Series trigonométricas de Fourier.

Cualquier onda periódica, es decir aquella que cumplan que $f(t) = f(t+T)$, puede expresarse mediante una serie de Fourier siempre que:

1.- Si es discontinua, tenga un número finito de discontinuidades dentro del período T.

2.- tenga un valor medio finito dentro del período T.

3.- incluya un número finito de máximos y mínimos dentro del período T.

Cuando de cumplan estas condiciones(denominadas condiciones de Dirichlet), la serie de Fourier existe y puede escribirse en forma trigonométrica.

$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos\omega x + a_2\cos 2\omega x + a_3\cos 3\omega x + \ldots\ldots + b_1\sin\omega x + b_2\sin 2\omega x + b_3\sin 3\omega x + \ldots\ldots$

o bien en forma resumida... $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos k\omega x + b_k\sin k\omega x).$

en otra escritura...si f es una función continua por segmentos en el intervalo $[-L, L]$ la serie de Fourier de f es la serie trigonométrica: $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x + b_n\sin\frac{n\pi}{L}x)$ en donde:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx.$$

y $n \in \mathbb{N}$; $n = 1, 2, 3, 4.\ldots.$

....

Nota bene : Se puede observar que dependiendo del libro de teto que ocupemos es la notación que se acostumbra a utilizar en estos temas. Esta cuestión es importante al momento de consultar la bibliografía pertinente.

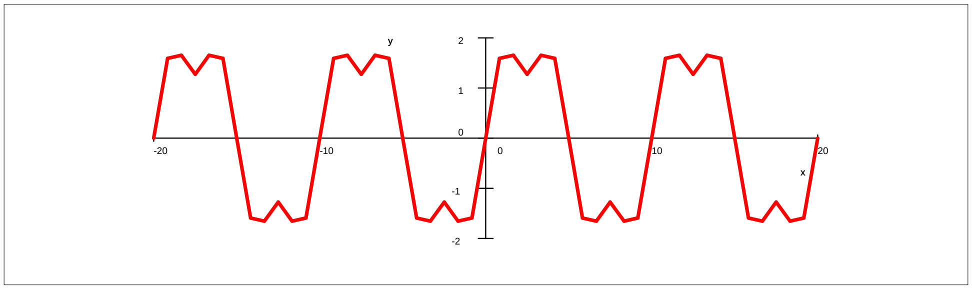
.

....

Hay fenómenos físicos como la luz y el sonido que tienen un carácter periódico. Estos fenómenos se describen mediante funciones g(x) que son periódicas.

Así $g(x+P) = g(x)$, para todo valor de x, y en donde P es un período de la función.

La gráfica muestra a la función $m(x) = \frac{6}{\pi}\left(\sin(\frac{\pi x}{5}) + \frac{1}{3}\sin(\frac{3\pi x}{5})\right)$ de período $P = 5$



como se puede observar:

$m(x+10) = \frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{1}{5}\pi(x+10) + \frac{1}{3}\sin\frac{3}{5}\pi(x+10)\right) = \frac{1}{\pi}(6\sin\frac{1}{5}\pi x + 2\sin\frac{3}{5}\pi x)$

(tarea: demostrarlo: ayuda $\sin(A+B) = \cos A\sin B + \cos B\sin A$)

Nota bene:Obsérvese que la gráfica de y=f(x) se obtiene repitiendo la porción de dicha gráfica que corresponde a cualquier intervalo de longitud 10, como se muestra en la figura.

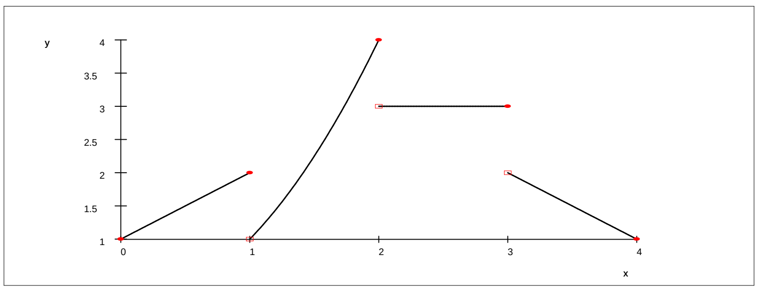
Ejemplos de funciones con período 2π son $\sin(jx)$ y $\cos(jx)$ siendo j un número entero.

Esto sugiere una interesante pregunta: ¿Se podrá representar una función periódica como una suma de términos del tipo $a_j \cos(jx)$ y $b_j \sin(jx)$? Pues,la respuesta, es en general, afirmativa.

Continuidad a trozos.

