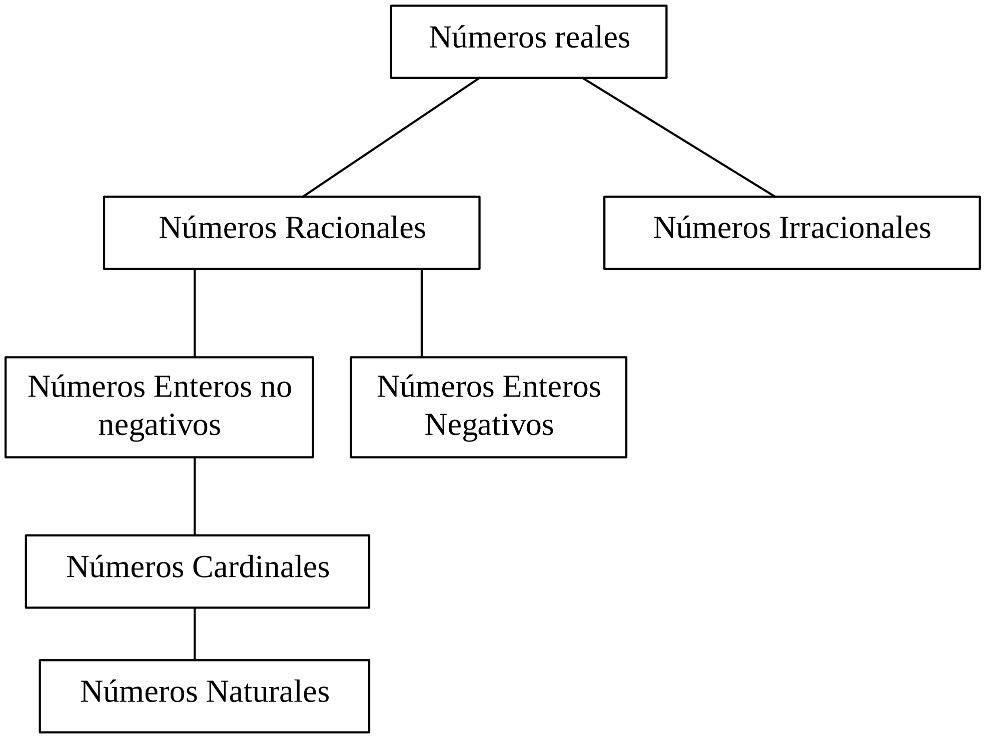
Números reales y sus propiedades.

Cuadro sinóptico de una apreciación muy simplificada de los números reales:



Ejemplos de los números que conforman cada conjunto y la notación usual:

▲ Números Naturales: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\}$
En este conjunto la ecuación: $x + a = b,$ tiene por solución, el número $x = b - a,$ siempre y cuando $b > a$
así por ejemplo $x + 5 = 2,$ no tiene solución en este conjunto.

Preguntas: (Comente y discuta)
1.- ¿Tendría solución en este conjunto la ecuación: $2x + 5 = 21$?
2.- ¿Tendría solución en este conjunto la ecuación: $3x + 5 = 21$?
3.- Escriba por extensión los conjuntos siguientes:
$A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es par y } x \leq 7\}$
$B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es múltiplo de 3 y } 13 < x \leq 7\}$
$C = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es divisible por 5 y } x > 7 \text{ y } x < 46\}$
$D = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es par y } x \leq 7\}$

▲ Números Cardinales: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$

Pregunta: (Comente y discuta)

1.- ¿Qué se debe cumplir para que la ecuación $x + a = b$, tenga sentido en este conjunto ?

▲ Números Enteros: $\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$

Preguntas: (Comente y discuta)

1.- ¿Qué se debe cumplir para que la ecuación $x + a = b$, tenga sentido en este conjunto ?

2.- ¿Qué se debe cumplir para que la ecuación $cx + a = b$, tenga sentido en este conjunto ?

▲ Números Racionales: $\mathbb{Q} = \left\{\ldots, \frac{-5}{3}, \ldots, -1, \ldots, 0, \ldots, 1, \ldots 2, \ldots, \frac{7}{3}, \ldots\ldots\right\}$

Preguntas: (Comente y discuta)

1.- ¿Qué se debe cumplir para que la ecuación $x + a = b$, tenga sentido en este conjunto ?

2.- ¿Qué se debe cumplir para que la ecuación $cx + a = b$, tenga sentido en este conjunto ?

3.- ¿Qué se debe cumplir para que la ecuación $x^2 = b$, tenga sentido en este conjunto ?

4.- En la expresión $\frac{6a}{a+2}$, ¿qué valores posibles debe tener "a" de modo que represente un número entero?

(discuta distintas maneras de hallar la respuesta.)

▲ Números Irracionales: $\mathbb{Q}'$, ejemplos de ellos son $\sqrt{3}, -\sqrt[3]{5}, \pi, e, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt[5]{8}}{3}, etc, etc$

repetir interrogantes anteriores.

Son estos números aquellos que no se pueden escribir como una fracción,cabe hacer notar que cuando pulsamos en una calculadora, por ejemplo: $\sqrt{3} = 1.732050807569$, el número decimal que aparece en pantalla es justamente eso, un número decimal, pero nó $\sqrt{3}$, tal número es una aproximación, es decir un número muy cercano a $\sqrt{3}$. Para efectos prácticos es suficiente una aproximación de ese orden o incluso de un orden menor, así por ejemplo, se muestran deiferentes aproximaciones del número π (debemos escribir usando el símbolo ≈ para expresar que una cantidad es aproximadamente igual a un cierto valor)

π		3.14159265359	π		3.1415926
π		3.1415926536	π		3.141593
π	$\approx$	3.141592654	π	$\approx$	3.14159
π		3.14159265	π		3.1416
π		3.1415926	π		3.142

Si a, b, c son números reales, se verifican las siguientes propiedades para la adición

	L E Y
$a+b$ es un número real	CLAUSURA O CIERRE
$a+(b+c) = (a+b)+c$	ASOCIATIVIDAD
$\mathrm{a}+\mathrm{b} = \mathrm{b}+\mathrm{a}$	CONMUTATIVIDAD
$0+a = a+0\ \forall a \in IR$..	existencia del NEUTRO ADITIVO
$\forall a \in IR, \exists(^{-}a)\ /\ \ a+(-a) = (-a)+a = 0$	existencia del INVERSO ADITIVO (OPUESTO)

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, se verifican las siguientes propiedades para la multiplicación

	L E Y
$a \cdot b$ es un número real	CLAUSURA O CIERRE
$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	ASOCIATIVIDAD
$\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = \mathrm{b} \cdot \mathrm{a}$	CONMUTATIVIDAD
$1 \cdot a = a \cdot 1\ \forall a \in IR$	existencia de l NEUTRO MULTIPLICATIVO
$\forall a \neq 0, \exists\left(\frac{1}{a}\right)\ /\ a \cdot (\frac{1}{a}) = \left(\frac{1}{a}\right) \cdot a = 1$	existencia del INVERSO MULTIPLICATIVO
$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	DISTRIBUTIVIDAD DE LA MULTIPLICACIÓN c/r A LA ADICIÓN

Aplicando la propiedad distributiva:

1.- Si $2x^4 - 6x^5 = 2a\left(x - 3x^2\right)$ ¿Cuál es el valor de "a"?

2.- Si $8x^2 - 24x^3 = 2a\left(x - 3x^2\right)$ ¿Cuál es el valor de "a"?

Efectuar las siguientes multiplicaciones y reducir términos semejantes

3.- $(4x-3)(3x+6)$

4.- $(5a+2b)(5a-2b)$

5.- $(x-2y)^2$
6.- $(a+b-c)^2$
7.- $(a+b)^4$
8.- $\left(a^2-2ab+b^2\right)\left(a^2+2ab+b^2\right)$
9.- $(a+b)^3$
10.- $\left(a^2-b\right)^2$
11.- $(a-b)(b-c)(c-a)$
12.- $(x-2y+3)^2$

Propiedades que se pueden deducir de las anteriores(teoremas)
1.- $-(-a) = a$
2.- $\frac{a}{b} = c \Rightarrow a = bc$
3.- $b \bullet \frac{a}{b} = a$, si $b \neq 0$
4.- $a \bullet 0 = 0$
5.- si $a \neq 0$ entonces $\frac{0}{\mathrm{a}} = 0$
6.- si $a \neq 0$ entonces $\frac{a}{0}$, sin sentido.
7.- Si $a \bullet b = 0$ entonces $a = 0$ o bien $b = 0$
una aplicación importante de esta propiedad al resolver la ecuación: $x^2+3x = 0$
$x^2+3x = 0 \rightarrow (x+3)x = 0 \rightarrow (x+3 = 0) \vee (x = 0)$

de aquí que $(x = -3) \vee (x = 0)$
8.- $(-1)a = -a$
9.- $a(-b) = (-a)b = -(ab)$
10.- $(-a)(-b) = ab$
11.- $x+a = b \rightarrow x = b-a$
12.- $cx+a = b \rightarrow x = \frac{b-a}{c}$, siempre que $c \neq 0$
13.- $(a = b) \wedge (c = d) \Rightarrow a+c = b+d$
14.- $(a = b) \wedge (c = d) \Rightarrow a \bullet c = b \bullet d$
15.- $(a+c = b+c) \Rightarrow a = b$
16.- $(a \bullet c = b \bullet c) \wedge (c \neq 0) \Rightarrow a = b$
17.- $+0 = -0 = 0$

Ejercicios relacionados:
1.- ¿Para qué valores reales de la variable "x", tienen sentido cada una de las expresiones siguientes?

$\frac{2x-1}{x+1}$		$\frac{x+4}{x-2}$		$\frac{0}{x+5}$		$\frac{x-4}{3x^2}$		$\frac{x+4}{x^2+8}$
$\frac{5}{x}$		$\frac{x+4}{3x+2}$		$\frac{x}{x-4}$		$\frac{x+4}{x^2-2}$		$\frac{x+4}{x^2+x-2}$

2.- En las ecuaciones que siguen resolver aplicando la propiedad (7)

Si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ o bien $b = 0$

$x^2 + 5x + 6 = 0$		$3x^2 + 5x = 0$		$x^2 - 7 = 18$		$x^3 + 3x^2 + 2x = 0$
$(x+3)(x-2) = 0$		$x^2 - 5 = 1$		$x(3x-4) = 0$		$\frac{x^2+4x+3}{x-2} = 0$

3.- ¿Para qué valores reales de x resultan indeterminadas las expresiones siguientes?

$\frac{2x}{3x^2}$		$\frac{x+2}{2x+4}$		$\frac{1+x^2}{3+x^2}$		$\frac{0}{x}$		$\frac{x-3}{x^2-9}$
$\frac{x-3}{x^2-9}$		$\frac{x^2-4}{x+2}$		$\frac{x-1}{x^2-1}$		$\frac{x+4}{x^2-16}$		$\frac{x+2}{x^2+x-2}$

4.- ¿Para qué valores reales de x son indeterminadas las expresiones siguientes?

$\frac{2x+6}{x+3}$		$\frac{0}{2x}$		$\frac{3+x^2}{1+x^4}$		$\frac{2x+5}{4x^2-25}$		$\frac{x-3}{x^2-9}$

5.- Encontrar el valor de cada una de las expresiones algebraicas siguientes para los valores dados de las letras:

$3x+4$	para $x = 1$	$\frac{x+2}{2x+4}$	para $x = -1$	$\frac{1+x^2}{3+x^2}$	para $x = -3$	$\frac{x-3}{x^2-9}$	para $x = 5$
$\frac{x-3}{x^2-9}$	para $x = 0$	$\frac{x^2-4}{x+2}$	para $x = 0$	$\frac{x-1}{x^2-1}$	para $x = 2$	$\frac{x+2}{x^2+x-2}$	para $x = -3$

Empleo de la estructura:

$expresión|_a^b$ = expresión evaluada en "a" menos expresión evaluada en "b"

ejemplos:

$3x-4|_a^b = (3b-4) - (3a-4) = 3b - 3a$

$x^2 - 4x\Big|_a^b = \left(b^2 - 4b\right) - \left(a^2 - 4a\right) = 4a - 4b - a^2 + b^2$

serbachi@hotmail.com

$x^2 - 4x\Big|_2^5 = 9$ (*verifique*)

6.- Evaluar las siguientes expresiones:

a) $2x+5|_1^2$ b) $x^2-6x+9\Big|_1^3$ c) $x^3-x\Big|_{-a}^{a}$

d) $2\left(x^3-x\right)\Big|_0^a$ d) $5x^2-4x+6\Big|_{-2}^{1}$ c) $x^3-x\Big|_{m}^{(3m)}$

Propiedades de las Potencias: "Recordando temas olvidados"

Objetivos:

1.- Recordar propiedades básicas del álgebra elemental asociada a la potenciación.

2.- Desarrollar habilidad en el manejo y aplicación de dichas propiedades.

	$a \neq 0$ y $b \neq 0$				
1	$a^0 = 1$	Potencia de exponente cero	8	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	División de potencias de igual exponente
2	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	Multiplicación de potencias de igual base	9	$a^{-1} = \frac{1}{a} \leftrightarrow a = \frac{1}{a^{-1}}$	Potencia de exponente negativo
3	$a^m \div a^n = a^{m-n}$	División de potencias de igual base	10	$a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$	Igualdad de potencias de igual base
4	$(a^m)^n = a^{mn}$	Elevación de una potencia a potencia	11	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	Relación entre potencia y radicación
5	$a^n b^n = (ab)^n$	Producto de potencias de igual exponente	12	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	caso particular cuando m=1
6	$(-a)^n = -a^n$	para $a > 0$ y n= impar	13	$(-a)^n = a^n$	siempre que n sea par
7	$(-a)^p = -a^p$	para p = número par	14	$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \leftrightarrow a^n = \frac{1}{a^{-n}}$	Potencia de exponente negativo

Aplique las propiedades anteriores a los siguientes ejercicios y si es posible emplee calculadora para comprobar los resultados.

