Serie deTaylor y Maclaurin:

Theorem *Si f tiene una representación en serie de potencias(expansion) en a, ésta es:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad |x-a| < R$$

entonces los coeficientes están dados por la fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Sustituyendo la fórmula para c_n en la serie, obtenemos la siguiente forma para f, llamada la serie de *Taylor de la función f en* a (o alrededor de o *centrada en* a):

$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots$$

En el caso especial donde $a = 0$, obtenemos la siguiente serie, llamada *la serie de Maclaurin*:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

Las funciones que pueden ser representadas como series de potencias en "a" son llamadas *analíticas en* a.

Las funciones analíticas son infinitamente diferenciables en a ;esto es, ellas tienen derivadas de todo orden en a. Sin embargo, no todas las funciones infinitamente diferenciables son analíticas.

La suma parcial de una serie de Taylor está dada por:

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

T_n es un polinomio de grado n llamado el polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f en "a"

Theorem *Si $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, donde T_n es el polinomio de Taylor de f en a y*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

para $|x-a| < R$, entonces f es iguala la suma de su serie de Taylor en el intervalo $|x-a| < R$; esto es, f es analítica en a.

Theorem *(Taylor's Formula) Si f tiene $n+1$ derivadas en un intervalo I que contiene al número a, entonces para x en I existe un número z estrictamente entre x y a tal que el término residual en la serie de Taylor puede ser expresado como:*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Remark (1) *Para el caso especial $n = 0$, si sustituimos $x = b$ y $z = c$ en la Fórmula de Taylor , obtenemos:*

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$$

Este resultado es el Teorema del valor medio.

Remark *La expresión for $R_n(x)$ es conocida como la forma de Lagrange del término residual*

En la aplicación de la fórmula de Taylor, la siguiente ecuación es a menudo muy útil:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{Para cada número real } x$$

Series de Maclaurin importantes son

Maclaurin Series	Interval of Convergence
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$	$(-1,1)$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$	$(-\infty,\infty)$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$	$(-\infty,\infty)$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$	$(-\infty,\infty)$
$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$	$[-1,1]$

Notabene: Obsérvese que si hacemos $x = 1$ en $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$, Ud. obtendrá una expresión para el número e como una suma de infinitos términos:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

Serie de Taylor

La serie de Maclaurin es un caso especial de la serie de Taylor más general. La *serie de Taylor* de f expandida sobre $x = a$ está dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

y aquí se halla expandida en potencias de: $x - a$.

Usando el SWP:

For Taylor series, enter the number of terms and the point of expansion in the Series dialog box. To find the Taylor series of $\ln x$ expanded about $x = 1$, choose Powers Series. In the dialog box, select the desired number of terms and expand about the point $x - 1$.

- ▸ Power Series

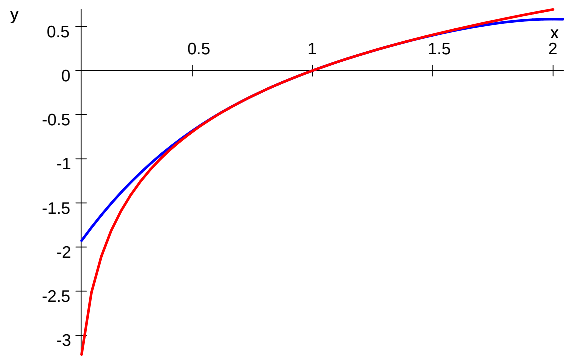
$$\ln x = (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x-1)^3 - \tfrac{1}{4}(x-1)^4 + O\left((x-1)^5\right)$$

A comparison between $\ln x$ and the polynomial $(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$ is illustrated graphically in the following figure.

- ▸ Plot 2D + Rectangular

$\ln x$

$(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4$



You can produce the following power series expansions.

▸ Power Series

$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3+\frac{1}{32}(x-2)^4+O\left((x-2)^5\right)$

$\sin x = -(x-\pi)+\frac{1}{6}(x-\pi)^3+O\left((x-\pi)^5\right)$

$\sqrt{x} = 1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3-\frac{5}{128}(x-1)^4+O\left((x-1)^5\right)$

$\csc x = 1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)^2+\frac{5}{24}\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)^4+O\left(\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)^5\right)$

$2\sin^2 x = 2(x-\pi)^2-\frac{2}{3}(x-\pi)^4+O\left((x-\pi)^6\right)$

$1-\cos 2x = 2(x-\pi)^2-\frac{2}{3}(x-\pi)^4+O\left((x-\pi)^5\right)$

Maclaurin Series

The *Maclaurin series* of a function f is the series

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

where $f^{(n)}(0)$ indicates the nth derivative of f evaluated at 0.

