

**ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS**

**2D Y 3D**

**PROBLEMARIO**

**Ortiz David  
Molina Marcos  
Martínez Hugo  
J. Bernal Elan  
Hernández Daniel  
García Pascual  
Berruecos Sergio**



## **“PROMOVIENDO LA UNIDAD”**

Se presenta el adelanto remasterizado del libro digital “Problemario de Análisis de Estructuras en 2D y 3D” y se ha elaborado no sólo con el objetivo de apoyar a profesores y estudiantes en la enseñanza y el aprendizaje del análisis estructural, ya que de igual forma se busca dar un mensaje de tipo social.

El libro ha sido escrito por integrantes de dos de las instituciones con mayor historia en México: La UNAM y el IPN, particularmente de las unidades Facultad de Ingeniería, FES ARAGÓN y ESIA ZACATENCO. Durante mucho tiempo, estas instituciones se han considerado equívocamente, desde nuestro punto de vista antagónicas, sobre todo en el ámbito estudiantil a nivel medio superior y nivel superior. Este proyecto es una muestra de que podemos trabajar en conjunto, por lo que hacemos un llamado a la unidad, no sólo entre estas universidades, sino global, ya que respetamos a cada una de las universidades existentes y admiramos su calidad.

No estamos de acuerdo con las ofensas que se emiten entre las distintas carreras; dedicamos esta obra a las personas vinculadas con las Licenciaturas de Ingeniería Civil, Ingeniería Mecánica, Ingeniería Aeronáutica, Arquitectura o alguna otra a fin.

Se ofrecen 7 ejercicios resueltos minuciosamente sobre estructuras isostáticas e hiperestáticas en el plano, particularmente vigas, marcos y armaduras.

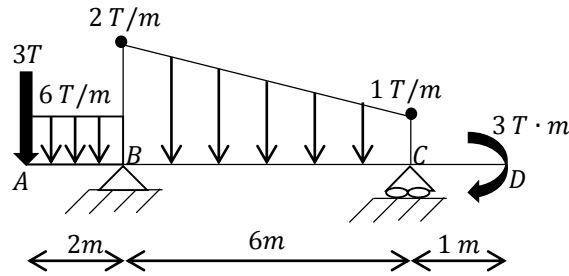
Se les recomienda a los lectores tener conocimientos acerca de mecánica de materiales, estática, estructuras isostáticas, álgebra, álgebra matricial, cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales y si es posible, programación con matlab.

Los autores consideramos que el dominio de los principios básicos es indispensable para el uso de los programas de cómputo disponibles en la actualidad, debido a que una vez desarrollada en el lector la habilidad de analizar a mano las estructuras, este comprenderá el modo de funcionamiento de los softwares y poseerá un mejor criterio.

Queremos dedicar especialmente nuestro trabajo a nuestros familiares, y amigos y compañeros de la Licenciatura en Ingeniería Civil de la FES ARAGÓN y de la ESIA ZACATENCO, así como de los posgrados en Ingeniería Civil de la ESIA ZACATENCO IPN Y La Facultad de Ingeniería UNAM.

Próximamente estará listo el libro digital completo, el cual es totalmente independiente y de descarga gratuita. De antemano agradecemos a todos y cada uno de ustedes que día con día nos respaldan por distintos medios, esperando que este texto sea de su agrado y su utilidad.

1.- Dibuje los diagramas de momento, de fuerza cortante, de giro y de flecha.

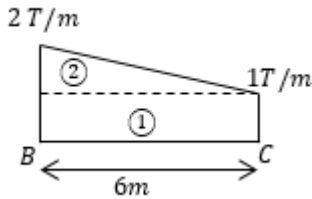


**SOLUCIÓN.**

**Cálculo de las reacciones en los soportes.**

**Diagrama de cargas.**

Al analizar la carga trapezoidal, es conveniente dividirla en una carga uniforme y una carga triangular, y se construye la tabla que se presenta a continuación.



