Método de Newton

Muchos problemas en ciencias, ingenieria, y matematicas consisten en el problema de encontarar la raíz de una ecuación de la forma $f(x) = 0$ en donde f es una función diferenciable. Para una ecuación cuadrática como $ax^2 + bx + c = 0$ existe una muy conocida fórmula para la raíz:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para ecuaciones de tercer y cuarto grado hay también fórmulas para obtener las raíces pero son extremadamente complicadas. Si f es un polinomio de grado 5 o superior, no existe tal fórmula.

No hay una fórmula que esté disponible para encontrar una raíz exacta de una ecuación trascendental como por ejemplo $\cos x = x$. Se han desarrollado métodos, sin embargo que dan una *aproximación* a las raíces de ecuaciones. Uno de estos métodos es el llamado método de Newton o de *Newton-Raphson*.

Newton's Method for Approximating Roots of Equations

El método de Newton está basado en la observación de que la línea recta tangente es una buena aproximación local a la gráfica de una función.

Sea $(x_0, f(x_0))$ un punto en la gráfica de la función f. La línea recta tangente está dada por la ecuación:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

Esta línea corta al eje X cuando $y = 0$. El valor correspondiente de x está dado por:

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

En general, dada una aproximación x_n ala raíz de una function $f(x)$, la línea recta tangente en el punto $(x_n, f(x_n))$ corta al eje X en el punto $(x_{n+1}, 0)$ en donde

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Dado x_0, el método de Newton produce una lista x_1, x_2, $\ldots$, x_n de aproximaciones a la raíz de f.

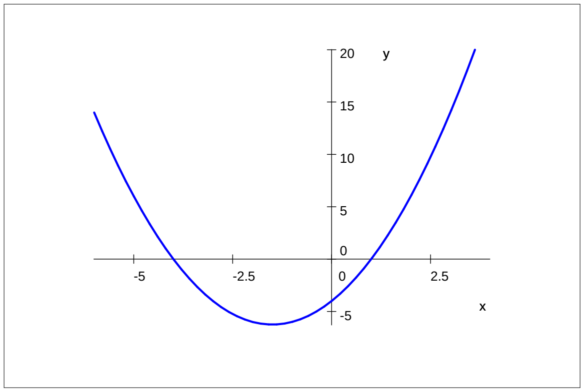
La *función iteración Newton* para una función f es la función g definida por:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Ejemplo de su aplicación:(partiremos con un ejemplo sencillo)

Sea $f(x) = x^2 + 3x - 4$; hallaremos las raíces de f(x) (los ceros),es decir los valores de "x" que hacen f(x)=0

Como ayuda se muestra su gráfica:



Se puede observar que esta función posee dos raíces: $x^2 + 3x - 4 = 0$, Solution is:

$\{[x = -4.0], [x = 1.0]\}$

Derivando la función f, tenemos: $f'(x) = 2x + 3$

Armamos la función: $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$g(x) = x - \frac{x^2+3x-4}{2x+3}$

x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$	
1.5	$g(1.5) = 1.0417$	$f(1.0417) = 0.21023889$
1.0417	$g(1.0417) = 1.0003$	$f(1.0003) = 0.00150009$
1.0003	$g(1.0003) = 1.0$	$f(1) = 0$
1.0	$g(1.0) = 1$	
1	$g(1) = 1$	

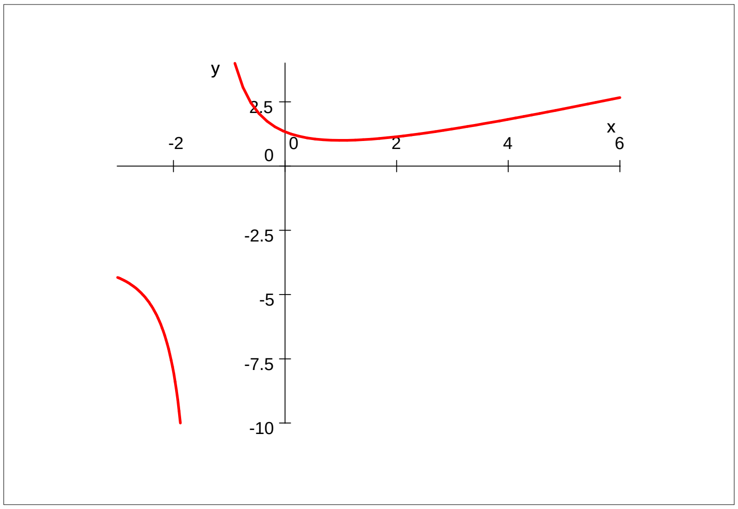
En la tabla se puede observar que la sucesión de valores converge a "1"