To expand a function $f(x)$ in a Maclaurin series (power series about $x=0$), choose Power Series, specify desired Number of Terms, and then specify Expand in Powers of x. With $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ and 10 terms, the result is as follows.

▸ Power Series

$\frac{\sin x}{x} = 1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4-\frac{1}{5040}x^6+\frac{1}{362880}x^8+O(x^9)$

The $O(x^9)$ term indicates that all the remaining terms in the series contain at least x^9 as a factor. (In fact, the truncation error is of order x^{10} in this case.) The odd powers of x have coefficients 0.

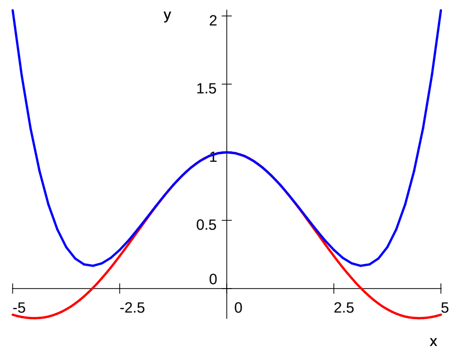
Plot 2D provides an excellent visual comparison between a function and an approximating polynomial.

- Plot 2D + Rectangular

$\frac{\sin x}{x}, 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4$

- Plot 2D + Rectangular

$\frac{\sin x}{x}, 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4$



To determine which graph corresponds to which equation, evaluate one of the expressions where the graphs show some separation. For example, $\frac{\sin 4}{4} = -.1892006238$, and hence the graph of $\frac{\sin x}{x}$ is the one that is negative at $x = 4$.

The following are additional examples of Maclaurin series expansions.

- Power Series

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 + O(x^6)$$

$$\tan^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + O(x^{10})$$

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 - \frac{1}{315}x^8 + O(x^{10})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + O(x^7)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 + O(x^{10})$$

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{90}x^6 + O(x^7)$$

Remember that output can be copied and pasted (with ordinary word-processing tools) to create input for further calculations. In particular, select and delete the $+O(x^n)$ expression to convert the series into a polynomial. It is reassuring to note that, if the first few terms of the

Maclaurin series for e^x are multiplied by the first few terms of the Maclaurin series for $\sin x$, then the result is the same as the first few terms of the Maclaurin series for $e^x \sin x$.

▸ Expand, Polynomials + Sort

$$\left(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{120}x^5\right)\left(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5\right)$$

$$= x + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}x^5 + x^2 - \tfrac{1}{90}x^6 - \tfrac{1}{360}x^7 + \tfrac{1}{2880}x^9 + \tfrac{1}{14400}x^{10}$$

$$= \tfrac{1}{14400}x^{10} + \tfrac{1}{2880}x^9 - \tfrac{1}{360}x^7 - \tfrac{1}{90}x^6 - \tfrac{1}{30}x^5 + \tfrac{1}{3}x^3 + x^2 + x$$

Taylor Series

The Maclaurin series is a special case of the more general Taylor series. The *Taylor series* of f expanded about $x = a$ is given by

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

and hence is expanded in powers of $x - a$.

For Taylor series, enter the number of terms and the point of expansion in the Series dialog box. To find the Taylor series of $\ln x$ expanded about $x = 1$, choose Powers Series. In the dialog box, select the desired number of terms and expand about the point $x - 1$.

▸ Power Series

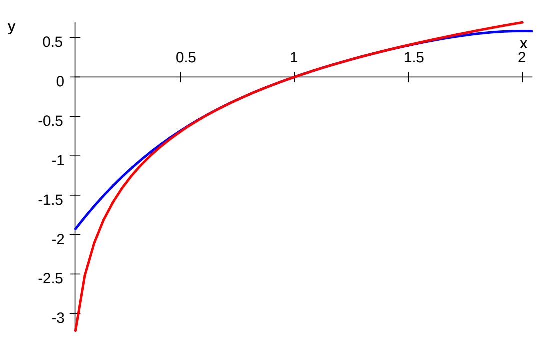
$$\ln x = (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x-1)^3 - \tfrac{1}{4}(x-1)^4 + O\left((x-1)^5\right)$$

A comparison between $\ln x$ and the polynomial $(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$ is illustrated graphically in the following figure.

▸ Plot 2D + Rectangular

$\ln x$

$(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$



You can produce the following power series expansions.

