Matemáticas Avanzadas para Ingeniería: Series de Fourier

Departamento de Matemáticas

MA3002

Intro

Las Series de trigonométricas de Fourier, o simplemente series de Fourier fueron desarrolladas por el matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier (21 de marzo de 1768 en Auxerre - 16 de mayo de 1830 en París).

La idea que subyace en las series de Fourier es la descomposición de una señal periódica en términos de señales periódicas básicas (senos y cosenos) cuyas frecuencias son múltiplos de la señal original.

La idea de descomposición es un proceso fundamental en el area científica en general: la descomposición permite el análisis de las propiedades y la síntesis de los objetos o fenómenos.

Serie de Fourier

La serie de Fourier de una función periódica $f(x)$ de período T, también conocida como señal, definida en un intervalo de longitud T está dada por:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n\,\omega_0\,x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(n\,\omega_0\,x\right)\right)}$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \omega_0 & = & \frac{2\,\pi}{T} \text{ la frecuencia fundamental} \\ a_0 & = & \dfrac{1}{T/2} \displaystyle\int_T f(x)\,dx \\ a_n & = & \dfrac{1}{T/2} \displaystyle\int_T f(x) \cos\left(n\,\omega_0\,x\right)\,dx \\ b_n & = & \dfrac{1}{T/2} \displaystyle\int_T f(x) \operatorname{sen}\left(n\,\omega_0\,x\right)\,dx \end{array}$$

Sumas parciales

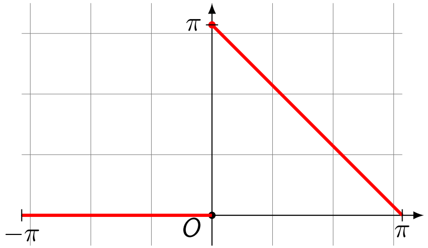
Para la serie de Fourier de una función $f(x)$ periódica definida en un intervalo de longitud T la k-ésima suma parcial, representada por $S_k(x)$ está dada por:

$$\boxed{S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} \left(a_n \cos\left(n\,\omega_0\,x\right) + b_n \,\mathrm{sen}\left(n\,\omega_0\,x\right)\right)}$$

Ejemplo 1

Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$



Aquí $\omega_0 = \frac{2\,\pi}{2\,\pi} = 1$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\,dx\right)$$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\pi\,x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\,dx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\pi\,x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}\\
a_0 &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\,dx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\pi\,x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}\\
a_0 &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(n\,x)\,dx$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\,dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\pi\,x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} \\ a_0 &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(n\,x)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos(n\,x)\,dx\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\,dx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\pi\,x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}\\
a_0 &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(n\,x)\,dx\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos(n\,x)\,dx\right)\\
&= \frac{1}{\pi\,n^2}\left[\left(\pi\,\mathrm{sen}(n\,x)\ - \cos(n\,x) - n\,x\,\mathrm{sen}(n\,x)\right)\right]_0^{\pi}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\,dx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\pi\,x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}\\
a_0 &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(n\,x)\,dx\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos(n\,x)\,dx\right)\\
&= \frac{1}{\pi\,n^2}\left[(\pi\,\mathrm{sen}(n\,x) - \cos(n\,x) - n\,x\,\mathrm{sen}(n\,x))\right]_0^{\pi}\\
a_n &= \frac{1-(-1)^n}{\pi\,n^2}
\end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(n\,x)\,dx$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(n\,x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} (\pi - x)\,\mathrm{sen}(n\,x)\,dx\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(n\,x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} (\pi - x)\,\mathrm{sen}(n\,x)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi\,n^2}\left[(-\pi\,n\cos(n\,x) - \mathrm{sen}(n\,x) + n\,x\cos(n\,x))\right]_0^{\pi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(n\,x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\,\mathrm{sen}(n\,x)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi\,n^2}\left[(-\pi\,n\cos(n\,x) - \mathrm{sen}(n\,x) + n\,x\cos(n\,x))\right]_0^{\pi}
\end{aligned}
$$

$$
b_n = \frac{1}{n}
$$

Algunas sumas parciales:

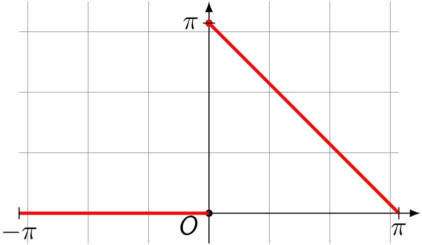
$$
\begin{aligned}
S_1 &= \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{2}{\pi}\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\\
S_2 &= \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{2}{\pi}\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2\,x)\\
S_3 &= \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{2}{\pi}\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2\,x) + \\
&\quad \tfrac{2}{9\,\pi}\cos(3\,x) + \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}(3\,x)\\
S_4 &= \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{2}{\pi}\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2\,x) + \\
&\quad \tfrac{2}{9\,\pi}\cos(3\,x) + \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}(3\,x) + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(4\,x)\\
S_5 &= \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{2}{\pi}\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2\,x) + \\
&\quad \tfrac{2}{9\,\pi}\cos(3\,x) + \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}(3\,x) + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(4\,x) + \\
&\quad \tfrac{2}{25\,\pi}\cos(5\,x) + \tfrac{1}{5}\operatorname{sen}(5\,x),\\
S_6 &= \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{2}{\pi}\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2\,x) + \\
&\quad \tfrac{2}{9\,\pi}\cos(3\,x) + \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}(3\,x) + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(4\,x) + \\
&\quad \tfrac{2}{25\,\pi}\cos(5\,x) + \tfrac{1}{5}\operatorname{sen}(5\,x) + \tfrac{1}{6}\operatorname{sen}(6\,x)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1

Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Las aproximaciones a $f(x)$ mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Ejemplo 1

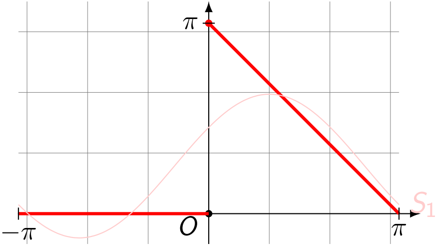
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \;\; a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\,\pi}, \;\; b_n = \frac{1}{n}$$

Las aproximaciones a $f(x)$ mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Ejemplo 1

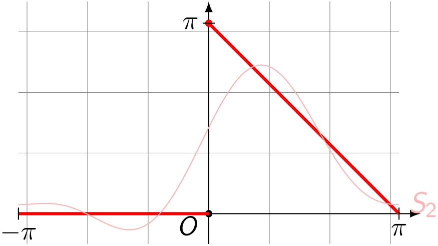
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \; a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\,\pi}, \; b_n = \frac{1}{n}$$

Las aproximaciones a $f(x)$ mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Ejemplo 1

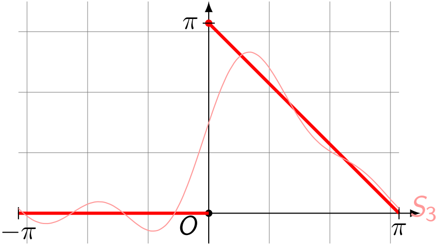
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \ a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\,\pi}, \ b_n = \frac{1}{n}$$

Las aproximaciones a $f(x)$ mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Ejemplo 1

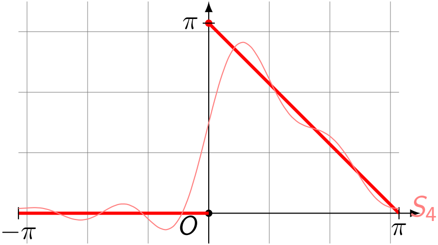
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \;\; a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\,\pi}, \;\; b_n = \frac{1}{n}$$

Las aproximaciones a $f(x)$ mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Ejemplo 1

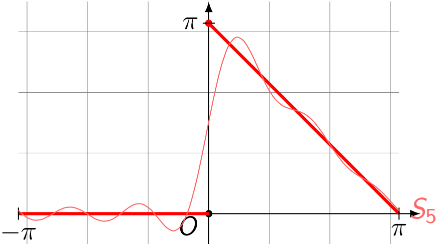
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\,\pi}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

Las aproximaciones a $f(x)$ mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Ejemplo 1

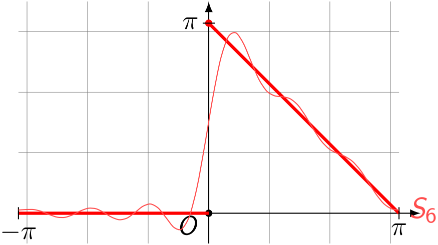
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \;\; a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\,\pi}, \;\; b_n = \frac{1}{n}$$

Las aproximaciones a $f(x)$ mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Ejemplo 1

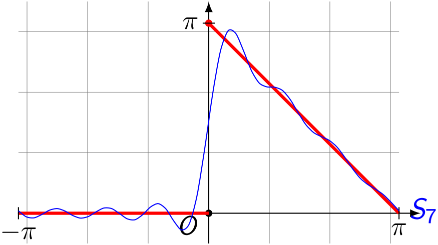
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \;\; a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\,\pi}, \;\; b_n = \frac{1}{n}$$

Las aproximaciones a $f(x)$ mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Ejemplo 1

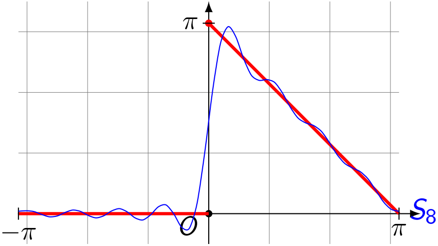
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \;\; a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\,\pi}, \;\; b_n = \frac{1}{n}$$

Las aproximaciones a $f(x)$ mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Ejemplo 1

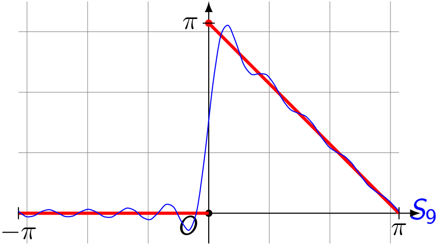
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \; a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\,\pi}, \; b_n = \frac{1}{n}$$

Las aproximaciones a $f(x)$ mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Ejemplo 1