Componente	$A, T$	$\bar{x}, m$	$\bar{x}A, T \cdot m$
①=rectángulo	$6(1) = 6$	$\frac{1}{2}(6) = 3$	18
②= triángulo	$\frac{6(1)}{2} = 3$	$\frac{1}{3}(6) = 2$	6
	$\sum A = 9$		$\sum \bar{x} A = 24$

La carga concentrada equivalente de la carga trapezoidal distribuida es

$$A_1 = \sum A = 9T$$

y su línea de acción está localizada a una distancia de

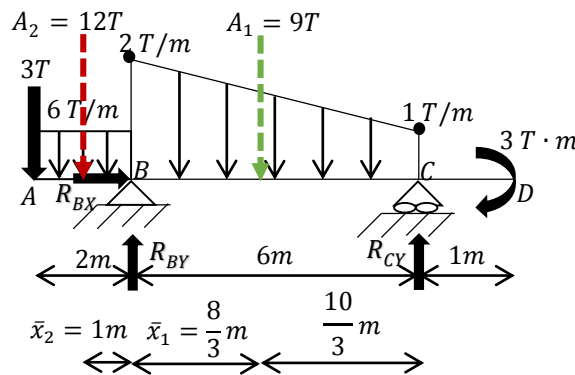
$$\bar{x}_1 = \frac{\sum \bar{x} A}{\sum A} = \frac{24T \cdot m}{9T} = \frac{8}{3}m \text{ a la derecha de B}$$

Para la carga distribuida uniforme, la fuerza resultante y su punto de aplicación son, respectivamente

$$A_2 = (6T/m)(2m) = 12T$$

$$\bar{x}_2 = (1/2)(2m) = 1m \text{ a la izquierda de B}$$

El diagrama de cargas mostrado se completa identificando las reacciones en los soportes proponiendo sus sentidos arbitrariamente.



**Ecuaciones de equilibrio.**

$$\sum_{\curvearrowright} MB = 0 \Rightarrow -(3)(2) - (12)(1) + 9\left(\frac{8}{3}\right) - 6(R_{CY}) + 3 = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = 1.5 T \uparrow$$

$$\sum_{\curvearrowright} MC = 0 \Rightarrow 3 - 9\left(\frac{10}{3}\right) + 6(R_{BY}) - (12)(1 + 6) - 3(8) = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = 22.5 T \uparrow$$

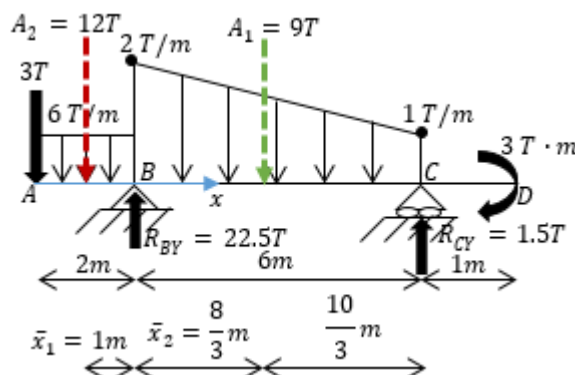
$$\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{BX} = 0$$

Como comprobación, se cumple que

$$\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -3 - 12 + 1.5 - 9 + 22.5 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \text{ok } \checkmark$$

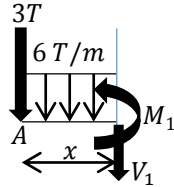
**Funciones de fuerza cortante y de momento.**

En la siguiente figura se especifica la coordenada  $x$  a utilizar cuyo origen asociado está en  $A$ ; note que  $x$  es válida para  $0 \leq x \leq 9m$ . Debido a los cambios en el tipo de la carga distribuida y a las fuerzas reactivas en  $B$  y  $C$ , las funciones de las acciones internas son discontinuas en esos puntos, así que deberán efectuarse tres cortes perpendiculares al eje de la viga para definir el momento y la fuerza cortante a lo largo de la estructura.



Corte en el tramo ① (A – B). Se secciona la viga a una distancia  $x$  de A antes del punto B, es decir, antes del punto de intensidad de  $2T/m$  de la presión trapezoidal. En consecuencia, el diagrama de cuerpo libre de la sección cortada y su equilibrio estático son

$$0 \leq x \leq 2m$$



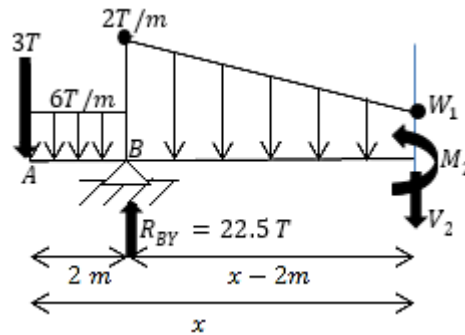
$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -6(x) \left(\frac{x}{2}\right) - 3x = -3x^2 - 3x$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx} = -6x - 3$$

