POLINOMIOS INTERPOLANTES O DE INTERPOLACIÓN

Presentación del problema:

"Para una función dada f(x) se desea determinar un polinomio P(x) de grado m, lo más bajo posible, el cual en los puntos pre-establecidos x_i $(i = 0,1,2,3.\ldots.)$ $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j$ tome los mismos valores que la función f(x); es decir :

P(xi) = f(xi) para todo i = 0,1,2,3,...

Al polinomio P(x) se le llama entonces polinomio de interpolación.

Analicemos un ejemplo concreto: " Determinar el polinomio de interpolación $L(x)$ de forma que los puntos:

$x_0 = -1$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$, tome los mismos valores que la función $f(x) = 3^x$

(¿En qué intervalo estamos trabajando ?)

Resolución : Sea $L(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ el polinomio. Para la obtención de los coeficientes $a_0; a_1; a_2$; se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

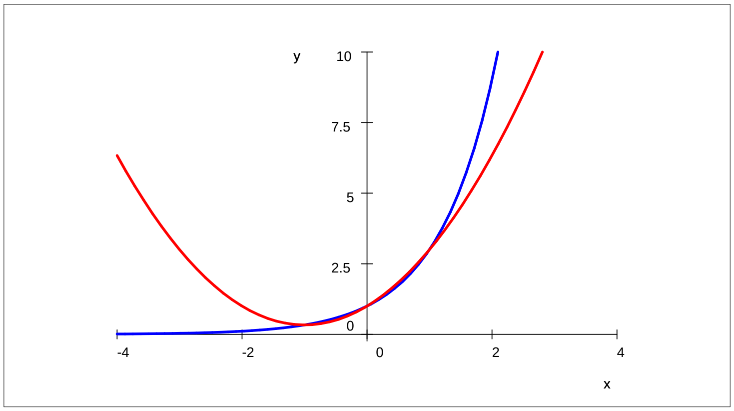
$$\begin{pmatrix} a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 = 3^{-1} \\ a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 = 3^0 \\ a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 = 3^1 \end{pmatrix}, \text{Solution is: } \left[a_0 = 1, a_1 = \tfrac{4}{3}, a_2 = \tfrac{2}{3}\right]$$

una vez resuelto (no nos vamos a detener en esta pequeñez)se obtiene :

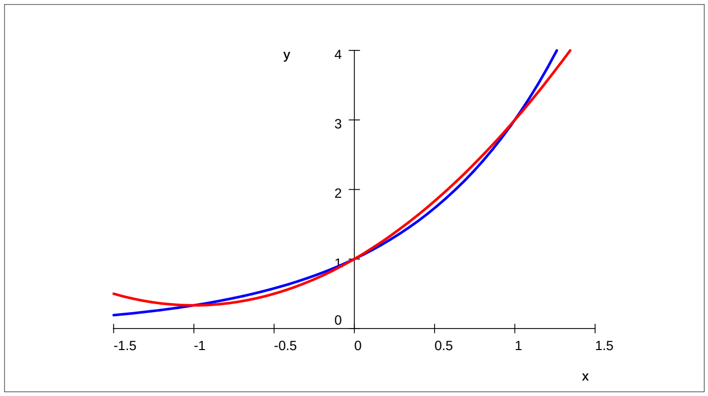
$a_0 = 1; a_1 = 4/3; a_2 = 2/3$

y por consiguiente $f(x) = 3^x \approx 1 + (\frac{4}{3})x + (\frac{2}{3})x^2$; en el intervalo: $[-1,1]$

Primer acercamiento...



Segundo acercamiento...para visualizar mejor en el intervalo $[-1;1]$



$f(x) = 3^x$ $\qquad$ $p(x) = 1 + (\frac{4}{3})x + (\frac{2}{3})x^2$

$$f\begin{pmatrix} -1 \\ -0.7 \\ -0.5 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0.7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3333333333 \\ 0.4634630568 \\ 0.5773502692 \\ 1.0 \\ 1.732050808 \\ 2.15766928 \\ 3.0 \end{pmatrix} \qquad p\begin{pmatrix} -1 \\ -0.7 \\ -0.5 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0.7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3333333333 \\ 0.3933333333 \\ 0.5 \\ 1.0 \\ 1.833333333 \\ 2.26 \\ 3.0 \end{pmatrix}$$

¿Y si utilizamos una serie de potencias?