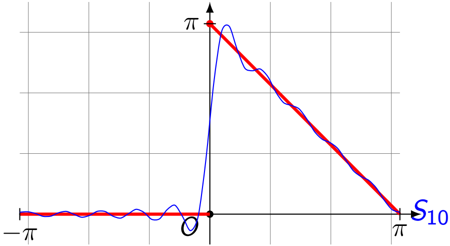
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \;\; a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\,\pi}, \;\; b_n = \frac{1}{n}$$

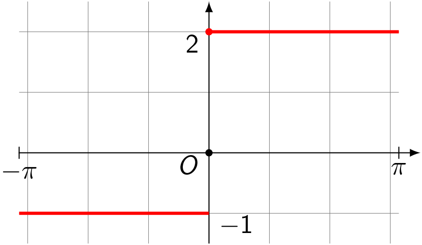
Las aproximaciones a $f(x)$ mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Ejemplo 2

Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$



Aquí $\omega_0 = \frac{2\,\pi}{2\,\pi} = 1$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -1\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\,dx\right)$$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -1\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\,dx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-x\right]_{-\pi}^{0} + \left[2\,x\right]_{0}^{\pi}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -1\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\,dx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left([-x]_{-\pi}^{0} + [2\,x]_{0}^{\pi}\right)\\
a_0 &= 1
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -1\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\,dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left([-x]_{-\pi}^{0} + [2\,x]_{0}^{\pi}\right) \\
a_0 &= 1
\end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(n\,x)\,dx$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -1\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\,dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left([-x]_{-\pi}^{0} + [2\,x]_{0}^{\pi}\right) \\
a_0 &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(n\,x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -1\cos(n\,x)\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\cos(n\,x)\,dx\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -1\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\,dx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left([-x]_{-\pi}^{0} + [2\,x]_{0}^{\pi}\right)\\
a_0 &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(n\,x)\,dx\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -1\cos(n\,x)\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\cos(n\,x)\,dx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[2\frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n}\right]_{0}^{\pi}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -1\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\,dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left([-x]_{-\pi}^{0} + [2\,x]_{0}^{\pi}\right) \\
a_0 &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(n\,x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -1\cos(n\,x)\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\cos(n\,x)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[2\frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n}\right]_{0}^{\pi}\right) \\
a_n &= 0
\end{aligned}
$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(n\,x)\,dx$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(n\,x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -1\,\mathrm{sen}(n\,x)\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\,\mathrm{sen}(n\,x)\,dx\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(n\,x)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -1\,\mathrm{sen}(n\,x)\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\,\mathrm{sen}(n\,x)\,dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\cos(n\,x)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[-2\,\frac{\cos(n\,x)}{n}\right]_{0}^{\pi}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(n\,x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -1\,\mathrm{sen}(n\,x)\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\,\mathrm{sen}(n\,x)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\cos(n\,x)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[-2\,\frac{\cos(n\,x)}{n}\right]_{0}^{\pi}\right) \\
b_n &= \frac{3\,(1-(-1)^n)}{n\,\pi}
\end{aligned}
$$

Algunas sumas parciales:

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\,\mathrm{sen}(x)$$

$$S_3 = S_4 = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\,\mathrm{sen}(x) + \frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}(3\,x)$$

$$S_5 = S_6 = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\,\mathrm{sen}(x) + \frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}(3\,x) + \frac{6}{5\,\pi}\,\mathrm{sen}(5\,x)$$

$$S_7 = S_8 = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\,\mathrm{sen}(x) + \frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}(3\,x) + \frac{6}{5\,\pi}\,\mathrm{sen}(5\,x) + \frac{6}{7\,\pi}\,\mathrm{sen}(7\,x)$$

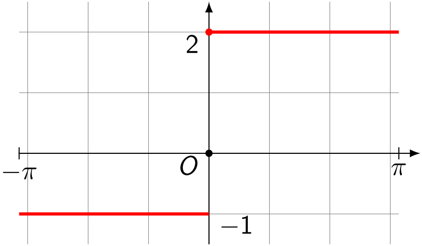
$$S_9 = S_{10} = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\,\mathrm{sen}(x) + \frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}(3\,x) + \frac{6}{5\,\pi}\,\mathrm{sen}(5\,x) + \frac{6}{7\,\pi}\,\mathrm{sen}(7\,x) + \frac{2}{3\,\pi}\,\mathrm{sen}(9\,x)$$

$$S_{11} = S_{12} = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\,\mathrm{sen}(x) + \frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}(3\,x) + \frac{6}{5\,\pi}\,\mathrm{sen}(5\,x) + \frac{6}{7\,\pi}\,\mathrm{sen}(7\,x) + \frac{2}{3\,\pi}\,\mathrm{sen}(9\,x) + \frac{6}{11\,\pi}\,\mathrm{sen}(11\,x)$$

Ejemplo 2

Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$



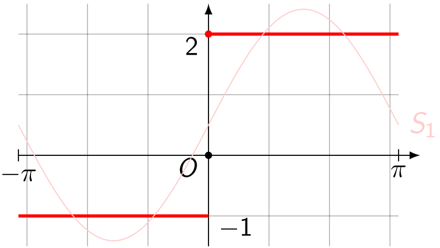
Ejemplo 2

Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = 1, \; a_n = 0, \; b_n = \frac{3\,(1-(-1)^n)}{n\,\pi}$$



