

INTERPOLACIÓN SEGMENTARIA O SPLINES

La construcción de polinomios de interpolación de grado alto aunque justificable teóricamente plantea muchos problemas. Por un lado, la forma de la función polinómica de grado alto a menudo no responde al fenómeno debido al gran número de extremos e inflexiones. Por otro lado, su cálculo es muy complicado, lo que limita su utilidad en análisis numérico. Es a menudo más conveniente dividir el intervalo de interés en subintervalos más pequeños y usar en cada subintervalo polinomios de grado relativamente bajo, tratando de que la función a trozos definida de este modo tenga un aspecto final adecuado al fenómeno que estamos representando.

La idea central es que en vez de usar un solo polinomio para interpolar los datos, podemos usar segmentos de polinomios y unirlos adecuadamente para formar nuestra interpolación.

Podemos decir, que una función **spline** está formada por varios polinomios, cada uno definido en un intervalo y que se unen entre sí bajo ciertas condiciones de continuidad.

Cabe mencionar que entre todas, las **splines cúbicas** han resultado ser las más adecuadas.

Definición. (*Splines de grado k*)

Dada nuestra tabla de datos,

x	x_0	x_1	\dots	x_n
y	y_0	y_1	\dots	y_n

donde suponemos que $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, y dado k un número entero positivo, una función de interpolación *spline de grado k* , para la tabla de datos, es una función $S(x)$ tal que :

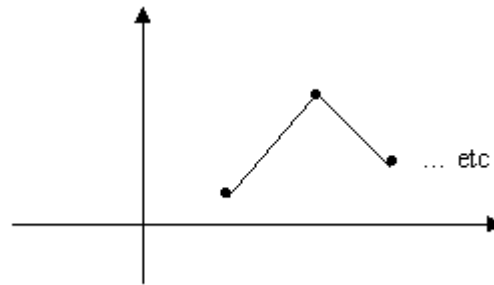
- i) $S(x_i) = y_i$, para toda $i = 0, 1, \dots, n$.
- ii) $S(x)$ es un polinomio de grado $\leq k$ en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.
- iii) $S(x)$ tiene derivada continua hasta de orden $k-1$ en $[x_0, x_n]$.

FUNCIONES SPLINES DE GRADO 1

Dados los $n+1$ puntos

x	x_0	x_1	\dots	x_n
y	y_0	y_1	\dots	y_n

Una función spline de grado 1 que interpole los datos es simplemente unir cada uno de los puntos mediante segmentos de recta, como sigue:



Claramente esta función cumple con las condiciones de la spline de grado 1. Así, tenemos que para este caso:

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ s_2(x) & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \\ s_n(x) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

donde:

- i) $S_j(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que 1
- ii) $S(x)$ tiene derivada continua de orden $k-1=0$.
- iii) $S(x_j) = y_j$, para $j = 0, 1, \dots, n$.

Por lo tanto, la spline de grado 1 queda definida como:

$$s(x) = \begin{cases} y_0 + f[x_1, x_0](x - x_0) & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ y_1 + f[x_2, x_1](x - x_1) & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \\ y_{n-1} + f[x_n, x_{n-1}](x - x_{n-1}) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

donde $f[x_i, x_j]$ es la diferencia dividida de Newton.

FUNCIONES SPLINES DE GRADO 2

Veamos un ejemplo concreto, consideremos los siguientes datos:

x	3	4.5	7	9
y	2.5	1	2.5	0.5

procedamos a calcular la interpolación por *splines* de grado 2.