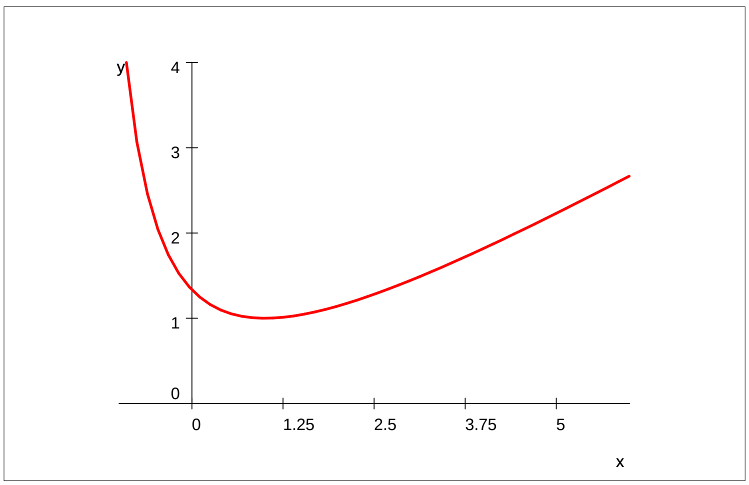
Se puede observar ahora que: $f(1) = 0$

Partiremos ahora con $x_i = 5$

x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$
5	$g(5) = 2.2308$
2.2308	$g(2.2308) = 1.203$
1.203	$g(1.203) = 1.0076$
1.0076	$g(1.0076) = 1.0$
1	$g(1) = 1$

Nuevamente la sucesión converge a 1;Explicación gráfica:





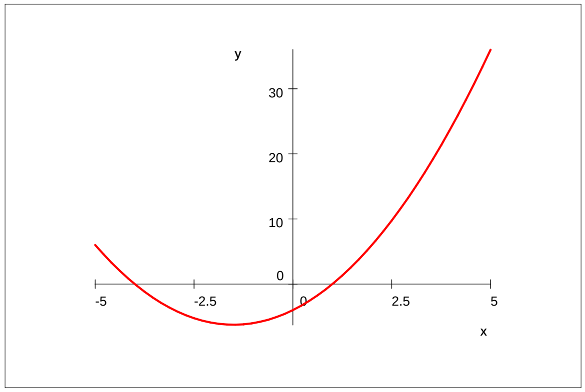
La gráfica nos ayuda a determinar el intervalo en donde se encuentran las raíces.
Se realizará el mismo trabajo anterior, pero ahora situándonos cerca de -5

Partiremos ahora con $x_i = -5$

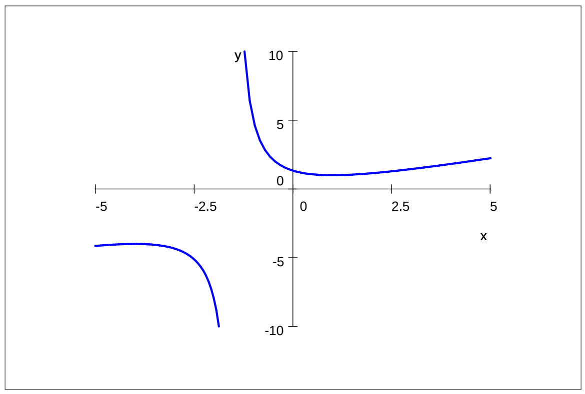
x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$
-5	$g(-5) = -4.1429$
-4.1429	$g(-4.1429) = -4.0039$
-4.0039	$g(-4.0039) = -4.0$
-4.0	$g(-4.0) = -4.0$
-4.0	$g(-4.0) = -4.0$