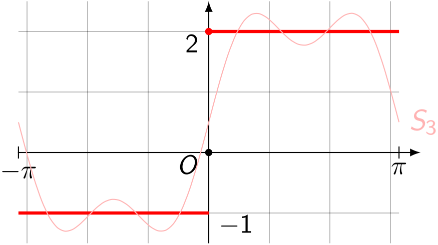
Ejemplo 2

Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = 1, \; a_n = 0, \; b_n = \frac{3\,(1-(-1)^n)}{n\,\pi}$$



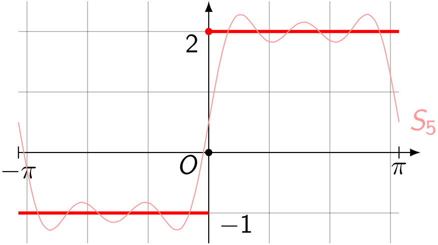
Ejemplo 2

Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = 1,\ a_n = 0,\ \ b_n = \frac{3\left(1-(-1)^n\right)}{n\,\pi}$$



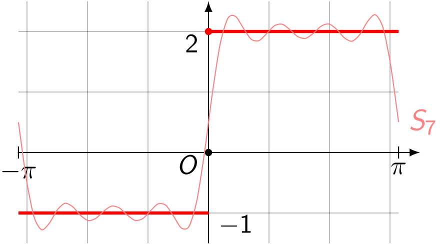
Ejemplo 2

Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = 1, \; a_n = 0, \; b_n = \frac{3\,(1-(-1)^n)}{n\,\pi}$$



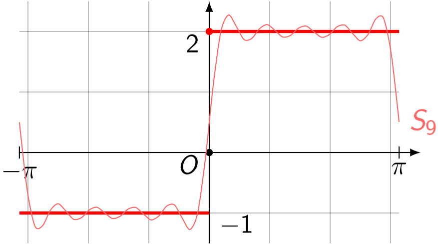
Ejemplo 2

Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = 1, \; a_n = 0, \; b_n = \frac{3\,(1-(-1)^n)}{n\,\pi}$$



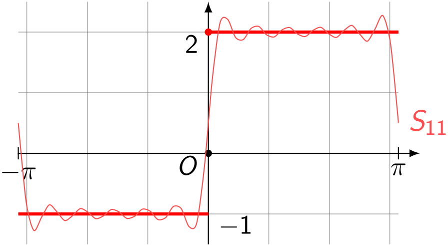
Ejemplo 2

Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = 1, \ a_n = 0, \ \ b_n = \frac{3\,(1-(-1)^n)}{n\,\pi}$$



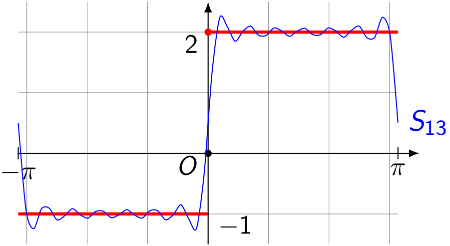
Ejemplo 2

Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = 1, \; a_n = 0, \; b_n = \frac{3\,(1-(-1)^n)}{n\,\pi}$$



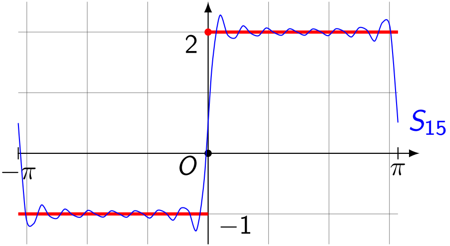
Ejemplo 2

Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = 1, \; a_n = 0, \;\; b_n = \frac{3\,(1-(-1)^n)}{n\,\pi}$$



Condiciones de convergencia

Sea $f(x)$ una función periódica definida en un intervalo de longitud T continua, excepto posiblemente en un número finito de puntos donde tiene discontinuidades finitas y que posee derivada continua también excepto en número finito de puntos donde tiene discontinuidades finitas. Entones, la serie de Fourier para $f(x)$ converge a $f(x)$ en todo punto de continuidad y en los puntos de discontinuidad la serie de Fourier converge a

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

donde $f(x+)$ representa el límite por la derecha a x y $f(x-)$ representa el límite por la izquierda a x.

Código en la TI para a_0

```
F1 F2 Control  F3 I/O  F4 Var  F5 Find...  F6 Mode
:fa0(ff)
:Func
:Local i,n,s,T,f,a,b,g
:0→s:rowDim(ff)→n:1→g
:(ff[n,3]-ff[1,2])→T
:For i,1,n
:  ff[i,1]→f:ff[i,2]→a:ff[i,3]→b
:  s+∫(f*g,x,a,b)→s
:EndFor
:s/(T/2)
:EndFunc

MAIN          RAD AUTO          PAR
```