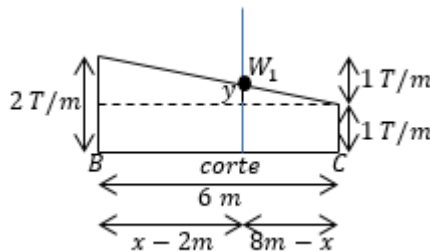
Corte en el tramo ② (B – C). Se secciona la viga en un punto arbitrario que se ubique justo después de que comience la carga trapezoidal distribuida pero antes de que la misma termine; se cumple que la longitud de la viga va desde el punto A hasta después del punto B, pero sin llegar al punto C. El diagrama de cuerpo libre para éste segmento de viga con longitud  $x$  es

$$2m \leq x \leq 8m$$



Previo a la aplicación de las ecuaciones de equilibrio, debe hallarse el área y su centroide de la presión trapezoidal del corte.

Por trigonometría puede determinarse el valor en función de  $x$  de la intensidad  $W_1$ .

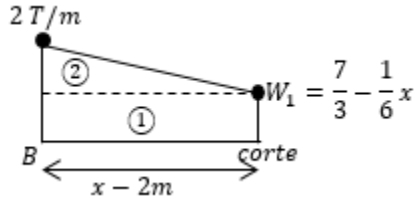


$$\frac{1T/m}{6m} = \frac{y}{8m - x}$$

$$y = \frac{(1)(8 - x)}{6} = \frac{4}{3} - \frac{1}{6}x$$

$$W_1 = 1 + y = 1 + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{6}x\right) = \frac{7}{3} - \frac{1}{6}x$$

A continuación se hace el análisis de la carga trapezoidal distribuida del corte.



$$A_1 = (x - 2) \left( \frac{7}{3} - \frac{1}{6}x \right) = \frac{7}{3}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{14}{3} + \frac{1}{3}x = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{14}{3}$$

$$A_2 = \frac{(x - 2) \left( 2 - \left( \frac{7}{3} - \frac{1}{6}x \right) \right)}{2} = \frac{(x - 2) \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{6}x \right)}{2} = \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x}{2}$$

$$A_2 = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{x - 2}{2} = \frac{1}{2}x - 1; \bar{x}_2 = \frac{x - 2}{3} = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$\bar{x}_1 A_1 = \left( -\frac{1}{6}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{14}{3} \right) \left( \frac{1}{2}x - 1 \right) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{14}{3}$$

$$\bar{x}_1 A_1 = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + \frac{14}{3}$$

$$\bar{x}_2 A_2 = \left( \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \right) \left( \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \right) = \frac{x^3}{36} - \frac{x^2}{9} + \frac{x}{9} - \frac{x^2}{18} + \frac{2x}{9} - \frac{2}{9}$$

$$\bar{x}_2 A_2 = \frac{1}{36}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$$

La tabulación de la información obtenida es

Componente	A	$\bar{x}$	$\bar{x}A$
①= rectángulo	$-\frac{1}{6}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{14}{3}$	$\frac{1}{2}x - 1$	$-\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + \frac{14}{3}$
②= triángulo	$\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$	$\frac{1}{36}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$
$\Sigma =$	$-\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{13}{3}$		$-\frac{x^3}{18} + \frac{4x^2}{3} - \frac{14x}{3} + \frac{40}{9}$

Finalmente, la fuerza resultante es

$$A_T = \sum A = -\frac{1}{12} x^2 + \frac{7}{3} x - \frac{13}{3}$$

y el centroide a través del cual actúa es

$$\bar{x}_T = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{-\frac{x^3}{18} + \frac{4x^2}{3} - \frac{14x}{3} + \frac{40}{9}}{-\frac{1}{12} x^2 + \frac{7}{3} x - \frac{13}{3}} \text{ a la derecha de B, donde } \bar{x}_T < (x - 2)$$

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_2 - 3(x) - 6(2) \left( \frac{1}{2}(2) + (x - 2) \right) + 22.5(x - 2)$$

$$- \left( -\frac{x^2}{12} + \frac{7}{3} x - \frac{13}{3} \right) \left[ (x - 2) - \left( \frac{-\frac{x^3}{18} + \frac{4x^2}{3} - \frac{14x}{3} + \frac{40}{9}}{-\frac{1}{12} x^2 + \frac{7}{3} x - \frac{13}{3}} \right) \right] = 0$$

$$M_2 = -3x - 12(x - 1) + 22.5(x - 2) - \left( -\frac{x^2}{12} + \frac{7}{3} x - \frac{13}{3} \right) (x - 2)$$

$$+ \left( -\frac{x^3}{18} + \frac{4x^2}{3} - \frac{14x}{3} + \frac{40}{9} \right) = -3x - 12x + 12 + 22.5x - 45 - \left( -\frac{x^3}{12} + \frac{7}{3} x^2 - \frac{13}{3} x \right.$$