$f(x) = 3^x =$

$$k(x) = 1 + x\ln 3 + \tfrac{1}{2}x^2\ln^2 3 \qquad k\begin{pmatrix} -1 \\ -0.7 \\ -0.5 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0.7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5048621918 \\ 0.5266738933 \\ 0.6015624758 \\ 1.0 \\ 1.700174765 \\ 2.064731098 \\ 2.702086769 \end{pmatrix}$$

Como una aplicación posible : $3^{1/2} = \sqrt{3} \approx 1 + (\frac{4}{3}) \cdot \frac{1}{2} + (\frac{2}{3}) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1.833333333$

Nota bene : ½ $\in [-1, 1]$; con ayuda de la calculadora : $\sqrt{3} = 1.732050808$

En general, entonces : Si $n \leq m$, se puede poner $n = m$, y los coeficientes a_i se determinan a partir del sistema de ecuaciones siguientė:

$$\left[\begin{array}{c} a_0 + a_1 x_0 + \ldots\ldots\ldots + a^n (x_0)^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \ldots\ldots\ldots + a^n (x_1)^n = y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 x_n + \ldots\ldots\ldots + a^n (x_n)^n = y_n \end{array}\right] \text{en donde } yi = f(xi) \;;$$

$(i = 0, 1, 2, 3\ldots\ldots)$

Polinomio interpolante de Lagrange

El polinomio $P(x) = L_n(x)$, cuyos coeficientes se determinan a partir del Sistema , se llama polinomio de interpolación de LAGRANGE, para la función f(x), que se representa por :

$$L_n(x) = \sum \frac{(x-x_0)\cdots\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_n)} \cdot y_i$$

en el caso de que los puntos de interpolación x_i sean equidistantes, al polinomio $L_n(x)$ se le da el nombre de polinomio de interpolación de Newton.

Sugerencia : Haga uso de los programas que se le han facilitado.(toolkit , o los del profe)

Para la tabla de valores siguiente , hallar la función apropiada mediante un polinomio de interpolación de Lagrange:

x	1	2	4
$F(x)$	0	5	21

Después de aplicar la fórmula dada se obtiene :

$$P_2(x) = 0 \cdot \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)-(1-4)} + 5 \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} + 21 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} \Rightarrow P_2(x) = x^2 + 2x - 3$$

Este proceso que se muestra a continuación se realizó con el Programa SWP

Ahora es posible evaluar por ejemplo : $P_2(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 - 3 = 12$

Sin embargo, aprovechando, el desarrollo de $L_n(x)$ con $x = 3$, se puede obtener directamente el valor 12. (pero es mucho mejor tener el polinomio aproximante...)

Más disquisiciones al respecto:

Primera tarea : graficar los puntos dados en la siguiente tabla de datos experimentales:

x	3.2	2.7	1.0	4.8	5.6
$F(x)$	22.0	17.8	14.2	38.3	51.7

¿Qué tipo de curva se ajusta mejor a este conjunto de puntos ?

Segunda tarea

serbachi@hotmail.com

Intentemos ajustar una curva cúbica a estos datos. Es decir un polinomio de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

• Se observa que tenemos cuatro coeficientes: a,b,c,d como incógnitas.

• p(x) debe “satisfacer” a los cinco puntos de la tabla.(recuerde lo que se entiende por “satisfacer en Matemáticas ...”

Si el punto $(3.2; 22.0)$,por ejemplo, satisface a $p(x)$, entonces se debería cumplir: $p(3.2) = 22.0$

x	3.2	2.7	1.0	4.8	5.6
$F(x)$	22.0	17.8	14.2	38.3	51.7

$$a_0 + a_1 \cdot (3.2) + a_3 \cdot (3.2)^2 + a_4 \cdot (3.2)^3 = 22.0$$

y tal cuestión debe ocurrir para todos los puntos de la tabla.)

• sin embargo , en la tabla , hay cinco puntos y las incógnitas son: $a_0; a_1; a_3; a_4$ (cuatro, para el que no sabe contar...)

• es necesario seleccionar cuatro puntos para determinar el polinomio.

