Integración numérica:

Cálculo aproximado de integrales definidas:
Ejercicios introductorios:

1.- Resuelva analíticamente las siguientes integrales e interprete gráficamente:

1.1 $\int_1^4 x^2 dx$ 1.2 $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$ 1.3 $\int_0^5 e^x dx$

2.- Calcule el área de las siguientes figuras:

3.- Calcule el área bajo la curva y=$\sqrt{x}$ entre x=1 y x=4 , considerando una sub-división del intervalo $[1,4]$ en 1-2-3-4 sub-intervalos.

4.- Realizar análogo trabajo para el área bajo las curvas $y = e^x$, $y =$x^2 entre $x = 1$ y $x = 4$ en forma similar al ejercicio anterior.

Nota bene : Es conveniente recordar la fórmula del área de un trapecio:
$A = \frac{(a+b)h}{2}$, en donde "h" es la altura y "a" y "b" son las bases.

Fórmula de los rectángulos:

Si la función $y = f(x)$ es continua y derivables un número suficiente de veces en un intervalo cerrado $[a,b]$ y $h = \frac{b-a}{n}$; $x_i = a + ih$ (con $i = 0,1,2,3\ldots n$)

y considerando $y_i = f(x_i)$, se tiene :

Aproximación por defecto:

$\int_a^b f(x)dx = h(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{n-1}) + R_n$; en donde $R_n = \frac{(b-a)h}{2} f'(\in)$

en donde $a \leq \in \leq b$, $x_0 = a$, $y_0 = f(a)$

Que la podemos denominar "Fórmula de los rectángulos por defecto"

Visualización gráfica de la integral: $\int_2^4 x^2 dx$; utilizando la fórmula de los rectángulos con $n = 4$, por defecto: $h = \frac{4-2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$

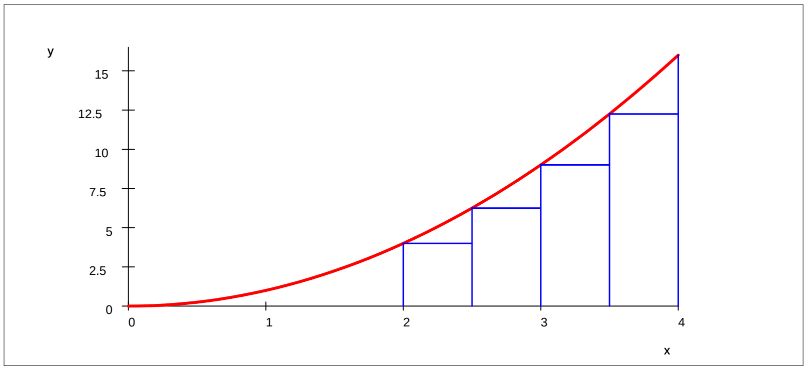
$$\begin{pmatrix} f(2) \\ f(2.5) \\ f(3) \\ f(3.5) \\ f(4) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6.25 \\ 9 \\ 12.25 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$\int_2^4 x^2 dx \approx 0.5(4 + 6.25 + 9 + 12.25) = 15.75$

podemos comparar con el valor exacto: $\int_2^4 x^2 dx = \frac{56}{3} = 18.667$

indudablemente que si deseamos una mayor exactitud debemos trabajar con un valor de n más grande.