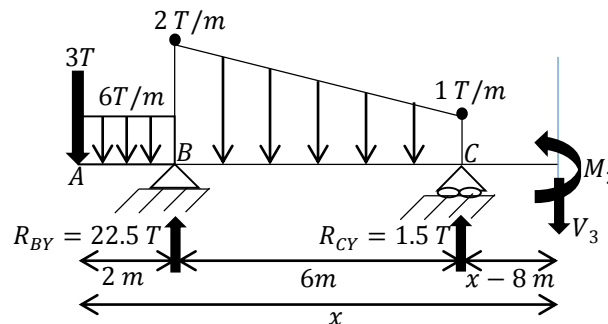
$$\left. + \frac{1}{6} x^2 - \frac{14}{3} x + \frac{26}{3} \right) + \left( -\frac{x^3}{18} + \frac{4x^2}{3} - \frac{14x}{3} + \frac{40}{9} \right) = x^3 \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{18} \right) + x^2 \left( -\frac{7}{3} - \frac{1}{6} + \frac{4}{3} \right)$$

$$+ x \left( \frac{13}{3} + \frac{14}{3} - \frac{14}{3} + 22.5 - 12 - 3 \right) + \left( 12 - 45 - \frac{26}{3} + \frac{40}{9} \right) = \frac{1}{36} x^3 - \frac{7}{6} x^2 + \frac{71}{6} x - \frac{335}{9}$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx} = \frac{1}{12} x^2 - \frac{7}{3} x + \frac{71}{6}$$

Corte en el tramo ③(C - D). Se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la porción izquierda de la viga que se produce al cortarla en algún sitio intermedio del tramo C - D. Por lo tanto,

$$8m \leq x \leq 9m$$



$$\begin{aligned} \sum M_{corte} = 0 &\Rightarrow -M_3 - 3(x) - 6(2) \left( \frac{1}{2}(2) + 6 + x - 8 \right) + 22.5(6 + x - 8) \\ &\quad - 9 \left( 6 - \frac{8}{3} + x - 8 \right) + 1.5(x - 8) = 0 \end{aligned}$$

$$M_3 = -3x + 12 - 12x - 45 + 22.5x + 42 - 9x + 1.5x - 12 = -3$$

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx} = 0$$

**Cálculo del momento máximo de cada tramo.**

$$0 \leq x \leq 2m$$

Para hallar la posición del momento máximo en la región  $A - B$  hacemos

$$V_1 = 0 = -3 - 6x \Rightarrow 3 = -6x \Rightarrow x = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Debido a que la solución no tiene sentido, ósea que no está dentro del intervalo de distancia analizado de la viga  $[0, 2m]$ , el punto donde se ubica el valor máximo del momento está en el límite superior. Por lo tanto,

$$x_{max1} = 2m \quad M_{max1} = -3(2) - 3(2)^2 = -18T \cdot m$$

$$2m \leq x \leq 8m$$

El momento máximo del tramo  $B - C$  se localiza a una distancia respecto de  $A$  de

$$V_2 = 0 = \frac{1}{12}x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{71}{6} \Rightarrow x = \frac{-\left(-\frac{7}{3}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{7}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{71}{6}\right)}}{2\left(\frac{1}{12}\right)} = \frac{7}{3} \pm 1.224745 \frac{1}{6}$$

$$x_1 = 3(\sqrt{6}) + 14 \approx 21.34847 \text{ m} \quad x_2 = 14 - 3(\sqrt{6}) \approx 6.65153$$

$\therefore x_{max2} = 3(\sqrt{6})m = 6.65153m$ , ya que está dentro del intervalo de distancia analizado de la viga  $[2m, 8m]$ . Entonces,

$$M_{max2} = \left(\frac{1}{36}\right) \left(14 - 3(\sqrt{6})\right)^3 - \left(\frac{7}{6}\right) \left(14 - 3(\sqrt{6})\right)^2 + \left(\frac{71}{6}\right) \left(14 - 3(\sqrt{6})\right) - \frac{335}{9}$$

$$M_{max2} = (9\sqrt{6} - 24)T \cdot m = -1.9546 T \cdot m$$

$$8m \leq x \leq 9m$$

El momento es constante a lo largo de este tramo, por lo que  $M_{max3} = -3 T \cdot m$ .