• si elegimos los primeros cuatro puntos, tendremos el sistema de ecuaciones:

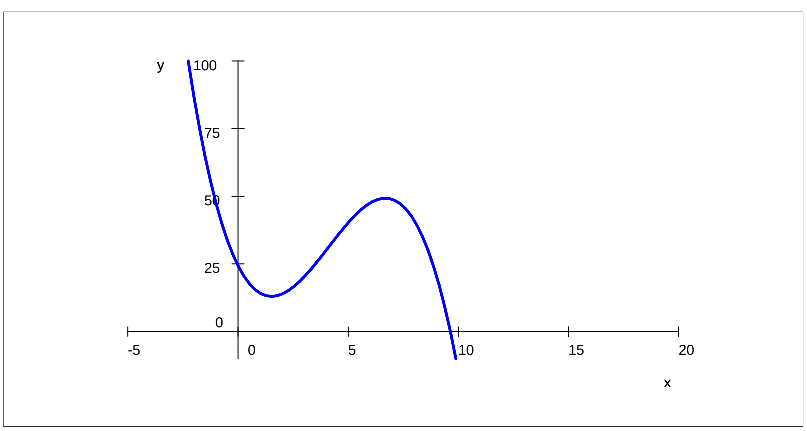
x	3.2	2.7	1.0	4.8	5.6
$F(x)$	22.0	17.8	14.2	38.3	51.7

$$\begin{bmatrix} a_0 + a_1 \cdot (3.2) + a_2 \cdot (3.2)^2 + a_3 \cdot (3.2)^3 = 22.0 \\ a_0 + a_1 \cdot (2.7) + a_2 \cdot (2.7)^2 + a_3 \cdot (2.7)^3 = 17.8 \\ a_0 + a_1 \cdot (1.0) + a_2 \cdot (1.0)^2 + a_3 \cdot (1.0)^3 = 14.2 \\ a_0 + a_1 \cdot (4.8) + a_2 \cdot (4.8)^2 + a_3 \cdot (4.8)^3 = 38.3 \end{bmatrix}$$, Solution is:

$$\{[a_3 = -0.5274801308, a_2 = 6.495227876, a_0 = 24.3499417, a_1 = -16.11768945]\}$$

y por ende el polinomio sería:

$$p(x) = 6.495227876x^2 - 16.11768945x - 0.5274801308x^3 + 24.3499417$$



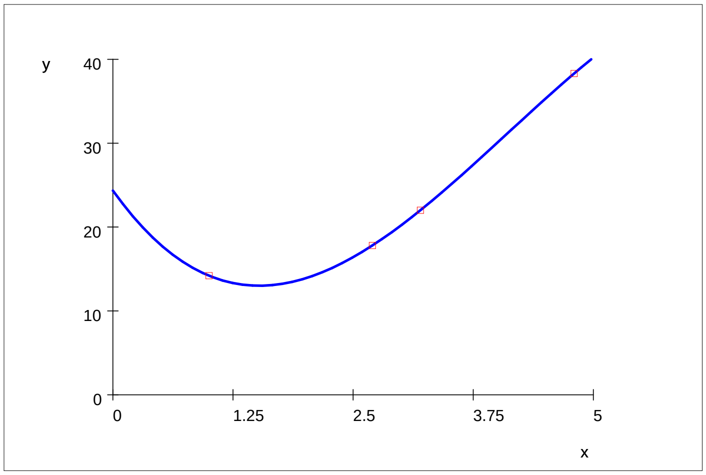
serbachi@hotmail.com

x	3.2	2.7	1.0	4.8
$F(x)$	22.0	17.8	14.2	38.3

$(3.2, 22.0)$ $(2.7, 17.8)$ $(1, 14.2)$ $(4.8, 38.3)$, son los puntos graficados....

$p(x) = 0$, Solution is: $9.640944169, 1.336373925 + 1.732715905i, 1.336373925 - 1.732715905i$

Como vemos tiene una raíz real y dos complejas.



....