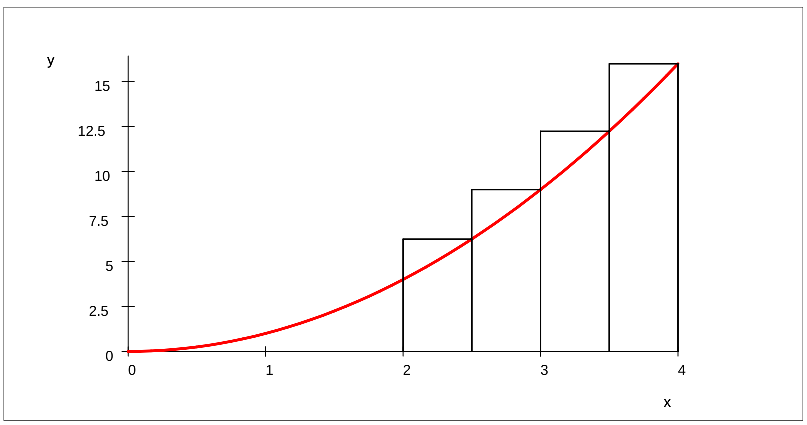
(¿por qué la estamos llamando aproximación por defecto?)



Aproximación por exceso:

Análogamente podemos establecer una fórmula de los rectángulos por exceso

$\int_a^b f(x)dx = h(y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{n-1} + y_n) + R_n$; en donde $R_n = \frac{(b-a)h}{2} f'(\in)$
en donde $a \leq \in \leq b$, $x_0 = a$, $y_1 = f(x_1)$, $x_n = b,\ y_n = f(x_n)$
Al trabajar con la fórmula por exceso, se tendrá:



$\int_2^4 x^2 dx \approx 0.5(6.25 + 9 + 12.25 + 16) = 21.75$

Si calculamos el promedio de los dos valores obtenidos:
$\frac{15.75 + 21.75}{2} = 18.75$
se puede observar que el valor promedio 18.75 está mucho más cerca del valor exacto 18.667

Resumiendo:

valor obtenido por defecto	15. 75
valor obtenido por exceso	21. 75
valor promedio	18. 75
valor exacto	18. 667

El valor promedio de los valores obtenidos por defecto y por exceso lo podemos estudiar en forma más general a partir de las fórmulas...

por defecto : $\int_a^b f(x)dx \approx h(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{n-1})$

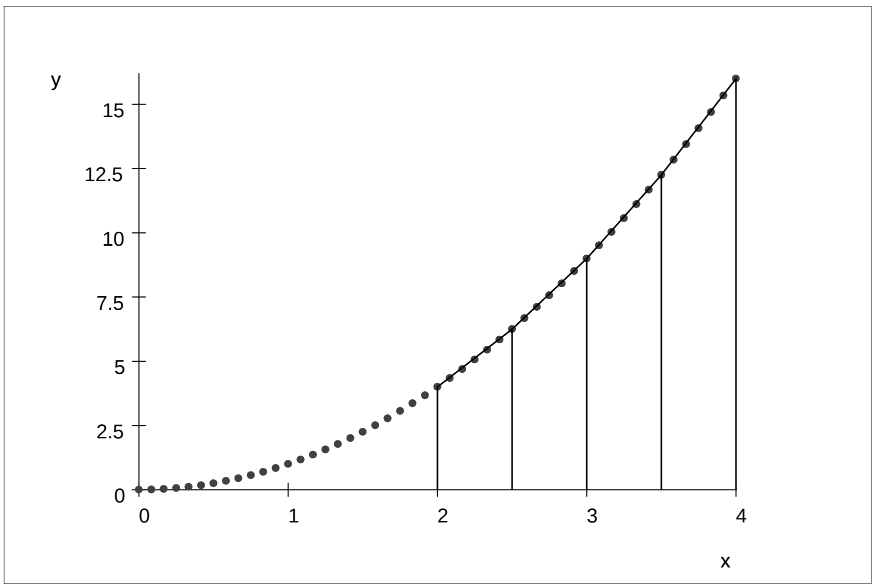
por exceso: $\int_a^b f(x)dx \approx h(y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{n-1} + y_n)$

si sumamos ambas ecuaciones:

$2\int_a^b f(x)dx \approx h(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{n-1}) + h(y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{n-1} + y_n)$

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots\ldots + 2y_{n-1} + y_n)$