Primero que nada, vemos que se forman tres intervalos: $[3, 4.5]$, $[4.5, 7]$, $[7, 9]$

En cada uno de estos intervalos, debemos definir una función polinomial de grado 2, como sigue:

$$s(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 & \text{si } x \in [3, 4.5] \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 & \text{si } x \in [4.5, 7] \\ a_3x^2 + b_3x + c_3 & \text{si } x \in [7, 9] \end{cases}$$

Hacemos que la *spline* pase por los puntos de la tabla de datos, es decir, se debe cumplir que:

$$s(3) = 2.5, \quad s(4.5) = 1, \quad s(7) = 2.5, \quad s(9) = 0.5$$

Así, se forman las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} s(3) = 2.5 &\Rightarrow 9a_1 + 3b_1 + c_1 = 2.5 \\ s(4.5) = 1 &\Rightarrow \begin{cases} (4.5)^2 a_1 + 4.5b_1 + c_1 = 1 \\ (4.5)^2 a_2 + 4.5b_2 + c_2 = 1 \end{cases} \\ s(7) = 2.5 &\Rightarrow \begin{cases} 49a_2 + 7b_2 + c_2 = 2.5 \\ 49a_3 + 7b_3 + c_3 = 2.5 \end{cases} \\ s(9) = 0.5 &\Rightarrow 81a_3 + 9b_3 + c_3 = 0.5 \end{aligned}$$

Hasta aquí, tenemos un total de 6 ecuaciones con 9 incógnitas.

El siguiente paso es manejar la existencia de las derivadas continuas. En el caso de las splines de grado 2, necesitamos que la spline tenga derivada continua de orden $k-1=1$, es decir, primera derivada continua.

Calculamos primero la primera derivada:

$$s'(x) = \begin{cases} 2a_1x + b_1 & \text{si } x \in [3, 4.5] \\ 2a_2x + b_2 & \text{si } x \in [4.5, 7] \\ 2a_3x + b_3 & \text{si } x \in [7, 9] \end{cases}$$

Vemos que esta derivada está formada por segmentos de rectas, que pudieran presentar discontinuidad en los cambios de intervalo. Es decir, las posibles discontinuidades son $x = 4.5$ y $x = 7$. Por lo tanto para que $s'(x)$ sea continua, se debe cumplir que:

$$2a_1(4.5) + b_1 = 2a_2(4.5) + b_2 \Rightarrow 9a_1 + b_1 = 9a_2 + b_2$$

También debe cumplirse que:

$$2a_2(7) + b_2 = 2a_3(7) + b_3 \Rightarrow 14a_2 + b_2 = 14a_3 + b_3$$

Así, tenemos un total de 8 ecuaciones vs. 9 incógnitas; esto nos da un grado de libertad para elegir alguna de las incógnitas. Elegimos por simple conveniencia $a_1 = 0$.

De esta forma, tenemos un total de 8 ecuaciones con 8 incógnitas. Estas son las siguientes:

$$\begin{aligned} 3b_1 + c_1 &= 2.5 & 49a_3 + 7b_3 + c_3 &= 2.5 \\ 4.5b_1 + c_1 &= 1 & 81a_3 + 9b_3 + c_3 &= 0.5 \\ 20.25a_2 + 4.5b_2 + c_2 &= 1 & b_1 &= 9a_2 + b_2 \\ 49a_2 + 7b_2 + c_2 &= 2.5 & 14a_2 + b_2 &= 14a_3 + b_3 \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones tiene la siguiente forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20.25 & 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 49 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & -9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 1 & 0 & -14 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1 \\ 1 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

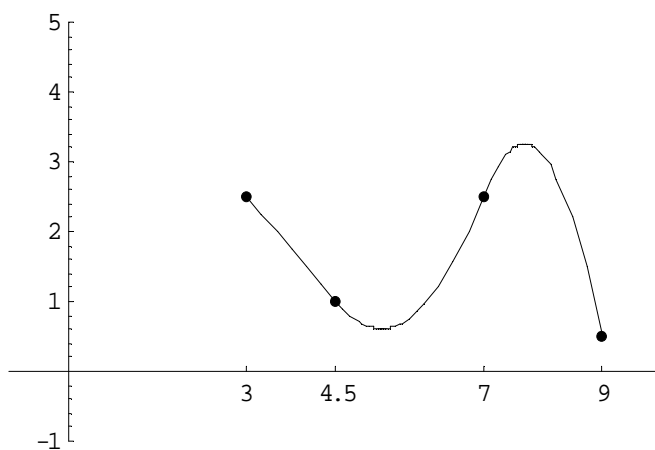
Se obtiene la siguiente solución:

$$\begin{array}{lll} b_1 = -1 & a_2 = 0.64 & a_3 = -1.6 \\ c_1 = 5.5 & b_2 = -6.76 & b_3 = 24.6 \\ & c_2 = 18.46 & c_3 = -91.3 \end{array}$$