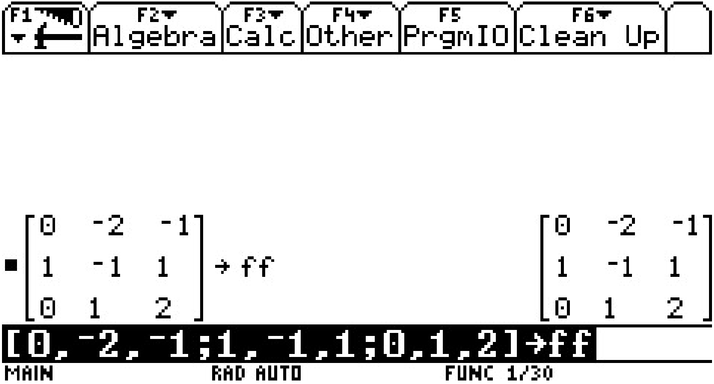
Código en la TI para a_n

```
F1      F2       F3   F4   F5      F6
        Control  I/O  Var  Find…   Mode
:fan(ff)
:Func
:Local i,n,s,T,f,a,b,g,ω
:0→s:rowDim(ff)→n:
:(ff[n,3]-ff[1,2])→T:2π/T→ω
:cos(@n1*ω*x)→g
:For i,1,n
:  ff[i,1]→f:ff[i,2]→a:ff[i,3]→b
:  s+∫(f*g,x,a,b)→s
:EndFor
:s/(T/2)
:EndFunc
MAIN          RAD AUTO          PAR
```

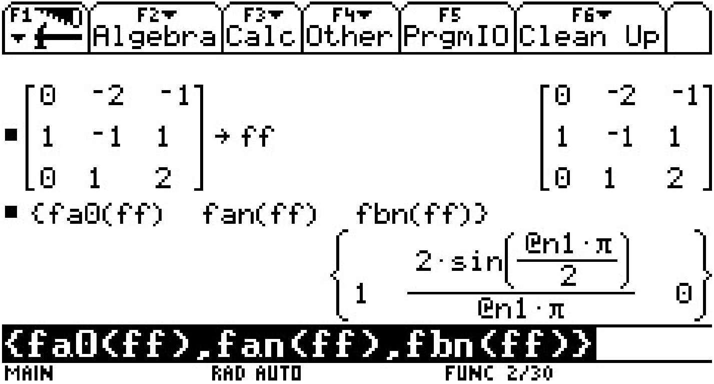
Código en la TI para b_n

```
F1  F2 Control  F3 I/O  F4 Var  F5 Find...  F6 Mode
:fbn(ff)
:Func
:Local i,n,s,T,f,a,b,g,ω
:0→s:rowDim(ff)→n:(ff[n,3]-ff[1,2])/→T
:2π/T→ω
:sin(@n1*ω*x)→g
:For i,1,n
:  ff[i,1]→f:ff[i,2]→a:ff[i,3]→b
:  s+∫(f*g,x,a,b)→s
:EndFor
:s/(T/2)
:EndFunc
MAIN          RAD AUTO          PAR
```

Formato para la función de entrada



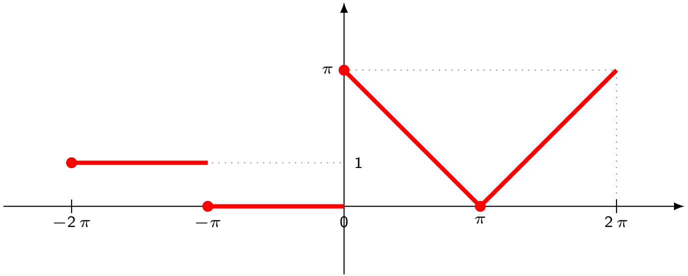
Uso de las funciones



Ejemplo 3

Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } -2\pi \leq x < -\pi \\ 0 & \text{para } -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x & \text{para } 0 \leq x < \pi \\ x - \pi & \text{para } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

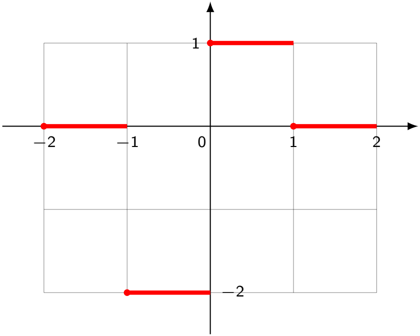


Aquí $\omega_0 = \frac{2\pi}{4\pi} = 1/2$.

Ejemplo 4

Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -2 \leq x < -1 \\ -2 & \text{para } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{para } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$



Aquí $\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \pi/2$.

Cosas a recordar

- Las funciones sen(x) y $\cos(x)$ son funciones periódicas con periodo $2\,\pi$.
- Si $f(x)$ es periódica con periodo T entonces $f(a\,x)$ es periódica con periodo $S = T/a$: Pues se necesita que $f(a\,(x+S)) = f(a\,x + a\,S) = f(a\,x)$: $a\,S = T$. En términos de la frecuencia, tenemos que la frecuencia de $f(a\,x)$ es a-veces la frecuencia de $f(x)$.
- Si $f(x)$ es periódica con periodo T y $g(x)$ es periódica con periodo S entonces $f(x) + g(x)$ será periódica sii existen enteros positivos n y m tales que $n \cdot T = m \cdot S$. Pues se necesita encontrar un cierto número de veces que ambos periodos se repitan.
- Si $f(x)$ es periódica con periodo T entonces para cualquier entero positivo n, $f(x) + f(n\,x)$ es una función periódica con periodo T.