1.- Calcular los valores de las siguientes expresiones:

a) 3^4 b) $(-4x)^{-2}$ c) $(-2x)^3$ d) $\left(2y^{-1}\right)^{-1}$ e) $\left(\frac{3y}{4}\right)^3$ f) 4^{-3} g) $\frac{3^{-1}x^2y^{-4}}{2^{-2}x^{-3}y^3}$

h) $\frac{8^{-\frac{2}{3}} \cdot (-8)^{\frac{2}{3}}}{8^{\frac{1}{3}}}$ i) $x^y x^{4y}$ j) $\left(10^3\right)^0$ k) $-3(-1)^{-\frac{1}{5}}(4)^{\frac{-1}{2}}$ l) $\left[\left(x^{-1}\right)^{-2}\right]^{-3}$

m) $\dfrac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{-2}{3}}}{3^{\frac{-1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}}$ n) $\dfrac{10^{x+y} \cdot 10^{y-x} \cdot 10^{y+1}}{10^{y+1} \cdot 10^{2y+1}}$

2.- Resuelva las ecuaciones exponenciales:

a) $8^{2x-2} = 1$ b) $3^{x-4} = 81$ c) $27^{2-3x} = \frac{1}{3}$

d) $25^{x+2} = 0,2^{x+1}$ e) $\left(\frac{1}{27}\right)^{x-1} = 9^x$

3.- Hallar una solución aproximada para cada ecuación exponencial que se plantea:

a) $2^x = 10$ b) $3^x = 20$ c) $5^{2x} = 50$ d) $10^x = 400$

4.- Hallar el conjunto de números generado por la fórmula que se indica (hasta n=5)

a) $a_n = \begin{cases} 2 & si \quad n = 1 \\ 2 \cdot 3^{n-1} & si \quad n > 1 \end{cases}$ b) $a_n = \begin{cases} 40 & si \quad n = 1 \\ 40 \cdot 2^{-n+1} & si \quad n > 1 \end{cases}$

c) $a_n = \begin{cases} 4 & si \quad n = 1 \\ 4 \cdot 5^{n-1} & si \quad n > 1 \end{cases}$ d) $a_n = \begin{cases} 120 & si \quad n = 1 \\ 120 \cdot 2^{-n+1} & si \quad n > 1 \end{cases}$

5.- Escriba cada expresión que se da en la forma más simple posible:

a) $2^{3x} \cdot 8^x$ b) $\dfrac{2^m \cdot 5^m}{10^m}$ c) $\sqrt[n]{\dfrac{32}{2^{5+n}}}$ d) $8^{\frac{2}{3}} + 3^{-2} - \frac{1}{9}(10)^0$

e) $\dfrac{\sqrt{a} \cdot a^{\frac{-2}{3}}}{\sqrt[6]{a^5}} + \dfrac{a^{\frac{-5}{6}}}{\sqrt[3]{a^2} \cdot a^{\frac{-1}{2}}}$ f) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b^5}}{a^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{3}}}}$ g) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^4} + \sqrt[5]{b^8} \cdot \sqrt[5]{b^2}$

6.- Efectuar las operaciones que se indican:

a) $\dfrac{40x^3y^2}{24xy^4} \div \dfrac{27xy}{8x^2y^3}$ b) $\dfrac{xy^3}{yz} \div x^2z$ c) $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{(a+b)^{-1}}$ d) $\left(a^{-1} + b^{-1}\right)^{-1}$

e) $\dfrac{4x^{-2}+y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}$ f) $(-1)^n(-1)^m(-1)^3$ g) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^2$

Ejercicios tipo Prueba:

1.- Resolver la ecuación exponencial : $\dfrac{2^{x+3}}{8^x} \cdot 64^{3-x} = 4^{2-x} \div 16^{1-2x}$

2.- Resolver la ecuación exponencial : $\dfrac{3^{x-3}}{9^{-x}} \cdot 27^{1-x} = 9^{2-x} \div 81^{5+2x}$

3.- Resolver la ecuación exponencial : $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

Resolución y resultados:

1.- Calcular los valores de las siguientes expresiones:

a) $3^4 = 81$

b) $(-4x)^{-2} = \dfrac{1}{(-4x)^2} = \dfrac{1}{16x^2}$

c) $(-2x)^3 = (-2)^3x^3 = -8x^3$

d) $\left(2y^{-1}\right)^{-1} = 2^{-1}\left(y^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{2}y$

e) $\left(\frac{3y}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3(y)^3 = \frac{27}{64}y^3 = 0.421875y^3$

f) $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

g) $\frac{3^{-1}x^2y^{-4}}{2^{-2}x^{-3}y^3} = \frac{2^2 \cdot x^2 \cdot x^3}{3^1 \cdot y^3 \cdot y^4} = \frac{4}{3}\frac{x^5}{y^7}$

h) $\frac{8^{-\frac{2}{3}} \cdot (-8)^{\frac{2}{3}}}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{8}(-8)^{\frac{2}{3}} = \begin{cases} \frac{1}{8} \cdot \sqrt[3]{(-8)^2} = \frac{1}{8}\sqrt[3]{64} = 0.5 \\ \frac{1}{8} \cdot \left(\sqrt[3]{(-8)}\right)^2 = \frac{1}{8} \cdot (-2)^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$:

i) $x^yx^{4y} = x^{5y}$

j) $\left(10^3\right)^0 = 1$

k) $-3(-1)^{-\frac{1}{5}}(4)^{\frac{-1}{2}} = \frac{3}{2}(-1)^{\frac{4}{5}} = \frac{3}{2}$

l) $\left[\left(x^{-1}\right)^{-2}\right]^{-3} = \frac{1}{x^6}$

m) $\frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{-2}{3}}}{3^{\frac{-1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}}{3^{\frac{-1}{2}+\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{-1}{6}}}{3^{\frac{-1}{6}}} = 1$

n) $\frac{10^{x+y} \cdot 10^{y-x} \cdot 10^{y+1}}{10^{y+1} \cdot 10^{2y+1}} = \frac{10^{x+y} \cdot 10^{y-x}}{10^{2y+1}} = 10^{x+y+y-x-2y-1} = \frac{1}{10}$

2.- Resuelva las ecuaciones exponenciales:

a) $8^{2x-2} = 1$, Solution is: 1

b) $3^{x-4} = 81$, Solution is: $\frac{1}{\ln 3}(4\ln 3 + \ln 81) = 8.0$

c) $27^{2-3x} = \frac{1}{3}$, Solution is: $-\frac{1}{3\ln 27}(-\ln 3 - 2\ln 27) = \frac{7}{9} = 0.7777777777778$

d) $25^{x+2} = 0.2^{x+1}$, Solution is: $\left\{\left[x = -\frac{5}{3} = -1.666666666667\right]\right\}$

e) $\left(\frac{1}{27}\right)^{x-1} = 9^x$, Solution is: $\{[x = 0.6]\}$

3.- Hallar una solución aproximada para cada ecuación exponencial que se plantea:

a) $2^x = 10$, Solution is: $\frac{1}{\ln 2}\ln 10 = 3.321928094887$

b) $3^x = 20$, Solution is: $\frac{1}{\ln 3}\ln 20 = 2.726833027861$

c) $5^{2x} = 50$, Solution is: $\frac{1}{2\ln 5}\ln 50 = 1.215338279036$

d) $10^x = 400$, Solution is: $\frac{1}{\ln 10}\ln 400 = 2.602059991328$

4.- Hallar el conjunto de números generado por la fórmula que se indica (hasta n=5)

a) $f(x) = 2 \cdot 3^{x-1} \quad \rightarrow \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 18 \\ 54 \\ 162 \end{pmatrix}$

b) $f(x) = 40 \cdot 2^{-x+1} \rightarrow f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 10 \\ 5 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

c) $f(x) = 4 \cdot 5^{x-1} \rightarrow f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 100 \\ 500 \\ 2500 \end{pmatrix}$

d) $f(x) = 120 \cdot 2^{-x+1} \rightarrow f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 60 \\ 30 \\ 15 \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix}$

5.- Escriba cada expresión que se da en la forma más simple posible:

a) $2^{3x} \cdot 8^{x} = 2^{3x} \cdot \left(2^{3}\right)^{x} = 2^{3x} \cdot 2^{3x} = 2^{6x}$

b) $\frac{2^{m} \cdot 5^{m}}{10^{m}} = 1$

c) $\sqrt[n]{\frac{32}{2^{5+n}}} = \left(\frac{2^{5}}{2^{n+5}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(2^{5-n-5}\right)^{\frac{1}{n}} = (2^{-n})^{\frac{1}{n}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

d) $8^{\frac{2}{3}} + 3^{-2} - \frac{1}{9}(10)^{0} = 4$

e) $\frac{\sqrt{a} \cdot a^{\frac{-2}{3}}}{\sqrt[6]{a^{5}}} + \frac{a^{\frac{-5}{6}}}{\sqrt[3]{a^{2}} \cdot a^{\frac{-1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{a^{2}}} + \frac{1}{\sqrt[6]{a}\,\sqrt[6]{a^{5}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^{3}}} + \frac{1}{\sqrt[6]{a^{6}}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{2}{a}$

f) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b^5}}{a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}}} = \left(\dfrac{a^{\frac{2}{4}}\cdot b^{\frac{5}{3}}}{a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab^2} = b\sqrt{a}$

g) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[5]{b^8}\cdot\sqrt[5]{b^2} = a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{8}{5}}\cdot a^{\frac{2}{5}}$

6.- Efectuar las operaciones que se indican:

a) $\frac{40x^3y^2}{24xy^4} \div \frac{27xy}{8x^2y^3} = \frac{40}{81}x^3$

b) $\frac{xy^3}{yz} \div x^2z = \frac{1}{x}y^2$

c) $\frac{a^{-1}+b^{-1}}{(a+b)^{-1}} = (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{ab}\left(2ab+a^2+b^2\right) = b^{-1}a^{-1}(a+b)^2 =$
$\frac{a}{b}+\frac{1}{a}b+2$

d) $\left(a^{-1}+b^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = ba(a+b)^{-1} = \frac{ab}{a+b}$

e) $\frac{4x^{-2}+y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}} = \frac{x^2+4y^2}{xy^2+x^2y}$

f) $(-1)^n(-1)^m(-1)^3 = -(-1)^m(-1)^n = (-1)(-1)^{m+n} = (-1)^{m+n+1}$

g) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}$

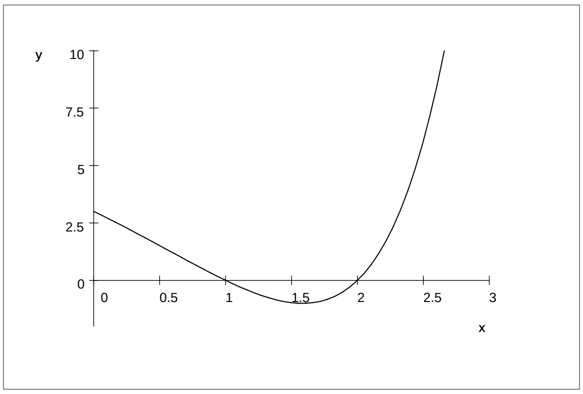
Ejercicios tipo Prueba:

1.- Resolver la ecuación exponencial : $\frac{2^{x+3}}{8^x}\cdot 64^{3-x} = 4^{2-x} \div 16^{1-2x}$, Solution is: $\{[x = 1.5]\}$

2.- Resolver la ecuación exponencial : $\frac{3^{x-3}}{9^{-x}}\cdot 27^{1-x} = 9^{2-x} \div 81^{5+2x}$, Solution is: $\{[\quad]\}$

3.- Resolver la ecuación exponencial : $4^x - 6\cdot 2^x + 8 = 0$, Solution is: $\{[x = 2.0],[x = 1.0]\}$

Se muestra la gráfica de la función: $f(x) = 4^x - 6\cdot 2^x + 8$ en el intervalo $[0,3[$, la intersección con los ejes es la solución de la ecuación propuesta.



$$\frac{3^{x-3}}{9^{-x}} \cdot 27^{1-x} = 9^{2-x} \div 81^{5+2x}$$

$$\frac{3^{x-3}}{\left(3^2\right)^{-x}} \cdot \left(3^3\right)^{1-x} = \left(3^2\right)^{2-x} \div \left(3^4\right)^{5+2x}$$

$$\frac{3^{x-3}}{3^{-2x}} \cdot 3^{3-3x} = 3^{4-2x} \div 3^{20+8x}$$

$$\frac{3^{x-3+3-3x}}{3^{-2x}} = 3^{4-2x-20-8x}$$

$$\frac{3^{-2x}}{3^{-2x}} = 3^{-16-10x}$$

$$3^{-2x+2x} = 3^{-16-10x}$$

$$3^0 = 3^{-16-10x}$$

$-16 - 10x = 0$, Solution is: $-\frac{8}{5} = -1.6$

$$x = -\frac{8}{5}$$

$$\frac{3^{x-3}}{9^{-x}} \cdot 27^{1-x} = \frac{1}{27} 3^{\frac{2}{5}} 9^{\frac{2}{5}} 27^{\frac{3}{5}} = 1.0$$

$$9^{2-x} \div 81^{5+2x} : \frac{1}{9} 9^{\frac{3}{5}} \sqrt[5]{81} = 1.0$$

....

• Productos notables y factorización

Son ciertos productos de interés práctico que con gran frecuencia se presentan en el cálculo algebraico y con los cuales es conveniente familiarizarse. Todos estos productos se obtienen a partir de la aplicación sucesiva de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición y de las demás propiedades de las operaciones en el conjunto de los números reales.

Así por ejemplo: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$(a+b)(a-b)$

$(a+b)a - (a+b)b$........aplicación de la propiedad distributiva

$a^2 + ba - \left(ab + b^2\right)$........aplicación de la propiedad distributiva
$a^2 + ba - ab - b^2$...........aplicación de la propiedad distributiva
$a^2 + (ab - ab) - b^2$.........asociatividad
$a^2 + 0 - b^2$...............elemento opuesto
$a^2 - b^2$...............elemento identidad.
Observación: En el trabajo usual no es necesario un trabajo con tanto detalle.