Realizando una comparativa, el momento máximo para toda la viga es de

$M_{max} = 18T \cdot m$  y se presenta en el punto  $x_{max} = 2m$ ; la posición se mide a partir de A.

**Ecuaciones de la pendiente y la deflexión usando el método de la integración directa.**

Aplicando la ecuación diferencial

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

e integrándola dos veces en cada tramo se obtiene

$$0 \leq x \leq 2m$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_1 \Rightarrow EI \frac{d^2y}{dx^2} = -3x^2 - 3x \Rightarrow EI \int \frac{d(dy)}{dx} = \int (-3x^2 - 3x) dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C_1; \text{ si } \frac{dy}{dx} = \theta, \text{ entonces } EI\theta_1 = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C_1 \text{ --- } \textcircled{1}$$

$$EI \int dy = \int \left(-x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C_1\right) dx \Rightarrow EIy_1 = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + C_1x + C_2 \text{ --- } \textcircled{2}$$

$$2m \leq x \leq 8m$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_2 \Rightarrow EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9}$$

$$EI \int \frac{d(dy)}{dx} = \int \left(\frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9}\right) dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{1}{144}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{12}x^2 - \frac{335}{9}x + C_3$$

$$\text{si } \frac{dy}{dx} = \theta, \text{ entonces } EI\theta_2 = \frac{1}{144}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{12}x^2 - \frac{335}{9}x + C_3 \text{ --- } \textcircled{3}$$

$$EI \int dy = \int \left(\frac{1}{144}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{12}x^2 - \frac{335}{9}x + C_3\right) dx$$

$$EIy_2 = \frac{1}{720}x^5 - \frac{7}{72}x^4 + \frac{71}{36}x^3 - \frac{335}{18}x^2 + C_3x + C_4 \text{ --- } \textcircled{4}$$

$$8m \leq x \leq 9m$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_3 \Rightarrow EI \frac{d^2y}{dx^2} = -3 \Rightarrow EI \int \frac{d(dy)}{dx} = \int -3dx \Rightarrow EI \frac{dy}{dx} = -3x + C_5$$

$$\text{si } \frac{dy}{dx} = \theta, \text{ entonces } EI\theta_3 = -3x + C_5 \longrightarrow \textcircled{5}$$

$$EI \int dy = \int (-3x + C_5)dx \Rightarrow EIy_3 = -\frac{3}{2}x^2 + C_5x + C_6 \longrightarrow \textcircled{6}$$

**Método del trabajo virtual unificado con el método de la integración doble.**

Para calcular las seis constantes de integración anteriores usaremos seis condiciones, primero dos de frontera y luego cuatro de continuidad. Como no hay algún apoyo en A, la viga puede desplazarse verticalmente y girar en tal punto, así que, 1)  $y_1 = \delta?$  en  $x = 0$  y 2)  $\theta_1 = \delta?$  en  $x = 0$ . Luego, por continuidad se establece que 3)  $\theta_1 = \theta_2$  en  $x = 2m$ , 4)  $y_1 = y_2$  en  $x = 2m$ , 5)  $\theta_2 = \theta_3$  en  $x = 8m$  y 6)  $y_2 = y_3$  en  $x = 8m$ . Para determinar la rotación y la deflexión en A aplicamos el **método del trabajo virtual**.

Se sigue el siguiente procedimiento para calcular  $\theta_A$ .

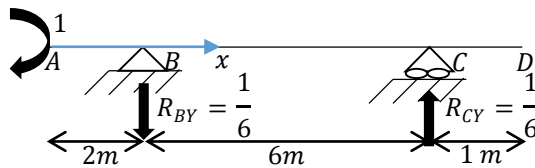
**Momentos reales M.** Corresponden a las siguientes funciones que ya han sido deducidas:

$$M_1 = -3x^2 - 3x \qquad 0 \leq x \leq 2m$$

$$M_2 = \frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9} \qquad 2m \leq x \leq 8m$$

$$M_3 = -3 \qquad 8m \leq x \leq 9m$$

**Momentos virtuales  $m_\theta$ .** La pendiente en A se determina al colocar un momento de par unitario virtual en ese punto; su sentido se propone horario. Note que las cargas reales son removidas y que debe usarse la misma coordenada  $x$  de la estructura real. Después de calcular las reacciones en los soportes, se deducen los momentos internos  $m_\theta$  con el método de las secciones.



