Derivación numérica

Previo a la resolución de ecuaciones diferenciales en forma numérica es importante considerar como paso previo la derivación numérica.

Por el momento recordemos la definición de la derivada para una función $y = f(x)$
$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, de este modo, si tenemos $f(x) = x^2 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2x$

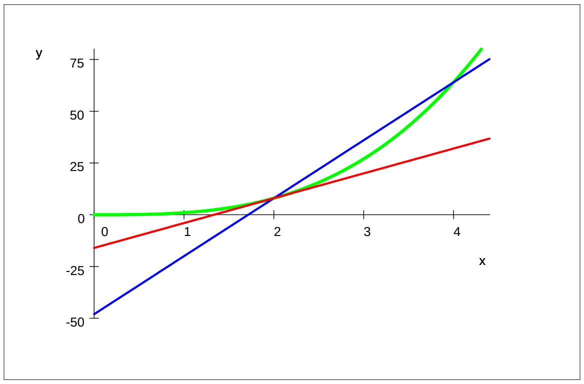
Sin embargo, esta no es la única forma de visualizar la obtención de la primera derivada, así por ejemplo.... $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} = 2x$, es otra manera de resolver este problema.

Si consideramos el promedio... $f'(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right)$

$$f'(x) = \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\right) = 2x$$

Solamente para recordar y como ejercicio....

Hallar la primera derivada de $g(x) = x^3$, la línea verde.



$r(x) = 28x - 48$, la línea azul

$p(x) = 12x - 16$, la línea roja

	$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = 3x^2$	$\lim_{h\to 0} \frac{x^3-(x-h)^3}{h} = 3x^2$	$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-(x-h)^3}{2h} = 3x^2$

Si se desea la derivada en un punto específico, por ejemplo , en $x = 2$, se tendría:

	$\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-2^3}{h} = 12$	$\lim_{h\to 0} \frac{2^3-(2-h)^3}{h} = 12$	$\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-(2-h)^3}{2h} = 12$

En forma numérica...se calculan solamente derivadas en algún punto en particular, sea $x = 2$ dicho punto elegimos un valor suficientemente pequeño de h, por ejemplo $h = 0.1$

	$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$	$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$
$h = 0.1$	$\frac{(2+0.1)^3-2^3}{0.1} = 12.61$	$\frac{2^3-(2-0.1)^3}{0.1} = 11.41$	$\frac{(2+0.1)^3-(2-0.1)^3}{2\cdot 0.1} = 12.01$
$h = 0.01$	$\frac{(2+0.01)^3-2^3}{0.01} = 12.0601$	$\frac{2^3-(2-0.01)^3}{0.01} = 11.9401$	$\frac{(2+0.01)^3-(2-0.01)^3}{2\cdot 0.01} = 12.0001$
$h = 0.001$	$\frac{(2+0.001)^3-2^3}{0.001} = 12.006001$	$\frac{2^3-(2-0.001)^3}{0.01} = 1.1994001$	$\frac{(2+0.001)^3-(2-0.001)^3}{2\cdot 0.001} = 12.000001$

Fórmulas de diferencias centradas

" Si la función f(x) puede evaluarse en puntos que están a ambos lados de x, entonces la mejor fórmula que involucra dos puntos es la que utiliza abscisas situadas simétricamente a izquierda y derecha de x."

Fórmula centrada de orden $0(h^2)$

$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$, y se cumple que: $f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + E_{trunc}(f,h)$

siendo, el error de truncamiento: $E_{trunc}(f,h) = -\frac{h^2 f^{(3)}(c)}{6} = 0(h^2)$

Se entrega a continuación un sencillo programa escrito PSeINT, para practicar,en la línea $funcion1 = x\hat{}2 + 3 * x$ se puede cambiar por otra función de modo de ejecutar otras prácticas con el programa y usarlo además como un programa utilitario y nó solamente como medio de aprendizaje.

Así por ejemplo funcion$1 = x/(x\hat{}3 - 4)$, nos permitiría calcular la derivada de la función $\frac{x}{x^3-4}$, en algún punto de su dominio, en forma numérica.

Nota bene: "p" es el valor obtenido analíticamente, si es que se puede obtener de este modo

....

PROGRAMA EN PSeINT

....

```
SubProceso funcion1 = f ( x )

    funcion1=x^2+3*x
Fin SubProceso
Proceso derivación01

    k=0

    Escribir "Déme el número para el cual desea la derivada:"

    Leer a
    k=0
    Repetir
        k=k+1
        h=k/(10^k)
        g1=(f(a+h)-f(a))/h
        g2=(f(a)-f(a-h))/h
        g3=(g1+g2)/2

        Escribir k," ",g1," ",g2," ",g3

            Hasta Que k=16

    p1=100*abs(p-g1)/9
    p2=100*abs(p-g2)/9
    p3=100*abs(p-g3)/9

    Escribir "PORCENTAJES DE ERROR"
```

Escribir p1
Escribir p2
Escribir p3

FinProceso

Ejercicio: Si aumenta el número de iteraciones a 20 o más, observe lo que ocurre. ¿Puede explicar por qué ocurre esto?

....

Se demostrará la expresión: $f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + E_{trunc}(f,h)$

A partir de la serie de Taylor de orden dos, alrededor de x, para $f(x+h)$ y $f(x-h)$

$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(c1)}{3!}h^3 + \ldots\ldots$ y

$f(x-h) = f(x) - \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 - \frac{f'''(c2)}{3!}h^3 + \ldots\ldots$ al restar miembro a miembro...