Sustituyendo estos valores (junto con $a_1 = 0$), obtenemos la función spline cuadrática que interpola la tabla de datos dada:

$$s(x) = \begin{cases} -x + 5.5 & \text{si } x \in [3, 4.5] \\ 0.64x^2 - 6.76x + 18.46 & \text{si } x \in [4.5, 7] \\ -1.6x^2 + 24.6x - 91.3 & \text{si } x \in [7, 9] \end{cases}$$

La gráfica que se muestra a continuación, contiene tanto los puntos iniciales de la tabla de datos, así como la spline cuadrática.



El siguiente caso, que es el más importante en las aplicaciones, sigue exactamente los mismos pasos del ejemplo que acabamos de resolver, solamente que en vez de trabajar con polinomios cuadráticos, lo hace con polinomios cúbicos.

FUNCIONES SPLINES CUBICAS

Dados $n + 1$ datos:

x	x_0	x_1	\dots	x_n
y	y_0	y_1	\dots	y_n

Una *spline* cúbica que interpola estos datos, es una función $S(x)$ definida como sigue:

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ s_1(x) & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

donde cada $s_i(x)$ es un polinomio cúbico; $s_i(x_i) = y_i$, para toda $i = 0, 1, \dots, n$ y tal que $s(x)$ tiene primera y segunda derivadas continuas en $[x_0, x_n]$.

Ejemplo 1.

Interpolar los siguientes datos mediante una *spline* cúbica:

x	2	3	5
y	-1	2	-7

Solución.

Definimos un polinomio cúbico en cada uno de los intervalos que se forman:

$$s(x) = \begin{cases} a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & \text{si } x \in [2, 3] \\ a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & \text{si } x \in [3, 5] \end{cases}$$

A continuación, hacemos que se cumpla la condición de que la *spline* debe pasar por los puntos dados en la tabla. Así, tenemos que:

$$s(2) = -1 \Rightarrow 8a_1 + 4b_1 + 2c_1 + d_1 = -1$$

$$s(3) = 2 \Rightarrow 27a_1 + 9b_1 + 3c_1 + d_1 = 2$$

$$s(5) = -7 \Rightarrow 125a_2 + 25b_2 + 5c_2 + d_2 = -7$$

Ahora calculamos la primera derivada de $s(x)$:

$$s'(x) = \begin{cases} 3a_1x^2 + 2b_1x + c_1 & \text{si } x \in [2, 3] \\ 3a_2x^2 + 2b_2x + c_2 & \text{si } x \in [3, 5] \end{cases}$$

Al igual que en el caso de las *splines* cuadráticas, se presentan ecuaciones que pueden presentar discontinuidad en los cambios de intervalo; las posibles discontinuidades son los puntos donde se cambia de intervalo, en este caso $x = 3$. Para evitar esta discontinuidad, evaluamos $x = 3$ en los dos polinomios e igualamos:

$$3a_1(3)^2 + 2b_1(3) + c_1 = 3a_2(3)^2 + 2b_2(3) + c_2 \Rightarrow 27a_1 + 6b_1 + c_1 = 27a_2 + 6b_2 + c_2$$

Análogamente procedemos con la segunda derivada:

$$s''(x) = \begin{cases} 6a_1x + 2b_1 & \text{si } x \in [2, 3] \\ 6a_2x + 2b_2 & \text{si } x \in [3, 5] \end{cases}$$