Se dirá que una función f(x) es continua a trozos en el intervalo $[a, b]$ si existe una partición $a = t_0, t_1, t_2, \ldots\ldots, t_k = b,$ tal que f(x) es continua en cada intervalo abierto $t_{i-1} < x < t_i$ para $i = 1, 2, 3, , \ldots, k$ y además , existen los límites laterales de f(x) por la izquierda y por la derecha en cada uno de los puntos t_i. Ver ejemplo:

$$L(x) = \begin{cases} x+1 & if \quad 0 \le x \le 1 \\ x^2 & if \quad 1 < x \le 2 \\ 3 & if \quad 2 < x \le 3 \\ -x+5 & if \quad 3 < x \le 4 \end{cases}$$



Serie de Fourier

Suponiendo que f(x) es periódica con período 2π y que es continua a trozos en $[-\pi, \pi]$ la serie de Fourier $S(x)$ de f(x) está dada por: $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}(aj \cos jx + b_j \sin jx)$ (se puede usar cualquier letra para definir la serie)

en donde los coeficientes a_j y b_j vienen dados por las fórmulas de Euler:

$a_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(jx)dx$, para $j = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$b_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(jx)dx$, para $j = 1, 2, 3 \ldots Obs$: se excluye j=0 por razones obvias.

$a_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(jx)dx$, para $j = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$b_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(jx)dx$, para $j = 1, 2, 3 \ldots Obs$: se excluye j=0 por razones obvias.

Teorema:

Suponiendo que S(x) es la serie de Fourier de f(x) en $[-\pi, \pi]$ y que $f'(x)$ es continua a trozos en dicho intervalo y que tiene derivadas laterales por la izquierda y por la derecha en cada punto de dicho intervalo, entonces $S(x)$ converge para todo $x \in [-\pi, \pi]$ y la relación $S(x) = f(x)$ se verifica en todos los puntos del intervalo en los cuales f es continua.

Además, si x=a es un punto de discontinuidad de f, entonces $S(a) = \frac{f(a^-)+f(a^+)}{2}$, en donde $f(a^-)$ y $f(a^+)$ denotan los límites laterales por la izquierda y por la derecha, respectivamente, En estas condiciones se obtiene el desarrollo en serie de Fourier:

$$\boxed{S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}(aj\cos jx + b_j \sin jx)}$$

Muestre cómo la función definida por $f(x) = \frac{1}{2}x$ para $-\pi < x < \pi$ y extendida periódicamente por $f(x+2\pi) = f(x)$ admite un desarrollo en serie de Fourier.

$a_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(jx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}\cdot\cos(jx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot\cos(jx)dx$

$\int x\cos(jx)dx = \frac{1}{j^2}(\cos jx + jx\sin jx)$

$\left[\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{j^2}(\cos jx + jx\sin jx)\right)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$, para $j = 1, 2, 3, \ldots.$

Observación: $[x]_2^a = a - 2$ .... $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)dx = 0$

$b_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}\sin(jx)dx\ldots\ldots$

$\frac{1}{2}\int x\sin(jx)dx = \frac{1}{2j^2}(\sin jx - jx\cos jx)$

$b_j = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2j^2}[(\sin jx - jx\cos jx)]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi j^2}(2\sin\pi j - 2\pi j\cos\pi j)$

como... $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}(a_k\cos jx + b_k\sin jx)$

$S(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi j^2}(2\sin\pi j - 2\pi j\cos\pi j)\sin jx\right)$

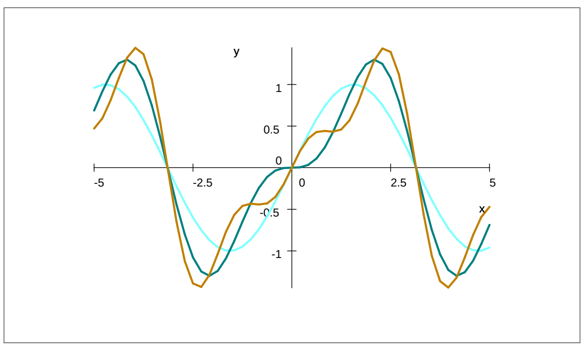
$\sum_{j=1}^{1}\left(\frac{1}{2\pi j^2}(2\sin\pi j - 2\pi j\cos\pi j)\sin jx\right) = \sin x$

$\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{1}{2\pi j^2}(2\sin\pi j - 2\pi j\cos\pi j)\sin jx\right) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x$