• el que nos permite calcular, por ejemplo el valor de la función en algún punto, del intervalo de donde hemos tomado los puntos (¿ recuerda cuál es ?), por ejemplo en x $=$ 3 ; obtenemos el valor estimado 20,21 ; es decir $p(3) = 20.2119607$

Problemas con los que nos enfrentamos o dificultades:

• este procedimiento es tedioso (más aburrido que el profesor de administración...de la USM)
• obsérvese que si se desea incluir el quinto punto, se debe “hacer todo de nuevo”(lo que puede ser agradable o desagradable, dependiendo de la tarea a realizar..!)
• puede ser que a lo la mejor es más conveniente el ajuste con una curva de un grado diferente..
• finalmente, esta técnica conduce a un sistema de ecuaciones mal condicionado (averigüe Ud. que significa eso, no aturda al profe con tantas preguntas, Ud ya no es cabro chico..! m.d.h.)

MÉTODO MUY DIRECTO:
• el polinomio de Lagrange es quizás el método más simple para mostrar la existencia de un polinomio para interpolación con datos separados de manera no uniforme (recuerde la tabla de valores) Este tipo de datos , a menudo, son resultado de observaciones experimentales o de análisis de datos históricos.(ahora, menos bla,bla y más acción c.l.d.a.U.e.c)
• Supongamos que se tiene una tabla de datos:

i	0	1	2	3	4	5
x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$f(x)$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5

Obs (en relación a la notación): aquí f_0 corresponde a $f(x_0)$ y así sucesivamente.

Suposiciones : ninguna

• no se supone separación uniforme entre los valores xi , ni que estén en un orden particular, no obstante, todos los valores x_i deben ser distintos (¿Por qué ? Si reconsidera mirar de nuevo la forma Lagrangiana se dará cuenta, trate de pensar solito.)

• en consecuencia : por estos cuatro puntos es posible hacer pasar una cúbica(curva de tercer grado)

La forma lagrangiana es en forma expandida:

$$p_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \bullet f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \bullet f_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_0)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_0)(x_2-x_3)} \bullet f_2 + \ldots$$

¿Puede continuar Ud. escribiendo el término que falta ?

Tarea : Busque la pillería para recordar en forma práctica cómo se construye el polinomio.

Nota bene : el polinomio de Lagrange de otros grados de polinomios de interpolación, emplea este mismo patrón de formar una suma de polinomios, todos del grado deseado, teniendo “n+1” términos cuando el grado es “n”

Observaciones :

• para este tipo de cálculo son convenientes las calculadoras manuales.

• no es difícil escribir un programa de computadora que implemente el método.

• conviene revisar software del tipo : matlab; mathcad; swp; mathematica; mapple; entre otros.

• Un polinomio de interpolación, aunque pase por todos los puntos que se utilizaron en su construcción, en general no proporciona valores exactamente correctos cuando se usa para interpolación.

Más ejemplos: (para que los mastique Ud.)

Construya en cada caso el polinomio de grado mínimo para cada tabla adjunta:

x	-2	0	4	5
y	5	1	-3	1

x	1	2	-4
y	3	-5	4

Respuestas:

$p(x) = \frac{100}{840}x^3 - \frac{60}{840}x^2 - \frac{2200}{840}x + 1$ $\qquad$ $p(x) = -\frac{39}{40}x^2 - \frac{123}{30}x + \frac{252}{30}$

....

Diferencias divididas (para interpolación)

“El tratamiento de diferencias divididas supone que la función f(x) se conoce en varios valores de x.:

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
$f(x)$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4

1.- No se supone que las x estén uniformemente espaciadas o que estén en algún orden determinado.

2.- Considerando el polinomio de n-ésimo grado :

$P_n(x) = a_0 + (x-x_0)a_1 + (x-x_0)(x-x_1)a_2 + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)a3 + \ldots\ldots + (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}$

Si las a$_i$ se escogen de modo que $P_n(x) = f(x)$ en los $n+1$ puntos conocidos :

$(x_i;f_i)$; $i = 0,1,2,\ldots,n$; entonces $P_n(x)$ es un polinomio de interpolación.

3.- las a$_i$ se determinan fácilmente usando lo que se conoce como diferencias divididas de los valores tabulados.

