\,\{t_n\} \to \omega_+ \text{ tal que } \{x(t_n)\} \to \overline{x} \text{ con } (\omega_+, \overline{x}) \in \mathrm{Fr}(D)\,.$$

Sin embargo no es este el caso, ya que el dominio de nuestra ecuación es $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ cuya frontera está constituida únicamente por el origen de coordenadas. En efecto, de ocurrir habría de ser $\omega_+ = 0$, lo cual es imposible pues $x(t)$ ha de estar definida en un intervalo abierto que contenga al punto $t_0 = 0$ en que se plantea el dato inicial

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que existen dos puntos consecutivos $t_1 < t_2$ tales que

$$\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_1)\,, \quad \varphi_1(t_2) = \varphi_2(t_2)\,.$$

Definimos

$$d(t) := \varphi_2(t) - \varphi_1(t)\,.$$

Claramente $d(t_1) = d(t_2) = 0$. Además

$$d'(t_1) = \varphi_2'(t_1) - \varphi_1'(t_1) = F_2(t_1, \varphi_2(t_1)) - F_1(t_1, \varphi_1(t_1)) > 0\,,$$
$$d'(t_2) = \varphi_2'(t_2) - \varphi_1'(t_2) = F_2(t_2, \varphi_2(t_2)) - F_1(t_2, \varphi_1(t_2)) > 0\,,$$

lo cual contradice el hecho de que t_1 y t_2 sean puntos consecutivos en los que φ_1 y φ_2 coinciden.

∎

Eligiendo ahora $C = -\arctan(t^*) - 1 - \delta$ con $\delta > 0$ arbitrariariamente pequeño en (8.3), se tiene que

$$y(t^*) = -1 - \delta < -1 = x(t^\star)\,.$$

La cuestión a responder es entonces ¿qué puede ocurrir a la izquierda de t^*? La disyuntiva es clara: o bien

$$\arctan(t) - \arctan(t^*) - 1 - \delta = y(t) \leq x(t) \quad \text{en } (\omega_-, t^*)\,,$$

en cuyo caso concluimos directamente que $\omega_- = -\infty$, o bien existe un único punto t_1 (según la Proposición 7) en el que $x(t_1) = y(t_1)$ y las gráficas de $x(t)$ e $y(t)$ intercambian su posición relativa, es decir, $x(t) < y(t)$ si $t < t_1$ y $x(t) > y(t)$ si $t > t_1$. Sin embargo la segunda alternativa no puede verificarse, ya que de ser así podríamos usar (8.4) para aplicar el principio de comparación del Ejercicio 2, el cual nos permitiría deducir que, como $x(t_2) < y(t_2)$ para cualquier $t_2 < t_1$ (porque las soluciones no pueden cortarse dos veces), entonces habría de ser $x(t) < y(t)$ para todo $t \geq t_2$, lo cual es contradictorio con el hecho de que, por ejemplo, $x(t_1) = y(t_1)$.

(b) y (c) Hemos demostrado que

$$x_0 \leq x(t) < \arctan(t) + x_0 + \varepsilon \leq \frac{\pi}{2} + x_0 + \varepsilon \quad \forall\, t \geq 0\,,\ \forall\, \varepsilon > 0\,,$$

luego $x(t)$ es estrictamente creciente y está acotada superiormente. Por tanto, existe $\lim_{t\to\infty}\{x(t)\}$ y

$$1 \leq x_0 \leq \lim_{t\to\infty}\{x(t)\} \leq \frac{\pi}{2} + x_0 \,.$$

Por otro lado, también hemos comprobado que

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} - x_0 \leq -\frac{\pi}{2} - x_0 - \arctan(t^*) \\ \leq \arctan(t) - \arctan(t^\star) - 1 - \delta \\ < x(t) \leq -1 \quad \forall\, t \leq t^* \,,\, \forall\, \delta > 0 \,, \end{aligned}$$

luego existe $\lim_{t\to-\infty}\{x(t)\}$ y

$$-\frac{\pi}{2} - x_0 \leq \lim_{t\to-\infty}\{x(t)\} \leq -1 \,.$$

■

7. Se considera la ecuación $x' = \mathrm{sen}(x^2)$. Estudia la existencia, unicidad y prolongabilidad del correspondiente problema de valores iniciales y demuestra que todas las soluciones de esta ecuación son acotadas.

Solución : La función $f(x) = \mathrm{sen}(x^2)$ es de clase C^∞, en particular continua y localmente lipschitziana. Por tanto, cualquier problema de valores iniciales asociado a la ecuación $x' = f(x)$ admite una única solución definida en un entorno del dato inicial. Además, como f es sublineal ($|f(x)| \leq 1$) la solución es prolongable a $\mathbb{R}$. Finalmente, los equilibrios de la ecuación son

$$x \equiv \pm\sqrt{k\pi} \,, \quad k \in \mathbb{N} \,,$$

por lo que todas las soluciones de nuestra ecuación están acotadas.

■

8. La solución de

$$\left\{ \begin{array}{ll} x' = y^2, & x(0) = 1 \\ y' = \mathrm{sen}(x), & y(0) = 1 \end{array} \right.$$

¿está definida en $\mathbb{R}$?

Solución : SI. Es evidente que $-1 \leq y' = \mathrm{sen}(x) \leq 1$. Integrando esta cadena de desigualdades entre 0 y $t > 0$ obtenemos

$$-t \leq y(t) - 1 \leq t \Leftrightarrow 1 - t \leq y(t) \leq 1 + t\,,$$

con lo que concluimos que $y(t)$ está definida hasta ∞. Análogamente, si integramos entre $t < 0$ y 0 podemos afirmar que $y(t)$ también está definida hasta $-\infty$. Por otro lado, usando la primera ecuación se tiene que

$$0 \leq x'(t) = y^2(t) \leq (1+t)^2\,, \quad t > 0\,.$$

Integrando entre 0 y $t > 0$:

$$0 \leq x(t) - 1 \leq \frac{1}{3}(1+t)^3 \Leftrightarrow 1 \leq x(t) \leq 1 + \frac{1}{3}(1+t)^3\,,$$

luego $x(t)$ está definida hasta ∞. El caso de prolongación hasta $-\infty$ es análogo.

■

9. ¿Existe una única solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = \max\{t, x\} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

definida en $(-\infty, \infty)$?

Solución : La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t,x) = \max\{t, x\} = \frac{1}{2}(t+x) + \frac{1}{2}|t-x|$$

es continua. Además

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &\leq \left| \frac{t+x}{2} + \frac{|t-x|}{2} - \frac{t+y}{2} - \frac{|t-y|}{2} \right| \\ &\leq \frac{|x-y|}{2} + \left| \frac{|t-x|}{2} - \frac{|t-y|}{2} \right| \\ &\leq \frac{|x-y|}{2} + \left| \frac{t-x}{2} - \frac{t-y}{2} \right| = |x-y|\,, \end{aligned}$$

luego f es globalmente lipschitziana y por tanto (ver Ejercicio 4 (a)) existe una única solución definida en $\mathbb{R}$.

■

10. Decide si cada uno de los siguientes problemas de valores iniciales tiene su solución definida en el intervalo que se indica:

   (a) $x' = e^x,\ x(0) = 1$ en $[0, \infty)$.

   (b) $x' = \log(x),\ x(1) = \pi$ en $[1, \infty)$.

   (c) $x''' + \operatorname{sen}(t)x - \log(t) = 1,\ x(1) = x'(1) = x''(1) = 7$ en $(0, \infty)$.

Solución : (a) Se trata de un problema en variables separadas. Al resolverlo obtenemos

$$x(t) = -\log\Big(-t + \frac{1}{e}\Big),$$

cuyo intervalo de definición es $(-\infty, \frac{1}{e})$.

(b) El único equilibrio de la ecuación es $x \equiv 1$. Como $x(1) = \pi$, usando el principio de comparación del Ejercicio 1 concluimos que $x(t) > 1\ \forall t \in (\omega_-, \omega_+)$. Como además $\log(x) \leq x\ \forall x > 1$, el segundo miembro es sublineal por lo que la solución está definida en $\mathbb{R}$.

(c) Al reescribir la ecuación en forma vectorial obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -\operatorname{sen}(t)x_1 + \log(t) + 1 \end{pmatrix} = F(t, x_1, x_2, x_3)\,.$$

Claramente $F(t, x)$ es continua en $(0, \infty) \times \mathbb{R}^3$. Además tenemos que

$$\begin{aligned} &\|F(t, x_1, x_2, x_3) - F(t, \tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \tilde{x_3})\|_1 \\ &\qquad = \|(x_2 - \tilde{x_2}, x_3 - \tilde{x_3}, -\operatorname{sen}(t)(x_1 - \tilde{x_1}))^T\|_1 \\ &\qquad = |x_2 - \tilde{x_2}| + |x_3 - \tilde{x_3}| + |\operatorname{sen}(t)||x_1 - \tilde{x_1}| \\ &\qquad\qquad \leq \|(x_1, x_2, x_3)^T - (\tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \tilde{x_3})^T\|\,, \end{aligned}$$

luego $F(t, x)$ es globalmente lipschitziana en la segunda variable. Por tanto (cf. Ejercicio 3 (a)), la única solución del problema de valores iniciales está definida en $(0, \infty)$.

■

11. El intervalo maximal de definición de la solución $x(t) = \sqrt{1-t}$ del problema de valores iniciales
$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x}{2t-2} \\ x(0) = 1 \end{array} \right.$$
es $(-\infty, 1)$ y $\lim_{t \to 1^-} x(y) = 0$. ¿Hay contradicción con los resultados de prolongación conocidos?

Solución : NO. Según los resultados de prolongación que se han demostrado, podemos prolongar una solución de $x' = f(t,x)$ (f continua y localmente lipschitziana) bien hasta que explote (es decir, hasta topar con una asíntota) bien hasta que esta alcance la frontera del dominio de f. En nuestro caso, el dominio de $f(t,x) = \frac{x}{2t-2}$ es $D(f) = (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \times \mathbb{R}$. Para hablar de solución se requiere que el conjunto en que esta esté definida sea un abierto conexo, luego consideraremos $D_1 = (-\infty, 1) \times \mathbb{R}$ o $D_2 = (1, \infty) \times \mathbb{R}$ según el dato inicial de que se disponga. En cualquier caso, la condición $\lim_{t \to 1^-} x(t) = 0$ en D_1 permite concluir que la solución ha alcanzado la frontera de D_1 (en efecto, $(1,0) \in \mathrm{Fr}(D_1)$), por lo que es maximal.

■

12. (a) Prueba que toda solución de la ecuación del péndulo con rozamiento
$$mx'' + bx' + \frac{mg}{l}\,\mathrm{sen}(x) = 0$$
está definida en $\mathbb{R}$.

(b) Prueba que la solución del problema de valores iniciales
$$\left\{ \begin{array}{l} x'' + \mu(x^2-1)x' + x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{array} \right. ,$$
con $\mu > 0$, está definida en $[0, \infty)$.

Solución : (a) Reescribiendo la ecuación de segundo orden en forma de sistema obtenemos
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{b}{m}x_2 - \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}(x_1) \end{pmatrix} = f(x_1, x_2)\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&\|f(x_1,x_2) - f(\tilde{x_1},\tilde{x_2})\|_1 \\
&\qquad = |x_2 - \tilde{x_2}| + \Big|\frac{b}{m}(\tilde{x_2} - x_2) + \frac{g}{l}(\operatorname{sen}(\tilde{x_1}) - \operatorname{sen}(x_1))\Big| \\
&\qquad\quad \leq \Big(1 + \frac{b}{m}\Big)|x_2 - \tilde{x_2}| + \frac{g}{l}|\operatorname{sen}(\tilde{x_1}) - \operatorname{sen}(x_1)| \\
&\qquad\qquad \leq \Big(1 + \frac{b}{m}\Big)|x_2 - \tilde{x_2}| + \frac{g}{l}|x_1 - \tilde{x_1}| \\
&\qquad\qquad\qquad \leq L\Big\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{x_1} \\ \tilde{x_2} \end{pmatrix} \Big\|_1 ,
\end{aligned}$$

con

$$L = \text{máx}\left\{1 + \frac{b}{m}, \frac{g}{l}\right\}.$$

Luego f es globalmente lipschitziana en (x_1, x_2), por lo que toda solución de la ecuación del péndulo con rozamiento está definida en $\mathbb{R}$.