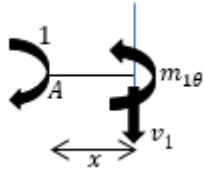
$$\sum MB = 0 \Rightarrow 1 - 6(R_{CY}) = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = \frac{1}{6} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow -R_{BY} + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = \frac{1}{6} \downarrow$$

$$+\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow R_{BX} = 0$$

Es necesario efectuar tres cortes en la viga anterior.

- Sección cortada en el primer tramo.

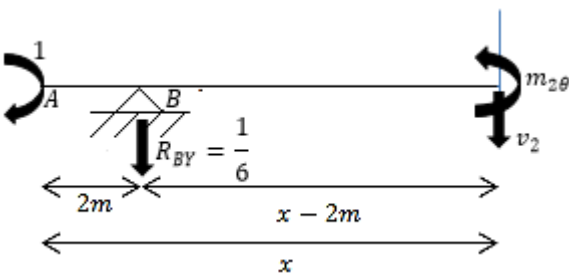


$$0 \leq x \leq 2m$$

$$\curvearrowright \sum m_{corte} = 0$$

$$-m_{1\theta} + 1 = 0 \Rightarrow m_{1\theta} = 1$$

- Sección cortada en el segundo tramo.



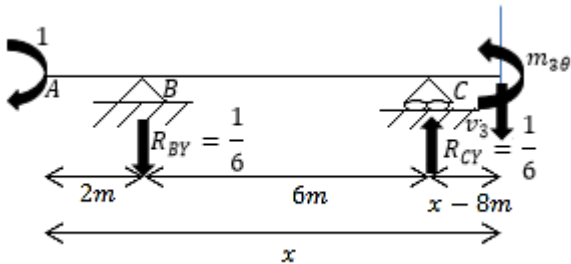
$$2m \leq x \leq 8m$$

$$\curvearrowright \sum m_{corte} = 0$$

$$-m_{2\theta} + 1 - \frac{1}{6}(x - 2) = 0$$

$$m_{2\theta} = -\frac{1}{6}x + \frac{4}{3}$$

- Sección cortada en el tercer tramo.



$$8m \leq x \leq 9m$$

$$\curvearrowright \sum m_{corte} = 0$$

$$-m_{3\theta} + 1 - \frac{1}{6}(6 + x - 8) + \frac{1}{6}(x - 8) = 0$$

$$m_{3\theta} = 1 + \frac{1}{6}(-6 - x + 8 + x - 8) = 0$$

**Ecuación del trabajo virtual.** Entonces la pendiente en A es resultado de

$$1 \cdot \theta_A = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_\theta}{EI} dx$$

$$1 \cdot \theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^2 (-3x^2 - 3x)(1) + \frac{1}{EI} \int_2^8 \left( \frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9} \right) \left( -\frac{1}{6}x + \frac{4}{3} \right) dx$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_8^9 (-3)(0) dx$$

Resolviendo integrales por separado se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int_0^2 (-3x^2 - 3x)(1) dx &= \frac{1}{EI} \int_0^2 (-3x^2 - 3x) dx = \frac{1}{EI} \left[ -x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{EI} \left[ -(2^3 - 0^3) - \frac{3}{2}(2^2 - 0^2) \right] = -\frac{14}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int_2^8 \left( \frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9} \right) \left( -\frac{1}{6}x + \frac{4}{3} \right) dx &= \frac{1}{EI} \int_2^8 \left( -\frac{1}{216}x^4 + \frac{7}{36}x^3 - \frac{71}{36}x^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{335}{54}x + \frac{1}{27}x^3 - \frac{14}{9}x^2 + \frac{142}{9}x - \frac{1340}{27} \right) dx \\ &= \frac{1}{EI} \int_2^8 \left( -\frac{1}{216}x^4 + \frac{25}{108}x^3 - \frac{127}{36}x^2 + \frac{1187}{54}x - \frac{1340}{27} \right) dx \\ &= \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1}{1080}x^5 + \frac{25}{432}x^4 - \frac{127}{108}x^3 + \frac{1187}{108}x^2 - \frac{1340}{27}x \right]_2^8 \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{-1}{1080}(8^5 - 2^5) + \frac{25}{432}(8^4 - 2^4) - \frac{127}{108}(8^3 - 2^3) + \frac{1187}{108}(8^2 - 2^2) - \frac{1340}{27}(8 - 2) \right] \\ &= \frac{1}{EI} \left( -\frac{1364}{45} + \frac{2125}{9} - \frac{1778}{3} + \frac{5935}{9} - \frac{2680}{9} \right) = -\frac{126}{5EI} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{EI} \int_8^9 (-3)(0) dx = 0$$

$$\theta_A = -\frac{14}{EI} - \frac{126}{5EI} + 0 = -\frac{196}{5EI}$$

Como la suma algebraica de todas integrales para toda la viga es negativa,  $\theta_A$  tiene un sentido opuesto al del momento de par unitario.

