Splines Cúbicos

Roberto J. León Vásquez
rleon@alumnos.inf.utfsm.cl

Jorge Constanzo
jconstan@alumnos.inf.utfsm.cl

Valparaíso, 24 de octubre de 2006

1. Interpolación con Splines

Una *función spline* está formada por varios polinomios, cada uno definido sobre un subintervalo, que se unen entre sí obedeciendo a ciertas condiciones de continuidad.
Supongamos que disponemos de $n+1$ puntos, a los que denominaremos *nodos*, tales que:

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n \tag{1}$$

Supongamos además que se ha fijado un entero $k \geq 0$. Decimos entonces que una **función spline de grado k** con nodos en $t_0, t_1, ..., t_n$ es una función S que satisface las condiciones:

1. En cada intervalo $[t_{i-1}, t_i)$, S es un polinomio de grado menor o igual a k.
2. S tiene una derivada de orden $(k-1)$ continua en $[t_0, t_n]$

Los splines de grado 0 son funciones constantes por zonas. Una forma explícita de presentar un spline de grado 0 es la siguiente:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = c_0, & x \in [t_0, t_1) \\ S_1(x) = c_1, & x \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) = c_{n-1}, & x \in [t_{n-1}, t_n) \end{cases}$$

Los intervalos $[t_{i-1}, t_i)$ no se intersectan entre sí, por lo que no hay ambigüedad en la definición de la función en los nodos. Un spline de grado 1 se puede definir por:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 x + b_0, & x \in [t_0, t_1) \\ S_1(x) = a_1 x + b_2, & x \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1} x + b_{n-1}, & x \in [t_{n-1}, t_n) \end{cases}$$

En las figuras 1 y 2 se muestran las gráficas correspondientes a los splines de grado cero y de grado 1 respectivamente.

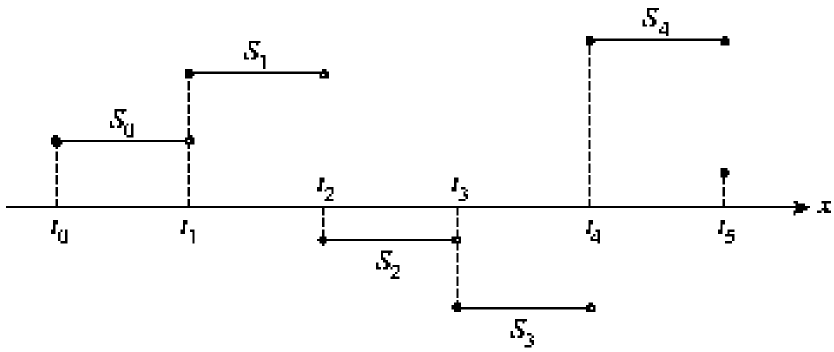

Figura 1: Spline de Grado Cero

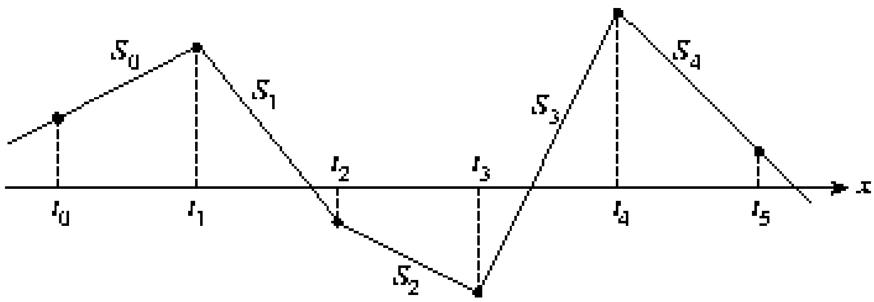

Figura 2: Spline de Grado 1

2. Splines Cúbicos

El spline cúbico ($k = 3$) es el spline más empleado, debido a que proporciona un excelente ajuste a los puntos tabulados y su cálculo no es excesivamente complejo.