(b) Reescribiendo la ecuación de segundo orden en forma de sistema obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\mu(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 \end{pmatrix} = f(x_1, x_2) .$$

Definimos la función (de energía)

$$E(t) = x(t)^2 + x'(t)^2 ,$$

que no es otra cosa que el cuadrado de la norma euclídea del vector (x_1, x_2). Se tiene

$$E'(t) = -2\mu x'(t)^2(x(t)^2 - 1) , \quad t \in [0, \omega_+) .$$

Luego

$$E'(t) \leq 2\mu x'(t)^2 \leq 2\mu E(t) .$$

Integrando entre 0 y t:

$$E(t) \leq x_0^2 + v_0^2 + 2\mu \int_0^t E(s)\, ds .$$

Por el lema de Gronwall:

$$0 \leq E(t) \leq (x_0^2 + v_0^2)\, e^{2\mu t} , \quad t \in [0, \omega_+) .$$

Por tanto, se tiene que

$$0 \leq \limsup_{t \to \omega_+} E(t) \leq (x_0^2 + v_0^2)\, e^{2\mu\omega_+}\,.$$

Finalmente, si ω_+ fuese finito se tendría que $\limsup_{t \to \omega_+} E(t)$ es finito, lo cual es absurdo. En efecto, si fuese $\omega_+ < \infty$ sabemos que

$$\lim_{t \to \omega_+} \|(x_1, x_2)\|_2^2 = \lim_{t \to \omega_+} \left(x(t)^2 + x'(t)^2 \right) = \infty\,.$$

■

CAPÍTULO 9

Dependencia continua y diferenciable respecto de datos iniciales y parámetros. Estabilidad

1. Decide de forma razonada si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

   (a) Sea $x_\varepsilon(t)$, $\varepsilon \geq 0$, la solución de
   $$\begin{cases} x'' + \varepsilon x' + x^3 = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}.$$
   Entonces $x_\varepsilon(t)$ está definida en $[0, \infty)$ y
   $$\lim_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon(t) = x_0(t) \quad \text{para cada } t \geq 0\,.$$

   (b) Sea $x_\varepsilon(t)$, $\varepsilon \geq 0$, la solución de
   $$\begin{cases} \varepsilon x' + x^3 = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}.$$
   Entonces $x_\varepsilon(t)$ está definida en $[0, \infty)$ y
   $$\lim_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon(t) = 0 \quad \text{para cada } t \geq 0\,.$$

   (c) Sea $x_\varepsilon(t)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, la solución de
   $$\begin{cases} x' + \varepsilon\,\mathrm{sen}(x) = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}.$$

Entonces $x_\varepsilon(t)$ está definida en $[0,1]$ y

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x''_\varepsilon(t) = 0 \quad \text{uniformemente en } [0,1]\,.$$

Solución : (a) VERDADERA. Reescribiendo la ecuación de segundo orden en forma de sistema obtenemos

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\varepsilon x_2 - x_1^3 \end{pmatrix} = f(x_1, x_2)\,.$$

Claramente, las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3x_1^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\varepsilon \end{pmatrix}$$

son continuas $\forall\,(x_1, x_2, \epsilon) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+$. Luego la solución general es de clase C^1 con respecto al parámetro ε y, en particular,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(t) = x_0(t) \quad \forall\, t \geq 0\,.$$

Veamos que $x_\varepsilon(t)$ está definida en $[0,\infty)$. Para ello definimos la siguiente función (energía) $E : [0, \omega_+) \to \mathbb{R}$,

$$E(t) = \frac{1}{2}x'(t)^2 + \frac{1}{4}x(t)^4\,,$$

donde $I = [0, \omega_+)$ es el intervalo maximal de existencia de $x(t)$. Tenemos

$$E'(t) = -\varepsilon x'(t)^2 \leq 0\,,$$

lo que implica que $E(t)$ es decreciente, luego

$$0 < \frac{1}{2}x'(t)^2 + \frac{1}{4}x(t)^4 \leq E(0) = \frac{1}{4} \quad \forall\, t \in I\,.$$

Por tanto, $x(t)$ y $x'(t)$ son acotadas y, consecuentemente,

$$\|(x(t), x'(t))\|_1 = |x(t)| + |x'(t)|$$

es acotada. Entonces, por el teorema de prolongación $\omega_+ = \infty$.

(b) FALSA. La ecuación puede integrarse mediante el método de separación de variables, en virtud del cual obtenemos

$$x_\varepsilon(t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 2t}}\,,$$

que está definida en $[0, \infty)$. Al pasar al límite se tiene

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon(t) = 0 \quad \forall\, t > 0\,,$$

pero no en $t = 0$.

(c) VERDADERA. La función $f(t, x, \varepsilon) = -\varepsilon \operatorname{sen}(x)$ es sublineal para cualquier $\varepsilon \in \mathbb{R}$ fijo (aunque arbitrario), ya que $|f(t, x, \varepsilon)| \leq \varepsilon$. Por tanto, $x_\varepsilon(t)$ está definida en $\mathbb{R}$ para cualquier valor de ε. Además se tiene que

$$0 \leq |x_\varepsilon''| = |-\varepsilon \cos(x_\varepsilon) x_\varepsilon'| \leq |\varepsilon||x_\varepsilon'| = |\varepsilon||-\varepsilon \operatorname{sen}(x_\varepsilon)| \leq \varepsilon^2\,,$$

lo que implica la convergencia uniforme de $\{x_\varepsilon''(t)\}$ hacia cero cuando $\varepsilon \to 0$. También podría haberse abordado el problema de forma directa, resolviendo la ecuación diferencial por el método de variables separadas. En efecto, se tiene que la única solución del problema de valores iniciales es

$$x_\varepsilon(t) = 2 \arctan\left(\tan\left(\frac{1}{2}\right) e^{-\varepsilon t}\right)\,.$$

A partir de esta expresión las conclusiones son inmediatas.

■

2. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase uno y T–periódica ($T > 0$) en la variable t, es decir:

$$F(t, x) = F(t + T, x) \quad \forall\, (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Denotemos por $x(t; x_0)$ a la solución del problema de valores iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = F(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right. .$$

Supongamos que existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, con $x_1 < x_2$, tales que

$$F(t, x_1) > 0\,, \quad F(t, x_2) < 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Se pide:

(a) Probar que la función $P : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ definida como

$$P(x_0) = x(T; x_0)$$

está bien definida y es continua.

(b) Demostrar que existe $x^* \in [x_1, x_2]$ tal que $P(x^*) = x^*$.

(c) Deducir que la solución $x(t; x^*)$ es una función T–periódica.

Solución : (a) Como F es de clase C^1 en particular es localmente lipschitziana, luego el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = F(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

admite una única solución maximal. Consecuentemente, la aplicación P está bien definida. La continuidad de P es una aplicación inmediata del teorema de dependencia continua de la solución respecto de las condiciones iniciales, ya que al ser F de clase C^1 es en particular continua y localmente lipschitziana.
(b) Consideramos la función $Q : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ definida como

$$Q(x) = P(x) - x\,.$$

Claramente Q es continua en función de lo demostrado en (a). Demostraremos entonces que

$$Q(x_1) = P(x_1) - x_1 > 0\,, \quad Q(x_2) = P(x_2) - x_2 < 0\,, \tag{9.1}$$

en cuyo caso podríamos aplicar el teorema de Bolzano para concluir la existencia de $x^* \in [x_1, x_2]$ tal que $0 = Q(x^*) = P(x^*) - x^*$. Basta entonces con probar (9.1). Distinguimos para ello cuatro situaciones.

(i) $x(0) = x_0 > x_1$. Supongamos que existiera un primer punto $t_1 > 0$ en el que se alcanzase x_1 (es decir, $x(t_1) = x_1$). En ese caso se tendría $x'(t_1) \leq 0$ porque $x(t)$ tiene que decrecer para alcanzar x_1, luego $x'(t_1) = F(t_1, x(t_1)) = F(t_1, x_1) > 0$ (por hipótesis), lo cual es contradictorio. La contradicción viene obviamente de suponer que $x(t)$ corta a x_1. Ha de ser, por tanto, $x(t) > x_1$ para todo $t \geq 0$[1].

[1]Obsérvese que no podemos aplicar el principio de comparación de soluciones del Ejercicio 1 del capítulo anterior porque $x(t) \equiv x_1$ no es solución de la ecuación diferencial

(ii) $x(0) = x_0 < x_2$. Razonamos como en el apartado anterior. Supongamos ahora que $x(t)$ corta a x_2 (es decir, que existe $t_2 > 0$ tal que $x(t_2) = x_2$). En este caso ha de ser $x'(t_2) > 0$, pero por otro lado $x'(t_2) = F(t_2, x(t_2)) = F(t_2, x_2) < 0$ (por hipótesis), dando lugar a una contradicción. Por tanto, $x(t) < x_2$ para todo $t \geq 0$.

(iii) $x(0) = x_0 = x_1$. En este caso

$$x'(0) = F(0, x(0)) = F(0, x_0) = F(0, x_1) > 0$$

y es válida la misma discusión que en (a).

(iv) $x(0) = x_0 = x_2$. En este caso

$$x'(0) = F(0, x(0)) = F(0, x_0) = F(0, x_2) < 0$$

y es válida la misma discusión que en (b).

(c) Las funciones $x(t; x^*)$ y $x(t + T; x^*)$ resuelven ambas la ecuación diferencial $x' = F(t, x)$ y satisfacen la misma condición inicial. En efecto:

$$x'(t + T; x^*) = F(t + T, x(t + T)) = F(t, x(t + T))\,,$$
$$x(t = 0) = x(T; x^*) = x^*\,,$$

donde hemos usado que x^* es un punto fijo de P según lo demostrado en (b). Entonces, por el teorema de existencia y unicidad ha de ocurrir que

$$x(t; x^*) = x(t + T; x^*) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,,$$

es decir, $x(t; x^*)$ es T–periódica.

■

3. Dado $\varepsilon > 0$, sea $x(t; \varepsilon)$ la solución maximal del problema de valores iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon x' = x^2 + (1 - \varepsilon)t \\ x(0) = 1 \end{array} \right. .$$

(a) Prueba que para todo $T > 0$ y todo $s \in (0, 1)$ se verifica

$$\lim_{\varepsilon \to 1} \{x_\varepsilon(t)\} = \frac{1}{1 - t}$$

uniformemente en $[-T, s]$.

(b) Calcula $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t;1)$.

(c) ¿Se puede aplicar el teorema de diferenciabilidad respecto de parámetros para calcular $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t;0)$?

Solución : (a) Para $\varepsilon = 1$ el problema de valores iniciales a resolver es

$$x' = x^2 , \quad x(0) = 1 ,$$

cuya única solución $x(t) = \frac{1}{1-t}$ está definida en el intervalo $(-\infty, 1)$. Por el teorema de continuidad de la solución con respecto a parámetros se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \to 1} \{x_\varepsilon(t)\} = \frac{1}{1-t}$$

uniformemente en compactos de $(-\infty, 1)$, lo cual permite concluir la prueba.

(b) Denotemos $\xi(t) := \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t;1)$ y $F(t,x,\varepsilon) = \frac{x^2}{\varepsilon} + \Big(\frac{1}{\varepsilon} - 1\Big)t$, de modo que $x' = F(t,x,\varepsilon)$. Planteamos el problema variacional asociado

$$\xi'(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t;x(t;1),1)\,\xi(t) + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(t;x(t;1),1) , \quad \xi(0) = 0 ,$$

que en nuestro caso es

$$\xi'(t) = \Big(\frac{2}{1-t}\Big)\,\xi(t) + \frac{t^2 - t - 1}{(1-t)^2} , \quad \xi(0) = 0 .$$

La única solución de este problema (lineal no homogéneo) es

$$\xi(t) = \frac{t}{(1-t)^2}\Big(\frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - 1\Big) .$$

(c) NO, ya que $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}$ no están definidas en $\varepsilon = 0$.

■

4. Para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$, sea $x(t;\varepsilon)$ la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = (1+\varepsilon)x - \varepsilon x^2 - 1 \\ x(0) = 2 \end{cases} .$$

Se pide:

(a) Demostrar que si $\varepsilon \in [0, \frac{1}{2}]$, entonces $x(t;\varepsilon)$ está definida en $\mathbb{R}$.

(b) Probar que para todo $T > 0$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que si $-\varepsilon_0 < \varepsilon < 0$ entonces $x(t;\varepsilon)$ está definida en $[0, T]$.

(c) Calcular $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t;0)$.

(Junio 1995)

Solución : (a) Los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial son aquellos que satisfacen $(1+\varepsilon)x - \varepsilon x^2 - 1 = 0$, esto es,

$$x = \frac{1+\varepsilon \pm |\varepsilon - 1|}{2\varepsilon}\,.$$

Si consideramos $\varepsilon \in [0, \frac{1}{2}]$, los puntos de equilibrio son entonces

$$x = 1\,, \quad x = \frac{1}{\varepsilon} \in [2, \infty]\,.$$

Por tanto, si $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$1 < x(t;\varepsilon) < \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall\, t \in (\omega_-, \omega_+) = I\,,$$

es decir, la solución de nuestro problema de valores iniciales está *atrapada* entre dos soluciones constantes, luego $I = \mathbb{R}$. Si por el contrario $\varepsilon = 0$, el problema a resolver es

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

cuya única solución es $x(t) = 1 + e^t$ que está definida en $\mathbb{R}$.

(b) Es una aplicación directa del teorema de dependencia continua de la solución respecto de parámetros, ya que

$$F(t, x, \varepsilon) = (1+\varepsilon)x - \varepsilon x^2 - 1$$

es continua y el problema de valores iniciales admite una única solución maximal para $(t_0, x_0, \varepsilon_0) = (0, 2, 0)$ (esta solución fue calculada en el apartado anterior, donde además se apuntó que el intervalo maximal de definición de la misma es $\mathbb{R}$).

(c) Denotemos $\xi(t) := \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t;0)$. El problema variacional asociado es

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi'(t) = x(t;0) + \xi(t) - x(t;0)^2 = \xi - e^t - e^{2t} \\ \xi(0) = 0 \end{array} \right. .$$

La única solución de este problema (lineal no homogéneo) es

$$\xi(t) = (1 - t - e^t)e^t .$$

■

5. Se considera el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = x_2 + \varepsilon(x_1^2 + x_2^2)x_1 \\ x_2' = -x_1 + \varepsilon(x_1^2 + x_2^2)x_2 \end{array} \right. .$$

Pasando a coordenadas polares, estudia las propiedades de estabilidad del origen segun los valores de ε.