Para lograr que $s''(x)$ sea continua:

$$6a_1(3) + 2b_1 = 6a_2(3) + 2b_2 \Rightarrow 18a_1 + 2b_1 = 18a_2 + 2b_2$$

En este punto contamos con 6 ecuaciones y 8 incógnitas, por lo tanto tenemos 2 grados de libertad; en general, se agregan las siguientes 2 condiciones:

$$s''(x_0) = 0$$

$$s''(x_n) = 0$$

De lo cual vamos a obtener:

$$s''(2) = 0 \Rightarrow 6a_1(2) + 2b_1 = 0 \quad \therefore 12a_1 + 2b_1 = 0$$

$$s''(5) = 0 \Rightarrow 6a_2(5) + 2b_2 = 0 \quad \therefore 30a_2 + 2b_2 = 0$$

Con lo cual, hemos completado un juego de 8 ecuaciones vs. 8 incógnitas, el cual es el siguiente:

$$\begin{aligned} 8a_1 + 4b_1 + 2c_1 + d_1 &= -1 \\ 27a_1 + 9b_1 + 3c_1 + d_1 &= 2 \\ 27a_2 + 9b_2 + 3c_2 + d_2 &= 2 \\ 125a_2 + 25b_2 + 5c_2 + d_2 &= -7 \\ 27a_1 + 6b_1 + c_1 &= 27a_2 + 6b_2 + c_2 \\ 18a_1 + 2b_1 &= 18a_2 + 2b_2 \\ 12a_1 + 2b_1 &= 0 \\ 30a_2 + 2b_2 &= 0 \end{aligned}$$

Cuya forma matricial es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 27 & 6 & 1 & 0 & -27 & -6 & -1 & 0 \\ 18 & 2 & 0 & 0 & -18 & -2 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

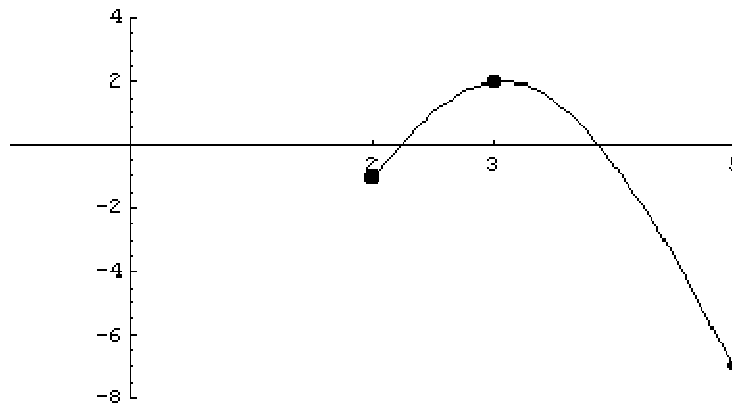
Obtenemos la siguiente solución:

$$\begin{aligned} a_1 &= -1.25 & a_2 &= 0.625 \\ b_1 &= 7.5 & b_2 &= -9.375 \\ c_1 &= -10.75 & c_2 &= 39.875 \\ d_1 &= 0.5 & d_2 &= -50.125 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en nuestra función inicial, vemos que la *spline* cúbica para la tabla de datos dada, queda definida como sigue:

$$s(x) = \begin{cases} -1.25x^3 + 7.5x^2 - 10.75x + 0.5 & \text{si } x \in [2,3] \\ 0.625x^3 - 9.375x^2 + 39.875x - 50.125 & \text{si } x \in [3,5] \end{cases}$$

Mostramos la gráfica correspondiente a este ejercicio,



Prácticamente ni se nota que se trata de dos polinomios diferentes. Esto es debido a las condiciones que se impusieron sobre las derivadas de la función. Esta finura casi artística, es la que permite aplicar las splines cúbicas, para cuestiones como el diseño de letras por computadoras, o bien a problemas de aplicación donde la interpolación que se necesita es de un carácter bastante delicado, como podría tratarse de datos médicos sobre algún tipo de enfermedad.