$f(x+h) - f(x-h) = 2\frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f'''(c1)+f'''(c2)}{3!}h^3 \rightarrow$

$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{f'''(c1)+f'''(c2)}{3!\cdot 2}h^2 \rightarrow \quad f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{f'''(c1)+f'''(c2)}{3!\cdot 2}h^2$

en donde , al aplicar el teorema del valor medio (ya que es continua la función $f^{(3)}$)

se puede realizar el reemplazo siguiente: $f^{(3)}(c) = \frac{f'''(c1)+f'''(c2)}{2}$

y tendríamos finalmente:.. $f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{f^{(3)}(c)}{3!}h^2$

fórmula de diferencia centrada...... $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

error de truncamiento.............$O(h^2) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}h^2$, que indica el orden de truncamiento(proporcional a h^2)

Obtención de $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ a partir de polinomio interpolante de Lagrange:

i	x	$f(x)$
0	x_0	$f(x_0)$
1	x_1	$f(x_1)$

el polinomio estaría dado por: $P(x) = f(x_0)\cdot\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\cdot\frac{x-x_0}{x_1-x_0} + error$

al derivar $P'(x) = f(x_1)\cdot\frac{1}{x_1-x_0} + f(x_0)\cdot\frac{1}{x_0-x_1} + error'$

de donde $x_1 = x_0 + h \rightarrow f'(x) = \frac{f(x_0+h)}{h} + \frac{f(x_0)}{-h} + error'$

$f'(x) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + error'$

en donde: $error = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}\cdot f''(\xi(x))$ para alguna $\xi(x)$ en $[a,b]$

y $error' = \frac{2(x-x_0)-h}{2}\cdot D_x(f''(\xi(x)))$

si $x = x_0$, entonces $error' = 0$, y la fórm ula se simplifica como sigue:

$$f'(x) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \frac{h}{2}\cdot f''(\xi),$$ fórmula de la diferencia progresiva

y $f'(x) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, fórmula de la diferencia regresiva

en forma análoga se puede deducir la fórmulas siguientes:

fórmula de tres puntos:

1) $f'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3fx_0 + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)) + \frac{h^2}{3} \cdot f^{(3)}(\xi_0)$
con ξ_0 entre x_0 y $x_0 + 2h$
2) $f'(x_0) = \frac{1}{2h}(f(x_0+h) - f(x_0-h)) - \frac{h^2}{6} \cdot f^{(3)}(\xi_1)$
con ξ_1 entre $x_0 - h$ y $x_0 + h$

Fórmula de cinco puntos:..
$f'(x_0) = \frac{1}{12h}(f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)) - \frac{h^4}{30} \cdot f^{(5)}(\xi)$

con ξ entre $x_0 - 2h$ y $x_0 + 2h$

Ejercicios: (Análisis Numérico / Burden-Faires)

1.- Use las fórmulas de diferencia progresiva y de diferencia regresiva para determinar las aproximaciones con que se completarán las siguientes tablas.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.5	0.4794	
0.6	0.5646	
0.7	0.6442	

3.- Use las fórmulas de tres puntos más conveniente para determinar las aproximaciones con que se completarán las siguientes tablas.

x	$f(x)$	$f'(x)$
1.1	9.025013	
1.2	11.02318	
1.3	13.46374	
1.4	16.44465	

x	$f(x)$	$f'(x)$
8.1	16.94410	
8.3	17.56492	
8.5	18.19056	
8.7	18.82091	

x	$f(x)$	$f'(x)$
2.9	−4.827866	
3.0	−4.240058	
3.1	−3.496909	
3.2	−2.596792	

x	$f(x)$	$f'(x)$
2.0	3.6887983	
2.1	3.6905701	
2.2	3.6688192	
2.3	3.6245909	

(Métodos numéricos con Matlab / Mathews-Fink)

4.- Usando la fórmula de Taylor para f(x+h),f(x-h),f(x+2h),f(x-2h), deduzca la fórmula de diferencias centradas: $f^{(3)}(x) \approx \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+2f(x-h)-f(x-2h)}{2h^3}$

5.- Usando la fórmula de Taylor para f(x+h),f(x-h),f(x+2h),f(x-2h), deduzca la fórmula de diferencias centradas: $f^{(4)}(x) \approx \frac{f(x+2h)-4f(x+h)+6f(x)-4f(x-h)-f(x-2h)}{h^4}$

6.- Utilice las aproximaciones $f'(x+\frac{h}{2}) \approx \frac{f_1-f_0}{h}$ y $f'(x-\frac{h}{2}) \approx \frac{f_0-f_{-1}}{h}$ para deducir la fórmula: $f^{(2)}(x) \approx \frac{f_1-2f_0+f_{-1}}{h^2}$

7.- Use las fórmulas siguientes $P(t) = a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)(t-t_1)$
$P'(t) = a_1 + a_2((t-t_0)+(t-t_1))$
$P'(t_0) = a_1 + a_2(t_0-t_1) \approx f'(t_0)$
con $a_2 = \frac{1}{t_2-t_0}\left(\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} - \frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}\right)$

para deducir una fórmula de aproximación a $f'(x)$ que utilice las abscisas $t_0 = x, t_1 = x+h; t_2 = x+2h$