Solución : Denotaremos

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t;x^0) \\ x_2(t;x^0) \end{pmatrix}, \quad x^0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} .$$

Claramente $(x_1 \equiv 0, x_2 \equiv 0)$ resuelve el sistema (con $(x_1(0) = 0, x_2(0) = 0)$). La estabilidad del origen significa que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left\| x^0 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| < \delta \Rightarrow \left\| x(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon .$$

O bien en términos de las coordenadas polares $x_1(t) = \rho(t)\cos(\theta(t))$, $x_2(t) = \rho(t)\operatorname{sen}(\theta(t))$:

$$\rho(0) < \delta \Rightarrow \rho(t) < \varepsilon \quad \forall\, t > 0 .$$

Nuestro sistema se puede reescribir de la siguiente forma (en coordenadas polares $(\rho(t), \theta(t))$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho' \cos(\theta) - \rho \operatorname{sen}(\theta)\theta' = \rho[\operatorname{sen}(\theta) + \varepsilon\rho^2 \cos(\theta)] \\ \rho' \operatorname{sen}(\theta) + \rho\cos(\theta)\theta' = -\rho[\cos(\theta) - \varepsilon\rho^2 \operatorname{sen}(\theta)] \end{array} \right. .$$

Multiplicando la primera ecuación por $\cos(\theta(t))$ y la segunda por $\operatorname{sen}(\theta(t))$ y sumando ambas obtenemos

$$\rho'(t) = \varepsilon\rho(t)^3 \,. \tag{9.2}$$

Si ahora multiplicamos la primera ecuación por $-\operatorname{sen}(\theta(t))$ y la segunda por $\cos(\theta(t))$ y sumamos obtenemos

$$\rho(t)\theta'(t) = -\rho(t) \,. \tag{9.3}$$

De este modo obtenemos un sistema de ecuaciones, (9.2)–(9.3), equivalente al anterior pero escrito en términos de las nuevas variables $\rho(t)$ y $\theta(t)$. De (9.3) se obtiene $\theta' \equiv -1$, es decir, $\theta(t) = \theta_0 - t$. Un análisis simple de la ecuación (9.2) con dato inicial asociado $\rho(0) = \rho_0$ nos permite concluir que la única solución del correspondiente problema de valores iniciales es

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - 2\varepsilon\rho_0^2 t}} \,. \tag{9.4}$$

Distinguimos los siguientes casos:

(a) $\varepsilon > 0$. El denominador de (9.4) se anula en $t = \frac{1}{2\varepsilon\rho_0^2}$, luego $\rho(t)$ sólo está definida en $[0, \frac{1}{2\varepsilon\rho_0^2})$. Por tanto, si $\varepsilon > 0$ *no puede hablarse de estabilidad*.[2]

(b) $\varepsilon = 0$. En este caso se tiene $\rho(t) \equiv \rho_0$ y, por tanto, la solución trivial es estable pero no asintóticamente estable (basta con elegir $\delta = \varepsilon$ en la definición de estabilidad).

(c) $\varepsilon < 0$. En este caso $\rho(t) < \rho_0$, luego el origen es estable. Además $\rho(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, lo cual significa que

$$\left\| x(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \|x(t)\| = \rho(t) \to 0$$

cuando $t \to \infty$. Por consiguiente, la solución trivial es asintóticamente estable.

■

[2]Lo cual no significa que la solución trivial sea inestable, sólo que no tiene sentido discutir la estabilidad de la misma porque no está globalmente definida

6. Se considera la ecuación escalar autónoma

$$x' = -(x - p_1)(x - p_2) \cdots (x - p_n),$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$ con $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ y n es impar. Denotemos por $x(t; x_0)$ a la solución de la ecuación que satisface la condición inicial $x(0) = x_0$.

(a) Demuestra que, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, $x(t; x_0)$ es prolongable hasta ∞.

(b) Demuestra que existe el límite cuando $t \to \infty$ y es finito para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

(c) Estudia las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio.

(d) Esboza la gráfica de las soluciones.

(Febrero 1989)

Solución : (a) Claramente $f(x) = -(x - p_1)(x - p_2) \cdots (x - p_n)$ es de clase C^1 (en particular, localmente lipschitziana) por lo que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

admite una única solución. Distinguimos los siguientes casos:

(i) Si $x_0 \in (p_i, p_{i+1})$ para cualquier $1 \le i \le n-1$, se tiene que $p_i < x(t; x_0) < p_{i+1}$ para todo $t \in I = (\omega_-, \omega_+)$ (cf. Ejercicio 1 del capítulo anterior). Luego la solución $x(t; x_0)$ es prolongable a $\mathbb{R}$ por estar acotada en una banda[3].

(ii) Si $x_0 > p_n$ se tiene, por la misma razón que en (i), que $x(t; x_0) > p_n$ para todo $t \in I$. Además, en virtud de la definición de $f(x)$ se sabe que $x'(t; x_0) < 0$ para todo $t \in I$, luego $p_n < x(t; x_0) < x_0$ para todo $t \in (t_0, \omega_+)$. Si fuese $\omega_+ < \infty$ habría de existir una sucesión $\{t_n\}$ verificando $\{t_n\} \to \omega_+$ cuando $n \to \infty$ de modo que $\{\|x(t_n; x_0)\|\} \to \infty$ cuando $n \to \infty$, lo cual es contradictorio con el hecho de que $x(t; x_0)$ es acotada.

[3]Este argumento ya ha sido empleado en varias ocasiones con anterioridad

(iii) Si $x_0 < p_1$ se tiene que $x(t;x_0) < p_1$ para todo $t \in I$. Usando nuevamente la definición de $f(x)$ y teniendo en cuenta que n es impar se deduce en este caso que $x'(t;x_0) > 0$ para todo $t \in I$, luego $x_0 < x(t;x_0) < p_1$ para todo $t \in (t_0, \omega_+)$. Razonando como en (ii) se concluye que ha de ser $\omega_+ = \infty$.

(b) Hacemos la misma distinción que en el apartado anterior:

(i) Si $x_0 \in (p_i, p_{i+1})$ para cualquier $1 \leq i \leq n-1$, sabemos por (a) que la solución $x(t;x_0)$ es acotada. Para comprobar que es también monótona observamos que su derivada

$$x'(t;x_0) = -(x-p_1)\dots(x-p_{i-1})(x-p_i)(x-p_{i+1})\dots(x-p_n)$$

no cambia de signo. En efecto, signo$(x'(t;x_0)) = (-1)^{n-i}$ por lo que $x(t;x_0)$ es monótona y acotada

(ii) Si $x_0 > p_n$ sabemos que $p_n < x(t;x_0) < x_0$ y $x'(t;x_0) < 0$, por lo que $x(t;x_0)$ es decreciente y acotada. Por consiguiente, existe $\text{lím}_{t\to\infty}\{x(t;x_0)\}$ y $p_n \leq \text{lím}_{t\to\infty}\{x(t;x_0)\} < x_0$.

(iii) Si $x_0 < p_1$ sabemos que $x_0 < x(t;x_0) < p_1$ y $x'(t;x_0) > 0$, por lo que $x(t;x_0)$ es creciente y acotada. Por consiguiente, existe $\text{lím}_{t\to\infty}\{x(t;x_0)\}$ y $x_0 < \text{lím}_{t\to\infty}\{x(t;x_0)\} \leq p_1$.

(c) Usamos el primer método de Lyapunov. Para ello calculamos en primer lugar

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -(x-p_2)(x-p_3)\dots(x-p_n)$$
$$-(x-p_1)(x-p_3)\dots(x-p_n) - \dots (x-p_1)(x-p_1)\dots(x-p_{n-1})\,.$$

Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p_i) = -(p_i-p_1)(p_i-p_2)\dots(p_i-p_{i-1})(p_i-p_{i+1})\dots(p_i-p_n)\,,$$

de donde se deduce que

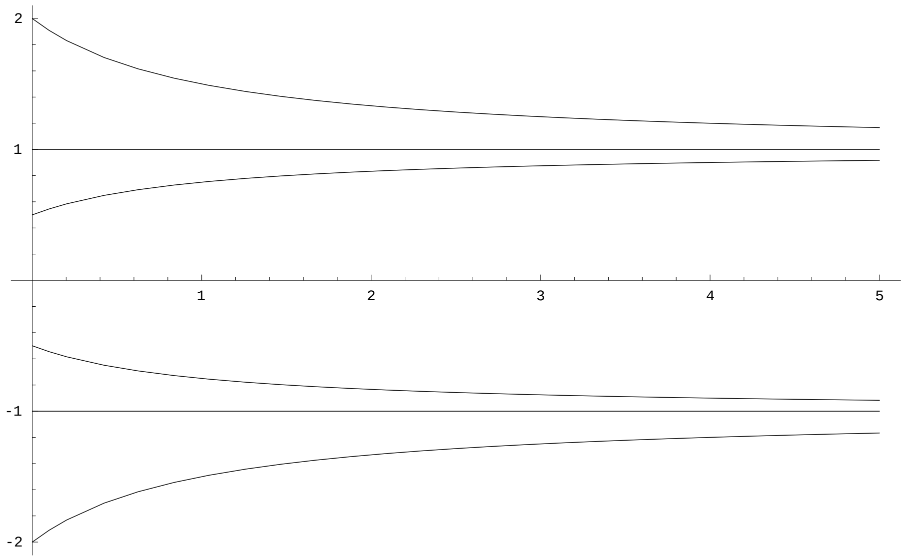
$$\text{signo}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_i)\right) = (-1)^{n-i+1}\,.$$

Finalmente, como n es impar por hipótesis se tiene que

(i) Si i es par, p_i es inestable.

(ii) Si i es impar, p_i es asintóticamente estable.

(d) El comportamiento de las soluciones viene representado en la siguiente figura



■

7. Se considera la ecuación

$$x'' + g(x) = 0$$

donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Lipschitz–continua. Sea $p \in \mathbb{R}$ un punto de equilibrio aislado tal que la función $G(x) = \int_0^x g(z)\, dz$ alcanza en p un máximo local estricto. Prueba que p es un punto de equilibrio inestable.

Solución : Reescrita equivalentemente en forma de sistema, la ecuación $x'' + g(x) = 0$ se lee

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ -g(x) \end{pmatrix} = F(x_1, x_2)\,.$$

Como $(p, 0)$ es un punto de equilibrio, ha de ser $g(p) = 0$. Para estudiar la estabilidad de este punto construimos

$$J[F](p, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(p) & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda = \pm\sqrt{-g'(p)}$. Finalmente, como $G(x)$ alcanza en p un máximo local estricto ha de verificarse

$$g'(p) = G''(p) < 0^4\,,$$

luego

$$\mu_p = \text{máx}\{\text{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(J[F](p, 0))\} > 0$$

lo cual indica que el punto de equilibrio $(p, 0)$ es inestable en función del primer método de Lyapunov.

■

8. Encuentra dos funciones $a, b \in C(\mathbb{R})$ tales que la ecuación lineal escalar $x' = a(t)x$ sea asintóticamente estable, $x' = (a(t) + b(t))x$ sea inestable y además

$$\lim_{t\to\infty} b(t) = 0\,.$$

[4] En virtud del teorema fundamental del cálculo, ya que g es continua por hipótesis

Solución : Un ejemplo sencillo de ecuación lineal escalar asintóticamente estable es $x' = -\frac{x}{t}$, ya que todas sus soluciones satisfacen

$$x(t) = \frac{K}{t} \to 0 \quad \text{cuando } t \to \infty\,, \quad K \in \mathbb{R}\,,$$

por lo que la solución trivial es un atractor; luego podemos elegir

$$a(t) = -\frac{1}{t}\,.$$

Si ahora elegimos

$$b(t) = \frac{2}{t}\,,$$

entonces $x' = (a(t) + b(t))x$ es exactamente $x' = \frac{x}{t}$, que es inestable. En efecto, ahora las soluciones son de la forma

$$x(t) = Kt \to \infty \quad \text{cuando } t \to \infty\,, \quad K \in \mathbb{R}\,,$$

por lo que la solución trivial es inestable. Además, es obvio que

$$\lim_{t\to\infty} b(t) = 0\,.$$

■

9. Se consideran la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} 2z+4 & \text{si } z < -1 \\ -2z & \text{si } |z| < 1 \\ 2z-4 & \text{si } z > 1 \end{cases}$$

y la ecuación

$$x'' + f(x') + x = 0\,.$$

(a) Estudia la existencia, unicidad y prolongación de sus soluciones.

(b) Estudia las propiedades de estabilidad de sus puntos de equilibrio.

Solución : (a) Reescribiendo la ecuación de segundo orden en forma de sistema obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - f(x_2) \end{pmatrix} = F(x_1, x_2)\,.$$

Como f es continua, F también lo es. Por tanto, existen soluciones de nuestra ecuación. Por otra parte, como f es lineal a trozos es globalmente lipschitziana (cf. Ejercicio 13 del Capítulo 7) y, como consecuencia, F también lo es. Luego existe una única solución definida en $\mathbb{R}$ del problema de valores iniciales asociado a nuestra ecuación.