1	$a(c+d) = ac + ad$	6	$a^3 - b^3 = (a-b)\left(ab + a^2 + b^2\right)$
2	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	7	$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$
3	$(a+b)^2 = 2ab + a^2 + b^2$	8	$(a+b+c)^2 = \mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2+2\mathrm{ab}+2\mathrm{ac}+2\mathrm{bc}$
4	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	9	$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab^2 + 3a^2b$
5	$\mathrm{x}^2+(\mathrm{a}+\mathrm{b})\mathrm{x}+\mathrm{ab} = (a+x)(b+x)$	10	$(a-b)^3 = a^3 - b^3 + 3ab^2 - 3a^2b$

Factorización es un proceso que consiste en escribir una expresión conformada por sumas y restas de términos algebraicos en un producto. Es decir se aplica la propiedad distributiva en la forma : $ac + ad = a(c+d)$

así por ejemplo: $3ab - 9a^2b$ se puede escribir en una forma equivalente como:

$3ab - 9a^2b = 3ab(1-3a)$ sin embargo, esta factorización(que es la más común) no es única ya que se pueden encontrar otras factorizaciones posibles, por ejemplo:

$$3ab + 9a^2b = \begin{cases} 3ba(1-3a) \\ 3b\left(1-3a^2\right) \\ 3a(b-3ab) \\ 9ba\left(\frac{1}{3} - a\right) \end{cases} \qquad 3ab + 9a^2b = \begin{cases} ba(3-9a) \\ ba^2\left(\frac{3}{a} - 9\right) \\ 3a^3\left(\frac{b}{a^2} - \frac{3b}{a}\right) \\ 3(b-3ab) \end{cases}$$

Ejercicios de aplicación: (haciendo uso de las reglas anteriores.)

1.- Escriba $a^4 - b^4$ en forma desarrollada(expandida)
2.- Escriba $a^6 - b^6$ en forma desarrollada(expandida)
3.- Demuestre que $ab + a^2 + b^2 = (a+b)^2 - ab$
4.- Factorice $a^2b^2 - ab^3$
5.- Simplifique: $\frac{x+y}{x^2+y^2+2xy}$
6.- Simplifique: $\frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}$
7.- Simplifique: $\frac{\left(x^4-y^4\right)^2}{\left(x^2-y^2\right)(x+y)}$

En los ejercicios que siguen factorice

8.- $ax - ay - by + bx$
9.- $ax - 2ay - 6by + 3bx$
10.- $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x-2)\left(x^2+4\right)$
11.- $y^3 - 2y^2 + 5y - 102a - 6 - ab^2 + 3b^2$
12.- $2a - 6 - ab^2 + 3b^2$
13.- $x^3 + 3x^2 - 9x - 27$
14.- $x^2 - 2x + 1 - y^2$
15.- $xy^3 + 2y^2 - xy - 2$
16.- $4x^2 - y^2 + 4y - 4$
17.- $x^6 - 7x^3 - 8$
18.- $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 2zw - w^2$
19.- $x^3 - 5x^2 - x + 5$
20.- $x^2 + 4xy + 4y^2 - x - 2y - 6$
21.- $x^4 - 7x^2y^2 + 9y^4$
22.- $y^4 + y^2 + 25$
23.- $a^4 + 2a^2b^2 + 9b^4$
24.- $x^4 + 5x^2 + 9$
25.- $b^4 + 6b^2c^2 + 25c^2$
26.- $a^8 - b^8$
27.- $x^2 + 2xy - z^2 - 2yz$
28.- $z^4 + 4z^3 - 2z - 8$
29.- $x^4 + 4y^4$
30.- $x^6 + 1$

Resultados:
1.- $a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)\left(a^2+b^2\right)$
2.- $a^6 - b^6 = (a-b)(a+b)\left(ab+a^2+b^2\right)\left(a^2-ab+b^2\right)$
3.- use teorema del binomio.
4.- $a^2b^2 - ab^3 = ab^2(a-b)$
5.- $\frac{x+y}{x^2+y^2+2xy} = \frac{1}{x+y}$
6.- $\frac{(x-y)^2}{x^2-y^2} = \frac{1}{x+y}(x-y)$
7.- $\frac{\left(x^4-y^4\right)^2}{\left(x^2-y^2\right)(x+y)} = (x-y)\left(x^2+y^2\right)^2$
8.- $ax - ay - by + bx = (x-y)(a+b)$
9.- $ax - 2ay - 6by + 3bx = -(2y-x)(a+3b)$

10.- $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x-2)\left(x^2+4\right)$
11.- $y^3 - 2y^2 + 5y - 10 = (y-2)\left(y^2+5\right)$
12.- $2a - 6 - ab^2 + 3b^2 = -\left(b^2-2\right)(a-3)$
13.- $x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = (x-3)(x+3)^2$
14.- $x^2 - 2x + 1 - y^2 = -(y-x+1)(x+y-1)$
15.- $xy^3 + 2y^2 - xy - 2 = (y-1)(y+1)(xy+2)$
16.- $4x^2 - y^2 + 4y - 4 = (2x-y+2)(2x+y-2)$
17.- $x^6 - 7x^3 - 8 = (x-2)(x+1)\left(x^2-x+1\right)\left(2x+x^2+4\right)$
18.- $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 2zw - w^2 = (x-w+y+z)(w+x+y-z)$
19.- $x^3 - 5x^2 - x + 5 = (x-5)(x-1)(x+1)$
20.- $x^2 + 4xy + 4y^2 - x - 2y - 6 = (x+2y-3)(x+2y+2)$
21.- $x^4 - 7x^2y^2 + 9y^4 = \left(xy-x^2+3y^2\right)\left(3y^2-x^2-xy\right)$
22.- $y^4 + y^2 + 25 = \left(y^2-3y+5\right)\left(3y+y^2+5\right)$
23.- $a^4 + 2a^2b^2 + 9b^4 = \left(a^2-2ab+3b^2\right)\left(2ab+a^2+3b^2\right)$
24.- $x^4 + 5x^2 + 9 = \left(x+x^2+3\right)\left(x^2-x+3\right)$
25.- $b^4 + 6b^2c^2 + 25c^2 = \left(25c^2+b^4+6b^2c^2\right)$
26.- $a^8 - b^8 = -(b-a)(a+b)\left(a^2+b^2\right)\left(a^4+b^4\right)$
27.- $x^2 + 2xy - z^2 - 2yz = -(z-x)(x+2y+z)$
28.- $z^4 + 4z^3 - 2z - 8 = (z+4)\left(z^3-2\right)$
29.- $x^4 + 4y^4 = \left(x^2-2xy+2y^2\right)\left(2xy+x^2+2y^2\right)$
30.- $x^6 + 1 = \left(x^4-x^2+1\right)\left(x^2+1\right)$

Simplificación de fracciones aritméticas y algebraicas.Teoremas asociados:

1.- Para todo número b, se cumple $\frac{b}{1} = 1$

2.- Si c es un número distinto de cero, se cumple : $\frac{c}{c} = 1$

¿Qué puede decir de: $\frac{x-2}{x-2}$, es igual a 1 para cualquier valor de "x"?

¿Qué restricción se debe hacer para que la siguiente expresión sea verdadera $\frac{2a+3}{2a+3} = 1$?

¿Es cierto que $\frac{x^2-4}{x^2-4} = 1$ para cualquier valor de "x"?

3.- Productos de cuocientes: $\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{bd}{ac}$

4.- Si c es un número distinto de cero, se cumple :

$\frac{b}{a} = \frac{bc}{ac}(amplificación)$

$\frac{b}{a} = \frac{\left(\frac{b}{c}\right)}{\left(\frac{a}{c}\right)}(simplificación)$

5.- Igualdad de cuocientes: si $\frac{b}{a} = \frac{d}{a}$, entonces $b = d$

6.- Si $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, entonces $bc = ad$

ejemplos de su aplicación:
resolver las ecuaciones:
1.- $\frac{x-2}{x} = \frac{x-5}{x+2}$, Solution is: $\frac{4}{5}$ 2.- $\frac{x-2}{x+4} = \frac{x+5}{x-2}$, Solution is: $-\frac{16}{13}$
7.- Recíprocos de cuocientes: si $\frac{b}{a} \neq 0$, entonces $\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{a}{b}$
8.- Cuocientes de cuocientes: si $\frac{b}{a} \neq 0$, entonces $\frac{d}{c} \div \frac{b}{a} = \frac{ad}{bc}$
9.- Cuocientes de números negativos: $\frac{-b}{a} = -\frac{b}{a} = \frac{b}{-a}$ y $\frac{-b}{-a} = \frac{b}{a}$
10.- Suma de cuocientes: $\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{bc+ad}{ac}$

Importante:
Estas propiedades que son válidas para los números reales se extienden a expresiones fraccionarias algebraicas.

Veamos el siguiente ejemplo:

$$\frac{a^2-2ab+3b^2}{a^4+2a^2b^2+9b^4} \Leftrightarrow \frac{\left(a^2-2ab+3b^2\right)}{\left(a^2-2ab+3b^2\right)\left(2ab+a^2+3b^2\right)} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(2ab+a^2+3b^2\right)}$$

Ejercicios: Reducir a sus términos más simples

	expresión	*resultado*
1	$\frac{28}{63}$	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{a^4x^3y}{a^2xy^3}$	$a^2\frac{x^2}{y^2}$
3	$\frac{a^2x-a^2y}{ax^2-ay^2}$	$\frac{a}{x+y}$
4	$\frac{x^2-1}{x^2-x}$	$\frac{1}{x}(x+1)$
5	$\frac{x^2-16}{x^2-8x+16}$	$\frac{1}{x-4}(x+4)$
6	$\frac{y^2-y-6}{y^2+2y-15}$	$\frac{y+2}{y+5}$
7	$\frac{6a^2-7a-3}{4a^2-8a+3}$	$\frac{1}{2a-1}(3a+1)$

	expresión	*resultado*
8	$\frac{27x^3}{225x^5}$	$\frac{3}{25}x^{-2}$
9	$\frac{a^2+ab}{3a+2a^3}$	$\frac{(a+b)}{\left(2a^2+3\right)}$
10	$\frac{x^2-36}{x^3-216}$	$\frac{(x+6)}{6x+x^2+36}$
11	$\frac{2x^2-14x+20}{7x-2x^2-16}$	$\frac{-2(x-5)(x-2)}{2x^2-7x+16}$
12	$\frac{y^6+64}{y^4-4y^2+16}$	y^2+4
13	$\frac{a^2-2ab+3b^2}{a^4+2a^2b^2+9b^4}$	$\frac{1}{2ab+a^2+3b^2}$
14	$\frac{4a^2-1}{12a^2+a-4a^3-3}$	$\frac{-1}{(a-3)}$

Adición de expresiones fraccionarias algebraicas:

		resultado			resultado
1	$\frac{2}{12x^2-3}+\frac{3}{2x-4x^2}$	$\frac{-14x-9}{6x(2x-1)(2x+1)}$	7	$\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+3}{x}$	$\frac{-4x-6}{x(x+2)}$
2	$\frac{4}{x^2-4x-5}+\frac{2}{x^2-1}$	$\frac{6x-14}{(x-5)(x-1)(x+1)}$	8	$\frac{2x-1}{4-x}+\frac{x+2}{3x-12}$	$\frac{5-5x}{3x-12}$
3	$\frac{2x+3}{6}-\frac{4x-7}{9}$	$\frac{23}{18}-\frac{1}{9}x$	9	$\frac{2-x}{x}-\frac{x}{x-1}$	$\frac{3x-2x^2-2}{x^2-x}$
4	$\frac{x+5}{x^2+7x+10}-\frac{x-1}{x^2+5x+6}$	$\frac{4}{(x+3)(x+2)}$	10	$\frac{4}{3(x+2)}-\frac{1}{3(x-1)}$	$\frac{x-2}{(x+2)(x-1)}$
5	$\frac{1}{2x^2-13x+15}+\frac{1}{2x^2-15x+18}$	$\frac{2x-11}{(x-5)(x-6)(2x-3)}$	11	$\frac{3x}{4y}-\frac{4y}{3x}$	$\frac{9x^2-16y^2}{12xy}$
6	$\frac{2x+3}{3x^2+x-2}-\frac{3x-4}{2x^2-3x-5}$	$\frac{14x-5x^2-23}{(3x-2)(2x-5)(x+1)}$	12	$\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{3}{10}$	$\frac{6}{5}$

División de expresiones fraccionarias algebraicas:

		resultado			resultado
1	$\frac{40x^3y^2}{24xy^4} \div \frac{27xy}{8x^2y^3}$	$\frac{40}{81}x^3$	7	$\left(\frac{2x}{x-1}+\frac{x^2}{x^2-1}\right)\div\frac{x^3}{1-x}$	$\frac{-3x-2}{x^2+x^3}$
2	$\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}\div\frac{x+y}{x}$	$\frac{x}{xy+x^2+y^2}$	8	$\frac{ab+ac}{ab-ac}\bullet\frac{b}{b+c}\div\frac{b}{b-c}$	1
3	$\frac{xy^3}{yz}\div x^2z$	$\frac{1}{x}y^2$	9	$\frac{y+1}{x-2}\bullet\frac{x^2+2x}{6}\bullet\frac{y-1}{xy^2-x}$	$\frac{x+2}{6x-12}$
4	$\frac{x^2-2x+y^2}{x^3-y^3}\bullet\frac{x^2+xy+y^2}{x-y}$	$\frac{x^2-2x+y^2}{x^2-2xy+y^2}$	10	$\frac{x-1}{x+1}\div\frac{x^2-1}{(x+1)^2}$	1
5	$\frac{y^2-2y-15}{y^2-9}\div\frac{12-4y}{y^2-6y+9}$	$\frac{5}{4}-\frac{1}{4}y$	11	$\frac{x+2}{x-3}\bullet\frac{x-2}{x+3}\div\frac{x^2-4}{x+3}$	$\frac{1}{x-3}$
6	$\frac{x^2+2x-3}{x^2+7x+12}\bullet\frac{x+1}{x^2+4x-5}$	$\frac{x+1}{9x+x^2+20}$	12	$\frac{x^2-x-6}{x^2-5x+6}\div\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\frac{x}{x-2}$	$\frac{x}{x-2}$

....

Radicación: $\sqrt[\textit{índice}]{\textit{cantidad sub radical}}$

"Expresiones como: $\sqrt[3]{2}$; $3+\sqrt[4]{2}$; $6\sqrt[3]{5}-2\sqrt[4]{3}$ *, son números irracionales, es decir, no pueden ser escritos como fracciones(no son números racionales)."*

Las siguientes propiedades son útiles para trabajar expresiones numéricas o algebraicas que contengan cantidades irracionales.

Propiedades							
1	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	3	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	5	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	7	$\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$
2	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	4	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	6	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	8	

Situaciones que se pueden presentar:

(Comentario personal: Con el advenimiento de las calculadoras y programas computacionales que trabajan simbólicanmente expresiones algebraicas, es discutible la utilidad de estas aplicaciones,salvo al trabajar en cuestiones específicas de Matemáticas.)