Forma compacta de la series Fourier

La serie de Fourier:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\,\pi\,n}{T} x \right) + b_n \,\text{sen}\left(\frac{2\,\pi\,n}{T} x \right) \right)$$

se puede escribir en la forma compacta:

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\,\pi\,n}{T} x + \phi_n \right)$$

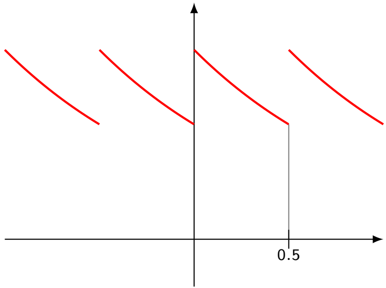
donde

$$A_0 = a_0/2,\; A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},\; \phi_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n} \right)$$

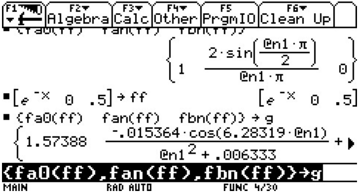
Ejemplo 5

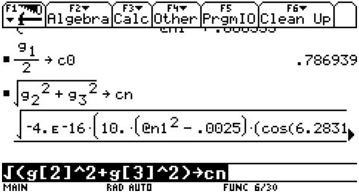
Expanda en una Serie de Fourier la función:

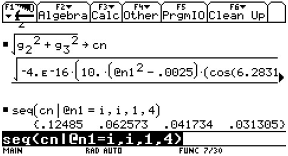
$$f(x) = \{ \; e^{-x} \quad \text{para} \quad 0 < x < 0.5$$

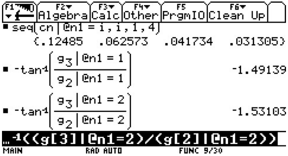


Problema anterior realizado mediante la calculadora.

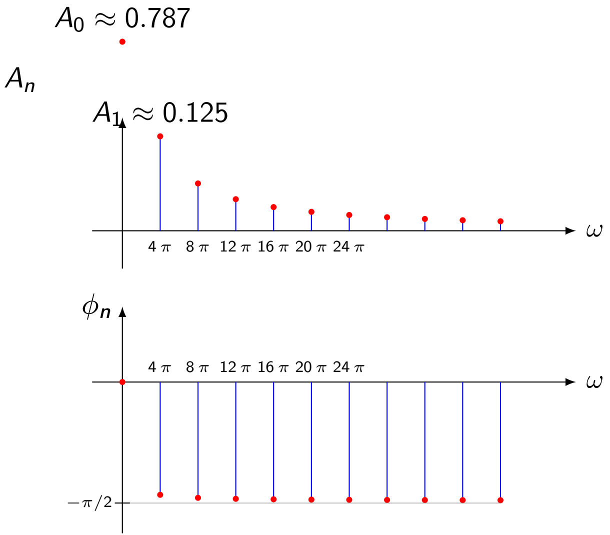








Amplitud y fase del ejemplo 5



Ideas

Usando la fórmula de Euler $e^{a\,\mathbf{i}} = \cos(a) + \operatorname{sen}(a)\,\mathbf{i}$ y su variante $e^{-a\,\mathbf{i}} = \cos(a) - \operatorname{sen}(a)\,\mathbf{i}$, tenemos:

$$\cos(a) = \frac{e^{a\,\mathbf{i}} + e^{-a\,\mathbf{i}}}{2} \text{ y } \operatorname{sen}(a) = \frac{e^{a\,\mathbf{i}} - e^{-a\,\mathbf{i}}}{2\,\mathbf{i}}$$

por tanto, el término

$$f_k(x) = a_k \cos(k\,\omega_0\,x) + b_k \operatorname{sen}(k\,\omega_0\,x)$$

puede escribirse como

$$\begin{aligned} f_k(x) &= a_k\left(\frac{e^{k\,\omega_o\,x\,\mathbf{i}} + e^{-k\,\omega_o\,x\,\mathbf{i}}}{2}\right) + b_k\left(\frac{e^{k\,\omega_o\,x\,\mathbf{i}} - e^{-k\,\omega_o\,x\,\mathbf{i}}}{2\,\mathbf{i}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(a_k - b_k\,\mathbf{i}\right)\, e^{k\,\omega_o\,x\,\mathbf{i}} + \frac{1}{2}\left(a_k + b_k\,\mathbf{i}\right)\, e^{-k\,\omega_o\,x\,\mathbf{i}} \end{aligned}$$

si definimos los coeficientes de las exponenciales $e^{k\,\omega_o\,x\,\mathbf{i}}$ y de $e^{-k\,\omega_o\,x\,\mathbf{i}}$ como

$$c_k = \frac{1}{2}\left(a_k - b_k\,\mathbf{i}\right) \text{ y } c_{-k} = \frac{1}{2}\left(a_k + b_k\,\mathbf{i}\right)$$