4.- notación standard :

$f[x_{0,}x_1]$, es la primera diferencia dividida entre x_0 y x_1

$f[x_1,x_2]$, es la primera diferencia dividida entre x_1y x_2

$f[x_2,x_3]$, es la primera diferencia dividida entre x_2 y x_3

4.- las diferencias de segundo orden y de orden superior, se definen en términos de diferencias de orden inferior, así por ejemplo :

$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_{0,}x_1]}{x_2-x_0}$ $\quad f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_{2,}x_1]}{x_3-x_1}$

5.- aterrizando a un ejemplo numérico:

2.- $f(x) = 4x-3$

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.0 \\ 13.0 \\ 25.0 \end{pmatrix}$$

x_i	f_i	$f[x_{i,}x_{i+1}]$	$f[x_{i,}x_{i+1},x_{i+2}]$
2	5	$\frac{13-5}{4-2} = 4$	0
4	13	$\frac{25-13}{7-4} = 4$	
7	25		

$q(x) = 5+4(x-2)+0(x-0)(x-1) = 4x-3; \quad q(x) = 4x-3$

Ejemplo : Escriba el polinomio de interpolación de grado 2 que ajusta los datos de la tabla que se da a continuación, en todos los puntos, desde $x_0 = 1$ hasta $x_2 = 2$

x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i,}x_{i+1}]$	$f[x_{i,}x_{i+1},x_{i+2}]$
0	$a_0 = -1$	$a_1 = 1$	$a_2 = 1$
1	0	3	
2	3		

$p(x) = -1+1(x-0)+1(x-0)(x-1) \to p(x) = x^2-1$

como se puede observar: $p\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

....

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
0	-3	3	1
1	0	5	
2	5		

$\rightarrow \quad r(x) = -3+3(x-0)+1(x-0)(x-1) = 2x+x^2-3$

$r(x) = x^2+2x-3$

....

x_i	f_i	a_1	a_2
0	-3	$\frac{0-(-3)}{1-0} = 3$	$\frac{5-3}{2-0} = 1$
1	0	$\frac{5-(0)}{2-1} = 5$	
2	5		

$p(x) = -3+3(x-0)+1(x-0)(x-1)$

$p(x) = 2x+x^2-3$ $\qquad p\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

....

$h(x) = x^4-2x$ $\qquad h\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 12 \\ 75 \end{pmatrix}$

i	x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3},x_{i+4}]$
1	-1	3	$a_1 = \frac{0-3}{0-(-1)} = -3$	$a_2 = \frac{-1-(-3)}{1-(-1)} = 1$	$a_3 = \frac{7-1}{2-(-1)} = 2$	$a_4 = \frac{6-2}{3-(-1)} = 1$
2	0	0	$\frac{-1-0}{1-0} = -1$	$\frac{13-(-1)}{2-0} = 7$	$\frac{25-7}{3-0} = 6$	
3	1	-1	$\frac{12-(-1)}{2-1} = 13$	$\frac{63-13}{3-1} = 25$		
4	2	12	$\frac{75-12}{3-2} = 63$			
5	3	75				

$p_h(x) = 3+(-3)(x-(-1))+1(x-(-1))(x-0)+2(x-(-1))(x-0)(x-1)+1(x-(-1))(x-0)(x-1)(x$

$p_h(x) = 3+(-3)(x-(-1))+1(x-(-1))(x-0)+2(x-(-1))(x-0)(x-1)+1(x-(-1))(x-0)(x-1)(x$

$p_h(x) = x^4-2x$

$$p_h\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\\12\\75\end{pmatrix}$$

Ejemplo : Escriba el polinomio de interpolación de grado 3 que ajusta los datos de la tabla anterior, en todos los puntos, desde $x_0 = 3.2$ hasta $x_3 = 4.8$,

$P_3(x) = 22 + 8.4(x-3.2) + 2.856(x-3.2)(x-2.7) - 0.528(x-3.2)(x-2.7)(x-1)$

¿Cuál es el polinomio de cuarto grado que se ajusta en todos los cinco puntos?

Sólo tiene que sumarse otro término a $P_3(x)$, es decir :

$P_4(x) = P_3(x) + 0.256(x-3.2)(x-2.7)(x-1)(x-4.8)$

Cuando este método se usa para interpolación, se observa que es posible aplicar multiplicación anidada para reducir el número de operaciones aritméticas.