1.- Aplicación de la propiedad: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

a) $\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt[3]{5^6} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25$

2.- Aplicación de la propiedad: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2$

b) $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125 \cdot 2} = \sqrt[3]{125}\,\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}$

c) $3\sqrt{2} = \sqrt{3}\,\sqrt{2} = \sqrt{6}$

d)

$2\sqrt{3} + 3\sqrt{12} - 5\sqrt{27} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{4 \cdot 3} - 5\sqrt{9 \cdot 3} = 2\sqrt{3} + 3 \cdot 2\sqrt{3} - 5 \cdot 3\sqrt{3} = -7\sqrt{3}$

3.- Aplicación de la propiedad: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

a) $\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{128}{2}} = \sqrt[3]{64} = 4$

b) $\sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{5}{2}$

c) $\frac{\sqrt[3]{16}}{2} = \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{\frac{16}{8}} = \sqrt[3]{2}$

4.- Aplicación de la propiedad: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

a) $\sqrt[3]{\sqrt{12}} = \sqrt[6]{12}$

b) $\sqrt[4]{25} = \sqrt{\sqrt{25}} = \sqrt{5}$

5.- Aplicación de la propiedad: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

a) $\left(\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{3^2} = \sqrt{9}$

6.- Aplicación de la propiedad: $(\sqrt[n]{a})^n = a$

a) $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$

b) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$

7.- Aplicación de la propiedad: $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$

a) $\sqrt[6]{5^3} = \sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 5^3} = \sqrt[6]{500}$

Ejercicios:

1.- Determinar cuál es el mayor de los siguientes números irracionales(usando calculadora es una opción, sin embargo se solicita además aplicar alguna propiedad de las estudiadas.

a) $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{3}$ b) $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{12}$ c) $2\sqrt{5}$; $3\sqrt{2}$

2.- Exprese resultado usando raíces:

a) $\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{12}\ \left(resultado = 5\sqrt{3}\right)$

b) $5\sqrt{8} - 3\sqrt{18}\ \left(resultado = \sqrt{2}\right)$

c) $2\sqrt{150} - 4\sqrt{54} + 6\sqrt{48}\ \left(resultado = 24\sqrt{3} - 2\sqrt{6}\right)$

d) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{50} + 7\sqrt{288}\ \left(resultado = 74\sqrt{2}\right)$

e) $a > 0; \sqrt{16a^3 - 48a^2b}\ \left(resultado = 4a\sqrt{a - 3b}\right)$

3.- Multiplicar y reducir si es posible:(el resultado se da depués del signo →)

a) $\left(2 - \sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right) \to 7 - 4\sqrt{3}$

b) $\left(2 - \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right) \to 1$

c) $\left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}\right)^3 \to 3\sqrt[3]{20} - 3\sqrt[3]{50} + 3$

d) $\left(2\sqrt[3]{5} + \sqrt{3}\right)^2 = 4\sqrt[3]{25} + 4\sqrt{3}\sqrt[3]{5} + 3$

e) $\left(\sqrt[3]{2} + 2\right)^3 = 12\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{4} + 10$

f) $\left(\sqrt[3]{2} + 2\right)\left(\sqrt[3]{4} + 2\right) = 2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4} + 6$

g) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{5}\right)^2 = 2\sqrt{15} - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{6} + 10$

Racionalización de denominadores(o numeradores)

En ocasiones es conveniente, dada una expresión fraccionaria que contiene *expresiones irracionales en su denominador(o en su numerador..), escribirla en una forma equivalente como una expresión con denominador racional(o numerador racional), tal proceso se denomina racionalización. Consiste la racionalización en la multiplicación del numerador y del denominador por un factor que transforme la cantidad irracional en racional, tal factor se denomina comúnmente* Factor Racionalizante

Casos que se pueden presentar:

Cuando el denominador es un monomio irracional que contiene el factor: $\sqrt[n]{b^{n-m}}$, *se debe multiplicar numerador y denominador por* $\sqrt[n]{b^m}$,de manera que :

$$\sqrt[n]{b^{n-m}} \cdot \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{b^{n-m} \cdot b^m} = \sqrt[n]{b^n} = b$$

las identidades del tipo:

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$a^3 - b^3 = (a-b)\left(ab + a^2 + b^2\right)$
$a^3 - b^3 = (a-b)\left(ab + a^2 + b^2\right)$

son útiles al momento de racionalizar, usualmente se racionaliza el denominador de una fracción algebraica, sin embargo, en algún momento puede ser conveniente racionalizar el numerador, o bien ambos, todo dependerá de lo que se requiera.
Se debe recordar que usualmente estos problemas que aparecen como ejercicios, son parte de otras situaciones más complejas.

	denominador o numerador	factor racionalizador	resulta	ejemplo
1	$\sqrt[n]{b^{n-m}}$	$\sqrt[n]{b^m}$	b	$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = 2$
2	$a + b\sqrt{c}$	$a - b\sqrt{c}$	$a^2 + b^2 c$	$\left(2 + 3\sqrt{5}\right)\left(2 - 3\sqrt{5}\right) = -41$
3	$a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$	$a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$	$a^2 b - c^2 d$	$\left(4\sqrt{3} + 2\sqrt{5}\right)\left(4\sqrt{3} - 2\sqrt{5}\right) = 28$

Ejemplos:

1.- $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

2.- $\dfrac{4}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{4}{\sqrt[3]{5}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{25}} = \dfrac{4}{5}\sqrt[3]{25}$

3.- $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{8}} = \dfrac{1}{2}\sqrt[4]{8}$

4.- $\dfrac{x}{x+\sqrt{y}} = \dfrac{x}{x+\sqrt{y}} \cdot \dfrac{x-\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}} = \dfrac{x}{x^2-y}\left(x - \sqrt{y}\right)$

5.- $\dfrac{c}{a-\sqrt{b}} = \dfrac{c}{a-\sqrt{b}} \cdot \dfrac{a+\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}} = \dfrac{c}{a^2-b}\left(a + \sqrt{b}\right)$

6.- $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \dfrac{1}{4}\sqrt{7} - \dfrac{1}{4}\sqrt{3}$

7.- $\dfrac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \dfrac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \dfrac{5}{4}\sqrt{3} + \dfrac{5}{4}\sqrt{7}$

8.- $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$

otras situaciones se pueden resolver utilizando identidades como:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(ab + a^2 + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a^2 - ab + b^2)(a+b)$$

9.- $\dfrac{1}{3+\sqrt[3]{2}} = \dfrac{1}{3+\sqrt[3]{2}} \cdot \dfrac{9-3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}{9-3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{9-3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}{29}$

siendo $a = 3$; $b = \sqrt[3]{2}$; $a^2 - ab + b^2 = 9 - 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}$

se tiene: $\left(3 + \sqrt[3]{2}\right)\left(9 - 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}\right) = 29$

10.- $\dfrac{1}{x-\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{x-\sqrt[3]{x}} \cdot \dfrac{x^2+x\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x^2+x\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{x^2+x\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x^3-x}$

$\left(x^2 + x\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}\right)(x - \sqrt[3]{x}) =$

$x^3 - x^{\frac{5}{3}} + x\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2} = x^3 - \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2} = x^3 - x$

$x^{\frac{5}{3}} = x \cdot x^{\frac{2}{3}} = x\sqrt[3]{x^2}$		$\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} = x$

Guía de Ejercicios:

★ Realizar las multiplicaciones siguientes,expresando el resultado en su forma más simple:

1	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}$	5	$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}\,\sqrt[4]{4}$	9	$\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$
2	$\sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{26}$	6	$\sqrt{2}\left(\sqrt{6} + \sqrt{14}\right)$	10	$\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)$
3	$\sqrt{x^2 - y^2} \cdot \sqrt{x-y}$	7	$\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)$	11	$\left(\sqrt{12} - \sqrt{27}\right)^2$
4	$\sqrt{x^3 + y^3} \cdot \sqrt{x+y}$	8	$\left(\sqrt{5} + 2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5} - 2\sqrt{3}\right)$	12	

★ Realizar las divisiones siguientes,expresando el resultado en su forma más simple:

1	$\frac{3\sqrt{28}}{2\sqrt{7}}$	4	$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{4}}$	7	$\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{15}}{2\sqrt[4]{3}}\right)^2$	10	$\frac{\sqrt{x^3+y^3}}{\sqrt{x+y}}$
2	$\frac{\sqrt[6]{12}}{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}$	5	$\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{14})}$	8	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$	11	$\frac{2\sqrt{50}+2\sqrt{90}}{\sqrt{\frac{5}{2}}}$
3	$\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x-y}}$	6	$\frac{(\sqrt{45}+\sqrt{5})}{\sqrt{5}}$	9	$\frac{(\sqrt{40}-\sqrt{5})^2}{\sqrt{5}}$	12	$\frac{2\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$

★ Racionalice el denominador de cada una de las fracciones siguientes

1	$\frac{3}{2\sqrt{7}}$	4	$\frac{3}{\sqrt{4-x}}$	7	$\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{15}}{2\sqrt[4]{3}}\right)^2$	10	$\frac{2y}{\sqrt{x}-\sqrt{x-y}}$	13	$\frac{2}{2-\sqrt[3]{3}}$
2	$\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}$	5	$\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})}$	8	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$	11	$\frac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$	14	$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x^2-1}}$
3	$\frac{(x-y)\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}}$	6	$\frac{(\sqrt{5}+5)}{\sqrt{5}}$	9	$\frac{2x}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2-x}}$	12	$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$	15	$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x}+\sqrt{x^2-9}}$

★ Demuéstrese que si $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$, y $a^2=b^2+c^2$, entonces se cumple:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (Esta ecuación corresponde a una elipse centrada en el origen.)

★ Si $x=\frac{3\sqrt{y}}{2\sqrt{3}}$, exprésese $\sqrt{1+x^2}$, en función de y.

★ Si $y=\frac{x}{\sqrt{32-x^2}}$, exprésese $\sqrt{1+y^2}$, en función de x.

★ Si $10x^2-6xz-6y+10xz=0$, encuéntrese z , si $x=y=4\sqrt{2}$

Solution is: $\frac{1}{32}\sqrt{2}\left(24\sqrt{2}-320\right)=\frac{3}{2}-10\sqrt{2}=-12.64213562373$

★ Simplificar: $\frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}+\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$; resultado : $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

★ Simplificar: $\left(4t\left(1+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}-2t^3\left(1+t^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\div\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

resultado: $\frac{2t^2+4}{t^2+1}$

★ Demuéstrese que $\sqrt{\left(x - \frac{1}{4x}\right)^2 + 1} = x + \frac{1}{4x}$, si $x > 0$. ¿ Es verdadera si $x < 0$?

★ Encontrar la expresión idéntica a: $\sqrt{x^2 + y^2}$, donde $x > 0$

1	$\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$	3	$x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$	5	$\frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$
2	$x^2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$	4	$\frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$	6	$y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}$

★ Encontrar la expresión idéntica a: $\frac{\sqrt{2x}}{x+4}$, donde $x > 0$

1	$\sqrt{\frac{2}{x}} + \frac{\sqrt{2x}}{4}$	2	$\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2}$	3	$\frac{2\sqrt{x}}{x+4}$

★ Encontrar la expresión idéntica a: $\left(x^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}\right)^2$, donde $x > 0$

1	$x + a$	3	$x + \sqrt{2ax} + a$	5	$x - \sqrt{2ax} + a$
2	$\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}$	4	$x^2 + 2\sqrt{ax} + a^2$	6	$x + 2\sqrt{ax} + a$

★▲ Simplificar las siguientes expresiones y racionalizar si es necesario

1.- $\frac{4}{2+\sqrt{5}} + \frac{3}{5+2\sqrt{5}} \rightarrow \frac{14}{5}\sqrt{5} - 5$

2.- $\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{5}} \rightarrow \frac{12}{7}\sqrt{15} + \frac{47}{7}$

3.- $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \rightarrow \sqrt{18} - 2\sqrt{3} + 1 = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 1$

4.- $\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} = -\frac{1}{x}\left(1 - \sqrt{x+1}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{x}\left(2\sqrt{x+1} - x - 2\right)$

5.- $\frac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}} + \frac{x-\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}} = \rightarrow \frac{2y+2x^2}{x^2-y}$

6.- $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{a}\sqrt{b}-b-a}{b-a}$

7.- $\frac{1}{2+\sqrt[3]{2}} = \rightarrow \frac{1}{10}\sqrt[3]{4} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{2} + \frac{2}{5}$

....

Guía de Ecuaciones de Primer grado y problemas de planteo

1.- $\frac{2x+5}{15}-\frac{3x+2}{35}-\frac{x+1}{21}-2=x$, Solution is: $-\frac{62}{35}$
2.- $\frac{x-3}{8}-\frac{2x+1}{6}=\frac{5x+3}{9}$, Solution is: $-\frac{63}{55}$
3.- $\frac{8}{15x}-\frac{7}{9x}-\frac{2}{3}=1$, Solution is: $-\frac{11}{75}$
4.- $\frac{3}{x+1}-\frac{5}{x-1}=\frac{7}{x^2-1}$, Solution is: $-\frac{15}{2}$
5.- $\frac{4x+1}{x+3}-\frac{x+5}{x-4}=3$, Solution is: $\frac{17}{20}$
6.- $\frac{2x+1}{x-3}+\frac{x-1}{x+5}-3=\frac{5x+1}{x^2+2x-15}$, Solution is: 13
7.- $\frac{3x+2a}{x-a}+\frac{5x-3b}{x+b}=8$, Solution is: $\begin{cases}\left\{13a\frac{b}{-5a+8b}\right\} & \text{if} \quad 8b\neq 5a\\ \mathbb{R}\setminus\{a,-b\} & \text{if} \quad 13ab=0\wedge 8b=5a\\ \emptyset & \text{if} \quad 13ab\neq 0\wedge 8b=5a\end{cases}$
8.- $\frac{x+m}{x-n}+\frac{x+n}{x+m}=2$, Solution is:
$$\begin{cases}\left\{-\frac{1}{2n}\left(2mn+m^2-n^2\right)\right\} & \text{if} \quad n\neq 0\\ \mathbb{R}\setminus\{n,-m\} & \text{if} \quad n=0\wedge 2mn-n^2=-m^2\\ \emptyset & \text{if} \quad n=0\wedge 2mn-n^2\neq -m^2\end{cases}$$
9.- $\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{5x}{x^2-2x+1}=0$, Solution is: $-\frac{1}{9}$
10.- $\frac{x-3}{x-2}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{2x}{x^2+6x+9}=2$, Solution is: $-\frac{3}{11}$
11.- $\frac{4x^2-9}{2x-3}-\frac{x^2+2x-8}{x+4}=\frac{25x^2-20x+4}{5x-2}$, Solution is: $\frac{7}{4}$
12.- $\frac{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)}{\left(\frac{x-1}{x^2-4}\right)}-\frac{\left(\frac{3x-5}{8}\right)}{\left(\frac{x-1}{4}\right)}=x$, Solution is: $-\frac{9}{5}$
13.- $\frac{3}{4x+4}-\frac{5}{2x+2}+\frac{2}{3x+3}-1=\frac{4}{5x+5}$, Solution is: $-\frac{173}{60}$
14.- $\frac{7}{15x}+\frac{5}{21x}-\frac{8}{35}=0.4$, Solution is: 1.121212121212
15.- $2.4x-1.375=3.65x-1.3$, Solution is: -0.06
16.- $\frac{3x+a}{x+b}-\frac{2x+b}{x-a}=1$, Solution is:
$$\begin{cases}\left\{\frac{1}{a+4b}\left(ab-a^2-b^2\right)\right\} & \text{if} \quad 4b\neq -a\\ \mathbb{R}\setminus\{a,-b\} & \text{if} \quad 4b=-a\wedge ab-b^2=a^2\\ \emptyset & \text{if} \quad 4b=-a\wedge ab-b^2\neq a^2\end{cases}$$
17.- $\frac{4}{1+x}=\frac{5}{1-x}-\frac{5}{1-x^2}$, Solution is: $\frac{4}{9}$
18.- $3x+\frac{6}{x-4}=3x+2$, Solution is: 7
19.- $\frac{3x+1}{3+2x}=3-\frac{6x-5}{4x+2}$, Solution is: $-\frac{31}{30}$