(b) El único punto de equilibro es $(0,0)$ ya que $f(0) = 0$. Tenemos

$$\nabla F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -f'(y) \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que, aunque f no es derivable, sí lo es en un entorno de 0; luego ∇F existe en un entorno de $(0,0)$. En efecto,

$$f'(0) = -2 \Rightarrow \nabla F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El único valor propio de $\nabla F(0,0)$ es $\lambda = 1$ (doble), luego $\mu = 0$. Por tanto, $(0,0)$ es un punto de equilibrio inestable.

■

10. Estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio de las siguientes ecuaciones y sistemas:

    (a) $x'' - 2xe^{-x^2} = 0$.

    (b) $x'' + 2x' + 5x + x^3 = 0$.

    (c) $x' = y + x - x^3$, $y' = -x$.

    (d) $x'' + x|x| = 0$.

    (e) $x' = f(x+y)$, $y' = -f(x-y)$, donde

$$f(z) = \begin{cases} 2z & \text{si } z \geq 0 \\ 3z^2 + 2z & \text{si } z < 0 \end{cases}.$$

Solución : (a) Escrita vectorialmente la ecuación es de la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_1 e^{-x_1^2} \end{pmatrix} = F(x_1, x_2)\,,$$

luego el único punto de equilibrio es $p = (0,0)^T$. Calculamos

$$J[F](p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2(1-2x_1^2)e^{-x_1^2} & 0 \end{pmatrix}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda = \pm\sqrt{2}$. Entonces $\mu = \sqrt{2} > 0$ y, según el primer método de Lyapunov, el punto de equilibrio es inestable.

(b) Reescribimos en primer lugar la ecuación como un sistema de primer orden, obteniendo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ -2x_2 - 5x_1 - x_1^3 \end{pmatrix} = F(x_1, x_2)\,.$$

Claramente $F(x_1, x_2)$ se anula si y sólo si $x_2 = 0$ y $x_1 = 0, \pm\sqrt{-5}$, luego el único punto de equilibrio es $p = (0,0)^T$. Calculamos

$$J[F](p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5-3x_1^2 & -2 \end{pmatrix}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda = -1 \pm 2i$. Entonces $\mu = -1 < 0$ y, según el primer método de Lyapunov, el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

(c) En este caso

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y + x - x^3 \\ -x \end{pmatrix} = F(x, y)\,,$$

luego el único punto de equilibrio es $p = (0,0)^T$. Calculamos

$$J[F](p) = \begin{pmatrix} 1-3x^2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Entonces $\mu = \frac{1}{2} > 0$ y, según el primer método de Lyapunov, el punto de equilibrio es inestable.

(d) Escrita vectorialmente la ecuación es de la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1|x_1| \end{pmatrix} = F(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_2, -x_1^2)^T & \text{si } x_1 \geq 0 \\ (x_2, x_1^2)^T & \text{si } x_1 < 0 \end{cases},$$

luego el único punto de equilibrio es $p = (0,0)^T$. En este caso el primer método de Lyapunov no proporciona información ($\lambda = 0$ doble $\Rightarrow \mu = 0$). Consideramos entonces la siguiente función de Lyapunov:

$$V(x_1, x_2) = \frac{|x_1|^3}{3} + \frac{x_2^2}{2}\,.$$

Claramente $V(0,0) = 0$, $V(x,y)$ es definida positiva en un entorno de p y

$$V'(x_1, x_2) = (x_1|x_1|, x_2) \cdot (x_2, -x_1|x_1|) = 0\,,$$

luego p es un punto de equilibrio estable pero no asintóticamente estable.

(e) Escrita vectorialmente la ecuación es de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f(x+y) \\ -f(x-y) \end{pmatrix} = F(x,y)\,.$$

Teniendo en cuenta la definición de f se puede comprobar fácilmente que los únicos puntos de equilibrio son

$$p = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos

$$J[F](p) = J[F](r) = \begin{pmatrix} f'(0) & f'(0) \\ -f'(0) & f'(0) \end{pmatrix}(p) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$J[F](q) = \begin{pmatrix} f'(-\frac{2}{3}) & f'(-\frac{2}{3}) \\ -f'(-\frac{2}{3}) & f'(-\frac{2}{3}) \end{pmatrix}(q) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

En el primer caso los valores propios son $\lambda_p = 2 \pm 2i \Rightarrow \mu = 2 > 0$, mientras que en el segundo caso son $\lambda_q = -2 \pm 2i \Rightarrow \mu = -2 < 0$. Entonces, según el primer método de Lyapunov los puntos de equilibrio p y r son inestables mientras que el punto de equilibrio q es asintóticamente estable.

■

11. Se considera el sistema

$$\begin{cases} x' = -6y^5 e^{x+y}, \\ y' = 2(x-1)e^{x+y} \end{cases}.$$

Prueba que tiene un único punto de equilibrio y que dicho punto es estable pero no es un atractor.

Solución : En este caso

$$f(x,y) = -2e^{x+y}\begin{pmatrix} 3y^5 \\ 1-x \end{pmatrix},$$

luego el único punto de equilibrio es $(1,0)$. Tenemos

$$H(f) = -2e^{x+y}\begin{pmatrix} 3y^5 & 3y^4(y+5) \\ -x & 1-x \end{pmatrix},$$

luego

$$H(f)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2e & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto estamos en el caso en que $\mu = 0$, por lo que el primer método de Lyapunov no aporta información.

Construimos la función de Lyapunov

$$V(x,y) = (x-1)^2 + y^6.$$

Es claro que $V(1,0) = 0$ y V es definida positiva. Además

$$V'(x,y) = 4e^{x+y}\langle (x-1, 3y^5), (-3y^5, x-1)\rangle = 0,$$

luego el punto de equilibrio $(1,0)$ es estable pero no asintóticamente estable.

■

12. Sea p un punto de equilibrio de la ecuación

$$x' = f(x), \quad f \in C^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N),$$

de la cual suponemos que todas sus soluciones son prolongables hasta ∞. Demuestra que si p es un atractor, entonces el conjunto

$$A = \{q \in \mathbb{R}^N : \lim_{t\to\infty}\{x(t;q)\} = p\}$$

es abierto.

Solución : Probaremos que dado $q \in A$, existe $\delta > 0$ tal que la bola euclídea centrada en q de radio δ se queda dentro de A. Como por hipótesis p es un atractor, existe $\eta > 0$ tal que si $\|y - p\| < \eta$ se tiene que $x(t; y)$ está definida en $[0, \infty)$ y

$$\lim_{t\to\infty} \{x(t; y)\} = p\,.$$

Es decir, si $\|y - p\| < \eta$ entonces $y \in A$. Por otro lado, si $q \in A$ existe $t_0 > 0$ tal que si $t \geq t_0$ entonces

$$\|x(t; q) - p\| < \frac{\eta}{2}\,. \tag{9.5}$$

Además, como $f \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ por hipótesis (en particular es continua y localmente lipschitziana) podemos aplicar el teorema de dependencia continua de la solución respecto de datos iniciales para concluir que existe $\delta > 0$ tal que si $\|q - \tilde{q}\| < \delta$, entonces

$$\|x(t; \tilde{q}) - x(t; q)\ \| < \frac{\eta}{2} \quad \forall\, t \in [0, t_0]\,. \tag{9.6}$$

Sea $y = x(t_0; \tilde{q})$. Usando (9.5) y (9.6) obtenemos

$$\|y - p\| \leq \|y - x(t_0; q)\| + \|x(t_0; q) - p\| < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta\,.$$

Se deduce por tanto que $x(t; y)$ está definida en $[0, \infty)$ y

$$\lim_{t\to\infty} \{x(t; y)\} = p\,,$$

luego $y \in A$. Ahora bien, la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = y \end{cases}$$

es, por un lado, $x(t; y)$ mientras que, por otro lado, también es solución $\varphi(t) := x(t + t_0; \tilde{q})$. En efecto, $\varphi(0) = x(t_0; \tilde{q}) = y$. Entonces

$$x(t; y) = \varphi(t)$$

por unicidad. De este modo, dado $q \in A$ hemos encontrado $\delta > 0$ (el de (9.6)) tal que si $\|q - \tilde{q}\| < \delta$ entonces $\tilde{q} \in A$, luego A es abierto.

■

13. Calcula los puntos de equilibrio de la ecuación

$$x'' + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0\,.$$

¿Son estables? ¿son asintóticamente estables?

Solución : Reescribiendo la ecuación de segundo orden en forma de sistema obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1^3 - 3x_1^2 - 3x_1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -(x_1+1)^3 \end{pmatrix} = f(x_1, x_2)\,.$$

Luego el único punto de equilibrio es $(x_1, x_2) = (-1, 0)$.
Tenemos

$$H(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3(x_1+1)^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{luego } H(f)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto estamos en el caso en que $\mu = 0$, por lo que el primer método de Lyapunov no aporta información.
Construimos la siguiente función de Lyapunov:

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \int_{-1}^{x_1} (u+1)^3\, du = \frac{x_2^2}{2} + \frac{(x_1+1)^4}{4} \geq 0\,.$$

Es claro que $V(-1, 0) = 0$, luego V es definida positiva. Además

$$V'(x_1, x_2) = \Big\langle \Big((x_1+1)^3, x_2 \Big), \Big(x_2, -(x_1+1)^3 \Big) \Big\rangle = 0\,,$$

por lo que el punto de equilibrio $(-1, 0)$ es estable pero no asintóticamente estable.

■

14. Proporciona ejemplos explícitos de ecuaciones autónomas

$$x' = f(x)\,, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)\,,$$

que verifiquen las siguientes propiedades:

(a) Tiene exactamente dos puntos de equilibrio, ambos inestables.

(b) Tiene exactamente un punto de equilibrio y es estable pero no asintóticamente estable.

(c) Tiene una infinidad de puntos de equilibrio y todos ellos son inestables.

(Febrero 1990)

(d) Tiene una solución asintóticamente estable, pero el primer método de Lyapunov no proporciona información.

(e) Todas las soluciones están definidas y acotadas en $[0, \infty)$ y al menos una de ellas es inestable.

(f) Tiene una solución estable y otra inestable.

(Junio 1991)

Solución : (a) $x' = x^2(x-1)^2$. Todas las soluciones son monótonas (o siempre crecen o siempre decrecen), luego no pueden tender hacia los puntos de equilibrio. En efecto, podemos aplicar el teorema de inestabilidad de Cetaev con las funciones $V_0(x) = x$ (para el punto de equilibrio $p = 0$) y $V_1(x) = x - 1$ (para el punto de equilibrio $p = 1$). Se tiene

$$V_0(0) = 0\,, \quad V_0'(x) = x' > 0 \text{ en un entorno reducido de } 0\,,$$
$$V_1(0) = 0\,, \quad V_1'(x) = x' > 0 \text{ en un entorno reducido de } 1\,.$$

Además podemos considerar las sucesiones

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0\,, \quad \{y_n\} = \left\{1 + \frac{1}{n}\right\} \to 1\,, \quad n \to \infty\,,$$

para las cuales se verifica que $V_0(x_n) > 0$ y $V_1(y_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $x'' + 4x = 0$ o, equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -4x_1 \end{pmatrix},$$

cuyo único punto de equilibrio es $p = (0,0)^T$. En este caso los valores propios del sistema son $\lambda = \pm 2i \Rightarrow \mu = 0$, luego el primer método de Lyapunov no proporciona información. Podemos considerar la función de Lyapunov

$$E(x_1, x_2) = 2x_1^2 + \frac{x_2^2}{2}\,.$$

En efecto, $E(p) = 0$ y $E(x_1, x_2)$ es definido positivo en un entorno de p. Además

$$E'(x_1, x_2) = (4x_1, x_2) \cdot (x_1', x_2')^T = (4x_1, x_2) \cdot (x_2, -4x_1)^T = 0\,,$$

luego p es estable pero no asintóticamente estable.

(c) $x' = \operatorname{sen}(x)^2$. Los puntos de equilibrio son $p_k = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Para ver que son todos inestables consideramos las funciones

$$V_k(x) = x - k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Se tiene que $V_k(p_k) = 0$, $V_k'(x) = x' = \operatorname{sen}(x)^2 > 0$ en cualquier entorno reducido de p_k y $V_k\Big(p_k + \frac{1}{n}\Big) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego el teorema de inestabilidad de Cetaev nos permite concluir.

(d) Podemos usar el ejemplo del Ejercicio 5 con $\epsilon = -1$:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ x_2' = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}.$$

En efecto, el único punto de equilibrio es $p = (0,0)^T$ y la matriz jacobiana de

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}$$

evaluada en p es

$$J[F](p) = \begin{pmatrix} -3x_1^2 - x_2^2 & 1 - 2x_1x_2 \\ -1 - 2x_1x_2 & -x_1^2 - 3x_2^2 \end{pmatrix}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo sus valores propios $\lambda = \pm i \Rightarrow \mu = 0$. Por tanto, el primer método de Lyapunov no aporta información.

Otro ejemplo sencillo de analizar es $x' = -x^3$.

(e) Sirve el ejemplo del apartado (c).

(f) $x' = x(x-1)$, ya que $x \equiv 0$ es estable (de hecho es asintóticamente estable) y $x \equiv 1$ es inestable.