Ejemplo 2.

Interpolar los siguientes datos utilizando *splines* cúbicas:

x	-1	1	2	4
y	-1	1	5	-2

Solución.

Nuevamente, definimos un polinomio cúbico en cada uno de los intervalos:

$$s(x) = \begin{cases} a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & \text{si } x \in [-1,1] \\ a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & \text{si } x \in [1,2] \\ a_3x^3 + b_3x^2 + c_3x + d_3 & \text{si } x \in [2,4] \end{cases}$$

Después, hacemos que la spline pase por los puntos dados en la tabla. Así, tenemos que:

$$s(-1) = -1 \text{ implica que, } -a_1 + b_1 - c_1 + d_1 = -1$$

$$s(1) = 1 \text{ implica que,}$$

$$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 1$$

$$a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 1$$

$$s(2) = 5 \text{ implica que,}$$

$$8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 = 5$$

$$8a_3 + 4b_3 + 2c_3 + d_3 = 5$$

Y finalmente $s(4) = -2$ implica que,

$$64a_3 + 16b_3 + 4c_3 + d_3 = -2$$

Enseguida, calculamos la primera derivada:

$$s'(x) = \begin{cases} 3a_1x^2 + 2b_1x + c_1 & \text{si } x \in [-1,1] \\ 3a_2x^2 + 2b_2x + c_2 & \text{si } x \in [1,2] \\ 3a_3x^2 + 2b_3x + c_3 & \text{si } x \in [2,4] \end{cases}$$

Vemos entonces, que las posibles discontinuidades de $s'(x)$ son $x = 1$ y $x = 2$. Por lo tanto, para hacer que $s'(x)$ sea continua, igualamos las ecuaciones correspondientes en ambos valores:

$$3a_1 + 2b_1 + c_1 = 3a_2 + 2b_2 + c_2$$

$$12a_2 + 4b_2 + c_2 = 12a_3 + 4b_3 + c_3$$

Ahora procedemos a calcular la segunda derivada:

$$s''(x) = \begin{cases} 6a_1x + 2b_1 & \text{si } x \in [-1,1] \\ 6a_2x + 2b_2 & \text{si } x \in [1,2] \\ 6a_3x + 2b_3 & \text{si } x \in [2,4] \end{cases}$$

Nuevamente, las posibles discontinuidades son $x = 1$ y $x = 2$. Por lo tanto, para que $s''(x)$ sea continua, se igualan las ecuaciones en ambos valores:

$$6a_1 + 2b_1 = 6a_2 + 2b_2 \rightarrow 3a_1 + b_1 = 3a_2 + b_2$$

$$12a_2 + 2b_2 = 12a_3 + 2b_3 \rightarrow 6a_2 + b_2 = 6a_3 + b_3$$

Finalmente, se agregan las condiciones de que la doble derivada se anule en los puntos inicial y final de la tabla. En este caso,

$$s''(-1) = 0 \rightarrow -6a_1 + 2b_1 = 0 \rightarrow -3a_1 + b_1 = 0$$

$$s''(4) = 0 \rightarrow 24a_3 + 2b_3 = 0 \rightarrow 12a_3 + b_3 = 0$$

Con esto tenemos un juego de doce ecuaciones con doce incógnitas:

$$-a_1 + b_1 - c_1 + d_1 = -1$$

$$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 1$$

$$a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 1$$

$$8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 = 5$$

$$8a_3 + 4b_3 + 2c_3 + d_3 = 5$$

$$64a_3 + 16b_3 + 4c_3 + d_3 = -2$$

$$3a_1 + 2b_1 + c_1 = 3a_2 + 2b_2 + c_2$$

$$12a_2 + 4b_2 + c_2 = 12a_3 + 4b_3 + c_3$$

$$3a_1 + b_1 = 3a_2 + b_2$$

$$6a_2 + b_2 = 6a_3 + b_3$$

$$-3a_1 + b_1 = 0$$

$$12a_3 + b_3 = 0$$

Este sistema tiene la siguiente forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & 1 & 0 & -12 & -4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obtenemos la solución:

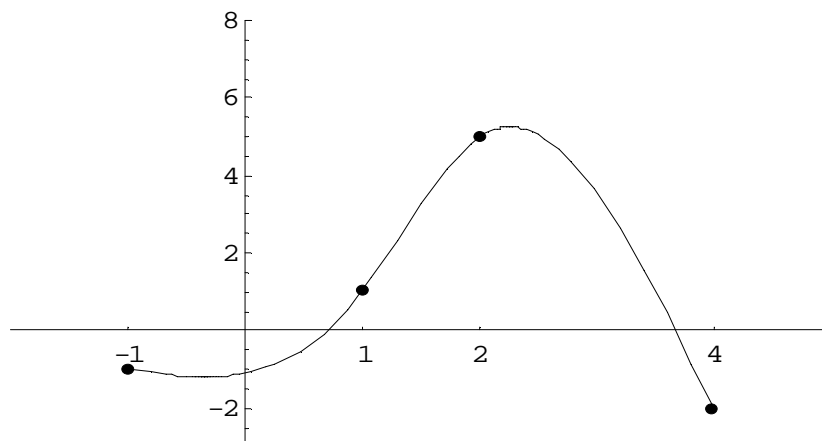
$$a_1 = \frac{51}{140} \quad b_1 = \frac{153}{140} \quad c_1 = \frac{89}{140} \quad d_1 = -\frac{153}{40} \quad a_3 = \frac{24}{35} \quad b_3 = -\frac{288}{35} \quad c_3 = \frac{1867}{70} \quad d_3 = -\frac{732}{35}$$

$$a_2 = -\frac{21}{10} \quad b_2 = \frac{297}{35} \quad c_2 = -\frac{473}{70} \quad d_2 = \frac{48}{35}$$

Por lo tanto, la *spline* cúbica es:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{51}{140}x^3 + \frac{153}{140}x^2 + \frac{89}{140}x - \frac{153}{40} & \text{si } x \in [-1,1] \\ -\frac{21}{10}x^3 + \frac{297}{35}x^2 - \frac{473}{70}x + \frac{48}{35} & \text{si } x \in [1,2] \\ \frac{24}{35}x^3 - \frac{288}{35}x^2 + \frac{1867}{70}x - \frac{732}{35} & \text{si } x \in [2,4] \end{cases}$$

Finalmente, mostramos la gráfica correspondiente



En forma general

Dada una función f definida en $[a, b]$ y un conjunto de números, llamados los nodos

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, un interpolante cúbico de trazador, S , para f es una función que satisface las siguientes condiciones:

- S es un polinomio cúbico, denotado S_j , en el subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$;
- $S(x_j) = f(x_j)$ para cada $j = 0, 1, \dots, n$;
- $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$;
- $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$;
- $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$;
- se satisface una del siguiente conjunto de condiciones de frontera:
 - $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (frontera libre)
 - $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ (frontera sujeta)

La ecuación b) indica que el *spline* cúbico se ajusta a cada uno de los puntos, que es continua c), y que es continua en pendiente y curvatura d) y e), a lo largo de toda la región generada por los puntos.

Para construir el interpolante cúbico de trazador para una función f dada, se pueden aplicar las condiciones de la definición a los polinomios cúbicos.