20.- $\frac{3}{4x^2-25} + \frac{5}{2x+5} - \frac{7}{2x-5} = 0$, Solution is: $-\frac{57}{4}$

21.- $\frac{10}{3x-2} + \frac{7}{6x-4} = \frac{7}{9x^2-12x+4}$, Solution is: $\frac{68}{81}$

22.- $\frac{2ax+b}{ax+b} + \frac{5ax-3b}{ax-b} = \frac{7\left(a^2x^2+b^2\right)}{a^2x^2-b^2}$, Solution is: $\begin{cases} \mathbb{R} & \text{if } b = 0 \wedge a \neq 0 \\ \mathbb{R} & \text{if } a = 0 \wedge b = 0 \\ \left\{\frac{11}{a}b\right\} & \text{if } a \neq 0 \wedge b \neq 0 \\ \emptyset & \text{if } a = 0 \wedge b \neq 0 \end{cases}$

23.- $\frac{3x-5n}{4x+7n} = \frac{6x-n}{8x+5n}$, Solution is: $\begin{cases} \mathbb{R} & \text{if } n = 0 \\ \left\{-\frac{2}{7}n\right\} & \text{if } n \neq 0 \end{cases}$

24.- $\frac{1}{3x+5} + \frac{1}{3x-2} = \frac{15}{9x^2+9x-10}$, Solution is: 2

25.- $\frac{1}{x-5} + \frac{x}{x+7} - \frac{6}{x^2+2x-35} = 1$, Solution is: 6

26.- $\frac{\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)}{x+\frac{x}{x-\left(\frac{x^2}{x+1}\right)}} = \frac{1}{2}$, Solution is: 3

27.- $\frac{\frac{5}{x+3}-\frac{4}{x-3}}{\left(\frac{x-27}{x^2-3x}\right)} = 0.5$, Solution is: 3.0

28.- $\frac{\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}} = 0.5x(x-1)$, Solution is: ϕ(¿Por qué nó -1?)

29.- $\frac{x+3}{2-5x} = \frac{a+b}{a-b}$, Solution is:

$$\begin{cases} \left\{\frac{-a+5b}{6a+4b}\right\} & \text{if } 4b \neq -6a \wedge 5b \neq 5a \\ \emptyset & \text{if } 2b = 2a \wedge 5b = 5a \wedge 4b \neq -6a \\ \left\{\frac{-a+5b}{6a+4b}\right\} & \text{if } 5b = 5a \wedge 2b \neq 2a \wedge 4b \neq -6a \\ \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-2a+2b}{-5a+5b}\right\} & \text{if } a = 5b \wedge 4b = -6a \wedge 5b \neq 5a \\ \emptyset & \text{if } a = 5b \wedge 2b = 2a \wedge 4b = -6a \wedge 5b = 5a \\ \mathbb{R} & \text{if } a = 5b \wedge 4b = -6a \wedge 5b = 5a \wedge 2b \neq 2a \\ \emptyset & \text{if } a \neq 5b \wedge 4b = -6a \wedge 5b \neq 5a \\ \emptyset & \text{if } a \neq 5b \wedge 2b = 2a \wedge 4b = -6a \wedge 5b = 5a \\ \emptyset & \text{if } a \neq 5b \wedge 4b = -6a \wedge 5b = 5a \wedge 2b \neq 2a \end{cases}$$

30.- $3(4x-1)+4(x+5) = 8(2x-7) \to 16x+17 = 16x-56 \to +17 = -56,$ lo cual es FALSO, por lo tanto $S = \phi$

....

1.- Si un número se aumenta en 5 unidades y se multiplica la suma por el mismo número, se obtiene el cuadrado del mismo número menos 25. ¿cuál es el número?

$(x+5)5 = x^2 - 25$, Solution is: $-5, 10$

$(x+5)5 = x^2 - 25 \rightarrow 5x + 25 = x^2 - 25 \rightarrow 0 = x^2 - 25 - (5x+25) \rightarrow$
$0 = x^2 - 5x - 50$

$x^2 - 5x - 50 = 0 \rightarrow (x-10)(x-5) = 0$

2.- La suma de tres números naturales consecutivos es 945. ¿Cuáles son los números?

$x + (x+1) + (x+2) = 945 \rightarrow 3x + 3 = 945$, Solution is: $314, 315, 316$

3.- La suma de tres números impares consecutivos es 435. ¿Cuáles son los números?

$x + (x+2) + (x+4) = 435$, Solution is: $143, 145, 147$

4.- La suma de tres números pares consecutivos es 90.¿Cuáles son los números?

$x + (x+2) + (x+4) = 90$, Solution is: $28, 30, 32$

5.- Encontrar dos números cuya suma sea 64 y sean entre sí como 7:9

$\begin{array}{c} x + y = 64 \\ x \div y = 7 \div 9 \end{array}$, Solution is: $[x = 28, y = 36]$

6.- La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es 41.¿Cuáles son los números?

$(x+1)^2 - x^2 = 41$, Solution is: $20, 21$

7.- Un inquilino (Pedro) puede sembrar un potrero en 8 días y otro (Juan) puede hacerlo en 12 días. Los tres primeros días trabajó sólo Pedro y después trabajaron los dos juntos hasta terminar.¿Cuántos días trabajaron juntos?

$v = \frac{T}{8}, w = \frac{T}{12}$

$T = vt + wt + 3v \rightarrow T = \frac{T}{8}t + \frac{T}{12}t + 3\frac{T}{8}$, Solution is: $\begin{cases} \{3\} & \text{if } T \neq 0 \\ \mathbb{R} & \text{if } T = 0 \end{cases}$

8.- Se mezcla vino a 1200 el litro y con otro a 1600. ¿Cuántos litros de cada uno deben mezclarse para formar una mezcla de 200 litros y venderla a 1360 el litro?

$\begin{array}{c} x + y = 200 \\ 1200x + 1600y = 1360(x+y) \end{array}$, Solution is: $[x = 120, y = 80]$

9.- El valor de una fracción es $\frac{3}{7}$. Al agregar 4 al numerador y 1 al denominador el valor de la fracción se convierte en $\frac{2}{3}$. ¿Cuál es la fracción?

$\begin{array}{c} \frac{x}{y} = \frac{3}{7} \\ \frac{x+4}{y+1} = \frac{2}{3} \end{array}$, Solution is: $[x = 6, y = 14]$la fracción es $\frac{6}{14}$

10.- La edad actual de un padre es el triple de la edad de su hijo.Si hace 5 años era el cuádruplo, ¿Qué edad tiene cada uno ahora?

$$\begin{array}{r} p = 3h \\ p - 5 = 4(h - 5) \end{array}, \text{ Solution is: } [h = 15, p = 45]$$

11.- Repartir 4500 entre dos hermanos en razón directa de sus edades que son 2 y 7 años.

$$\begin{array}{r} x + y = 4500 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{7} \end{array}, \text{ Solution is: } [x = 1000, y = 3500]$$

12.- Repartir 4500 entre tres personas Pedro, Juan,Sergio de modo que Juan reciba el doble de Sergio aumentado en 1000 y Pedro reciba la cuarta parte de Juan menos 250. ¿Cuánto recibió cada uno?

$$\begin{array}{r} p + j + s = 4500 \\ j = 2s + 1000 \\ p = \frac{j}{4} - 250 \end{array}, \text{ Solution is: } [j = 3000, p = 500, s = 1000]$$

13.- Una persona invierte 300.000 pesos en acciones y recibe anualmente 10.000 pesos de intereses.Sabiendo que unas acciones le producen el 5% y las restantes el 3% a interés simple, hallar el dinero que ha invertido en cada uno de los tipos de acciones.

$$\begin{array}{r} x + y = 300000 \\ 0.05x + 0.03y = 10000 \end{array}, \text{ Solution is: } [x = 50000, y = 250000]$$

14.- Hallar el sueldo de un empleado sabiendo que después de deducido el 14% de impuestos sobre el rendimiento del trabajo personal la cantidad que percibe es de 268000 mensuales.

$x - 0.14x = 268000$, Solution is: ≈ 311628

15.- Para limpiar manchas de grasa en tejidos de lana o de cuero se puede emplear un disolvente a base de 80% de tetracloruro de carbono, 16% de ligroin y 4% de alcohol. Calcular los litros que se deben tomar de cada componente para formar 75 litros de disolvente.

$$75 \bullet \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.16 \\ 0.04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60.0 \\ 12.0 \\ 3.0 \end{pmatrix}$$

16.- Mezclando un aceite de 2800 pesos el litro con otro de 3300 pesos el litro se quieren obtener 45 litros al precio de 3000 pesos el litro. Calcular las cantidades que se deben tomar de cada uno de los tipos de aceite.

$$\begin{array}{r} 2800x + 3300y = 45 \cdot 3000 \\ x + y = 45 \end{array}$$, Solution is: $[x = 27, y = 18]$

....

Sistemas de ecuaciones de primer grado

En un jardín hay 30 animales entre conejos y gallinas, contamos 100 patas en total. ¿ Cuántas gallinas y conejos hay?

Resolución e Indicaciones generales para resolver este tipo de problemas.

∇ Definimos o damos nombres a las variables en juego o elementos desconocidos:

• Sean C el número de conejos y G el número de gallinas.

∇ Anotamos las características de cada elemento o sus propiedades (Traspasamos a lenguaje algebraico cada información detectada.)

• Ya que cada conejo tiene 4 patas, podemos escribir 4C para el número de patas de conejo

• 2G para la cantidad de patas de gallina.

∇ Como señales para el signo de la igualdad se tienen las siguientes expresiones :

“ A y B están en la relación...”/ “ el resultado es”/ “Si A entonces B”

“Si A sufre una modificación y B sufre una modificación entonces las cantidades modificadas son iguales”

• En un jardín hay 30 animales entre conejos y gallinas → C+G = 30

• contamos 100 patas en total → 4C+2G = 100

Luego obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} C + G = 30 \\ 4C + 2G = 100 \end{pmatrix}$$

Resolviendo por sustitución: G = 30 - C → 4C +2(30-C)= 100

4C+60-2C= 100

2C= 100-60→ 2C = 40→C = 20

finalmente G =30 - 20→G =10

Hay 20 conejos y 10 gallinas.

Los sistemas de ecuaciones tienen muchas aplicaciones, se pueden interpretar *además de diversas maneras, como por ejemplo: cada ecuación en las variables : “x” e “y” pueden representar líneas rectas, y cuando resolvemos un sistema, lo que hacemos es determinar el punto de intersección entre ellas, si las líneas son paralelas, no habrá solución(la solución será el conjunto vacío), si se interceptan, entonces el conjunto solución será un punto(en el plano), y si ellas son coincidentes, entonces el conjunto solución es infinito, con infinitos puntos de intersección.*

Antes de resolver los problemas de aplicación complete la siguiente Tabla de conversión de lenguaje común a lenguaje algebraico(escritura resumida)

La diferencia entre dos números es 20	$x - y = 20$
Dividir 80 en dos partes	
3/8 de la parte mayor equivalgan a los 3/2 de la menor	
Un hacendado compró 4 vacas y 7 caballos por 514 dólares	
compró 8 vacas y 9 caballos por 818 dólares	
Si a los dos términos de una fracción se añade 1, el valor de la fracción es 2/3	
La diferencia entre los cuadrados de dos números impares consecutivos es 104	
Determinar dos números cuya suma sea 64	
Si el mayor de dos números se divide por el menor, el cuociente es 2 y el residuo es 4	
La edad actual de un padre es el triple de la edad de su hijo.	
Hace cinco años la edad del Padre era el cuádruplo de la del Hijo.	
Repartir 450 entre dos hermanos	
Un trazo mide 49 cm. Dividirlo en tres segmentos	
Dos cantidades están en la razón 3/7.	

PROBLEMAS DE APLICACIÓN:

1.- La diferencia entre dos números es 20 y su suma es 40. Hallar los números.
Respta: 30 ;10

2.- Dividir 80 en dos partes tales que los 3/8 de la parte mayor equivalgan a los 3/2 de la menor. / Respta: 16; 64.

3.- Un hacendado compró 4 vacas y 7 caballos por 514 dólares, y más tarde a los mismos precios compró 8 vacas y 9 caballos por 818 dólares. Hallar el costo de cada animal.
Respta: 55; 42

4.- Si a los dos términos de una fracción se añade 1, el valor de la fracción es 2/3 , y si a los dos términos se resta 1,el valor de la fracción es ½ . Hallar la fracción.