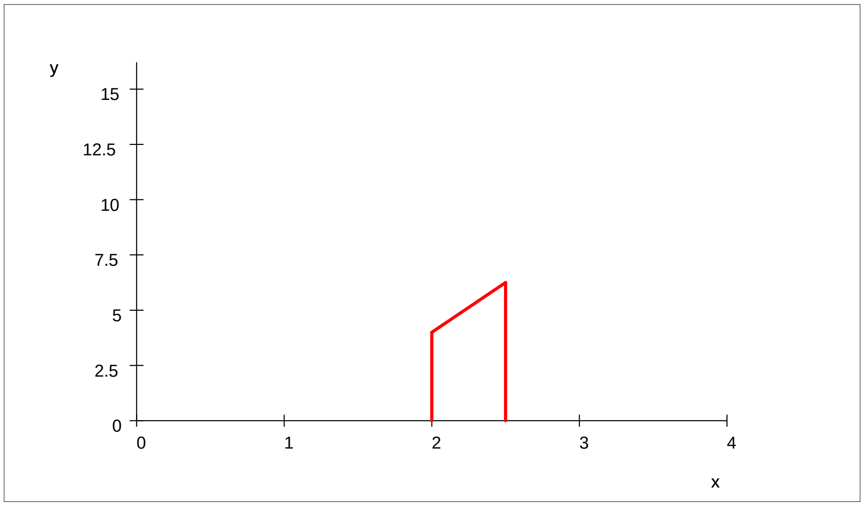
obtenemos la fórmula conocida bajo el nombre de los Trapecios. La cual se puede visualizar en la siguiente gráfica para el ejerccicio recién realizado:



Es conveniente recordar la fórmula del área de un trapecio: A$=\frac{(a+b)h}{2}$

en donde "h" es la altura y "a" y "b" son las bases.

En el caso que nos ocupa los trapecios tienen la forma:



Siendo el área del primer trapecio :

$\frac{h}{2}(y_0 + y_1)$ o equivalentemente: $\frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$

base inferior: $f(x_1)$	f(2.5)=6.25
base superior: $f(x_0)$	f(2)=4
altura : h	0,5
área	$A_1 = \frac{(4+6.25) \times 0.5}{2} = 2.5625$

Para este caso se tiene entonces:

$$A = \int_2^4 x^2 dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \frac{h}{2}(y_2 + y_3) + \frac{h}{2}(y_3 + y_4)$$

$$A \approx \frac{.5}{2}(4 + 6.25) + \frac{.5}{2}(6.25 + 9) + \frac{.5}{2}(9 + 12.25) + \frac{.5}{2}(12.25 + 16) = 18.75$$

La conocida y sencilla regla trapezoidal puede considerarse como una adaptación de la definición de la integral definida como una suma.

Para evaluar $\int_a^b f(x)dx$, el uintervalo $[a,b]$ se sub-divide en n-intervalos, el área bajo la curva en cada sub-intervalo es aproximada por el trapezoide formado al sustituír la curva por su secante trazada entre los puntos extremos de la curva. Luego la integral es aproximada por la suma de todas las áreas trapezoidales.

$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \times h$; siendo $h = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$

y para $[a,b]$ sub-dividido en n-intervalos iguales de tamaño "h" se tendrá:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots\ldots + 2y_{n-1} + y_n)$$

La fórmula anterior es de utilidad en el cálculo de la integral de una función obtenida experimentalmente, por ejemplo:

Se desea integrar la función sobre el intervalo que va de $x = 1,8$ a $x = 3,4$

x	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3	3.2	3.4	3.6	3.8
f(x)	4.953	6.050	7.389	9.025	11.023	13.464	16.445	20.086	24.533	29.964	36.598	44.701

Así la regla trapezoidal considera: $\int_{1.8}^{3.4} f(x)dx \approx \frac{0.2}{2}\{\ldots\ldots\ldots\ldots\} = 23.9944$

Los datos de la tabla fueron obtenidos para $f(x) = e^x$, de modo que un valor más cercano es $\int_{1.8}^{3.4} f(x)dx \approx 23.9144$ (valor exacto = $e^{3.4} - e^{1.8}$)

Ejercicios:

1.- Evaluar la integral de e^x entre x=0 y x=1 con un valor de h suficientemente pequeño para garantizar exactitud de cinco decimales. ¿Cuál es el tamaño máximo de h?