P.ej. para $x = 3$:

$P_3(x) = 22 + 8.4(x-3.2) + 2.856(x-3.2)(x-2.7) - 0.528(x-3.2)(x-2.7)(x-1)$

$P_3(x) = 22 + (x-3.2)(8.4 + (x-2.7)(2.856 - 0.528(x-1)))$

$P_3(3) = 20.212$

Ejercicios:

Completar la tabla de diferencias divididas siguiente y hallar el polinomio interpolante en cada caso: $(p(x) = 3 + x + 2x^2 - 4x^3)$

i	x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3},x_{i+4}]$
0	-3	126	$\frac{-442-126}{5-(-3)} = -71$	$\frac{-75-(-71)}{-1-(-3)} = -2$	$\frac{-14-(-2)}{0-(-3)} = -4$	$\frac{-4-(-4)}{4-0} = 0$
1	5	-442	$\frac{8-(-442)}{-1-5} = -75$	$\frac{-5-(-75)}{0-5} = -14$	$\frac{-10-(-14)}{4-5} = -4$	
2	-1	8	$\frac{3-8}{0-(-1)} = -5$	$\frac{-55-(-5)}{4-(-1)} = -10$		
3	0	3	$\frac{-217-3}{4-0} = -55$			
4	4	-217				

el polinomio viene dado por...

$p(x) = 126 - 71(x+3) + (-2)(x+3)(x-5) - 4(x+3)(x-5)(x+1)$

$p(x) = -4x^3 + 2x^2 + x + 3$

Adelantamos algunas aplicaciones

Obtención numérica de derivadas a partir de tablas de diferencias:

• Recordemos que el polinomio de interpolación de grado n, que se ajusta en los puntos: P_0 ; P_1; P_2; ....P_n es , en términos de diferencias divididas :

$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3},x_{i+4}]$

$f(x) = f[x_0] + f[x_{0,}x_1](x - x_0) + f[x_{0,}x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_{0,}x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots$

Si $P_n(x)$ coincide bien con f(x), al derivarlo, debe obtenerse un polinomio que se aproxime a la derivada

Si se deriva la expresión anterior resultá

$P'_n(x) = f[x_{0,}x_1] + f[x_{0,}x_1, x_2](x - x_1 + x - x_0) + f[x_{0,}x_1, \ldots, x_n] \bullet \sum \frac{(x-x_0)(x-x_1)........(x-x_{n-1})}{x-x_i}$ con i desde $i = 0$ hasta $i = n - 1$

• Si P$_n$(x) coincide bien con f(x), al derivarlo , debe obtenerse un polinomio que se aproxime a la derivada $f'(x)$

Sea $f(x) = x^2 - x + 1$, y tabule para $x = 0, 2, 3, 5, 6$

i	x_i	f_i	$f[x_{i,}x_{i+1}]$	$f[x_{i,}x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_{i,}x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_{i,}x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
0	0	1	$\frac{3-1}{2-0} = 1$	$\frac{4-1}{3-0} = 1$	$\frac{1-1}{3-0} = 0$	0
1	2	3	$\frac{7-3}{3-2} = 4$	$\frac{7-4}{5-2} = 1$	0	
2	3	7	$\frac{21-7}{5-3} = 7$	$\frac{10-7}{6-3} = 1$		
3	5	21	$\frac{31-21}{6-5} = 10$			
4	6	31				

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 21 \\ 31 \end{pmatrix}$$

$P'_n(x) = f[x_{0,}x_1] + f[x_{0,}x_1, x_2](x - x_1 + x - x_0) + f[x_{0,}x_1, \ldots, x_n] \bullet \sum \frac{(x-x_0)(x-x_1)........(x-x_{n-1})}{x-x_i}$

la derivada sería... $P'_n(x) = 1 + 1(2x - 2 - 0) = 2x - 1$

Otro ejemplo: $g(x) = 2x^2 + 3x - 4$

i	x_i	f_i	$f[x_{i,}x_{i+1}]$	$f[x_{i,}x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_{i,}x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	-2	-2	1	2	0
1	1	1	11	2	0
2	3	23	19	2	
3	5	61	13		
4	0	-4			

$$g\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 23 \\ 61 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aquí la derivada sería: $g'(x) = 1 + 2(2x - 1 - (-2)) = 4x + 3$

¿Se atreven con derivadas de orden superior?