Respta: 4;7

5.- Si el mayor de dos números se divide por el menor, el cuociente es 2 y el residuo es 4, y si cinco veces el menor se divide por el mayor, el cuociente es 2 y el residuo 17. Hallar los números. / Respta: 54;25

6.- Determinar dos números cuya suma sea 64 y sean entre si como 7: 9. / Respta: 28 y 36

7.- La diferencia entre los cuadrados de dos números impares consecutivos es 104.¿Cuáles son los números? / Respta: : 25 y 27

8.- Se tienen tres números pares consecutivos; Si al producto de los dos mayores se le resta el cuadrado del menor se obtiene 32. ¿ cuáles son los números? /Respta: 4; 6 y 8

9.- Dos cantidades están en la razón 3/7. Al agregar 4 al numerador y 1 al denominador el valor de la fracción se convierte en 2/3. ¿Cuál es este número? / Respta: 6/14.

10.- La edad actual de un padre es el triple de la edad de su hijo. Si hace cinco años era el cuádruplo, ¿Que edad tiene cada uno ahora ? / Respta: P = 45; H = 15.

11.-Sumando las edades de tres personas A, B y C se obtienen 57 años 6 meses. La edad de C es el 10% de la edad de B y la edad de A es el 120% de la edad de B.

¿Qué edad tiene cada una?

Respta: A= 30años B= 25; c= 2,5.

12.- Repartir $ 600 entre dos hermanos en razón inversa a sus edades que son 4 y 11 años, respectivamente.

Respta: Menor r = $ 440; Mayor = $ 160.

13.-Repartir 450 entre dos hermanos en razón directa de sus edades que son 2 años y 7 años.

Respta: Menor = 100; Mayor =350.

14.- Se mezcla vino a $120 el litro y a $160 ¿ Cuántos litros de cada uno deben mezclarse para formar una mezcla de 200 litros y venderla a $136 el litro?

Respta: 120 litros a $120 con 80 litros a $160.

15.-Un comerciante invierte su capital en comprar sacos de papas dejando $ 60.000 en caja sin invertir. Vende 100 sacos en el mes. En arriendo, pago empleados e impuestos invirtió el 80% de lo que tenía al final del mes. Al comenzar el nuevo mes vendió 20 sacos con lo cual completó $ 72.000 en caja. ¿ A cómo vendió el saco de papas?

Respta: $1500.

16.-Un trazo mide 49 cm. Dividirlo en tres segmentos de modo que los vecinos sean el doble uno del otro.

Respta: 7 cm; 14cm; 28cm.

Resolución vía determinantes.

$\begin{pmatrix} 3x - y = 1 \\ 2x + y = 9 \end{pmatrix}$, Solution is: $[x = 2, y = 5]$

matriz principal: $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 5 \quad \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} = 10 \quad \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} = 25$

$x = \frac{10}{5} = 2; y = \frac{25}{5} = 5$

....

1.- $\begin{pmatrix} 2x + y = 8 \\ 4x - 2y = 10 \end{pmatrix}$, Solution is: $\left[x = \frac{13}{4}, y = \frac{3}{2}\right]$

2.- $\begin{pmatrix} 8m + n = 8 \\ 4m + 3n = 10 \end{pmatrix}$, Solution is: $\left[m = \frac{7}{10}, n = \frac{12}{5}\right]$

3.- $\begin{pmatrix} 4x + y + z = 10 \\ x + y - z = 12 \\ -2x - 3y + 4z = -1 \end{pmatrix}$, Solution is: $[x = -72, y = 191, z = 107]$

1.- Hallar dos números sabiendo que si uno de ellos se suma con el doble del otro se obtiene 21 y que si este último se suma con el doble del primero resulta 18.

$\begin{pmatrix} x + 2y = 21 \\ 2x + y = 18 \end{pmatrix}$, Solution is: $[x = 5, y = 8]$

2.- Halar una fracción sabiendo que si se aumentan el numerador y el denominador en 3 unidades se obtiene $\frac{2}{3}$ y que si ambos se disminuyen en 2 unidades resulta $\frac{1}{2}$

$\begin{pmatrix} \frac{x+3}{y+3} = \frac{2}{3} \\ \frac{x-2}{y-2} = \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, Solution is: $[x = 7, y = 12]$

3.- Hallar dos números sabiendo que el doble de su suma es igual al triple de su diferencia más 8, y que su semisuma es igual a su diferencia más 1.

$\begin{pmatrix} 2(x + y) = 3(x - y) + 8 \\ \frac{x+y}{2} = (x - y) + 1 \end{pmatrix}$, Solution is: $[x = 7, y = 3]$

4.- Hallar dos números sabiendo que si se divide el mayor por el menor da un cuociente 2 y un resto también 2, y que si se divide el quíntuplo del menor por el mayor, el cuociente es 2 y el resto 3.

$\begin{pmatrix} \frac{x}{y} = 2 + \frac{2}{y} \\ \frac{5y}{x} = 2 + \frac{3}{x} \end{pmatrix}$, Solution is: $[x = 16, y = 7]$

5.- Hace 6 años Agustín era 4 veces mayor que Pablo. Hallar sus edades actuales sabiendo que dentro de 4 años sólo será dos veces mayor que Pablo.

$\begin{pmatrix} A - 6 = 4(P - 6) \\ A + 4 = 2(P + 4) \end{pmatrix}$, Solution is: $[A = 26, P = 11]$

6.- Alondra es 11 veces mayor que Berta. Dentro de cierto número de años Alondra será 5 veces mayor que Berta y cinco años más tarde será tres veces mayor que Berta.Hallar sus edades actuales.

$\begin{pmatrix} A = 11B \\ A + 8 = 3(B + 8) \end{pmatrix}$, Solution is: $[A = 22, B = 2]$

....

Desigualdades

La relación menor o igual que $(\leq)$ entre los números reales, es una relación de orden, es decir se cumple que: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

1.- Es refleja : $a = a$

2.- Es antisimétrica: $(a \leq b)\ y\ (b \leq a) \Rightarrow a = b$

3.- Es transitiva: $(a \leq b)\ y\ (b \leq c) \Rightarrow a \leq c$

Estas propiedades reciben el nombre de axiomas de orden.

Observación:

$3 \geq 3$ es una proposición verdadera equivalente con $3 \leq 3$ (también verdadera)

$4 > 4$ es una proposición falsa equivalente con $4 < 4$ (también falsa)

$5 \geq -2$ es una proposición verdadera equivalente con $-2 \leq 5$ (también verdadera)

Actividad : Relacione con una flecha las expresiones que sean equivalentes:

$a < b$	$b \geq a$
$a \leq b$	$-5 < -2$
$-2 > -5$	$b > a$
$-a < b$	$-5 > -2$
$p \geq q$	$a < -b$
$-p \leq -q$	$5 < 2$
	$q \leq p$

Reactivo Verdadero-Falso:
En relación a la recta numérica:

1.- Todo número situado a la izquierda de otro es menor que él. V F

2.- Todo número que está situado a la derecha de otro es mayor que él. V F

3.- Todo número mayor que cero es positivo. V F

4.- Todo número menor que cero es negativo. V F

5.- "a" está a la izquierda de b⇔ $a < b$ V F

6.- "a" está a la derecha de b⇔ $a > b$ V F

Intervalos en $\mathbb{R}$:

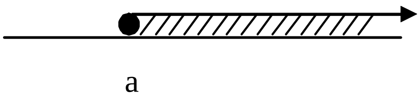
1.- $a < x < b$ indica que x está entre a y b,es decir , x es mayor que a y menor que b. Este conjunto infinito de números se escribe en las siguientes escrituras alt

	Notación	significado
$a < x < b$	$]a,b[$	intervalo abierto
$a \leq x < b$	$[a,b[$	intervalo semi abierto por la derecha
$a < x \leq b$	$]a,b]$	intervalo semi abierto por la izquierda
$a \leq x \leq b$	$[a,b]$	intervalo cerrado
$a < x$	$]a,\infty[$	abierto por la izquierda y no acotado por la derecha
$a \leq x$	$[a,\infty[$	cerrado por la izquierda y no acotado por la derecha
$x < a$	$]-\infty,a[$	abierto por la derecha y no acotado por la izquierda
$x \leq a$	$]-\infty,a]$	cerrado por la derecha y no acotado por la izquierda

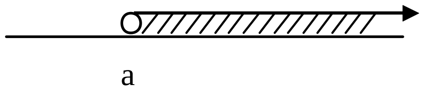
Los puntos extremos de cada intervalo son las fronteras del mismo. El único intervalo que contiene a sus dos puntos fronteras es el intervalo cerrado.

Representación gráfica de intervalos:

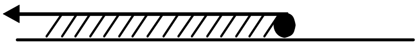
$[a, \infty[$



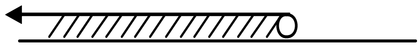
$]a, \infty[$



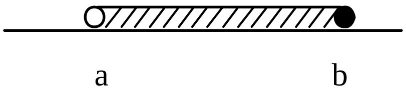
$]-\infty, a]$



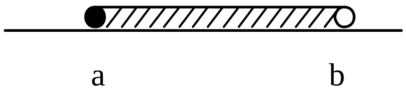
$]-\infty, a[$



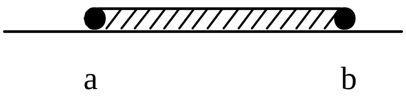
$]a, b]$



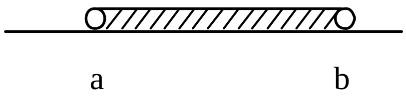
$[a, b[$



$[a, b]$



$]a, b[$



Unión e intersección de intervalos.

Dado el hecho de que todo intervalo es un conjunto de números reales, se tiene la posibilidad de realizar diversas operaciones de conjuntos entre ellos, por ejemplo: unión, intersección, diferencia y complemento, por ejemplo. En este escrito nos interesan fundamentalmente la unión y la intersección que se explicarán a continuación:

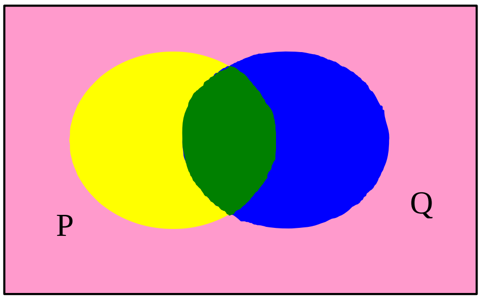
Unión de intervalos: $P \cup Q = \{x \in P \vee x \in Q\}$

Analizar los siguientes ejemplos en forma gráfica

P	Q	$P \cup Q$	
$[2,3]$	$]-3,4[$	$]-3,4[$	$[2,3]$es subconjunto de $]-3,4[$
$[1,3]$	$[2,6]$	$[1,6]$	
$[-2,3[$	$[2,3]$	$[-2,3[$	
$[-2,3[$	$[-2,3[$	$[-2,3[$	
$[-2,3[$	$[6,10[$	$[-2,3[\cup [6,10[$	

$P \cap Q = \{x \in P \wedge x \in Q\}$

P	Q	$P \cap Q$	
$[2,3]$	$]-3,4[$	$[2,3]$	$[2,3]$es subconjunto de $]-3,4[$
$[1,3]$	$[2,6]$	$[2,3]$	
$[-2,3[$	$[2,3]$	$[2,3]$	
$[-2,3[$	$[-2,3[$	$[-2,3[$	es el mismo intervalo
$[-2,3[$	$[6,10[$	ϕ	son disjuntos



La intersección de los conjuntos P y Q corresponde a la zona verde.

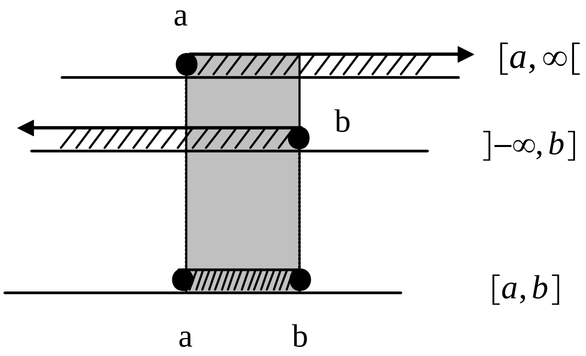
La unión de ambos conjuntos es la reunión de las zonas amarilla,verde y azul.

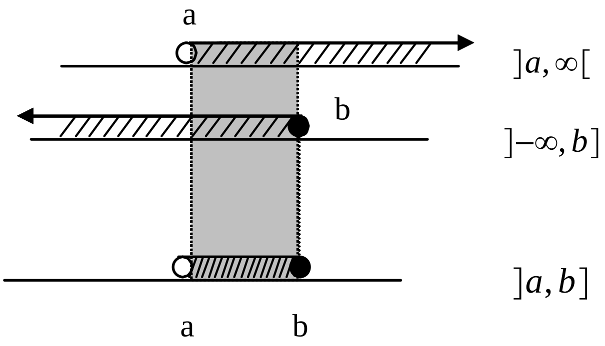
Ejercicios alusivos:

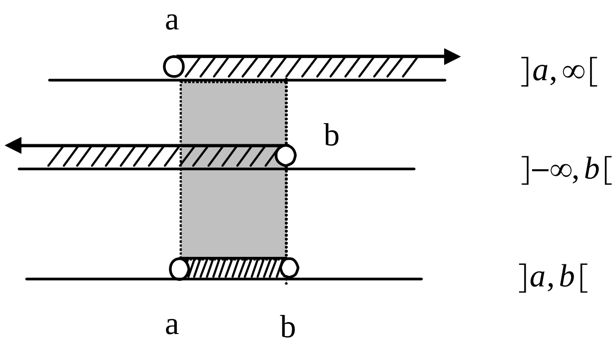
Siendo $P = \{1,2,3,4\}$, $Q = \{3,4,5,6\}$

Hallar los siguientes conjuntos: $P \cup Q$, $P \cap Q$, $P - Q$, P' , y dibuje una representación gráfica.(diagrama de Venn-Euler)

En este ejemplo, la intesección entre los intervalos $[a,\infty[$ y $]-\infty,b]$, da como resultado el intervalo cerrado $[a,b]$. Se ha achurado la zona común para visualizar mejor la intersección.







Desigualdades y valor absoluto en $\mathbb{R}$

Cuando nos referimos a las desigualdades es importante referirnos a la ley de tricotomía que cumplen cualquier pareja de números reales que consideremos.

Así, si tomamos dos pares de números reales $a, b \in \mathbb{R},$ se cumple:

$a < b$ ó $a > b$ ó $a = b$ y sólo una de ellas.