Entonces la serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n\,\omega_0\,x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(n\,\omega_0\,x\right)\right)$$

podría escribirse como:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n\, e^{n\,\omega_o\,x\,\mathbf{i}} + c_{-n}\, e^{-n\,\omega_o\,x\,\mathbf{i}}\right) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{n\,\omega_o\,x\,\mathbf{i}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\, e^{-n\,\omega_o\,x\,\mathbf{i}} \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{n\,\omega_o\,x\,\mathbf{i}} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n\, e^{n\,\omega_o\,x\,\mathbf{i}}
\end{aligned}$$

Series complejas de Fourier

La serie compleja de Fourier de una función $f(x)$ períodica definida en el intervalo de longitud T está dada por la fórmula

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{n\,\omega_o\,x\,\mathbf{i}}}$$

donde

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{2\,\pi}{T} \\ c_n &= \frac{1}{T}\int_T f(x)\, e^{-n\,\omega_0\,x\,\mathbf{i}}\,dx \ \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \end{aligned}$$

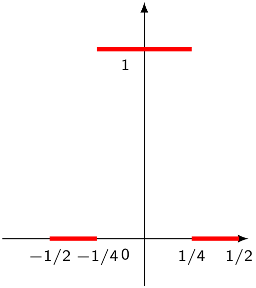
Relación entre la forma compacta y la compleja:

$$A_n = 2\,|c_n|\ ,\ \ \phi_n = -\tan^{-1}\left(\frac{(c_n - c_{-n})\,\mathbf{i}}{c_n + c_{-n}}\right)$$

Ejemplo 6

Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad -1/2 < x < -1/4 \\ 1 & \text{para} \quad -1/4 < x < 1/4 \\ 0 & \text{para} \quad 1/4 < x < 1/2 \end{cases}$$

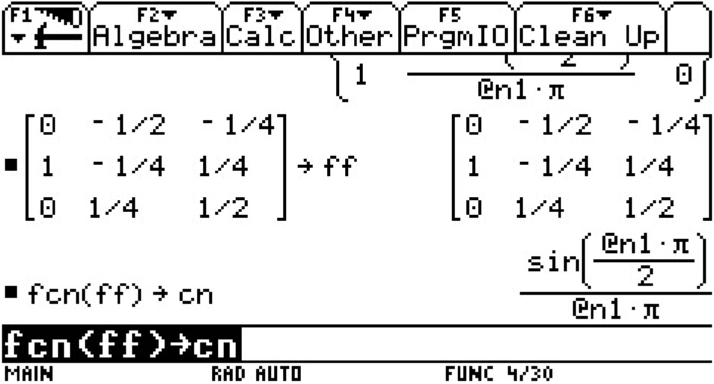


Código en la TI para c_n

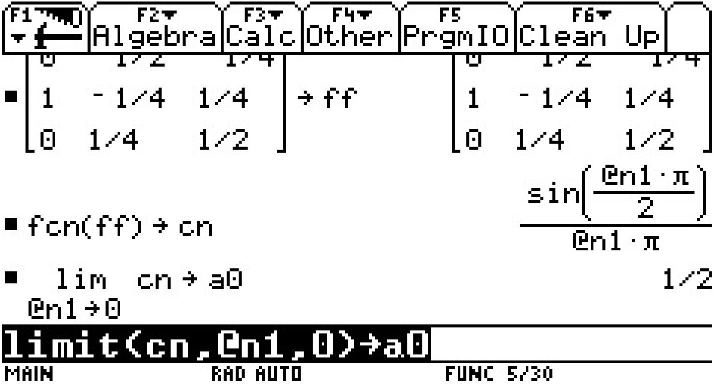
```
F1      F2       F3   F4   F5      F6
        Control  I/O  Var  Find... Mode
:fcn(ff)
:Func
:Local i,n,s,T,f,a,b,g,ω
:0→s:rowDim(ff)→n:(ff[n,3]-ff[1,2])→T
:2π/T→ω
:e^(@n1*ω*x)→g
:For i,1,n
:  ff[i,1]→f:ff[i,2]→a:ff[i,3]→b
:  s+∫(f*g,x,a,b)→s
:EndFor
:s/T
:EndFunc

MAIN          RAD AUTO          PAR
```

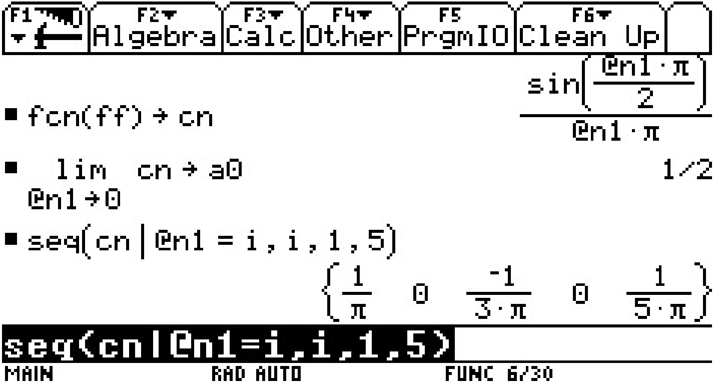
Ejemplo para c_n



c_0 MEDIANTE LÍMITES



Varios c_i


F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clean Up
fcn(ff) → cn
sin(@n1·π/2)/(@n1·π)
lim cn → a0
@n1→0
1/2
seq(cn | @n1 = i, i, 1, 5)
{1/π 0 -1/(3·π) 0 1/(5·π)}
seq(cn|@n1=i,i,1,5)
MAIN RAD AUTO FUNC 6/30