2.- Evaluar la integral de la función dada por la tabla adjunta,entre x=0,2 y x= 1,2 . Esboce una gráfica para visualizar el procedimiento.

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
f(x)	2.6	3.2	3.8	4.4	5.0	5.6	6.2

3.- Evaluar la integral de la función dada por la tabla adjunta,entre x=0,4 y x= 2.0 . Esboce una gráfica para visualizar el procedimiento.

x	0.4	0.6	0.9	1.3	1.8	2.0
f(x)	0.8	1.8	4.05	8.45	16.2	20

(¡ Cuidado,aquí "h" no es constante!)

4.- Calcular $\int_1^2 x^3 dx$, en forma analítica y luego evalúe numéricamente(por regla trapezoidal) dividiendo el intervalo $[1,2]$ en cinco sub-intervalos y luego en diez. ¿Cómo mejora el resultado?

Reglas de Simpson:

Regla $\frac{1}{3}$ de Simpson:

A partir de la ecuación $\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$

se construye con ella una regla compuesta que se aplica a una sub-división del intervalo de integración en n-paneles(sub-intervalos)(n debe ser par)

En general, para el intervalo $[a,b]$, es válida la aproximación:

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots f(b)]$

Ejercicio: Aplicar la regla $\frac{1}{3}$ de Simpson para evaluar la integral $\int_1^4 x^2 dx$

utilizando 2,4,6 sub- divisiones. $\int_1^4 x^2 dx = 21,$ resultado exacto

para $n = 2$: $h = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$

$\int_1^4 x^2 dx \approx \frac{1.5}{3}(f(1) + 4f(2.5) + f(4)) = 21.0$

No tiene sentido seguir calculando para n = 4,6.. Ocurre que para las funciones polinómicas ($f(x) = x^2$, lo es...)el grado de exactitud de esta fórmula aumenta grandemente en relación a su aplicación a funciones que no son polinómicas.)

Así por ejemplo: $\int_1^4 \ln x dx = 4\ln 4 - 3 = 2.5452$ (con el SWP.)

para $n = 2$: $h = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$

$\int_1^4 \ln x dx \approx \frac{1.5}{3}(f(1) + 4f(2.5) + f(4)) = 0.5\ln 4 + 1.8326 = 2.5257$

$f(x) = \ln x$

para $n = 4$: $h = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$

$\int_1^4 \ln x dx \approx \frac{0.75}{3}(f(1) + 4f(1.75) + 2f(2.5) + 4f(3.25) + f(4))$

$\int_1^4 \ln x dx \approx 0.25\ln 4 + 2.1964 = 2.5430$

para $n = 6$: $h = \frac{4-1}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$

$\int_1^4 \ln x dx \approx \frac{0.5}{3}(f(1) + 4f(1.5) + 2f(2) + 4f(2.5) + 2f(3) + 4f(3.5) + f(4))$

$\int_1^4 \ln x dx \approx 2.5446$

Como se puede observar, debemos aún utilizar una mayor cantidad de sub-intervalos.

Tarea : Probar con $n = 8$ sub-intervalos.

¿Qué se esconde tras la fórmula anteriormente empleada?

El logro de una mayor aproximación se obtiene uniendo las ordenadas sucesivas con arcos de parábola y sumando las áreas bajo dichos arcos.

Ver deducción en el apéndice

Ejercicio: Aplicar la regla $\frac{1}{3}$ de Simpson para evaluar la integral $\int_{0,2}^{1,5} e^{-x^2} dx$

utilizando 2,4,6 sub- divisiones hasta que el valor converja a cinco cifras decimales.