Por desigualdad consideraremos a toda expresión que se establezca entre números reales mediante la relación "menor que" o "menor o igual que"(también "mayor que " o "mayor o igual que")

A estas expresiones las consideraremos proposiciones por lo que pueden tener un valor de verdad Verdadero o Falso. Así por ejemplo:

$$\left(\begin{array}{c} -5 < 4 \text{ is true} \\ 4 > 8 \text{ is false} \\ 3 > 10 \text{ is false} \\ 4 < 12 \text{ is true} \end{array} \right)$$

Determine cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas

$2a > b;\ \forall a,b \in \mathbb{R}$	V	F
$a^2 < b^2,\ \forall a,b \in \mathbb{R}$	V	F
$\frac{c}{7} < \frac{d}{2};\ c < 0, d \in \mathbb{R}^+$	V	F
$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}, \forall a > b;\ \ a,b \in \mathbb{R}$	V	F
$x^2 < y^2;\ 0 < x < y$	V	F
$\frac{x^4}{3} > \frac{y^4}{3}; \forall x > y;\ x,y \in \mathbb{R}$	V	F
$x^2 > 1\ ;\ \ \ x \in]0,1]$	V	F
$x^3 > x^2\ ;\ \ \ x \in]0,1]$	V	F

Propiedades de las desigualdades:

Propiedad aditivas:

1.- $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$
$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$
$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$
$a \geq b \Leftrightarrow a + c \geq b + c$
2.- $a \leq b \Leftrightarrow (b - a) \geq 0$
3.- $(a \leq b) \wedge (c \leq d) \Rightarrow (a + c \leq b + d)$

Propiedades multiplicativas:

1.- $a \leq b \Leftrightarrow a \bullet c \leq b \bullet c$, siempre que $c > 0$
2.- $a \leq b \Leftrightarrow \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$, siempre que $c > 0$
3.- $a \leq b \Leftrightarrow a \bullet c \geq b \bullet c$, siempre que $c < 0$
4.- $a \leq b \Leftrightarrow \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$, siempre que $c < 0$
5.- $(a \leq b) \wedge (c \leq d) \Rightarrow (a \bullet c \leq b \bullet d)$, siempre que a,b,c,d sean positivos

Propiedad del inverso de las desigualdades:

6.- $a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$, siempre que a,b sean positivos.

Ejercicios: Investigar cuáles deben ser las condiciones para que las siguientes proposiciones sean verdaderas

1.- $0 \leq a \leq b \Rightarrow a^n \geq b^n \geq 0$

2.- $a \leq b \leq 0 \Rightarrow a^n \geq b^n \geq 0$

3.- $0 \leq a \leq b \Rightarrow 0 \leq a^n \leq b^n$

4.- $a \leq b \leq 0 \Rightarrow a^n \leq b^n \leq 0$

Sugerencia: trabaje con valores numéricos.

Inecuaciones de primer grado:

Una inecuación de primer grado con una incógnita es una desigualdad en que intervienen números reales y en donde la incógnita es de primer grado.

Resolver una inecuación es determinar el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad, en otras palabras el conjunto de valores que hacen que la función proposicional sea verdadera.(es decir determinar el conjunto de valores de verdad)

Ejemplo: $\frac{2x-5}{-3} \geq 3 + x$

para no trabajar con fracciones es lícito multiplicar la desigualdad por -3

$-3\left(\frac{2x-5}{-3}\right) \geq -3(3+x)$

$\Leftrightarrow 2x - 5 \leq -3x - 9$, pero la desigualdad cambia de sentido(la igualdad se mantiene)

$\Leftrightarrow 5x \leq -4 \Leftrightarrow x \leq -\frac{4}{5} \Leftrightarrow \left]-\infty, -\frac{4}{5}\right]$

Usando el SWP.... $\frac{2x-5}{-3} \geq 3 + x$, Solution is: $\left(-\infty, -\frac{4}{5}\right]$

Observación: en este contexto se deben considerar las siguientes equivalencias para los paréntesis empleados:

(	$\Leftrightarrow$]
)	$\Leftrightarrow$ [

Casos especiales de inecuaciones:ejemplo $\frac{x+2}{x-3} \geq -2$, Solution is: $(3, \infty) \cup \left(-\infty, \frac{4}{3}\right]$

En primer lugar, todo tipo de inecuación se debe llevar a la forma:

$E(x) \geq 0; E(x) \leq 0; E(x) > 0$ o bien $E(x) < 0$, en donde $E(x)$ es un expresión compuesta por factores lineales, factores lineales pueden ser por ejemplo: $x + 2; 2x - 3; \frac{4}{5} - 6x; etc, etc.$

$\frac{x+2}{x-3} \geq -2 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-3} + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(3x-4)}{(x-3)} \geq 0$

se puede visualizar que la expresión $\frac{(3x-4)}{(x-3)}$ es positiva si tanto el denominador como el numerador son positivos, o bien si ambos son negativos. La tarea es determinar para qué valores de x lo son.Una forma bastante práctica resulta ser la división de la recta numérica en sectores.(sub-intervalos.)

Expresión en estudio	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		3		∞
$3x-4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{3x-4}{x-3}$		$+$				$+$	
		$\frac{3x-4}{x-3} < 0$		$\frac{3x-4}{x-3} < 0$		$\frac{3x-4}{x-3} > 0$	

Al final es suficiente observar la última fila de esta matriz y el intervalo en donde la expresión en estudio satisface la condición, en este caso: $\frac{(3x-4)}{(x-3)} \geq 0$ para escribir la solución: $\left]-\infty, \frac{4}{3}\right] \cup]3, \infty[$

Determinar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

1.- $2x+5 < 6$, Solution is: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

2.- $4x-3(2-3x) \geq 5$, Solution is: $\left[\frac{11}{13}, \infty\right)$

3.- $\frac{2x-3}{-4} \leq \frac{-2x}{3}$, Solution is: $\left(-\infty, -\frac{9}{2}\right]$

4.- $\frac{3-2x}{3+x} > 2$, Solution is: $\left(-3, -\frac{3}{4}\right)$

5.- $\frac{1-2x}{4} \geq -3x+2$, Solution is: $\left[\frac{7}{10}, \infty\right)$

6.- $\frac{1}{x-3} < -3$, Solution is: $\left(\frac{8}{3}, 3\right)$

7.- $\frac{1}{x-3} \geq -3$, Solution is: $(3, \infty) \cup \left(-\infty, \frac{8}{3}\right]$

8.- $\frac{x-2}{x+3} \geq -4$, Solution is: $(-\infty, -3) \cup [-2, \infty)$

9.- $\frac{x-2}{x+3} < -4$, Solution is: $(-3, -2)$

10.- $\frac{2-x}{x+4} < 5$, Solution is: $(-3, \infty) \cup (-\infty, -4)$

Sistemas de inecuaciones (en una variable)

Un sistema de inecuaciones es un conjunto de dos o más inecuaciones. Cada inecuación representa una condición o exigencia que se le pide que cumpla la variable. A medida que aumenta el número de inecuaciones , el conjunto solución se restringe. La solución puede ser un conjunto infinito(intervalo numérico), un número único, o bien un conjunto vacío.

ejemplos:

- resolver el sistema: $\begin{matrix} 6x-3 \geq 3+4x \\ 3x \geq -3+4x \end{matrix}$, Solution is: 3
- resolver el sistema: $\begin{matrix} 6x-3 \geq 5+4x \\ 3x \geq -5+4x \end{matrix}$, Solution is: $[4,5]$
- resolver el sistema: $\begin{matrix} 6x \geq 10+4x \\ 3x-8 < -2 \end{matrix}$, solución: $\phi = \{\ \}$, conjunto vacío

1.- $\begin{matrix} 2-3x > 5x \\ 4x-6 \leq 5 \end{matrix}$, Solution is: $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$

resolución:

$2-3x > 5x$, Solution is: $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$

$4x-6 \leq 5$, Solution is: $\left(-\infty, \frac{11}{4}\right]$

$\left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cap \left(-\infty, \frac{11}{4}\right] = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$

Cada inecuación genera un conjunto solución(solución parcial). Cada inecuación representa una condición o exigencia sobre la variable "x", como se deben cumplir todas ellas, el resultado es la intersección de todos los conjuntos solución o soluciones parciales según se las ha denominado.

....

2.- $\begin{pmatrix} -2x+3 > -5 \\ 4-6x \leq 8 \end{pmatrix}$, Solution is: $\left[-\frac{2}{3}, 4\right)$

3.- $\begin{pmatrix} -2x+3 > -5 \\ 4-6x \leq 8 \\ 3x-4 > -3 \end{pmatrix}$, Solution is: $\left(\frac{1}{3}, 4\right)$

4.- $\begin{pmatrix} -2+3x < -5x \\ 4x-6 \leq 8x \\ -3x-4 > -3 \end{pmatrix}$, Solution is: $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right)$

5.- $\begin{pmatrix} -2+3x < -5x \\ 4x-6 \leq 8x \\ -3x-4 > -3 \\ 2-4x \geq 1 \end{pmatrix}$, Solution is: $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right)$

6.- $\begin{pmatrix} -2+3x > -5x \\ 4x-6 \leq 8x \end{pmatrix}$, Solution is: $\left(\frac{1}{4},\infty\right)$

7.- $\begin{pmatrix} -3x-4 > -3 \\ 2-4x < 1 \end{pmatrix}$, No solution found.

explicación:

$-3x-4 > -3$, Solution is: $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$

$2-4x < 1$, Solution is: $\left(\frac{1}{4},\infty\right)$

$\left]-\infty,-\frac{1}{3}\right[\cap \left]\frac{1}{4},\infty\right[= \phi$

....

Inecuaciones de segundo grado(en una variable)

La idea base a seguir para resolver una inecuación de segundo grado consiste en reducir la inecuación a una de las formas:

$ax^2+bx+c \leq 0; ax^2+bx+c < 0; ax^2+bx+c \geq 0; ax^2+bx+c > 0$, y luego escribir el polinomio cuadrático en forma factorizada, en la forma:

$(cx+d)(ex+f)$, llegado a este punto es posible seguir el mismo procedimiento aplicado en la resolución de casos especiales de inecuaciones

Así por ejemplo: $(x-3)(2x+5) \leq 0$ se resuelve con ayuda de la siguiente tabla:

factor lineal en estudio	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		3		∞
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)(2x+5)$		$+$		$-$		$+$	

$(x-3)(2x+5) \leq 0$, Solution is: $\left[-\frac{5}{2},3\right]$

se observa que entre el número $-\frac{5}{2}$ y el número 3 la expresión $(x-3)(2x+5)$ es menor que cero, y que justamente en dichos números la expresión se anula.

otro ejemplo:resolver : $3x^2-18x+24 > 0$, Solution is: $(-\infty,2) \cup (4,\infty)$ (vía SWP.)

resolución: $3x^2-18x+24 = (3x-6)(x-4)$

se llega a esta factorización gracias a la aplicación de la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado $3x^2-18x+24 = 0$, Solution is: $2,4$

de este modo podemos escribir: $3x^2-18x+24 = 3(x-2)(x-4)$

y por lo tanto : $3(x-2)(x-4) > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) > 0$

a continuación bosquejamos la tabla de signos

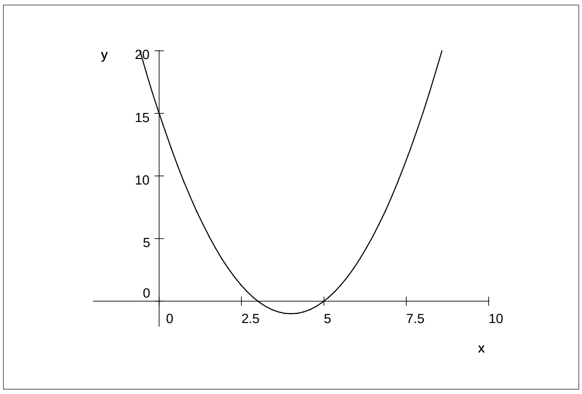
factor lineal en estudio	$-\infty$		2		4		∞
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)(x-4)$		$+$		$-$		$+$	
el 3 no interviene en el signo							

luego la solución viene dada por:
$3(x-2)(x-4) > 0$, Solution is: $(-\infty,2) \cup (4,\infty)$
Ejercicios a resolver
(La solución se da en la misma línea, los ejercicios han sido resueltos con el SWP)

	Inecuación de 2do grado	Conjunto solución
1	$x^2-8x+15 > 0$	$(-\infty,3)\cup(5,\infty)$
2	$x^2-6x+8 \geq 0$	$(-\infty,2]\cup[4,\infty)$
3	$-x^2+x+1 > 0$	$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)$
4	$6x^2-8x+1 < 0$	$\left(-\frac{1}{6}\sqrt{10}+\frac{2}{3},\frac{1}{6}\sqrt{10}+\frac{2}{3}\right)$,
5	$x^2 > 3$	$\left(\sqrt{3},\infty\right)\cup\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$
6	$3(x-9)^2 > 0$	$(-\infty,9)\cup(9,\infty)$
7	$3(x-9)^2 \geq 0$	$(-\infty,\infty)$
8	$-x^2+2 > 0$	$\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$
9	$7x^2-5x < 0$	$\left(0,\frac{5}{7}\right)$
10	$-7x^2+8x+2 \geq 0$	$\left[-\frac{1}{7}\sqrt{30}+\frac{4}{7},\frac{1}{7}\sqrt{30}+\frac{4}{7}\right]$
11	$(x-3)(x+1) < 0$	$(-1,3)$

Interpretación geométrica de la resolución de una inecuación

$x^2-8x+15 > 0$ $(-\infty,3)\cup(5,\infty)$
$y = f(x) = x^2-8x+15 > 0$



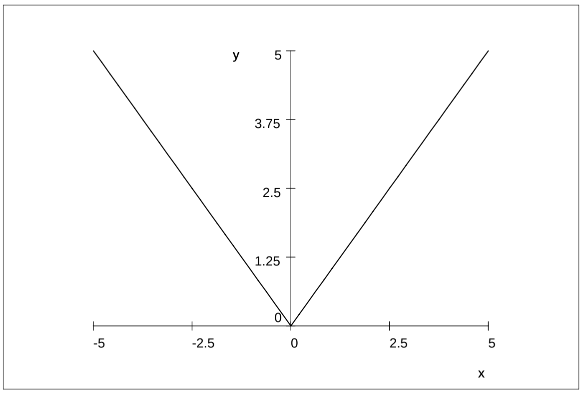
lo que estamos buscando en realidad son los valores de x para los cuales los puntos de la gráfica están sobre el eje horizontal(eje x).Según se puede ver esto ocurre en $]-\infty,3[\,\cup\,]5,\infty[$

....