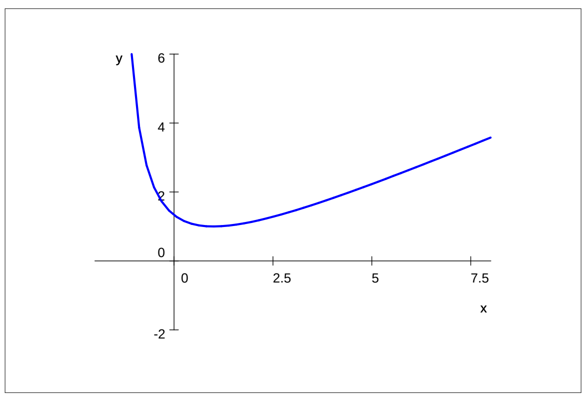
Vemos que el valor al que converge la sucesión de sucesivas aproximaciones es "4"
Y Podemos comprobar que : $f(-4) = 0$

Se muestra la gráfica de $y = f(x) = x^2 + 3x - 4$



Resulta interesante observar la gráfica de $y = g(x) = x - \frac{x^2+3x-4}{2x+3}$





Esta función (la última) está asociada a un tema altamente interesante, que en la comunidad científica es conocido por el nombre de "caos", término acuñado por por un trabajo redactado por el matemático James A. Yorke , de la Universidad de Mariland en College Park.

....

Ejercicio: Deducir una fórmula para calcular $\sqrt[n]{N}$

Sea: $N = x^n \to N - x^n = 0$, y consideremos: $f(x) = N - x^n$
$f'(x) = -nx^{n-1}$

"armamos" la fórmula de recurrencia: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$x_{i+1} = x_i - \frac{N - x_i^n}{-nx_i^{n-1}} \to x_{i+1} = x_i + \frac{N - x_i^n}{nx_i^{n-1}}$

La que podemos aplicar para calcular: $\sqrt[3]{34}$ ($\sqrt[3]{34} \approx 3.23961180$ resultado dado por el SWP.)

Aquí : $f(x) = 34 - x^3$ y $g(x) = x_{i+1} = x_i + \frac{34 - x_i^3}{3x_i^2}$

$g(x) = x + \frac{34 - x^3}{3x^2}$

Partiremos ahora con $x_i = 3$, ya que $3^3 = 27$ valor cercano a 34

x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$
3	$g(3) = 3.2593$
3.2593	$g(3.2593) = 3.2397$
3.2397	$g(3.2397) = 3.2396$
3.2396	$g(3.2396) = 3.2396$

se podría seguir calculando..

se puede observar que $f(3.2396) = 3.7156 \times 10^{-4} = 0{,}00037156 \approx 0$

en este caso, el programa está mostrando solamente hasta cuatro decimales,intente realizar el proceso con una calculadora.(tarea.)

....

Deducción de la fórmula $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x)}$; a partir de la serie de Taylor:

La serie de Taylor , se puede representar por :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} + \ldots + R_n$$

Al truncar la serie de Taylor, después de la primera derivada, se obtiene la siguiente aproximación: $f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$, en la intersección con el eje X ; se tiene $f(x_{i+1}) = 0$, de este modo: $f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) = 0$

$$f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) = -f(x_i) \to (x_{i+1} - x_i) = -\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \to$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Notabene: Recordar:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots$$

....

Otros ejemplos:

Resolver la ecuación: $e^{-x} - x = 0$
Sea $f(x) = e^{-x} - x$
derivando...$f'(x) = -e^{-x} - 1$
construimos la fórmula de recurrencia: $g(x_i) = x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \rightarrow g(x) = x - \frac{e^{-x} - x}{-e^{-x} - 1} \rightarrow g(x) = x + \frac{e^{-x} - x}{e^{-x} + 1}$$