■

15. Se considera el sistema de ecuaciones de presa–depredador de Lotka–Volterra

$$\begin{cases} x' = (a - by)x \\ y' = (-c + dx)y \end{cases}$$

donde a, b, c y d son constantes positivas. Se trata de estudiar las propiedades de estabilidad del punto de equilibrio $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ a través de los siguientes pasos:

(a) Utiliza el cambio de variables $p = \log(x)$, $q = \log(y)$ para transformar la ecuación de Lotka–Volterra en un sistema de la forma

$$\begin{cases} p' = -\frac{\partial H}{\partial q}(p, q) \\ q' = \frac{\partial H}{\partial p}(p, q) \end{cases},$$

donde $H \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ (este tipo de sistemas se llaman *Hamiltonianos*). Determina la función H.

(b) Se define $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ como $V(x, y) := H(\log(x), \log(y))$. Comprueba que V alcanza en $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ un mínimo estricto.

(c) Como consecuencia del apartado anterior, determina las propiedades de estabilidad del punto de equilibrio $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.

(Septiembre 1992)

Solución : (a) Derivando el cambio de variables

$$p = \log(x), \quad q = \log(y)$$

obtenemos

$$p' = \frac{x'}{x} = a - by = a - be^q, \quad q' = \frac{y'}{y} = -c + dx = -c + de^p.$$

Si ha de ser

$$p' = a - be^q = -\frac{\partial H}{\partial q}(p, q)$$

hemos de elegir la función $H(p, q)$ de la forma

$$H(p, q) = be^q - aq + f(p),$$

donde f es una función por determinar que sólo depende de p. Como además se ha de cumplir

$$-c + de^p = q' = \frac{\partial H}{\partial p}(p,q)\,,$$

se deduce que $f(p) = de^p - cp$ y, por tanto,

$$H(p,q) = be^q - aq + de^p - cp\,.$$

(b) Se tiene

$$V(x,y) = by - a\log(y) + bx - c\log(x)\,.$$

Entonces

$$\frac{\partial V}{\partial x} = d - \frac{c}{x}\,, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = b - \frac{a}{y}\,,$$

por lo que el único punto crítico de V es $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. Para comprobar que se trata de un mínimo construimos la matriz Hessiana de V,

$$\mathrm{Hess}[V](x,y) = \begin{pmatrix} \frac{c}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{y^2} \end{pmatrix}\,,$$

de modo que

$$\mathrm{Hess}[V](\frac{c}{d}, \frac{a}{b}) = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{c} & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{a} \end{pmatrix}$$

es definida positiva.

(c) Se puede comprobar fácilmente que el primer método de Lyapunov no proporciona información ya que los valores propios de $J[F](\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ son ambos complejos, donde

$$F(p,q) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H}{\partial q}(p,q) \\ \frac{\partial H}{\partial p}(p,q) \end{pmatrix}$$

y $J[F]$ denota la matriz jacobiana de F. Definimos entonces la siguiente función de Lyapunov:

$$U(x,y) = V(x,y) - V\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)\,.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} U'(x,y) = V'(x,y) &= \nabla V(x,y)\cdot(x',y') \\ &= \Big(d-\frac{c}{x}, b-\frac{a}{y}\Big)\cdot\Big((a-by)x,(dx-c)y\Big) \\ &= (dx-c)(a-by)+(by-a)(dx-c)=0\,, \end{aligned}$$

luego $(\frac{c}{d},\frac{a}{b})$ es estable pero no asintóticamente estable.

■

16. Se pide:

    (a) Demostrar que, dado $\lambda > 0$, la ecuación $\lambda x + e^x = 0$ tiene una única raíz real a la que denotaremos por x_λ.

    (b) Probar que la función

    $$V(x,y) = \frac{\lambda}{2}x^2 + e^x + \frac{1}{2}y^2$$

    alcanza su mínimo absoluto en el punto $(x_\lambda, 0)$.

    (c) Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial

    $$x'' + \lambda x + e^x = 0\,, \quad \lambda > 0\,.$$

(Diciembre 1996)

Solución : (a) Definimos $f(x) = \lambda x + e^x$. En el intervalo $I = [-\frac{1}{\lambda}, 0]$ podemos aplicar el teorema de Bolzano, luego existe al menos una raíz real de f en I. Además $f'(x) = \lambda + e^x > 0$, luego f es estrictamente creciente. Por tanto, la raíz x_λ de f es única.

(b) Calculamos las derivadas parciales de V:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lambda x + e^x\,, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = y\,.$$

Entonces, el único punto crítico de V es $(x_\lambda, 0)$. Comprobamos que se trata de un mínimo:

$$H(V) = \begin{pmatrix} \lambda + e^x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{luego } H(V)\begin{pmatrix} x_\lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + e^{x_\lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de $H(V)\begin{pmatrix} x_\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ son $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = \lambda + e^{x_\lambda}$, ambos positivos. Por tanto, $H(V)\begin{pmatrix} x_\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ es definida positiva y, consecuentemente, $(x_\lambda, 0)$ es un mínimo de V. De hecho, ha de ser el mínimo absoluto de V porque es único.

(c) En forma vectorial el problema es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -e^x \end{pmatrix},$$

luego $F(x,y) = (y, -\lambda x - e^x)^T$. El único punto de equilibrio es, por tanto, $(x_\lambda, 0)$. Al evaluar la matriz jacobiana de F en este punto obtenemos

$$J[F](x_\lambda, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda - e^{x_\lambda} & 0 \end{pmatrix},$$

de lo cual se desprende fácilmente que el primer método de Lyapunov no proporciona información. Consideramos entonces la siguiente modificación de la energía mecánica del sistema $E(x,y)$ como función de Lyapunov:

$$V(x,y) = E(x,y) - E(x_\lambda, 0) = \frac{\lambda}{2}x^2 + e^x + \frac{y^2}{2} - E(x_\lambda, 0).$$

Se tiene que

$$V(x_\lambda, 0) = 0, \quad V(x,y) > 0 \ \forall (x,y) \neq (x_\lambda, 0), \quad V'(x,y) \equiv 0,$$

de lo que se concluye que el punto $(x_\lambda, 0)$ es estable pero no asintóticamente estable.

■

CAPÍTULO 10

Series de Fourier, problemas de contorno, ecuaciones en derivadas parciales y cálculo de variaciones

1. Una de las cuestiones principales de la teoría de ecuaciones de evolución en derivadas parciales consiste en resolver un problema de valores iniciales para una ecuación dada, es decir, predecir el comportamiento futuro del sistema conocido su estado actual. En muchas ocasiones es posible demostrar que esto siempre puede hacerse y que además la solución es única. Sin embargo, en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias se puede además invertir el proceso, en el sentido en que dado el estado actual del sistema es posible también reconstruir el pasado del mismo. A menudo es conveniente representar esta propiedad en términos de un grupo $T(t)$ de transformaciones temporales que permite expresar la solución $u(t;u_0)$ asociada al dato inicial u_0 de la siguiente forma: $u(t;u_0) = T(t)u_0$. Los operadores $T(t)$ satisfacen las siguientes propiedades:

$$T(t)T(s) = T(s)T(t) = T(t+s)\,, \quad \lim_{t\to 0} T(t) = T(0) = I\,.$$

En el ámbito de las ecuaciones en derivadas parciales la situación es muy diferente. De hecho, en muchos casos es necesario restringir el estudio de la evolución de las soluciones al futuro ($t > 0$), en cuyo caso el análogo del grupo uniparamétrico $T(t)$ es un semigrupo de transformaciones $S(t)$, definido solamente para instantes $t > 0$. Un semigrupo *fuertemente continuo* $S(t)$ satisface

$$S(t)S(s) = S(s)S(t) = S(t+s)\;\forall\, t,s > 0\,, \quad \lim_{t\to 0^+} S(t) = S(0) = I\,,$$

y proporciona la solución $u(t;u_0) = S(t)u_0$ asociada al dato inicial $u(t=0) = u_0$.

Para constatar lo anteriormente expuesto consideremos la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Au\,,$$

donde A es la extensión de $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ a $L^2(\mathbb{R})$.

(a) Comprueba que A admite el conjunto infinito de vectores propios $\{\operatorname{sen}(kx)\}_{k\in\mathbb{N}}$, asociados a los valores propios $\lambda_k = k^2$.

(b) Calcula la solución $u(t,x)$ asociada al siguiente dato inicial

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k}\,.$$

(c) ¿Qué conclusiones pueden extraerse del cálculo de $\|u(\cdot,x)\|_{L^2(\mathbb{R})}$?

Solución : (a) es consecuencia de un cálculo directo:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\operatorname{sen}(kx)] = k^2 \operatorname{sen}(kx)\,.$$

Para resolver (b) empleamos el proceso estándar de separación de variables (nótese que una de las ecuaciones que se desprenden de la separación de variables ha sido resuelta en el apartado (a)) y el principio de superposición de soluciones (en serie de Fourier) para la ecuación del calor, de lo que se obtiene que la solución requerida es

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, e^{-k^2 t} \operatorname{sen}(kx)\,.$$

Finalmente, para dar respuesta a (c) observamos en primer lugar que, para valores $t>0$, $\|u(\cdot,x)\|_{L^2((0,\infty))}$ es acotada. En efecto,

$$\|u(\cdot,x)\|_{L^2((0,\infty))} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, \|e^{-k^2 t}\|_{L^2((0,\infty))} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,.$$

Sin embargo, al extender la solución a tiempos negativos obtenemos

$$\|u(\cdot,x)\|_{L^2((-\infty,0))} \geq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k}\right) \|e^{-t}\|_{L^2((-\infty,0))},$$

que es divergente.

■

2. Determina los valores propios y las funciones propias del problema

$$x'' + 4x' + (4+9\lambda)x = 0\,, \quad x(0) = x'(1) = 0\,.$$

(Septiembre 2004)

Solución : Se trata de un problema de contorno lineal de segundo orden, luego resolvemos en primer lugar la ecuación característica asociada

$$\mu^2 + 4\mu + (4+9\lambda) = 0\,.$$

Si $\lambda = 0$ se tiene que la única raíz de la ecuación característica es $\mu = -2$ con multiplicidad dos, luego las soluciones de $x'' + 4x' + 4x = 0$ son todas de la forma

$$x(t) = A\,e^{-2t} + Bt\,e^{-2t}\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Imponiendo las condiciones de contorno obtenemos $A = B = 0$ lo cual conduce a la solución trivial, por lo que $\lambda = 0$ no puede ser un valor propio. Para $\lambda < 0$ obtenemos $\mu = -2 \pm 3\sqrt{|\lambda|}$, valores los cuales dan lugar a las soluciones

$$x(t) = A\,e^{(-2+3\sqrt{|\lambda|})t} + B\,e^{(-2-3\sqrt{|\lambda|})t}\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Imponiendo nuevamente las condiciones de contorno obtenemos $A = B = 0$, por lo que no hay valores propios negativos. Finalmente, para valores $\lambda > 0$ obtenemos $\mu = -2 \pm 3\sqrt{\lambda}\,i$, luego todas las soluciones de $x'' + 4x' + (4+9\lambda)x = 0$ son de la forma

$$x(t) = e^{-2t}\Big(A\operatorname{sen}(3\sqrt{\lambda}\,t) + B\cos(3\sqrt{\lambda}\,t)\Big)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,, \quad \lambda > 0\,.$$

Al imponer las condiciones de contorno $x(0) = x'(1) = 0$ se tiene que

$$B = 0\,, \quad 3\sqrt{\lambda}\cos(3\sqrt{\lambda}) = 2\,\mathrm{sen}(3\sqrt{\lambda})\,.$$

Por tanto, los valores propios son aquellos $\lambda > 0$ que satisfacen la ecuación

$$3\sqrt{\lambda}\cos(3\sqrt{\lambda}) = 2\,\mathrm{sen}(3\sqrt{\lambda}) \tag{10.1}$$

y las funciones propias asociadas son

$$x_\lambda(t) = Ae^{-2t}\,\mathrm{sen}(3\sqrt{\lambda}\,t)\,, \quad A \in \mathbb{R}\,,$$

para los valores $\lambda > 0$ que resuelven (10.1).

■

3. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

   (a) El desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = x$ en $(-\pi, \pi)$ es

   $$2\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\,\frac{\mathrm{sen}(nx)}{n}\,.$$

   (b) El desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = x$ converge hacia f en $(-\pi, \pi)$.

   (c) El problema de contorno

   $$\begin{cases} (tx')' + \frac{x}{t} = -\frac{1}{t}\,, \quad 1 \leq t \leq e^\pi \\ x'(1) = 1 \\ x(e^\pi) + x'(e^\pi) = 0 \end{cases},$$

   tiene infinitas soluciones.