- Power Series

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{1}{32}(x-2)^4 + O\left((x-2)^5\right)$$

$$\sin x = -(x-\pi) + \frac{1}{6}(x-\pi)^3 + O\left((x-\pi)^5\right)$$

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4 + O\left((x-1)^5\right)$$

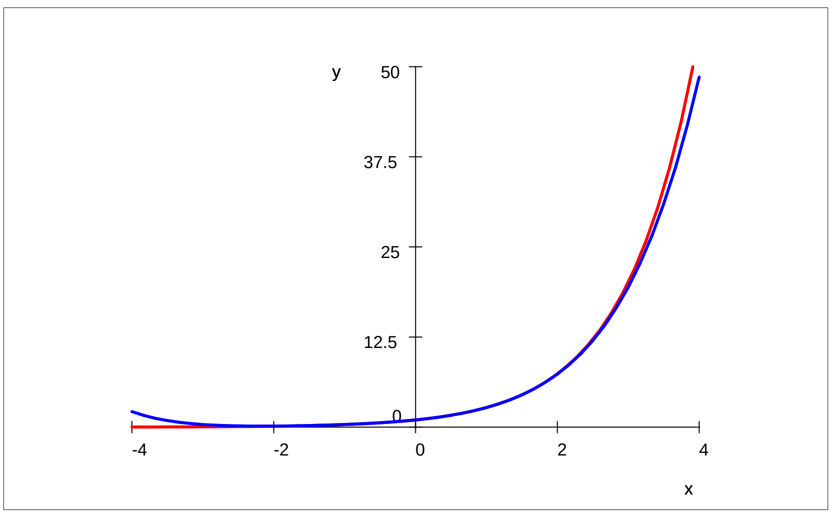
$$\csc x = 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)^2 + \frac{5}{24}\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)^4 + O\left(\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)^5\right)$$

$$2\sin^2 x = 2(x-\pi)^2 - \frac{2}{3}(x-\pi)^4 + O\left((x-\pi)^6\right)$$

$$1 - \cos 2x = 2(x-\pi)^2 - \frac{2}{3}(x-\pi)^4 + O\left((x-\pi)^5\right)$$

1.- Desarrollar la serie de Taylor para la función: $f(x) = e^x$ en potencias de "x"

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + O(x^7)$$



En la figura se muestran las gráficas asociadas a $f(x) = e^x$ y a la nueva función dada por $g(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6$ en donde $f(x) \approx g(x)$

Como se observa, en la figura,hay presente un intervalo, en donde ambas gráficas "casi" coinciden. $e^4 = 54.598$

$$g(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6$$

se calcularán algunos valores para visualizar la diferencia entre ellas, con algunos valores en el intervalo $[-4, 4]$

$$\begin{array}{ccc} g(-4)-f(-4) & & 2.1372 \\ g(-3)-f(-3) & & 0.31271 \\ g(-2)-f(-2) & = & 0.02022 \\ g(-1)-f(-1) & & 1.7611\times 10^{-4} \\ g(0)-f(0) & & 0.0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} g(1)-f(1) & & -2.2627\times 10^{-4} \\ g(2)-f(2) & & -3.3501\times 10^{-2} \\ g(3)-f(3) & = & -0.67304 \\ g(3.5)-f(3.5) & & -2.162 \\ g(4)-f(4) & & -6.0426 \end{array}$$

serbachi@hotmail.com

Aplicaciones posibles:

Cálculo de algunos límites:

▲$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362\,880}x^9 + O(x^{10})$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362\,880}x^9}{x}$

$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{5040}x^6 + \frac{1}{362\,880}x^8 + 1 \right) = 1$

▲$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 - \frac{1}{40\,320}x^8 + O(x^{10})$

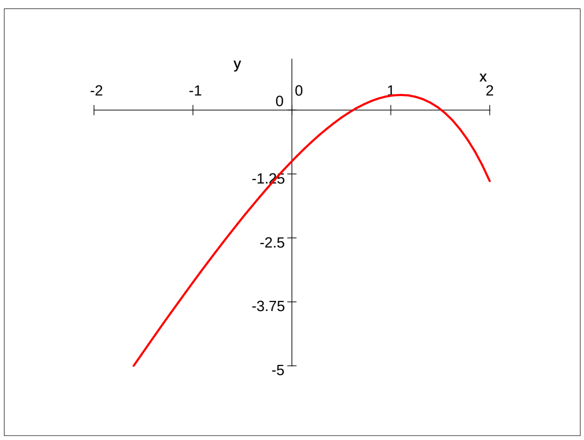
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 - \frac{1}{40\,320}x^8}{x}$:

$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{720}x^5 - \frac{1}{40\,320}x^7 \right) = 0$

Estos ejemplos son sólo una muestra de lo que se podría hacer.