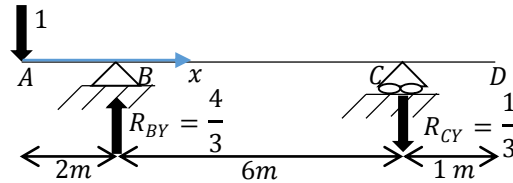
$$\therefore \theta_A = \frac{196}{5EI} \curvearrowright$$

Recuerde que una pendiente con sentido antihorario es positiva de acuerdo a lo que se establece en el método de integración doble; por tanto, la segunda condición de frontera es 2)  $\theta_1 = \frac{196}{5EI}$  en  $x = 0$ .

Se sigue el siguiente procedimiento para calcular  $\delta_{VA}$ .

**Momentos reales  $M$ .** Las funciones correspondientes ya han sido mostradas.

**Momentos virtuales  $m$ .** El desplazamiento vertical en  $A$  se obtiene al colocar una carga virtual unitaria en ese punto; su sentido se propone hacia abajo. Note que las cargas reales son removidas y que debe usarse la misma coordenada  $x$  de la estructura real. Después de calcular las reacciones en los soportes, puede usarse el método de las secciones para formular los momentos internos  $m$ .

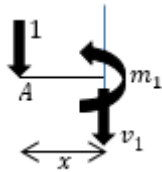


$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -1(2) + 6(R_{CY}) = 0 \Rightarrow R_{CY} = \frac{1}{3} \downarrow$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow -1 + R_{BY} - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{4}{3} \uparrow \quad +\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow R_{BX} = 0$$

Es necesario efectuar tres cortes en la viga anterior.

- Sección cortada en el primer tramo.

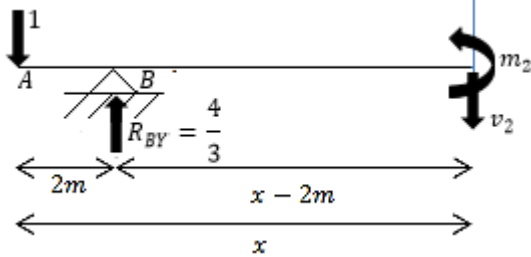


$$0 \leq x \leq 2m$$

$$\sum m_{corte} = 0$$

$$-m_1 - 1(x) = 0 \Rightarrow m_1 = -x$$

- Sección cortada en el segundo tramo.

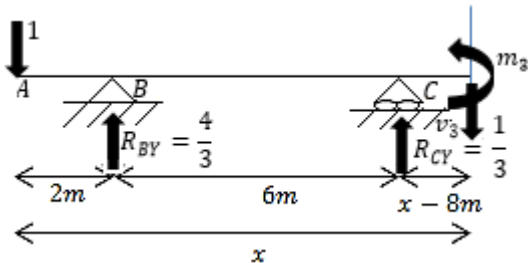


$$2m \leq x \leq 8m$$

$$\sum m_{corte} = 0$$

$$-m_2 - 1(x) + \frac{4}{3}(x - 2) = 0 \Rightarrow m_2 = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$$

- Sección cortada en el tercer tramo.



$$8m \leq x \leq 9m$$

$$\sum m_{corte} = 0$$

$$-m_3 - 1(x) + \frac{4}{3}(6 + (x - 8)) - \frac{1}{3}(x - 8) = 0$$

$$m_3 = -x - \frac{8}{3} + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} = 0$$

**Ecuación del trabajo virtual.** Entonces el desplazamiento vertical de A es

$$1 \cdot \delta_{VA} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx$$

$$1 \cdot \delta_{VA} = \frac{1}{EI} \int_0^2 (-3x^2 - 3x)(-x) dx$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_2^8 \left( \frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9} \right) \left( \frac{1}{3}x - \frac{8}{3} \right) dx + \frac{1}{EI} \int_8^9 (-3)(0) dx$$