   (d) Los valores propios del problema de contorno

   $$t^2x'' + tx' = -\lambda x\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,, \quad x'(1) = x(e^\pi) = 0\,,$$

   son $\lambda_n = n\pi$ para todo $n \geq 1$ y las funciones propias son

   $$x_n(t) = \cos\left[\left(\frac{2n+1}{2}\right)\log(t)\right].$$

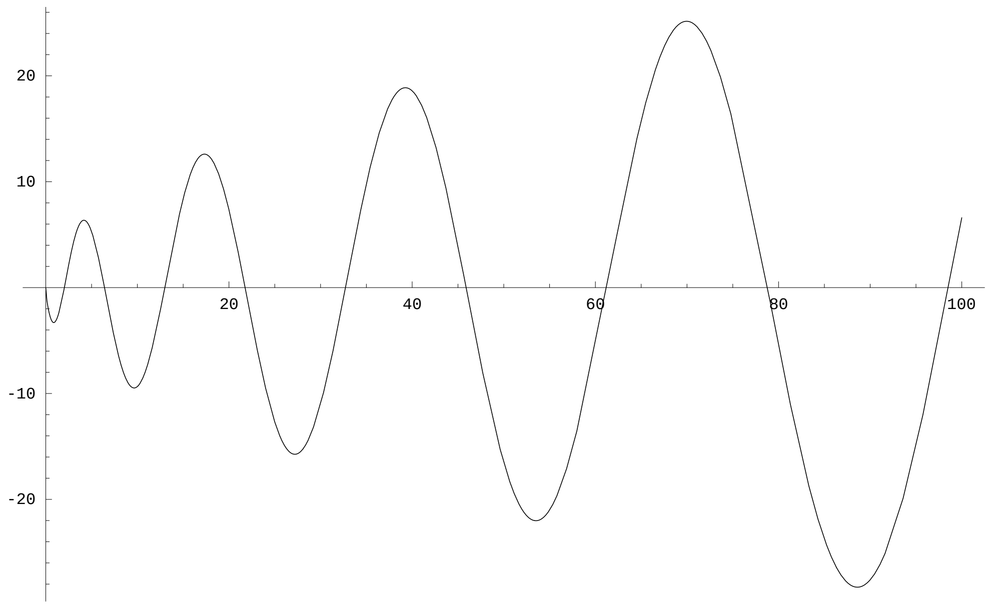


Figura 10.1: Las soluciones de la ecuación (10.1) son los ceros de la función representada: 0, 2,03042, 6,41195, 12,9904, 21,7629, . . .

(e) La función $u(t,x) = \operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(x)$ es una solución de la ecuación de ondas $u_{tt} - u_{xx} = 0$ en $D = [0,\pi] \times [0,\pi]$ y alcanza su máximo en la frontera de D como consecuencia del principio del máximo.

(Septiembre 2003)

Solución : (a) VERDADERA. El desarrollo de Fourier es de la forma

$$x \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ a_n \cos[n(x+\pi)] + b_n \operatorname{sen}[n(x+\pi)] \Big\} ,$$

con

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, \cos[n(x+\pi)] \, dx \, , \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \, ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, \operatorname{sen}[n(x+\pi)] \, dx \, , \quad n \in \mathbb{N} \, .$$

Claramente $a_0 = 0$ y, por ser la función $x\cos(nx)$ impar,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) \, dx = 0 \, , \quad n \in \mathbb{N} \, .$$

Por otro lado

$$b_n = \frac{(-1)^n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) \, dx = \frac{(-1)^n}{\pi} (-1)^{n+1} \frac{2\pi}{n} = -\frac{2}{n} \, .$$

Entonces

$$x \sim -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}[n(x+\pi)]}{n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \, .$$

(b) VERDADERA. La complitud del sistema trigonométrico garantiza la convergencia en $L^2(-\pi,\pi)$.

(c) FALSA. La ecuación diferencial puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$t^2 x'' + t x' + x = -1 \, , \tag{10.2}$$

admitiendo claramente como solución particular la función constante $x \equiv -1$. Basta entonces con encontrar la solución general de la ecuación homogénea $t^2x'' + tx' + x = 0$, que es de tipo Euler. Es conocido que el cambio de variable $t = e^s$ transforma esta última en una ecuación lineal con coeficientes constantes, a saber $y'' + y = 0$, cuya solución general es

$$y(s) = A\cos(s) + B\operatorname{sen}(s)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Deshaciendo finalmente el cambio de variable y tomando en consideración la solución particular encontrada anteriormente se tiene que la solución general de la ecuación (10.4) es

$$x(t) = A\cos(\log(t)) + B\operatorname{sen}(\log(t)) - 1\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Aplicando ahora las condiciones de contorno deducimos fácilmente que la única solución del problema planteado es

$$x(t) = (1 + e^{-\pi})\cos(\log(t)) + \operatorname{sen}(\log(t)) - 1\,.$$

(d) FALSA. Si $x_n(t) = \cos\Big[\Big(\frac{2n+1}{2}\Big)\log(t)\Big]$ fuese una función propia del problema planteado asociada al valor propio $\lambda_n = n\pi$, habría de resolver (en particular) la ecuación

$$t^2x_n'' + tx_n' + n\pi x_n = 0\,.$$

Pero

$$\begin{aligned} x_n'(t) &= -\Big(\frac{2n+1}{2t}\Big)\operatorname{sen}\Big[\Big(\frac{2n+1}{2}\Big)\log(t)\Big]\,,\\ x_n''(t) &= \Big(\frac{2n+1}{2t^2}\Big)\operatorname{sen}\Big[\Big(\frac{2n+1}{2}\Big)\log(t)\Big]\\ &\quad - \Big(\frac{2n+1}{2t}\Big)^2\cos\Big[\Big(\frac{2n+1}{2}\Big)\log(t)\Big]\,, \end{aligned}$$

en cuyo caso resulta la relación

$$n\pi = \Big(\frac{2n+1}{2}\Big)^2$$

que es absurda.

(e) FALSA. Es inmediato comprobar que la función

$$u(t, x) = \operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(x)$$

resuelve la ecuación de ondas $u_{tt} - u_{xx} = 0$. Sin embargo, $u(t,x) \equiv 0$ en la frontera de D mientras que, por ejemplo, $u\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1$. El motivo es que no existe un principio del máximo (estándar) para la ecuación de ondas.

■

4. Sea la función $f(x) = \cos(x) - 1 + \frac{2x}{\pi}$ definida en el intervalo $[0, \pi]$.

   (a) Calcula el desarrollo en serie de Fourier de senos de f.

   (b) ¿Converge dicho desarrollo uniformemente en $[0, \pi]$?

   (c) ¿Satisfacen sus coeficientes la identidad de Parseval?

   (d) Demuestra que

$$\cos(x) = 1 - \frac{2x}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{\operatorname{sen}(2kx)}{k(1-4k^2)}\,.$$

Solución : (a) La serie de Fourier de senos de f se define como

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)\,, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx$$

en el intervalo $[0, \pi]$. En nuestro caso se tiene

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Big(\cos(x) - 1 + \frac{2x}{\pi}\Big) \operatorname{sen}(nx)\, dx = \\
&\frac{2}{\pi}\Big[\frac{n}{n^2-1}\Big(1 + (-1)^n\Big) + \frac{1}{n}(\cos(n\pi) - 1) + \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)\Big)\Big] \\
&= -\frac{2}{n\pi}\Big[\frac{n^2}{1-n^2}\Big(1 + (-1)^n\Big) + 1 + \cos(n\pi)\Big] \\
&= -\frac{2}{n(1-n^2)\pi}\Big(1 + (-1)^n\Big) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ -\frac{4}{n(1-n^2)\pi} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases},
\end{aligned}$$

luego

$$f(x) \approx -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2nx)}{n(1-4n^2)}\,.$$

(b) SI, ya que $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ es continua, $f'(x) = \frac{2}{\pi} - \operatorname{sen}(x)$ también lo es (habría bastado con que fuese continua a trozos) y $f(0) = f(\pi) = 0$.

(c) NO. Por un lado se tiene que

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L^2(0,\pi)} &= \int_0^\pi \left(\cos(x) - 1 + \frac{2x}{\pi}\right)^2 dx \\
&= \int_0^\pi \cos(x)^2\,dx - 2\int_0^\pi \cos(x)\,dx + \pi \\
&\quad + \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi x^2\,dx + \frac{4}{\pi}\int_0^\pi x(\cos(x)-1)\,dx \\
&= \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{4\pi}{3} - \frac{8}{\pi} - 2\pi = \frac{5\pi^2 - 48}{6\pi},
\end{aligned}$$

mientras que por otro lado[1]

$$\sum_{n=1}^\infty (\sqrt{\pi}\,b_n)^2 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2(1-4n^2)^2} = \frac{5\pi^2-48}{3\pi}.$$

Lo cual estaba teóricamente justificado de antemano, pues

$$\sum_{n=1}^\infty c_n^2 = \|f_{impar}\|^2_{L^2([-\pi,\pi])} = 2\|f\|^2_{L^2([0,\pi])}$$

donde f_{impar} denota la extensión impar de f al intervalo $[-\pi,\pi]$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son los coeficientes de Fourier del desarrollo trigonométrico de f_{impar} (de entre los cuales los únicos no nulos son $c_n = \sqrt{\pi}\,b_n$, que preceden a los senos del desarrollo).

(d) Como el desarrollo en serie de senos converge uniformemente hacia f podemos escribir

$$\cos(x) - 1 + \frac{2x}{\pi} = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\operatorname{sen}(2nx)}{n(1-4n^2)},$$

luego

$$\cos(x) = 1 - \frac{2x}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\operatorname{sen}(2nx)}{n(1-4n^2)}.$$

■

[1] Obsérvese que el sistema de senos es ortonormal sólo si sus elementos están normalizados a la unidad, es decir, si consideramos el sistema $\left\{\frac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, por lo que los coeficientes de Fourier asociados pasan a ser de la forma $\sqrt{\pi}\,b_n$

5. (a) Resuelve mediante el método de separación de variables el siguiente problema mixto para la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = u, & t > 0,\ x \in [0, \pi], \\ u(0, x) = 3\,\mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(3x), & x \in [0, \pi], \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

(Junio 2002)

(b) Resuelve el siguiente problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0,\ x \in (0, \pi), \\ u(0, x) = f(x), & x \in [0, \pi], \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

donde $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ viene dada por $f(x) = 1 + 5\cos(3x)$. Demostrar además que

$$\lim_{t \to \infty} u(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx$$

uniformemente en $[0, \pi]$ e interpretar físicamente el resultado.

(Junio 2003)

(c) Resuelve el siguiente problema mixto para la ecuación del telégrafo mediante el método de separación de variables:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} + u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0,\ x \in (0, \pi), \\ u(0, x) = \mathrm{sen}(x), & x \in [0, \pi], \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

(Julio 2003)

(d) Encuentra una solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \mathrm{sen}(x), & t \in \mathbb{R},\ x \in (0, \pi), \\ u(0, x) = u_t(0, x) = 0, & x \in [0, \pi], \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(*Sugerencia:* Buscarla de la forma $u(t,x) = v(x) + w(t,x)$, con $v(0) = v(\pi) = 0$ y w una solución de la ecuación de ondas homogénea). ¿Hay más soluciones?

(Junio 2004)

Solución : (a) Consideremos soluciones de la forma $u(t,x) = v(t)w(x)$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación del calor obtenemos

$$v'(t)w(x) - v(t)w''(x) = v(t)w(x) \Leftrightarrow \frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} + 1\,,$$

de donde se concluye que

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = -\lambda = \frac{w''(x)}{w(x)} + 1\,.$$

Al resolver la primera de las ecuaciones,

$$v'(t) + \lambda v(t) = 0\,,$$

se tiene que $v(t) = k\,e^{-\,\lambda t}$ con $k \in \mathbb{R}$. Por otro lado, la segunda ecuación se puede escribir como

$$w''(x) + (1+\lambda)w(x) = 0\,.$$

Estudiemos cómo son sus soluciones. Si $\lambda = -1$ se tiene $w'' = 0$, cuyas soluciones son las rectas

$$w(x) = Ax + B\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Aplicando las condiciones de contorno $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ obtenemos $w(0) = w(\pi) = 0$, luego $A = B = 0$ y la única solución en este caso es $w \equiv 0$. Si consideramos ahora $\lambda < -1$ obtenemos

$$w(x) = A\,e^{(1+\lambda)x} + B\,e^{(-1-\lambda)x}\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Aplicando las condiciones de contorno obtenemos nuevamente $A = B = 0$ y, consecuentemente, la solución trivial. Analizamos finalmente el caso en que $\lambda > -1$. Se tiene

$$w(x) = A\cos(\sqrt{1+\lambda}\,x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{1+\lambda}\,x)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Aplicando las condiciones de contorno obtenemos

$$B\,\mathrm{sen}(\sqrt{1+\lambda}\,\pi) = 0\,,$$

que da lugar a soluciones no triviales si y solamente si $\lambda = n^2 - 1$ con $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, teniendo en cuenta la condición inicial $u(0,x) = 3\,\mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(3x)$ se deduce que la solución al problema de difusión planteado es de la forma

$$u(t,x) = 3\,\mathrm{sen}(x) + e^{-\,8t}\,\mathrm{sen}(3x)\,.$$

(b) Como en el apartado anterior, buscamos soluciones con las variables separadas: $u(t,x) = v(t)w(x)$. Insertando esta expresión en la ecuación del calor obtenemos

$$v'(t)w(x) = v(t)w''(x)\,,$$

de donde se concluye que

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = -\lambda = \frac{w''(x)}{w(x)}\,.$$

Resolvemos en primer lugar

$$v'(t) + \lambda v(t) = 0\,,$$

de donde se obtiene que $v(t) = k\,e^{-\,\lambda t}$ con $k \in \mathbb{R}$. Por otro lado, la solución general de la ecuación para $w(x)$ es

- $w(x) = Ax + B$ con $A, B \in \mathbb{R}$ si $\lambda = 0$,
- $w(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$ con $A, B \in \mathbb{R}$ si $\lambda > 0$,
- $w(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x)$ con $A, B \in \mathbb{R}$ si $\lambda < 0$.