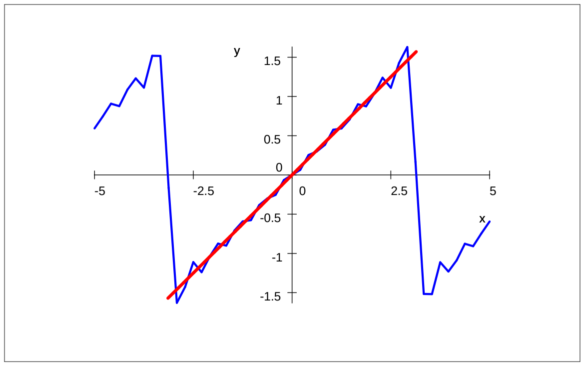
$\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{1}{2\pi j^2}(2\sin\pi j - 2\pi j\cos\pi j)\sin jx\right) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$

$\sum_{j=1}^{4}\left(\frac{1}{2\pi j^2}(2\sin\pi j - 2\pi j\cos\pi j)\sin jx\right) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x$

$\sum_{j=1}^{5}\left(\frac{1}{2\pi j^2}(2\sin\pi j - 2\pi j\cos\pi j)\sin jx\right) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{5}\sin 5x$



La figura muestra la gráfica de $f(x) = \left\{\ \frac{1}{2}x \quad if \quad -\pi < x < \pi\right.$ y la representación en serie de Fourier $\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{1}{2\pi j^2}(2\sin\pi j - 2\pi j\cos\pi j)\sin jx\right)$ con diez términos, en el intervalo $-\pi < x < \pi$



Algunos teoremas

Teor1: Si f(x) es una función par,tiene período $2\pi,$ y si tanto f(x) como $f'(x)$
son continuas a trozos, entonces la serie de Fourier tiene solamente los términos de los cosenos, es decir:

$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j \cos jx) = \frac{1}{2}a_0 + (\cos x)a_1 + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + a_4\cos 4x + \ldots..$

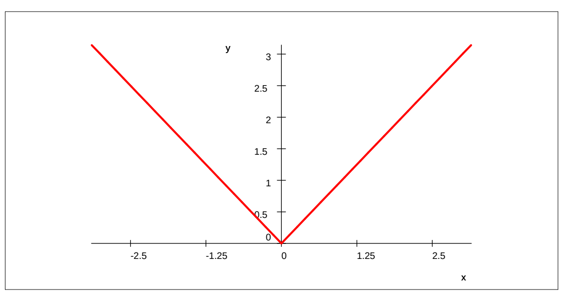
en donde: $a_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(jx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(jx)dx,$ para $j = 0,1,2,3.\ldots$

Teor2: Resultado análogo se tiene si la función f(x) es impar y cumple todas las otras codiciones exigidas anteriores...

$S(x) = \sum_{j=1}^{\infty}(b_j \sin jx) = (\sin x)b_1 + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + b_4\sin 4x + \ldots..$

en donde ... $b_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(jx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(jx)dx.$.....para $j = 1,2,3.\ldots$

Ejercicio:
Hallar una representación en serie de Fourier para la función $g(x) = |x|$ si $-\pi < x < \pi$
y extendida periódicamente por la relación $g(x+2\pi) = g(x)$
Ya que la función $g(x) = \left\{ \ |x| \quad if \quad -\pi < x < \pi \right.$ es una función par.....



Aprovechando los resultados anteriores (teoremas 1 y 2)

$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j \cos jx) = \frac{1}{2}a_0 + (\cos x)a_1 + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + a_4\cos 4x + \ldots..$
en donde: $a_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(jx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(jx)dx,$ para $j = 0,1,2,3\ldots$
$a_j = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|x|\cos(jx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(jx)dx$

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |x|\cos(0)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx = \pi$

$a_j = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cdot\cos(jx)dx = \frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{1}{j^2}(\cos jx + jx\sin jx)\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{j^2}(\cos\pi j + \pi j\sin\pi j) - \frac{1}{j^2}\right)$

$\int x\cdot\cos(jx)dx = \frac{1}{j^2}(\cos jx + jx\sin jx)$

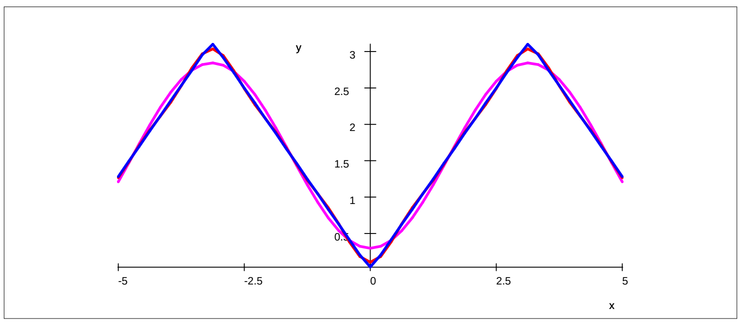
finalmente... $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j\cos jx)$