Resolución de ecuaciones trascendentes(no son posibles resolver mediante métodos elementales)

por ejemplo: $3x - e^x = 0$, Solution is: $\{[x = 0.619\,06]\}$



según la gráfica tiene a lo menos dos soluciones, el SWP entrega una de ellas, usando solve+numeric, por otro método que se estudiará más adelante, es posible determinar ambas(pero nó simultáneamente.)

Con la expansión de e^x en uns serie de potencioas de x, veremos qué ocurre:

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$

$3x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) = 0 \to 2x - \frac{1}{2}x^2 - 1 = 0 \to x^2 - 4x + 2 = 0$, Solution is: $\{[x = 0.585\,79], [x = 3.414\,2]\}$

el valor $x = 0.585\,79$ obtenido mediante esta burda aproximación es sin embargo bastante cercano al valor obtenido por el programa $x = 0.619\,06$, al aproximar a un decimal.

Comprobemos la situación: $3x - e^x = 0$; sea $f(x) = 3x - e^x$

$$\begin{bmatrix} f(0.58579) \\ f(0.61906) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.03904 \\ -1.4705 \times 10^{-6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.03904 \\ -0.0000014705 \end{bmatrix}$$

Suponiendo que el valor calculado por el programa es "sufientemente bueno" calcularemos el porcentaje de error:

$$\frac{(0.61906 - 0.58579)}{0.61906} \times 100 = 5.3743\%$$

Puede ser que en un ejemplo como el presente no tenga mucho sentido realizar este trabajo,pero sí lo tiene en otras situaciones, en cualquier caso, la idea era mostrar una aplicación sencilla.

Cálculo de integrales:

Hay integrales(muchísimas en verdad...) que no se pueden resolver mediante métodos elementales(métodos de integración vistos anteriormente), y la utilización de series de potencias puede ser de gran ayuda.

Así por ejemplo: $\int e^{x^2} dx$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 + \frac{1}{120}x^{10} + O(x^{12})$$

$$\int e^{x^2} dx \approx \int \left(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 + \frac{1}{120}x^{10}\right) dx$$

$$\int e^{x^2} dx \approx x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{42}x^7 + \frac{1}{216}x^9 + \frac{1}{1320}x^{11}$$

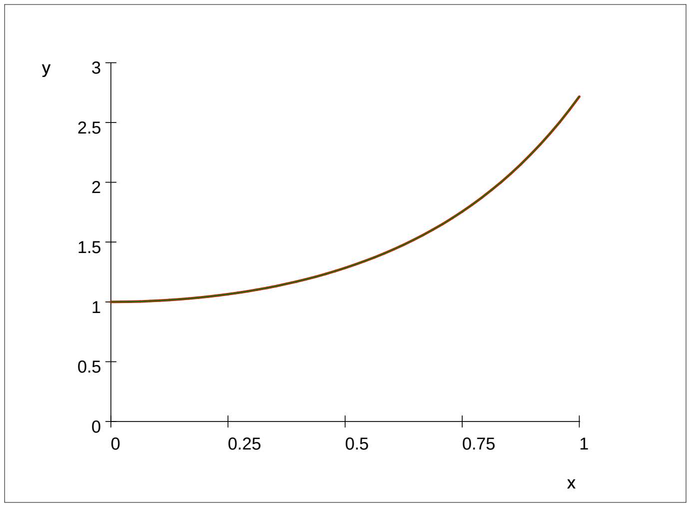
Se puede observar los resultados numéricos asociados a cada integral definida,los cuales son bastante cercanos, el primero obtenido mediante el SWP y el segundo mediante la aproximación empleada.

$$\int_0^{.6} e^{x^2} dx = 0.38393\sqrt{\pi} = 0.68050$$

$$\int_0^{.6} \left(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 + \frac{1}{120}x^{10}\right) dx = 0.68049$$

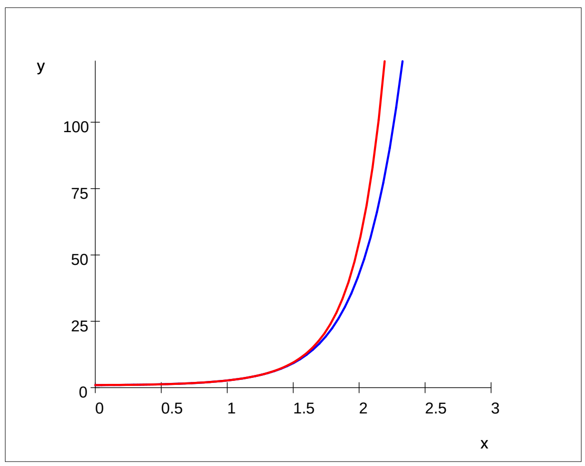
Ahora bien, esta aproximación será mejor o peor según el intervalo en donde estemos integrando.

$$e^{x^2}, 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 + \frac{1}{120}x^{10}$$



la gráfica anterior está definida en el intervalo $[0,1]$, observemos otro intervalo.