El único caso viable es el tercero, para el que aplicando las condiciones de frontera se tiene $w'(0) = w'(\pi) = 0$, de donde se deduce que ha de ser $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, para que existan soluciones no triviales. Finalmente, teniendo en cuenta la condición inicial $u(0,x) = 1 + 5\cos(3x)$ se concluye que la solución al problema de difusión planteado es de la forma

$$u(t,x) = 1 + 5e^{-\,9t}\cos(3x)\,.$$

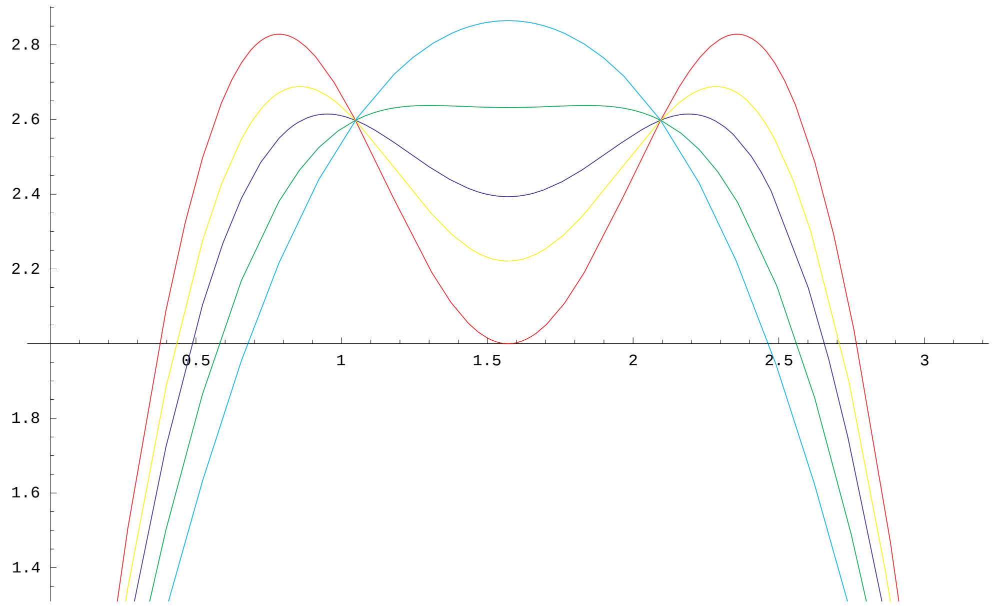


Figura 10.2: Evolución temporal de la solución del Ejercicio 5 (a).

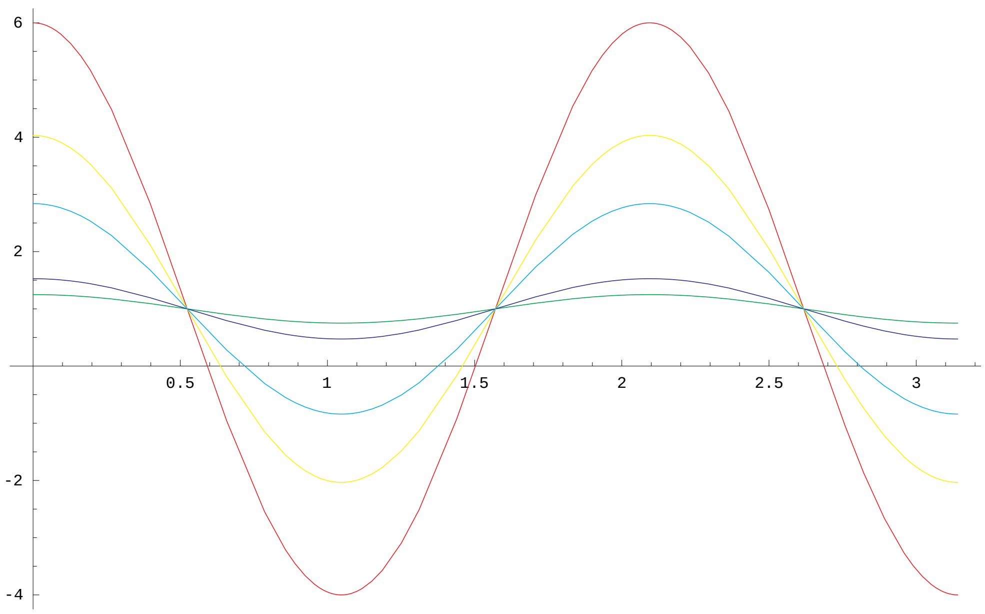


Figura 10.3: Evolución temporal de la solución del Ejercicio 5 (b).

Claramente

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (1 + 5\cos(3x))\,dx\,,$$

lo cual significa que la distribución de temperaturas se estabiliza a tiempo largo en el promedio del dato inicial sobre el intervalo $[0,\pi]$.

(c) Buscamos soluciones de la forma $u(t,x) = v(t)w(x)$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación del telégrafo obtenemos

$$(v''(t) + 2v'(t) + v(t))w(x) = v(t)w''(x)$$
$$\Leftrightarrow \frac{v''(t) + 2v'(t) + v(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)}\,,$$

de donde se concluye que

$$\frac{v''(t) + 2v'(t) + v(t)}{v(t)} = -\lambda = \frac{w''(x)}{w(x)}\,.$$

Separando las ecuaciones para $v(t)$ y $w(x)$ obtenemos

$$v''(t) + 2v'(t) + (1+\lambda)v(t) = 0\,, \quad w''(x) + \lambda w(x) = 0\,.$$

La ecuación para $w(x)$ admite exactamente la misma discusión que la realizada en el apartado anterior, por lo que sólo el caso en que $\lambda = n^2$ con $n \in \mathbb{N}$ genera (las siguientes) soluciones no triviales

$$w(x) = k\,\mathrm{sen}(nx)\,, \quad k \in \mathbb{R}\,.$$

Resolvemos entonces la ecuación

$$v''(t) + 2v'(t) + (1+n^2)v(t) = 0\,,$$

obteniendo la solución general

$$v(t) = e^{-t}(A\cos(nt) + B\,\mathrm{sen}(nt))\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Luego

$$u(t,x) = e^{-t}\,\mathrm{sen}(nx)(c_1\cos(nt) + c_2\,\mathrm{sen}(nt))\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Imponiendo finalmente las condiciones iniciales obtenemos

$$u(t,x) = e^{-t}\,\mathrm{sen}(x)(\cos(t) + \mathrm{sen}(t))\,.$$

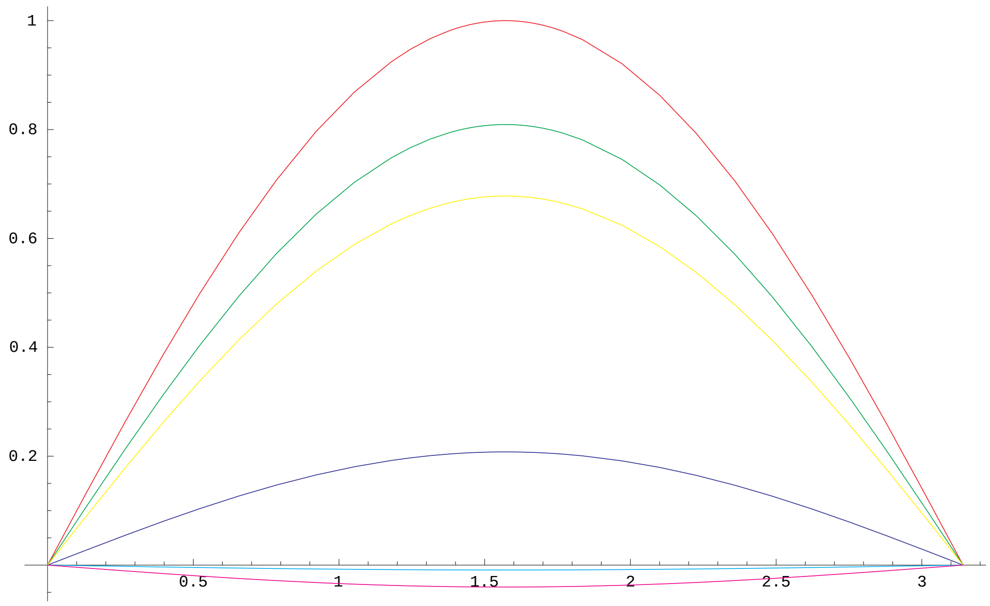


Figura 10.4: Evolución temporal de la solución del Ejercicio 5 (c).

(d) Sustituyendo la expresión sugerida, $u(t,x) = v(x) + w(t,x)$, en la ecuación de ondas obtenemos

$$w_{tt}(t,x) - v''(x) - w_{xx}(t,x) = -v''(x) = \operatorname{sen}(x)\,,$$

donde hemos usado que $w(x)$ resuelve la ecuación de ondas homogénea. Por tanto,

$$v(x) = \operatorname{sen}(x) + Ax + B\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Aplicando ahora las condiciones $v(0) = v(\pi) = 0$ se tiene que $A = B = 0$, por lo que ha de ser $v(x) = \operatorname{sen}(x)$. Por otro lado, aplicando las condiciones de contorno $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ se obtiene $w(t,0) = w(t,\pi) = 0$. Finalmente, haciendo uso de los datos iniciales $u(0,x) = u_t(0,x) = 0$ llegamos a

$$w(0,x) = -\operatorname{sen}(x)\,, \quad w_t(0,x) = 0\,.$$

Sólo falta por determinar la función $w(t,x)$. Pero sabemos que $w(t,x)$ resuelve el siguiente problema mixto para la ecuación de ondas homogénea

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & t \in \mathbb{R},\ x \in (0,\pi), \\ w(0,x) = -\operatorname{sen}(x),\ w_t(0,x) = 0, & x \in [0,\pi], \\ w(t,0) = w(t,\pi) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Buscamos soluciones con variables separadas de la forma $w(t,x) = \alpha(t)\beta(x)$. Entonces

$$\frac{\alpha''(t)}{\alpha(t)} = \frac{\beta''(x)}{\beta(x)} = -\lambda\,.$$

Comenzamos resolviendo el problema de contorno

$$\begin{cases} \beta''(x) + \lambda\beta(x) = 0\,, & x \in (0,\pi) \\ \beta(0) = \beta(\pi) = 0 \end{cases}\,,$$

que únicamente admite soluciones no triviales si $\lambda = n^2$ con $n \in \mathbb{N}$, de lo cual se desprende fácilmente que ha de ser

$$\beta(x) = k\operatorname{sen}(nx)\,, \quad k \in \mathbb{R}\,.$$

Resolvemos a continuación la ecuación en t, obteniendo

$$\alpha(t) = A\cos(nt) + B\operatorname{sen}(nt)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Por tanto

$$w(t,x) = c_1 \cos(nt)\,\mathrm{sen}(nx) + c_2\,\mathrm{sen}(nt)\,\mathrm{sen}(nx)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,,$$

que resuelta junto con las correspondientes condiciones iniciales proporciona

$$w(t,x) = -\cos(t)\,\mathrm{sen}(x)\,.$$

Finalmente, la solución buscada es

$$u(t,x) = v(x) + w(t,x) = (1-\cos(t))\,\mathrm{sen}(x)\,.$$

■

6. Se considera el funcional $\mathcal{F} : C^1([x_0, x_1]) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{F}[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\, dx\,,$$

donde $F \in C^2([x_0, x_1] \times D)$, siendo D un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^2$ y F una función convexa.

(a) Deduce de forma justificada la ecuación de Euler–Lagrange que deben satisfacer los posibles extremos locales de $\mathcal{F}$ que sean de clase $C^2([0,1])$. ¿Cuáles son las condiciones de contorno que han de satisfacer los extremales?

(b) Demuestra que $y \in C^2([0,1])$ es solución del problema de minimización si y sólo si es un extremal.

(c) Calcula el mínimo de

$$\mathcal{F}[y] = \int_1^2 \left\{ 2y^2 + \frac{x^2}{2}(y')^2 - 4y \right\} dx$$

en $C^1([1,2])$.