Sobre cada intervalo $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{n-1}, t_n]$, S está definido por un polinomio cúbico diferente. Sea S_i el polinomio cúbico que representa a S en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, por tanto:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = S_0, & x \in [t_0, t_1) \\ S_1(x) = S_1, & x \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) = S_{n-1}, & x \in [t_{n-1}, t_n) \end{cases}$$

Los polinomios S_{i-1} y S_i interpolan el mismo valor en el punto t_i, es decir, se cumple:

$$S_{i-1}(t_i) = y_i = S_i(t_i) \qquad (1 \leq i \leq n-1)$$

por lo que se garantiza que S es continuo en todo el intervalo. Además, se supone que S' y S'' son continuas, condición que se emplea en la deducción de una expresión para la función del spline cúbico.

Aplicando las condiciones de continuidad del spline S y de las derivadas primera S' y segunda S'', es posible encontrar la expresión analítica del spline.La expresión resultante es:

$$\begin{aligned} S_i(x) \quad = \quad & \tfrac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \tfrac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 \\ & + \left(\tfrac{y_{i+1}}{h_i} + \tfrac{z_{i+1}h_i}{6}\right)(x - t_i) + \left(\tfrac{y_i}{h_i} - \tfrac{z_i h_i}{6}\right)(t_{i+1} - x) \end{aligned}$$

En la expresión anterior, $h_i = t_{i+1} - t_i$ y $z_0, z_1, \ldots, z_n$ son incógnitas. Para determinar sus valores, utilizamos las condiciones de continuidad que deben cumplir estas funciones. El resultado es:

$$h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})z_i + h_i z_{i+1} = \frac{6}{h_{i-1}}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1})$$

La ecuación anterior, con $i = 1, 2, \ldots, n-1$ genera un sistema de $n-1$ ecuaciones lineales con $n+1$ incógnitas $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Podemos elegir z_0 y z_1 de forma arbitraria y resolver el sistema de ecuaciones resultante para obtener los valores de $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$. Una elección especialmente adecuada es hacer $z_0 = z_1 = 0$. La función spline resultante se denomina *spline cúbico natural* y el sistema de ecuaciones lineal expresado en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} u_1 & h_1 & & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & & \\ & h_2 & u_3 & h_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & & h_{n-2} & u_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \vdots \\ \nu_{n-2} \\ \nu_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

en donde:

$$
\begin{aligned}
h_i &= t_{i+1} - t_i \\
u_i &= 2(h_i + h_{i-1}) - \frac{h_{i-1}^2}{u_{i-1}} \\
b_i &= \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) \\
\nu_i &= b_i - b_{i-1} - \frac{h_{i-1}\nu_{i-1}}{u_{i-1}}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

```
input n,(t_i),(y_i)
for i = 0,1,...,n-1 do
    h_i ← t_{i+1} - t_i
    b_i ← 6(y_{i+1} - y_i)/h_i
end

u_1 ← 2(h_0 + h_1)
ν_1 ← b_1 - b_0
for i = 2,3,...,n-1 do
    u_i ← 2(h_i + h_{i-1}) - h_{i-1}^2/u_{i-1}
    ν_i ← b_i - b_{i-1} - h_{i-1}ν_{i-1}/u_{i-1}
end

z_n ← 0
for i = n-1,n-2,...,1 do
    z_i ← (ν_i - h_i z_{i+1})/u_i
end
z_0 ← 0
output (z_i)
```

Figura 3: Algoritmo para resolver los z_i

Este sistema de ecuaciones, que es tridiagonal, se puede resolver mediante eliminación gaussiana sin pivoteo.Un posible algoritmo para resolver este sistema se muestra en la figura 3.El valor del spline S en un punto x cualquiera interpolado se puede calcular de forma eficiente empleando la siguiente expresión:

$$S_i(x) = y_i + (x - t_i)\left[C_i + (x - t_i)\left[B_i + (x - t_i)A_i\right]\right] \tag{4}$$

en donde

$$
\begin{aligned}
Ai &= \frac{1}{6h_i}(z_{i+1} - z_i) \\
Bi &= \frac{z_i}{2} \\
Ci &= -\frac{h_i}{6}z_{i+1} - \frac{h_i}{3}z_i + \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