$e^{x^2}, 1+x^2+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{24}x^8+\frac{1}{120}x^{10}$



En la gráfica,obtenida en el intervalo $[1,3]$, se observa cómo los valores obtenidos para cada función: e^{x^2} y su aproximación,se van alejando uno de otro.

Para una mayor exactitud, e^{x^2} se deberían considerar una mayor cantidad de términos para la expansión.

Resolución de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dy}{dx}+e^x = x$$

$$e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+O(x^5)$$

$$\frac{dy}{dx}+1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4 = x \to \frac{dy}{dx} = -\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4\right)$$

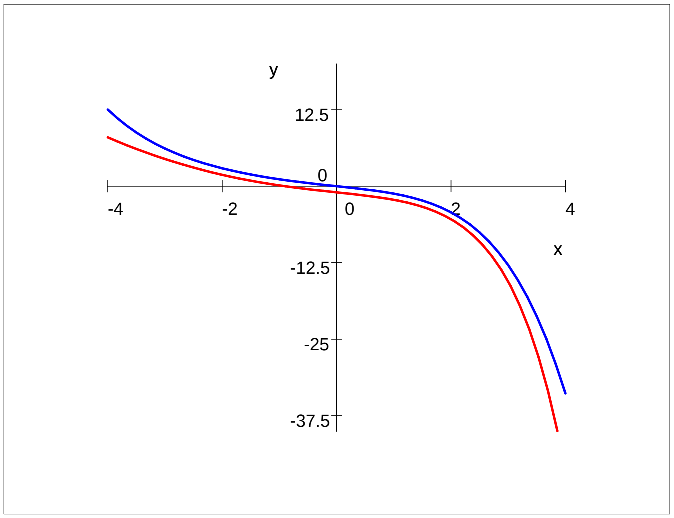
$$\int dy = -\int\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4\right)dx$$

$$y = -x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{120}x^5$$

$$\frac{dy}{dx} + e^x = x \rightarrow \int dy = \int (x - e^x) dx \rightarrow y = \frac{x^2}{2} - e^x$$

aunque la apariencia de ambos resultados es diferente, veamos qué tan cercana es una función de la otra.

$$\frac{x^2}{2} - e^x, -x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5$$



Ejercicios: Obtenga los primeros seis términos del desarrollo en serie de Taylor de las siguientes funciones en potencias de "x": (la respuestas se dan después del signo igual)

1.- $f(x) = \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{64}x^5 + O(x^6)$

2.-$r(x) = \frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 + O(x^5)$

3.- $h(x) = e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + O(x^6)$

4.- $k(x) = \ln(x^2 + x) = \ln x + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + O(x^5)$

5.- $l(x) = \frac{x}{x+2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{32}x^5 - \frac{1}{64}x^6 + O(x^7)$

Obtenga los primeros seis términos del desarrollo en serie de Taylor de las siguientes funciones en potencias de "x-1": (la respuestas se dan después del signo igual)

1.- $g(x) = x^3 = 1 + (3x - 3) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3 + O\left((x-1)^6\right)$

2.- $r(x) = \frac{e^x}{x} = e + \frac{1}{2}e(x-1)^2 - \frac{1}{3}e(x-1)^3 + \frac{3}{8}e(x-1)^4 - \frac{11}{30}e(x-1)^5 + O\left((x-1)^6\right)$

3.- $h(x) = e^{x^2} = e + 2e(x-1) + 3e(x-1)^2 + \frac{10}{3}e(x-1)^3 + \frac{19}{6}e(x-1)^4 + \frac{13}{5}e(x-1)^5 + O\left((x-1)^6\right)$

4.- $l(x) = \frac{x}{x+2} = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{9}x - \frac{2}{9}\right) - \frac{2}{27}(x-1)^2 + \frac{2}{81}(x-1)^3 - \frac{2}{243}(x-1)^4 + \frac{2}{729}(x-1)^5 + O\left((x-1)^6\right)$

Consejo: Trate de practicar con el SWP, para comprobar los resultados.

serbachi@hotmail.com