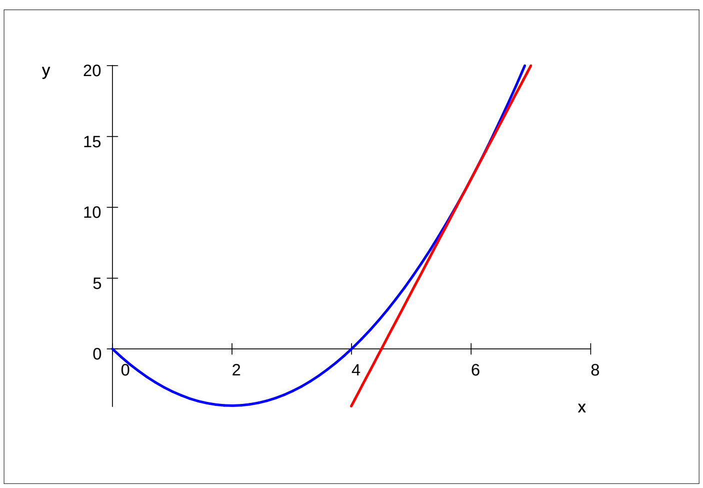
Partiremos ahora con $x_i = 1$

x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$
0	$g(0) = 0.5$
0.5	$g(0.5) = 0.56631$
0.56631	$g(0.56631) = 0.56714$
0.56714	$g(0.56714) = 0.56714$

se puede observar que : $f(0.56714) = 5.1565 \times 10^{-6} = 0{,}0000051565 \approx 0$
Intente seguir el trabajo con la calculadora...
....

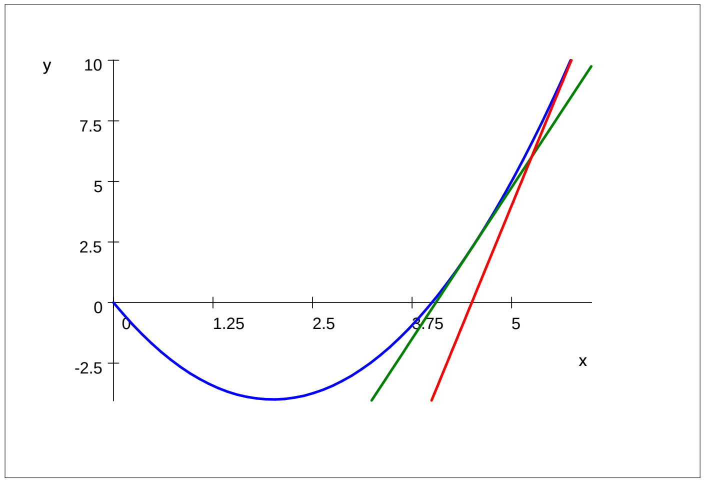
Deducción gráfica de $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

$f(x) = (x-2)^2 - 4$



Si consideramos $(x_i, f(x_i))$ como el punto de tangencia.En este ejemplo, el punto (6;12) al derivar la función $f(x) = (x-2)^2 - 4$, se obtiene: $f'(x) = 2x - 4$, y la pendiente evaluada en x=6 $f'(6) = 8$; por ende la ecuación de la línea recta tangente vienbe dada por: $y - 12 = 8(x-6)$,es decir: $y = 8x - 36$

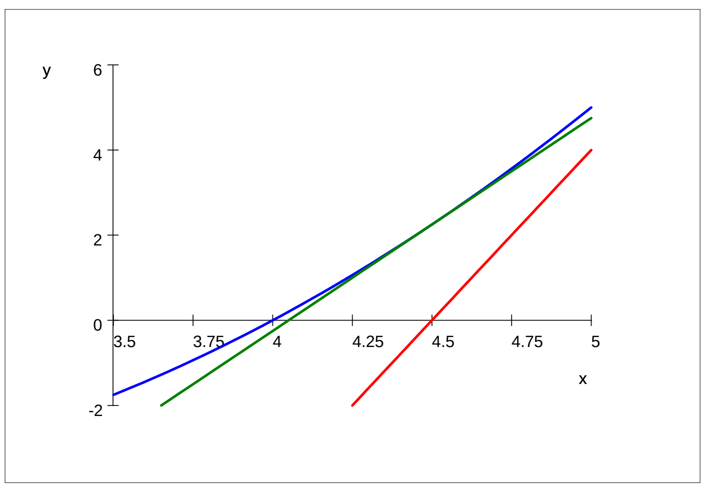
Esta línea recta corta al eje x en $x = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} = 4.5$