Potencia media

La potencia media de una señal periódica $f(x)$ con período T se define como:

$$\boxed{P_{media} \doteq \frac{1}{T}\int_T |f(x)|^2\, dx}$$

La relación de Parseval para las series de Fourier en el caso de la serie de Fourier compleja se expresa como:

$$\boxed{P_{media} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2}$$

y en el caso de la serie de Fourier real:

$$\boxed{P_{media} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_o^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\right)}$$

Para poder responder la pregunta:

> *¿cuántos términos de la serie de Fourier se deben tomar para aproximar* razonablemente *una función periódica?*

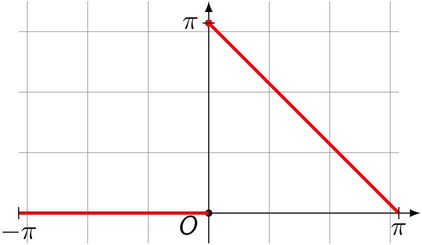
La clave puede estar en la potencia media. Se calcula la potencia media y establece un nivel en el cual se desea aproximarla. Digamos un 95% o un 99%. Con esto se van realizando sumas parciales de la fórmula de Parseval hasta alcanzar el nivel de aproximación deseado. Aunque sería deseable determinar analíticamente para un nivel de aproximación el valor n_o en el cual se obtiene la aproximación, en general, es muy difícil tener dicho valor.

Ejemplo

Para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

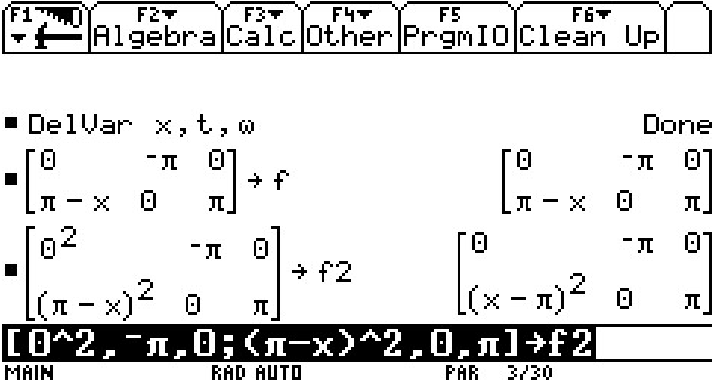
determine el porcentaje de la potencia media que aproxima tomar la 20-ésima suma parcial.



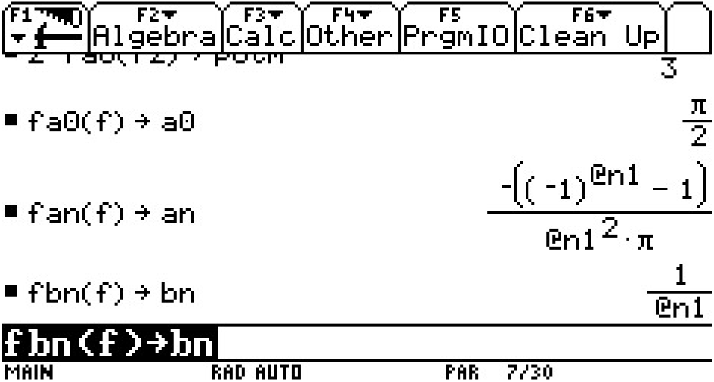
Definición de la función

Definiremos la función en el formato requerido y aprovecharemos que cuando aplicamos $fa0(f^2)$ entrega

$$\frac{1}{T/2}\int_T f(x)^2\,dx = 2\frac{1}{T}\int_T f(x)^2\,dx = 2\,P_{media}$$



Determinación de a_0, a_n y b_n

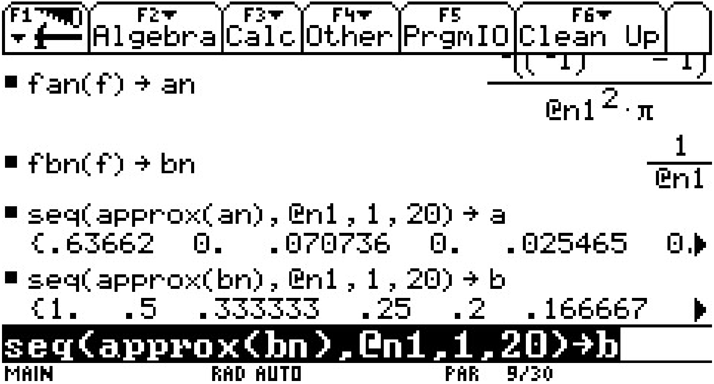


Matemáticas Avanzadas para Ingeniería: Series de Fourier

Departamento de Matemáticas

Intro
Serie de Fourier
S_k
Convergencia
TI:a_o
TI:a_n
TI:b_n
TI:f
TI:Uso
Hechos 1
Compacta
Hechos 2
Complejas
TI:c_n

Generación de a_1 a a_{20} y b_1 a b_{20}



Potencia media en S_{20} y su comparación contra la de $f(x)$: Tenemos una aproximación del 98%