2.1. Ejercicio

Sea $f(x) = \sqrt{x}$, con $x \in [0, 3]$, y los puntos de apoyos se muestran en la siguiente tabla.

k	x	$f(x)$
0	0	0
1	0.5	0.7071
2	1	1
3	1.5	1.2247
4	2	1.4142
5	2.5	1.5811
6	3	1.7321

Primero, calculamos los coeficientes h_i, b_i,u_i y v_i, con las ecuaciones 3, dando por resultado:

i	h_i	b_i	u_i	v_i
0	0.5	8.4852	-	-
1	0.5	3.5148	2.0	-4.9704
2	0.5	2.6964	1.875	-3.7278
3	0.5	2.2740	1.86667	0.1757
4	0.5	2.0028	1.86607	-0.4695
5	0.5	1.8120	1.86603	-0.1454

Luego se calculan los z_i:

i	z_i
0	0
1	-1.9777
2	-2.0297
3	0.15590
4	-0.2307
5	-0.0779
6	0

A continuación construimos los Splines cúbicos a partir de las fórmulas 4 y 5.

$$\begin{aligned}
S_0(x) &= y_0 + (x - x_0)\left[C_0 + (x - x_0)\left[B_i + (x - x_0)A_i\right]\right]\\
S_1(x) &= y_1 + (x - x_1)\left[C_1 + (x - x_1)\left[B_i + (x - x_1)A_i\right]\right]\\
S_2(x) &= y_2 + (x - x_2)\left[C_2 + (x - x_2)\left[B_i + (x - x_2)A_i\right]\right]\\
S_3(x) &= y_3 + (x - x_3)\left[C_3 + (x - x_3)\left[B_i + (x - x_3)A_i\right]\right]\\
S_4(x) &= y_4 + (x - x_4)\left[C_4 + (x - x_4)\left[B_i + (x - x_4)A_i\right]\right]\\
S_5(x) &= y_5 + (x - x_5)\left[C_5 + (x - x_5)\left[B_i + (x - x_5)A_i\right]\right]
\end{aligned}$$

Donde: $y_i = f(x_i)$, y

i	A_i	B_i	C_i
0	-0.16481	0	1.41412
1	-0.00433	-0.98888	1.08024
2	0.18213	-1.01486	0.95683
3	-0.03221	0.07795	0.34002
4	0.01273	-0.11534	0.39147
5	0.00649	-0.03896	0.32148

A continuación se muestra un gráfico donde la línea azul describe la función $y = \sqrt{x}$, y la línea roja es la interpolación realizada con splines cúbicos. Podemos notar como el spline se va acomodando a la curva de la función y.

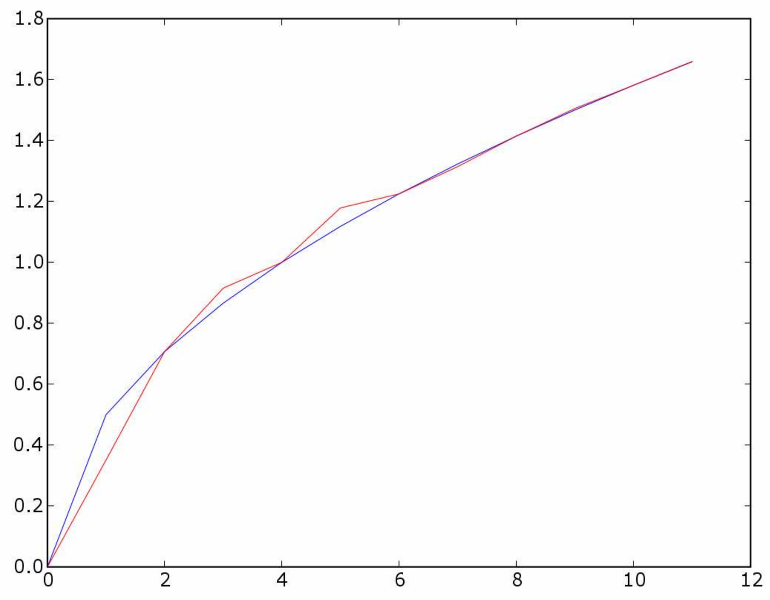

Figura 4: Gráfico comparativo