Valor absoluto de números reales

El valor absoluto de un número x se define por: $|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$

La gráfica de la función valor absoluto viene dada por :



Ejercicios:

Evaluar las siguientes expresiones:(el resultado se da a continuación del signo igual)

1.- $||2-8|-20| = 14$

2.-$||2-9|-|4-21|| = 10$

3.- Hallar el valor de x en las siguientes ecuaciones con valor absoluto:

a) $|x-4| = 5$, Solution is: $9, -1$

b) $|x-8| = 3$, Solution is: $11, 5$

c) $|x-8| = -3$, Solution is:ϕ

d) $|2-3x| = 2$, Solution is: $0, \frac{4}{3}$

Propiedades del valor absoluto

1.- $\forall a > 0$, se cumple: $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

2.- $\forall a > 0,$ se cumple: $|x| \geq a \Leftrightarrow (x \leq a) \vee (x \geq a)$
Ejercicios:
Escribe sin el símbolo de valor absoluto las siguientes desigualdades:
1.- $|x| \leq 3$, Solution is: $[-3,3]$
2.- $|x| > 2$, Solution is: $(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$
3.- $|x-4| > 5$, Solution is: $(-\infty,-1) \cup (9,\infty)$
4.- $|2x+4| \leq 10$, Solution is: $[-7,3]$
5.- $|2x-4| \geq 10$, Solution is: $(-\infty,-3] \cup [7,\infty)$
6.- $|3-2x| < 10$, Solution is: $\left(-\frac{7}{2},\frac{13}{2}\right)$
Escribe las siguientes desigualdades utilizando el símbolo de valor absoluto:
1.- $\{x \in \mathbb{R} \diagup -3 \leq x \leq 3\}$ 2.- $\{x \in \mathbb{R} \diagup -4 \leq x-2 \leq 2\}$

Ecuaciones con valor absoluto:

Se considerarán dos tipos de ecuaciones con valor absoluto: aquellas en las cuales aparece una sola expresión en valor absoluto y las otras en las cuales aparecen dos o más expresiones en valor absoluto.

El método general de resolución es el mismo para ambas, y consiste en dividir la recta numérica en intervalos, cada uno de los cuales se obtiene determinando los puntos (x,0) en donde las expresiones algebraicas se anulan.

Primer ejemplo:
$|x-1| = 4$
Se construirá una tabla para estudiar los signos de la expresión $(x-1)$

factor lineal	$-\infty$		1		∞
$(x-1)$		$-$	0	$+$	
		I_1		I_2	

El valor $x = 1$ divide a la línea recta en dos intervalos

Al resolver en el intervalo I_1: $-(x-1) = 4$, Solution is: -3, en donde $-3 \in I_1$, luego $S_1 = \{-3\}$

en el intervalo I_2: $(x-1) = 4$, Solution is: $5,$ en donde $5 \in I_1$, luego $S_2 = \{5\}$
finalmente, la solución viene dada por: $S = S_1 \cup S_2 = \{-3,5\}$

Segundo ejemplo: $\frac{|x-1|}{|x+3|} = 4$, Solution is: $-\frac{13}{3}, -\frac{11}{5}$
Se construirá una tabla para estudiar los signos de las expresiones: $(x-1)$ y $(x+3)$

factor lineal	$-\infty$		-3		1		∞
$(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+3)$		$-$	0	$+$		$+$	
		$+$		$-$		$+$	
		I_1		I_2		I_3	

♠Resolución en $I_1 =]-\infty,-3[$, ambos factores lineales son negativos: $\frac{|x-1|}{|x+3|} = 4 \rightarrow$
$\frac{-(x-1)}{-(x+3)} = 4 \rightarrow x-1 = 4(x+3)$, Solution is: $-\frac{13}{3} \in I_1 =]-\infty,-3[$, por lo tanto
$S_1 = \left\{-\frac{13}{3}\right\}$
♠Resolución en $I_2 =]-3,1[$, $(x-1)$ es negativo y $(x+3)$ es positivo: $\frac{|x-1|}{|x+3|} = 4 \rightarrow$
$\frac{-(x-1)}{(x+3)} = 4$, Solution is: $-\frac{11}{5} = -2.2 \in I_2 =]-3,1[$, por lo tanto $S_2 = \left\{-\frac{11}{5}\right\}$
♠Resolución en $I_3 =]1,\infty[$, ambos son positivos: $\frac{|x-1|}{|x+3|} = 4 \rightarrow$

$\frac{(x-1)}{(x+3)} = 4$, Solution is: $-\frac{13}{3} \notin I_3 =]1,\infty[$, por lo tanto $S_3 = \{\ \ \} = \phi$
finalmente la solución está dada por:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{-\frac{13}{3}\right\} \cup \left\{-\frac{11}{5}\right\} \cup \phi = \left\{-\frac{13}{3}, -\frac{11}{5}\right\}$$

tercer ejemplo:
$|3x-3| - |2x-1| = 1$, Solution is: $3, \frac{3}{5}$

Primer paso: determinamos en donde se hace cero cada expresión en valor absoluto.

$3x-3 = 0$, Solution is: 1
$2x-1 = 0$, Solution is: $\frac{1}{2}$

Segundo paso: construimos la tabla

expresión en valor absoluto	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		∞
$3x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
		$+$		$-$		$+$	
		I_1		I_2		I_3	

Tercer paso: resolvemos la ecuación en cada intervalo.

♠Resolución en $I_1 = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$, ambos factores lineales son negativos:

$|3x-3| - |2x-1| = 1 \to -(3x-3) + (2x-1) = 1$, Solution is: $1 \notin I_1 =]-\infty, -3[$, por lo tanto $S_1 = \{\ \ \} = \phi$

♠Resolución en $I_2 = \left]\frac{1}{2}, 1\right[$, $3x-3$ es negativo y $2x-1$ es positivo:

$|3x-3| - |2x-1| = 1 \to -(3x-3) - |2x-1| = 1$, Solution is: $\frac{3}{5} \in I_2 = \left]\frac{1}{2}, 1\right[$, por lo tanto $S_2 = \left\{\frac{3}{5}\right\}$

♠Resolución en $I_3 =]1, \infty[$, ambos son positivos:$|3x-3| - |2x-1| = 1 \to$

$3x-3-(2x-1) = 1$, Solution is: $3 \in I_3 =]1, \infty[$, por lo tanto $S_3 = \{3\}$

finalmente la solución está dada por:

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{\ \ \} \cup \left\{\frac{3}{5}\right\} \cup \{3\} = \left\{\frac{3}{5}, 3\right\}$

....

Ejercicios propuestos:

1.- $|x+1| = 4$, Solution is: $3, -5$

2.- $|x-1| = 5$, Solution is: $6, -4$

3.- $|2x-1| + |x-1| = 6$, Solution is: $\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}$

4.- $\frac{|2x-1|}{|x-1|} = 6$, Solution is: $\frac{7}{8}, \frac{5}{4}$

5.- $\frac{|x-1|}{|2x-1|} = 2$, Solution is: $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}$

6.- $\frac{|2-x|}{|x+1|} = 1$, Solution is: $\frac{1}{2}$

7.- $|2-x| + |x+1| = 6$, Solution is: $-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}$

8.- $|x-3| - |2x-1| = 2$, Solution is: $0, \frac{2}{3}$

9.- $|3x-1| + |x-1| = |x+6|$, Solution is: $\frac{8}{3}, -\frac{4}{5}$

....

Inecuaciones con valor absoluto:

El procedimiento seguido para resolver ecuaciones con valor absoluto es válido también para resolver inecuaciones con valor absoluto.

a modo de ejemplo se resolverá la siguiente: $|2-x|+|x+1| \geq 6$, Solution is: $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2},\infty\right)$

♠ Determinamos en donde las expresiones con valor absoluto se anulan

$2-x=0$, Solution is: 2
$x+1=0$, Solution is: -1

♠ Construimos la tabla de signos

expresión en valor absoluto	$-\infty$		-1		2		∞
$2-x$		+		+	0	−	
$x+1$		−	0	+		+	
		+		−		+	
		I_1		I_2		I_3	

♠ resolvemos la ecuación en cada intervalo:

♠Resolución en $I_1 =]-\infty,-1[$, $(2-x)$ es positivo y $(x+1)$ es negativo
$|2-x|+|x+1| \geq 6 \rightarrow (2-x)-(x+1) \geq 6$, Solution is: $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right]$
$S_1 =]-\infty,-1[\cap \left(-\infty,-\frac{5}{2}\right] = \left(-\infty,-\frac{5}{2}\right]$
♠Resolución en $I_2 =]-1,2[$, $(2-x)$ es positivo y $(x+1)$ también

$|2-x|+|x+1| \geq 6 \rightarrow (2-x)+(x+1) \geq 6$, No solution found.
por lo tanto $S_2 = \{\ \ \}$
♠Resolución en $I_3 =]2,\infty[$, $(2-x)$ es negativo y $(x+1)$ es positivo

$|2-x|+|x+1| \geq 6 \rightarrow -(2-x)+(x+1) \geq 6$, Solution is: $\left[\frac{7}{2},\infty\right)$
$S_3 =]2,\infty[\cap \left[\frac{7}{2},\infty\right) = \left[\frac{7}{2},\infty\right)$
finalmente la solución está dada por:
$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left(-\infty,-\frac{5}{2}\right] \cup \{\ \ \} \cup \left[\frac{7}{2},\infty\right)$
$S = \left(-\infty,-\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2},\infty\right)$
....

Resuelva las siguientes Inecuaciones con valor absoluto:

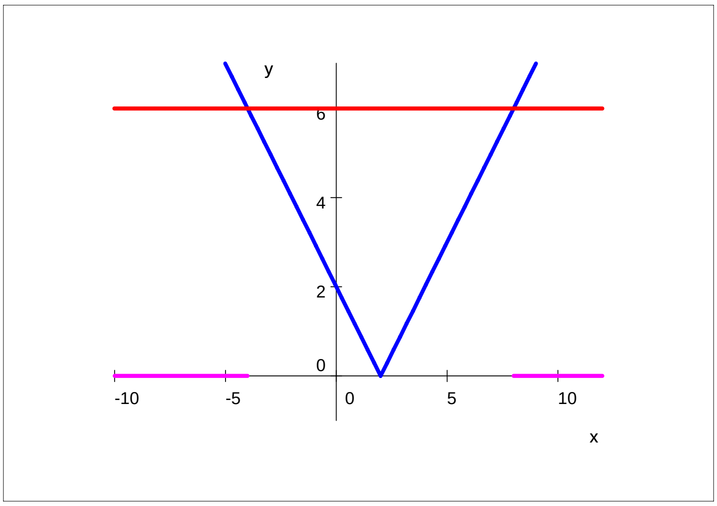
1.- $|x+1| \geq 4$, Solution is: $[3,\infty) \cup (-\infty,-5]$

2.- $|x-1| < 5$, Solution is: $(-4, 6)$
3.- $|2x-1| + |x-1| \geq 6$, Solution is: $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{8}{3}, \infty\right)$
4.- $\frac{|2x-1|}{|x-1|} = 6$, Solution is: $\frac{7}{8}, \frac{5}{4}$
5.- $\frac{|x-1|}{|2x-1|} > 2$, Solution is: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)$
6.- $\frac{|2-x|}{|x+1|} \leq 1$, Solution is: $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$
7.- $|2-x| + |x+1| \geq 6$, Solution is: $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}, \infty\right)$
8.- $|x-3| - |2x-1| > 2$, Solution is: $\left(0, \frac{2}{3}\right)$
9.- $|3x-1| + |x-1| < |x+6|$, Solution is: $\left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{3}\right)$

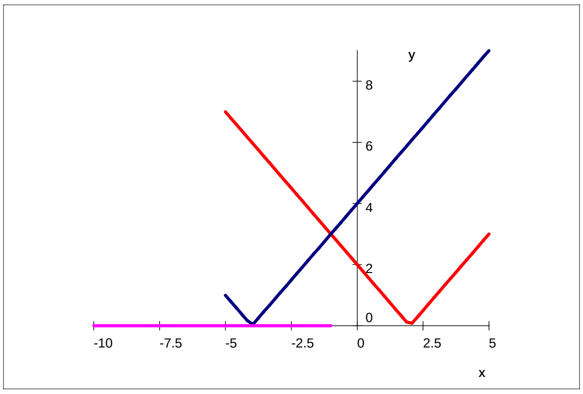
....

Interpretación gráfica de inecuaciones con y sin valor absoluto.

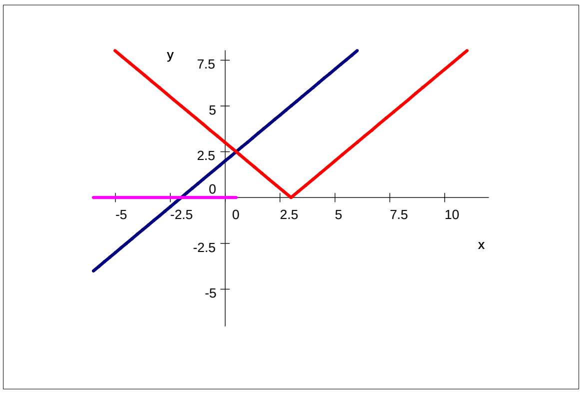
1.- Resolver: $|2-x| \geq 6$, Solution is: $(-\infty, -4] \cup [8, \infty)$



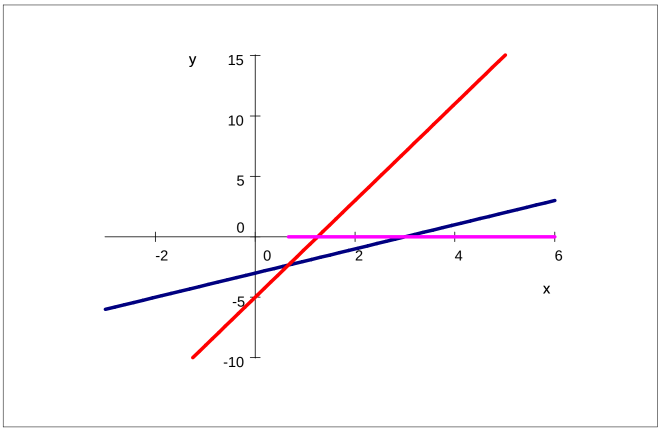
2.- $|2-x| \geq |x+4|$, Solution is: $(-\infty, -1]$



3.- $x+2 < |x-3|$, Solution is: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$



4.- $x - 3 < 4x - 5$, Solution is: $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$



5.- $2x + 3 < 5$, Solution is: $(-\infty, 1)$