$S(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{j^2}(\cos\pi j + \pi j\sin\pi j) - \frac{1}{j^2}\right)\cos jx\right)$

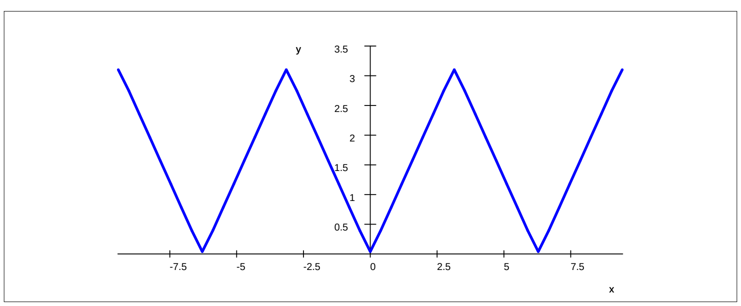
$\frac{\pi}{2} + \sum_{j=1}^{4}\left(\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{j^2}(\cos\pi j + \pi j\sin\pi j) - \frac{1}{j^2}\right)\cos jx\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{9\pi}\cos 3x$

$\frac{\pi}{2} + \sum_{j=1}^{5}\left(\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{j^2}(\cos\pi j + \pi j\sin\pi j) - \frac{1}{j^2}\right)\cos jx\right) = \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{9\pi}\cos 3x - \frac{4}{25\pi}\cos 5x$

$\frac{\pi}{2} + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{j^2}(\cos\pi j + \pi j\sin\pi j) - \frac{1}{j^2}\right)\cos jx\right)$



Se muestra la gráfica para $n = 2, 5, 15$



Se muestra la gráfica para $n = 15,$ en el intervalo $[-3\pi, 3\pi]$

Ejercicios:

Hallar la representación en serie de Fourier de la función dada.

1.- $f(x) = \begin{cases} -1 & if \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & if \quad 0 < x < \pi \end{cases}$ 2.- $g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x & if \quad -\pi < x < 0 \\ \frac{\pi}{2} - x & if \quad 0 < x < \pi \end{cases}$

3.- $s(x) = \begin{cases} 0 & if \quad -\pi < x < 0 \\ x & if \quad 0 < x < \pi \end{cases}$ 4.- $h(x) = \begin{cases} -1 & if \quad -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 & if \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & if \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

5.- $k(x) = \begin{cases} -\pi - x & if \quad -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ x & if \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & if \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

6.- Apoyándose en el resultado del ejercicio (1) pruebe que $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$

7.- Apoyándose en el resultado del ejercicio (2) pruebe que $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots.$

8.- Hallar la representación en serie de Fourier de cosenos de la función periódica que en un período se define como $f(x) = \frac{x^2}{4}$ para $-\pi < x < \pi$

9.- Sea f(x) una función periódica de período $2P$; es decir $f(x+2P) = f(x)$. Haciendo los cambios adecuados, demuestre que las fórmulas de Euler para f son:

$a_0 = \frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)dx$ $\quad a_j = \frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)\cos\left(\frac{j\pi}{P}x\right)dx$, para $j = 1,2,3\ldots$

$b_j = \frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)\sin\left(\frac{j\pi}{P}x\right)dx$, para $j = 1,2,3.$

10.- En los ejercicios siguientes utilice los resultados del ejercicio(9) para hallar las representaciones en serie de Fourier de la función dada y grafique $f(x), S_4(x)$ y $S_6(x)$ en un mismo gráfico.

Resultados:

1.- $f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \ldots.\right)$

5.- $\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x + \frac{1}{7^2}\sin 7x + \ldots.\right)$

12.- $6 + \frac{36}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{j+1}}{j^2}\right)\cos\left(\frac{j\pi x}{3}\right) = 6 + \frac{36}{\pi^2}\left(\frac{1}{9}\cos\pi x + \cos\frac{1}{3}\pi x - \frac{1}{4}\cos\frac{2}{3}\pi x - \frac{1}{16}\cos\frac{4}{3}\pi x + \ldots\right)$

....

Referencia bibliográfica:

Métodos Numéricos con Matlab	Mathews-Fink	Prentice Hall
Análisis Numérico con Aplicaciones	Gerald-Wheatley	Prentice Hall
Circuitos Eléctricos	Nahvi-Edminister	Schaum/ Mc Graw Hill
Transformadas de Laplace	Murray R. Spiegel	Schaum/ Mc Graw Hill
http://fisicauv.jimdo.com/		