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \quad \text{para cada } j = 0, 1, \dots, n-1.$$

$$\text{Para } x = x_j: S_j(x_j) = a_j = f(x_j)$$

y si se aplica la condición (c),

$$\begin{aligned} a_{j+1} &= S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}) \\ &= a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3 \quad \text{para cada } j = 0, 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

introducimos la notación $h_j = x_{j+1} - x_j$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Si, además definimos $a_n = f(x_n)$, se puede ver que esto implica que la ecuación

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \quad \text{para cada } j = 0, 1, \dots, n-1.$$

De una manera similar, definimos $b_n = S'(x_n)$ y observamos

$$S'_j(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2$$

$$\text{para } x = x_j: S'_j(x_j) = b_j \quad \text{para cada } j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Aplicando la condición (d),

$$\begin{aligned} b_{j+1} &= S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1}) \\ &= b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 \quad \text{para cada } j = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Otra relación entre los coeficientes se puede obtener

$$S''_j(x) = 2c_j + 6d_j(x - x_j)$$

para $x = x_j$: $S_j''(x_j) = 2c_j$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Aplicando la condición (e) y definiendo $c_n = S''(x_n)/2$:

$$\begin{aligned} c_{j+1} &= S_{j+1}''(x_{j+1}) = S_j''(x_{j+1}) \\ &= c_j + 3d_j h_j \text{ para cada } j = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Despejando d_j de la ecuación anterior y sustituyendo este valor

$$d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} \quad (1)$$

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + \frac{(c_{j+1} - c_j)}{3} h_j^2 = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3} (2c_j + c_{j+1})$$

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3} (2c_j + c_{j+1}) \quad (2)$$

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 = b_j + 2c_j h_j + (c_{j+1} - c_j) h_j = b_j + (c_j + c_{j+1}) h_j$$

$$b_{j+1} = b_j + (c_j + c_{j+1}) h_j \quad (3)$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$.

y luego con una reducción del índice, para b_{j-1} ,

$$b_j = b_{j-1} + (c_j + c_{j-1}) h_{j-1} \quad (4)$$

De (2) despejo b_j ,

$$b_j = \frac{(a_{j+1} - a_j)}{h_j} - \frac{h_j}{3} (2c_j + c_{j+1}) \quad (5)$$

con una reducción del índice

$$b_{j-1} = \frac{(a_j - a_{j-1})}{h_{j-1}} - \frac{h_{j-1}}{3} (c_j + 2c_{j-1}) \quad (6)$$

Reemplazando (5) y (6) en (4), tenemos

$$b_j = b_{j-1} + (c_j + c_{j-1}) h_{j-1} \quad (4)$$

$$\frac{(a_{j+1} - a_j)}{h_j} - \frac{h_j}{3} (2c_j + c_{j+1}) = \frac{(a_j - a_{j-1})}{h_{j-1}} - \frac{h_{j-1}}{3} (c_j + 2c_{j-1}) + h_{j-1} (c_j + c_{j-1})$$

Operando algebraicamente, nos queda

$$h_{j-1} c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j) c_j + h_j + c_{j+1} = \frac{3}{h_j} (a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}} (a_j - a_{j-1}) \quad (7)$$

para cada $j = 1, 2, \dots, n-1$. Este sistema tiene como incógnitas sólo a $\{c_j\}_{j=0}^n$ ya que los valores

$\{h_j\}_{j=0}^{n-1}$ y $\{a_j\}_{j=0}^{n-1}$ están dados por el espaciamiento entre los nodos $\{x_j\}_{j=0}^n$ y los valores de f en los nodos.

Nótese que una vez que se conocen los valores de c_j encontrar las constantes restantes b_j de la ecuación (4) y d_j de la ecuación (1) y construir los polinomios cúbicos S_j es una cuestión sencilla.

Si se cumplen las condiciones de frontera libre, $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ implican que

$$0 = S''(x_0) = 2c_0 + 6d_0(x_0 - x_0)$$

$$\Rightarrow c_0 = 0$$

$$c_n = \frac{S''(x_n)}{2} = 0 \Rightarrow c_n = 0$$

Las dos ecuaciones $c_0 = 0$ y $c_n = 0$ junto con las ecuaciones en (7) producen un sistema lineal descrito por la ecuación vectorial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A es la matriz de $(n+1)$ por $(n+1)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & 0 \\ 0 & h_3 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

