Interpolación con funciones splines

Supongamos ahora que queremos construir una curva que se ajuste por ejemplo al perfil de un pato (ver Figura 1). Seleccionamos una serie de puntos sobre la silueta y los interpolamos mediante un polinomio (ver Figura 2). Como se observa gráficamente, cuando el número de datos de interpolación es grande la interpolación polinomial no es adecuada. Una alternativa para subsanar este inconveniente es utilizar funciones polinómicas a trozos que llamaremos splines. En particular el resultado de interpolar en el ejemplo anterior con un spline cúbico natural proporciona un resultado satisfactorio (ver Figura 3)

Un spline es simplemente una función polinómica a trozos, más concretamente, diremos que una función $s(x)$ es un spline en el intervalo $[a, b]$, si existe una partición del intervalo $[a, b]$,

$$P = \{a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b\}$$

de tal forma que $s(x)$ es un polinomio en $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$. Los puntos x_i, $i = 1, \cdots, n-1$, se llaman nodos del spline.

1. Interpolación lineal a trozos

La interpolación lineal a trozos es el ejemplo más simple de interpolación con funciones splines. En este caso, la clase de funciones interpolantes son funciones continuas que restringidas a cada intervalo de la partición P son rectas. Gráficamente, el spline $s(x)$ que interpola linealmente a la función f en los puntos $x_0, x_1, \cdots, x_n$, es la poligonal que une los puntos $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$.

Si llamamos $s_i(x)$ a la restricción de $s(x)$ al intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$, entonces se tiene que

$$s_i(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i), \qquad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

En muchas aplicaciones este spline, muy fácil de calcular y de evaluar, es suficiente para obtener una buena aproximación de la función f.

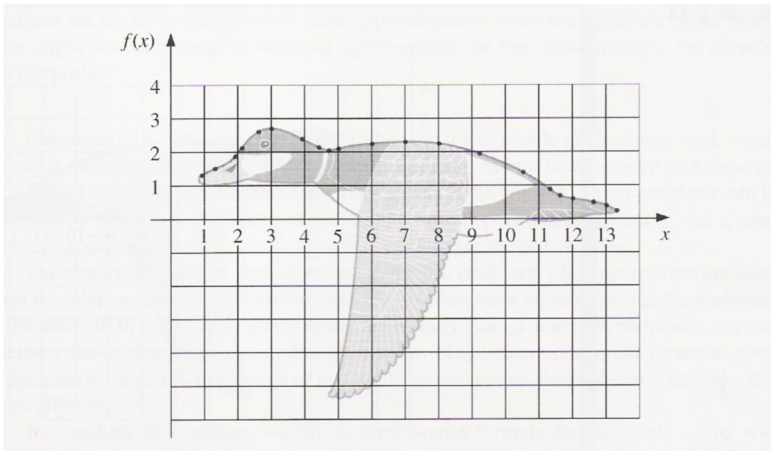

Figura 1: Silueta de un pato

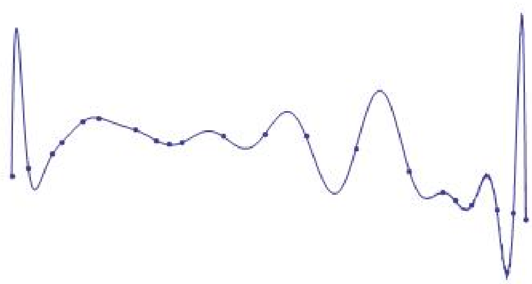

Figura 2: Interpolación con un polinomio

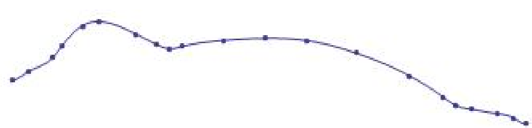

Figura 3: Interpolación con un spline cúbico natural

2. Interpolación con splines cúbicos

El inconveniente que presenta la interpolación lineal a trozos es que la función que se obtiene no es en general derivable en los nodos x_i. Para obtener curvas suaves suelen utilizarse splines cúbicos de clase 2, es dedir dada una partición

$$P = \{\, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

interpolamos con funciones de clase 2 que restringidas a los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ son polinomios de grado 3. Si llamamos $s_i(x)$ a la restricción del spline $s(x)$ al intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$, entonces

$$s_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3 \quad i = 0, 1, \cdots, n-1,$$

por lo que tenemos $4n$ incógnitas a determinar. Por otra parte, el spline tiene que cumplir las siguientes condiciones:

(i) Condiciones de interpolación:

$$s_i(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n-1, \qquad s_{n-1}(x_n) = f(x_n).$$

(ii) Condiciones de continuidad (en nodos interiores):

$$s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}), \qquad i = 0, \cdots, n-2.$$

(iii) Condiciones de suavidad (en nodos interiores):

$$s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}), \qquad i = 0, \cdots, n-2.$$

$$s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}), \qquad i = 0, \cdots, n-2.$$

Observemos que se obtienen en total $4n-2$ ecuaciones, lo que significa que para determinar el spline $s(x)$ de forma única necesitamos imponer 2 condiciones adicionales. Dichas condiciones suelen imponerse sobre los extremos del intervalo siendo las más habituales

$$s_0''(a) = 0, \quad s_{n-1}''(b) = 0, \quad \text{(spline cúbico natural)},$$

$$s_0'(a) = f'(a), \quad s_{n-1}''(b) = f'(b), \quad \text{(spline cúbico sujeto)}.$$

Ejercicio 2.1. *Determinar si la siguiente función*

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x - x^3, & 0 \le x < 1, \\ 1 - 2(x-1) - 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3, & 1 \le x < 2, \\ 4(x-2) + 9(x-2)^2 - 3(x-2)^3, & 2 \le x \le 3, \end{cases}$$

es el spline cúbico natural que interpola en los puntos $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,0)$ *y* $(3,10)$.