(Junio 2004)

Solución : (a) Sean $y \in C^2([0,1])$ un extremo local de $\mathcal{F}$ y $\varphi \in C^2([0,1])$ una función test arbitraria. Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, consideremos la perturbación de $y(x)$ determinada por $y_\varepsilon(x) = y(x) + \varepsilon\varphi(x)$. Claramente

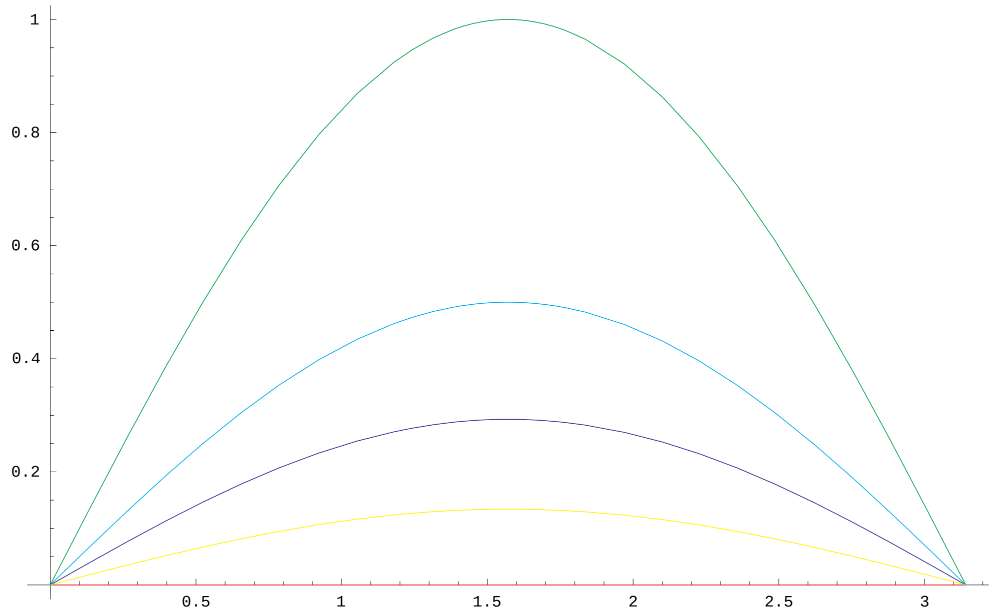


Figura 10.5: Evolución temporal de la solución del Ejercicio 5 (d).

$y_\varepsilon \in C^2([0,1])$. Podemos hacer la deducción (sin pérdida de generalidad) para el caso en que $y \in C^2([0,1])$ es un mínimo local de $\mathcal{F}$, luego $\mathcal{F}[y+\varepsilon\varphi] \geq \mathcal{F}[y]$. Esto equivale a afirmar que la función $\varepsilon \mapsto \mathcal{F}[y+\varepsilon\varphi]$ alcanza un mínimo en $\varepsilon = 0$ y, por tanto, derivando la integral con respecto al parámetro ε obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big(\mathcal{F}[y+\varepsilon\varphi]\Big)(\varepsilon=0) \\
&= \bigg(\int_0^1 \Big\{F_y(x,y(x)+\varepsilon\varphi(x),y'(x)+\varepsilon\varphi'(x))\varphi(x) \\
&\quad +F_p(x,y(x)+\varepsilon\varphi(x),y'(x)+\varepsilon\varphi'(x))\varphi'(x)\Big\}\,dx\bigg)\,(\varepsilon=0) \\
&= \int_0^1 \Big\{F_y(x,y(x),y'(x))\varphi(x) + F_p(x,y(x),y'(x))\varphi'(x)\Big\}\,dx\,.
\end{aligned}$$

Integrando ahora por partes se concluye que

$$\begin{aligned}
0 = \int_0^1 \Big\{F_y(x,y(x),y'(x)) - \frac{d}{dx}\Big(F_p(x,y(x),y'(x))\Big)\Big\}\varphi(x)\,dx \\
+ F_p(1,y(1),y'(1))\varphi(1) - F_p(0,y(0),y'(0))\varphi(0)
\end{aligned} \tag{10.3}$$

para toda función $\varphi \in C^2([0,1])$. En particular, si elegimos $\varphi \in C^2([0,1])$ tal que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ se tiene que

$$\int_0^1 \Big\{F_y(x,y(x),y'(x)) - \frac{d}{dx}\Big(F_p(x,y(x),y'(x))\Big)\Big\}\varphi(x)\,dx = 0\,.$$

Entonces una aplicación directa del lema fundamental del cálculo de variaciones nos permite concluir que

$$F_y - \frac{dF_p}{dx} = 0\,, \tag{10.4}$$

por lo que (10.3) se traduce en

$$F_p(1,y(1),y'(1))\varphi(1) - F_p(0,y(0),y'(0))\varphi(0) = 0 \tag{10.5}$$

para toda $\varphi \in C^2([0,1])$. Finalmente, la arbitrariedad de la función test φ nos permite deducir de (10.5) que las condiciones de contorno han de ser

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(x=0) = \frac{\partial F}{\partial y'}(x=1) = 0\,. \tag{10.6}$$

(b) El funcional $\mathcal{F}$ es convexo por ser la función F convexa. Asimismo $\mathcal{D}$ es convexo por ser el conjunto D convexo. Demostraremos que $y(x)$ es un mínimo con respecto a $\mathcal{D}$ del funcional $\mathcal{F}$ si y solamente si $y(x)$ es un extremal, es decir, resuelve la ecuación de Euler asociada a $\mathcal{F}$. En el apartado anterior se comprobó que cualquier mínimo local de $\mathcal{F}$ con respecto a $\mathcal{D}$ satisface la ecuación de Euler (10.4). Comprobemos a continuación el enunciado recíproco. Supongamos para ello que $y \in \mathcal{D}$ satisface la ecuación de Euler (10.4). Dado cualquier elemento $u \in \mathcal{D}$, podemos considerar una combinación convexa arbitraria $\lambda u + (1-\lambda)u$ con $0 < \lambda < 1$. Entonces, por ser $\mathcal{F}$ convexa se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[y+t(u-y)] &= \mathcal{F}[tu+(1-t)y] \\ &\leq t\mathcal{F}[u]+(1-t)\mathcal{F}[y] = \mathcal{F}[y]+t(\mathcal{F}[u]-\mathcal{F}[y])\,,\end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{\mathcal{F}[y+t(u-y)]-\mathcal{F}[y]}{t} \leq \mathcal{F}[u]-\mathcal{F}[y]\,.$$

Tomando límites en la desigualdad anterior cuando $t \to 0$ se obtiene

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dt}\Big(\mathcal{F}[y+t(u-y)]\Big)(t=0) \\ &= \lim_{t\to 0}\left\{\frac{\mathcal{F}[y+t(u-y)]-\mathcal{F}[y]}{t}\right\} \leq \mathcal{F}[u]-\mathcal{F}[y]\,,\end{aligned}$$

luego $\mathcal{F}[y] \leq \mathcal{F}[u]$ para todo $u \in \mathcal{D}$, con lo que concluye la demostración.

(c) Denotemos

$$F(y,p) = 2y^2 + \frac{x^2p^2}{2} - 4y\,.$$

Entonces la ecuación de Euler–Lagrange asociada al problema variacional planteado es

$$F_y - \frac{dF_p}{dx} = 0$$

con $p = y'$, es decir,

$$0 = (4y-4) - \frac{d}{dx}(x^2y') = 4y-4-2xy'-x^2y''\,. \qquad (10.7)$$

Claramente la función constante $y \equiv 1$ es una solución particular de esta ecuación. Por tanto, para construir la solución general de la misma basta con conocer la solución general de la ecuación homogénea

$x^2y'' + 2xy' - 4y = 0$, que es de Euler. Haciendo el cambio de variable $x = e^z$ podemos reducirla a una con coeficientes constantes, a saber, $u'' + u' - 4u = 0$, cuya solución general es

$$u(z) = Ae^{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}z} + Be^{\frac{-1-\sqrt{17}}{2}z}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Deshaciendo el cambio de variable obtenemos que la solución general de (10.7) es

$$y(x) = Ax^{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} + Bx^{\frac{-1-\sqrt{17}}{2}} + 1, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Aplicando finalmente las condiciones de contorno (10.6) en el intervalo $[1, 2]$, es decir $y'(1) = y'(2) = 0$, concluimos que la única solución de nuestro problema de minimización es $y \equiv 1$.

■

7. Sea $\Omega = [0, T] \times [0, 2\pi]$. Se considera el siguiente funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\cos(2x) \right\} d(x, t)$$

definido en el dominio

$$D = \{u \in C(\Omega) : u(0, x) = u(T, x) = u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0\},$$

donde $t \in [0, T]$ y $x \in [0, 2\pi]$.

(a) Demuestra que si $u \in C^2(\Omega)$, entonces la ecuación de Euler–Lagrange asociada al problema variacional anterior es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \operatorname{sen}(2x).$$

(b) Calcula una solución del problema mixto consistente en la ecuación de ondas de (a) junto con las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

$$u(0, x) = \operatorname{sen}(2x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0, \quad u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0.$$

(*Sugerencia:* Buscarla de la forma $u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \operatorname{sen}(\frac{nx}{2})$).

(c) ¿Es única la solución del problema planteado en (b)?

(Septiembre 2003)

Solución : (a) Denotemos
$$F(u,q,p) = q^2 - p^2 + p\cos(2x)\,.$$
Entonces la ecuación de Euler–Lagrange asociada al problema variacional planteado es
$$F_u - \frac{dF_q}{dt} - \frac{dF_p}{dt} = 0\,,$$
donde $q = \frac{\partial u}{\partial t}$ y $p = \frac{\partial u}{\partial x}$. Obtenemos entonces
$$\begin{aligned} 0 = -2\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big) - \frac{d}{dx}\Big(-2\frac{\partial u}{\partial x} + \cos(2x)\Big) \\ = -2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\mathrm{sen}(2x)\,, \end{aligned}$$
que no es más que la ecuación del enunciado (a).

(b) Si buscamos una solución del problema planteado en (b) de la forma $u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\,\mathrm{sen}(\frac{nx}{2})$ ha de satisfacerse (formalmente)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(u_n''(t) + \frac{n^2}{4}u_n(t)\Big)\,\mathrm{sen}\Big(\frac{nx}{2}\Big) = \mathrm{sen}(2x)$$
junto con las condiciones iniciales y de contorno, que aportan las relaciones adicionales
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(0)\,\mathrm{sen}\Big(\frac{nx}{2}\Big) = \mathrm{sen}(2x)\,,\quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(0)\,\mathrm{sen}\Big(\frac{nx}{2}\Big) = 0\,.$$
De este modo hemos de resolver los problemas
$$\begin{aligned} &u_4''(t) + 4u_4(t) = 1\,,\quad u_4(0) = 1\,,\quad u_4'(0) = 0\,,\\ &\qquad u_n''(t) + \frac{n^2}{4}u_n(t) = 0\,,\quad u_n(0) = 0\,,\quad u_n'(0) = 0\,,\quad n \neq 4\,, \end{aligned}$$
de donde se obtiene
$$u_4(t) = \frac{3\cos(2t) + 1}{4}\,,\quad u_n(t) \equiv 0 \ \text{ si } n \neq 4\,.$$

Luego
$$u(t,x) = \left(\frac{3\cos(2t)+1}{4}\right)\operatorname{sen}(2x)$$
resuelve el problema planteado en (b).

(c) SI. En efecto, supongamos que $u_1(t,x)$ y $u_2(t,x)$ resuelven ambas el problema planteado en (b). Entonces la función

$$v(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$$

satisface el siguiente problema homogéneo:

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0 \\ v(0,x) = v_t(0,x) = 0 \\ v(t,0) = v(t,2\pi) = 0 \end{cases} .$$

La función de energía asociada a este problema es

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(v_t^2 + v_x^2\right) dx\,.$$

Claramente $E'(t) = 0$ como se desprende de una sencilla integración por partes, luego

$$E(t) \equiv E(0) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(v_t(0,x)^2 + v_x(0,x)^2\right) dx = 0$$

para todo $t \geq 0$ (ya que $v_t(0,x) = 0 = v_x(0,x)$). Por consiguiente se ha de cumplir $v_t \equiv 0 \equiv v_x$, de donde se desprende que la función $v(t,x)$ es constante. Como $v(t,0) = 0$ ha de ser $v \equiv 0$, luego $u_1 \equiv u_2$.

■

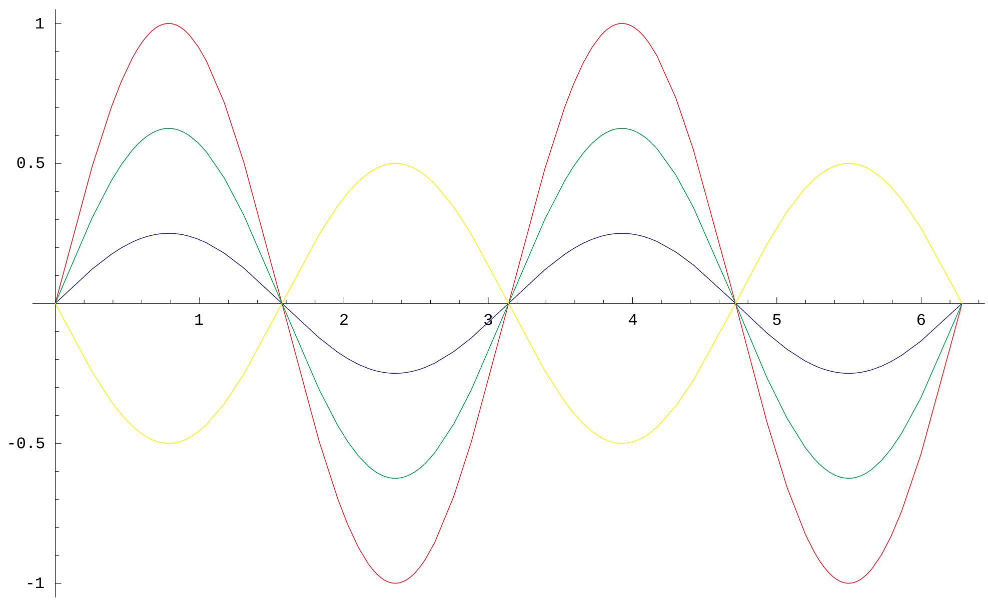


Figura 10.6: Evolución temporal de la solución del Ejercicio 7 (b).