Con este valor 4.5 (bastante cerca a la raíz) calculamos la ordenada que corresponde a $x = 4.5$
$f(4.5) = (4.5 - 2)^2 - 4 = 2.25$

Tenemos ahora un nuevo punto de la gráfica de la función,desde donde trazaremos una nueva línea recta tangente...$f'(4.5) = 2 \cdot 4.5 - 4 = 5.0$

La nueva línea recta tangente: $y - 2.25 = 5(x - 4.5)$, Solution is: $\{[y = 5.0x - 20.25]\}$



En la priemera iteración: la línea roja y en la segunda la línea verde... La azul corresponde a la gráfica de la función cuya raíz se está tratando de encontrar.

Esta línea recta corta al eje X en el punto $(x_{i+1}, 0)$ de ahí que se cumple: $f'(x_i) = \dfrac{f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$,de donde , después de despejar x_{i+1} se obtiene: $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

Al cambiar luego x_i (valor elegido en primera instancia) por x_{i+1} (valor calculado), la línea recta tangente, corta al eje X en otro punto, esta vez más cercano a la raíz de y=f(x), es decir en donde ésta corta al eje X.

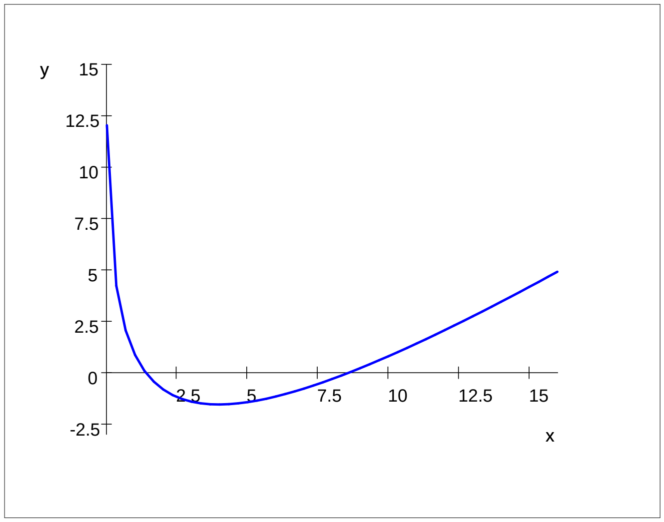
....

Tarea: Resolver los ejercicios de la guía dada para el método de bisección, esta vez usando el método de Newton-Raphson.(y mucha suerte..)

Un último ejercicio explicativo:

serbachi @hotmail.com

Encontrar una raíz para la ecuación: $x - 4\ln x = 0$



Definimos la función: $f(x) = x - 4\ln x$. Y derivamos obteniendo... : $f'(x) = 1 - \frac{4}{x}$

construimos la función de iteración de Newton: $g(x) = x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \rightarrow g(x) = x - \frac{x - 4\ln x}{1 - \frac{4}{x}} \rightarrow g(x) = x - \frac{x^2 - 4x\ln x}{x - 4}$$

Partiremos ahora con $x_i = 1$

x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$
1	$g(1) = 1.3333$
1.3333	$g(1.3333) = 1.4246$
1.4246	$g(1.4246) = 1.4296$
1.4296	$g(1.4296) = 1.4296$

la sucesión converge a 1.4296; para la primera raíz,se puede observar además que:

$f(1.4296) = 2.1261 \times 10^{-5} = 0{,}000021261$. (obs: el SWP se puede trabajar con más decimales...)

Partiremos ahora con $x_i = 9$

x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$
9	$g(9) = 8.62$
8.62	$g(8.62) = 8.6132$
8.6132	$g(8.6132) = 8.6132$

la sucesión converge a 8.6132; se puede observar que:
$f(8.6132) = 1.6359 \times 10^{-5} = 0{,}000016359$