Observación(respuesta correcta hasta cinco cifras decimales:0,65882) No intente resolver esta integral analíticamente porque no va a poder...!

n	estimación
2	0.65181
4	0.65860
6	0.65878
8	0.65881
10	0.65882

Regla $\frac{3}{8}$de Simpson: Esta regla es consecuencia de ajustar cuatro puntos con el arco de una curva de tercer grado(una cúbica) El resultado viene a ser:

$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3}{8}h[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$ que se aplica a conjuntos de paneles triples. Y más en general, en un intervalo $[a,b]$

$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3}{8}h[f(a) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + 2f(x_6) +..f(b)]$

Se ha omitido el error que corresponde a las fórmulas anteriores.

Ejercicio: Aplicar la regla de $\frac{3}{8}$ de Simpson a la función $f(x) = e^{-x^2}$ integrando desde x=0.2 hasta x=1.5. Comparar los resultados con 3,6 y 9 paneles y las soluciones con la aplicaciónde la regla de $\frac{1}{3}$ de Simpson.

n	estimación
3	0.65593
6	0.65872
9	0.65881
12	0.65882

Resumen de fórmulas para integración numérica:

Regla	fórmula de cálculo y error	número de paneles
Trapezoidal	$\frac{h}{2}[f_1 + 2f_2 + 2f_3 +\ldots+f_{n+1}] - \frac{b-a}{12}h^2f''(\in)$	par o impar
$\frac{1}{3}$ de Simpson	$\frac{h}{3}[f_1 + 4f_2 + 2f_3 +\ldots+f_{n+1}] - \frac{b-a}{180}h^4f^{(4)}(\in)$	2,4,6,..
$\frac{3}{8}$ de Simpson	$\frac{3h}{8}[f_1 + 3f_2 + 3f_3 + 2f_4 +\ldots+f_{n+1}] - \frac{b-a}{80}h^4f^{(4)}(\in)$	3,6,9,12,...

Notabene:

1.- el último término es el error cometido.

2.- $a \leq \in \leq b$

Guía de ejercicios:

1.- La tabla siguiente contiene valores para f(x).Integre entre x=1.0 y x=1.8 , usando la regla trapezoidal con h=0,1; h=0,2; h=0,4

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
f(x)	1.543	1.669	1.811	1.971	2.151	2.352	2.577	2.828	3.107

2.- Encuentre la integral de f(x) entre x=0 y x=2 para

x	0.00	0.12	0.53	0.87	1.08	1.43	2.00
f(x)	1.0000	0.8869	.5886	.4190	.3396	.2393	.1353

3.- Repetir ejercicio 1, usando la regla $\frac{1}{3}$ de Simpson.

serbachi@hotmail.com

4.- Calcular la integral $\int_1^4 x^3 dx$ en forma analítica y numérica usando la regla $\frac{3}{8}$ deSimpson para 3,6 intervalos.

5.- Resuelva la integral $\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$ mediante la regla trapezoidal con n=1,2,3,4 paneles.Calcule los errores relativos porcentuales con respecto al valor "correcto" con cuatro decimales: 4.8333. (resuelva analíticamente)

Discusión acerca de los errores.

Error global al aplicar la regla del trapecio:

error local: $\frac{b-a}{12} h^2 f''(\in)$, este error corresponde a un solo paso, como normalmente,la fórmula trapezoidal se aplica a una serie de sub-intervalos para obtener un mejor valor de la integral sobre un gran intervalo, desde x=a hasta x=b, se tiene interés en el error total (o global), que viene dado por: $\frac{-1}{12} h^3 [f''(\in_1) + f''(\in_2) + \ldots + f''(\in_n)]$

Si se supone que $f''(x)$ es continua en $]a,b[$,entonces hay algún valor de "x" en dicho intervalo, por ejemplo x=$\in$, donde el valor de la suma es igual a $nf''(\in)$ y como nh=b-a, el error global queda

$$\frac{-1}{12} h^3 n f''(\in) = \frac{-(b-a)}{12} h^2 f''(\in)$$

Cuando se conoce la función f(x) ,la ecuación anterior permite estimar el error de la integración numérica por medio dela regla trapezoidal.

Al aplicar esta ecuación, el error se abarca al calcular con los valores máximo y mínimo de $f''(x)$ sobre el intervalo $[a,b]$

Para un ejemplo anterior: $\int_{1.8}^{3.4} e^x dx = 23.9944$

con $h = 0.2$ y $n = 8$

error= $\frac{-1}{12} h^3 n f''(\in)$,en el intervalo 1.8≤$\in$≤ 3.4

error= $\frac{-1}{12} 0.2^3 \cdot 8 \cdot \begin{pmatrix} e^{1.8} \\ e^{3.4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.2265 \times 10^{-2} \\ -0.15981 \end{pmatrix}$

y de manera alternativa...

error= $\frac{-1}{12} 0.2^2 \cdot (3.4 - 1.8) \cdot \begin{pmatrix} e^{1.8} \\ e^{3.4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.2265 \times 10^{-2} \\ -0.15981 \end{pmatrix}$

el error real es -0.080

$\int_{1.8}^{3.4} e^x dx = 23.914$(con el SWP.)

$23.914 - 23.9944 = -0.0804$

Observación: si no se hubiera conocido la función, para la cual se tienen los valores tabulados, la funciónse podría haber determinado con el procedimiento de las segundas diferencias, cuestión a tratar en el tema "Derivación Numérica"

Continuación guía de ejercicios:

6.- Use medios analíticos para calcular: $\int_0^3 (1 - e^{-x}) dx$ y compare los resultados obtenidos con las reglas trapezoidal y de Simpson(ambas)

7.- Evalúe la integral de los siguientes datos tabulados

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
f(x)	1	7	4	3	5	2

8.- Idem

x	-3	-1	1	3	5	7	9	11
f(x)	1	-4	-9	2	4	2	6	-3

Usando distintas reglas según convenga.

Aplicando cualquier procedimiento de cálculo numérico calcular la siguientes integrales(si es posible la integración por método analítico ,obtenga resultado también a través de dicho procedimiento.) En algunos casos se dá la solución exacta después del signo igual

9.- $\int_0^{2\pi} x\sin x dx = -2\pi$

10.- $\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx = 1 - \ln 2 = 0.30685$

11.- $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$

12.- $\int_0^{0.5\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2 x}\, dx$

13.- $\int_1^9 \sqrt{x}\, dx$

14.- $\int_0^{\pi} \sqrt{3 + \cos x}\, dx$

15.- $\int_0^1 \frac{\sin x dx}{x}$

16.- $\int_0^1 \frac{x dx}{\ln(1+x)}$

17.- Tomando n=10 , calcular la constante de Catalán: $G = \int_0^1 \frac{\arctan x dx}{x}$

18.- Sirviéndose de la fórmula $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, calcular el número π ,con una exactitud de hasta 10^{-5}

19.- Calcular $\int_0^1 e^{x^2} dx$ con una exactitud de hasta 0,001

20.- Calcular $\int_0^1 (e^x - 1)\ln(\frac{1}{x})dx$ con una exactitud de hasta 0,001

21.- Calcular con una exactitud de hasta 0,001 la ntegral de probabilidad $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

22.- Hallar aproximadamente la longitud de la elipse cuyos semi-ejes son a=10 ; b=6.

23.- Consttruír por puntos la gráfica de la función $y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

en el intervalo $0 \le x \le 2\pi$, tomando $h = \frac{\pi}{3}$

Resultados:

8	9	10	11	12	13
-6.2832	0.69315	0.8366	1.4675	17.333	5.4024

14	15	16	17	18	19	20	21	22
1.37039	0.2288	0.915966	3.14159	1.463	0.3179	0.8862	51.04	

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42