Resolviendo integrales por separado se tiene

$$\frac{1}{EI} \int_0^2 (-3x^2 - 3x)(-x) dx = \frac{1}{EI} \int_0^2 (3x^3 + 3x^2) dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{3}{4}x^4 + x^3 \right]_0^2$$

$$= \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{3}{4} \right) (2^4 - 0^4) + (2^3 - 0^3) \right] = \frac{20}{EI}$$

$$\frac{1}{EI} \int_2^8 \left( \frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9} \right) \left( \frac{1}{3}x - \frac{8}{3} \right) dx = \frac{1}{EI} \int_2^8 \left( \frac{1}{108}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{18}x^2 - \frac{335}{27}x - \frac{2}{27}x^3 + \frac{28}{9}x^2 - \frac{284}{9}x + \frac{2680}{27} \right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \int_2^8 \left( \frac{1}{108}x^4 - \frac{25}{54}x^3 + \frac{127}{18}x^2 - \frac{1187}{27}x + \frac{2680}{27} \right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{540}x^5 - \frac{25}{216}x^4 + \frac{127}{54}x^3 - \frac{1187}{54}x^2 + \frac{2680}{27}x \right]_2^8$$

$$= \left[ \frac{1}{540}(8^5 - 2^5) - \frac{25}{216}(8^4 - 2^4) + \frac{127}{54}(8^3 - 2^3) - \frac{1187}{54}(8^2 - 2^2) + \frac{2680}{27}(8 - 2) \right]$$

$$\frac{1}{EI} \left[ \frac{2728}{45} - \frac{4250}{9} + \frac{3556}{3} - \frac{11870}{9} + \frac{5360}{9} \right] = \frac{252}{5EI}$$

$$\frac{1}{EI} \int_8^9 (-3)(0) dx = 0$$

$$\delta_{VA} = \frac{20}{EI} + \frac{252}{5EI} + 0 = \frac{352}{5EI}$$

Dado que la suma algebraica de todas integrales para toda la viga es positiva,  $\delta_{VA}$  tiene el mismo sentido que la carga virtual unitaria.

$$\therefore \delta_{VA} = \frac{352}{5EI} \downarrow$$

Tomando en cuenta que un desplazamiento hacia abajo es negativo de acuerdo a lo que se establece en el método de integración doble, la primera condición de frontera quedaría como:  $y = -\frac{352}{5EI}$  en  $x = 0$ .

Sustituyendo la condición 2) en la ecuación (1) da

$$EI \left( \frac{196}{5EI} \right) = -(0)^3 - \frac{3}{2}(0)^2 + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{196}{5}$$

Sustituyendo la condición 1) en la ecuación (2) tenemos

$$EI \left( -\frac{352}{5EI} \right) = -\frac{1}{4}(0)^4 - \frac{1}{2}(0)^3 + \frac{196}{5}(0) + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{-352}{5}$$

Aplicando la condición 3) se obtiene

$$-x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C_1 = \frac{1}{144}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{12}x^2 - \frac{335}{9}x + C_3, \text{ en } x = 2$$

$$-(2)^3 - \frac{3}{2}(2)^2 + \frac{196}{5} = \frac{1}{144}(2)^4 - \frac{7}{18}(2)^3 + \frac{71}{12}(2)^2 - \frac{335}{9}(2) + C_3$$

$$C_3 = -(2^4) \left( \frac{1}{144} \right) + (2^3) \left( -1 + \frac{7}{18} \right) + (2^2) \left( -\frac{3}{2} - \frac{71}{12} \right) + (2) \left( \frac{335}{9} \right) + \frac{196}{5} \Rightarrow C_3 = \frac{3554}{45}$$

La aplicación de la condición 4) conlleva a

$$-\frac{1}{4}(x)^4 - \frac{1}{2}(x)^3 + C_1(x) + C_2 = \frac{1}{720}x^5 - \frac{7}{72}x^4 + \frac{71}{36}x^3 - \frac{335}{18}x^2 + C_3x + C_4, \text{ en } x = 2m$$

$$-\frac{1}{4}(2^4) - \frac{1}{2}(2^3) + \left( \frac{196}{5} \right) (2) - \frac{352}{5} = \left( \frac{1}{720} \right) (2)^5 - \left( \frac{7}{72} \right) (2)^4 + \left( \frac{71}{36} \right) (2)^3$$

$$- \left( \frac{335}{18} \right) (2)^2 + \left( \frac{3554}{45} \right) (2) + C_4 \Rightarrow C_4 = -\frac{880}{9}$$

Haciendo uso de la condición 5) se deduce que

$$\frac{1}{144}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{12}x^2 - \frac{335}{9}x + C_3 = -3x + C_5, \text{ en } x = 8m$$

$$\left( \frac{1}{144} \right) (8)^4 - \left( \frac{7}{18} \right) (8)^3 + \left( \frac{71}{12} \right) (8)^2 - \left( \frac{335}{9} \right) (8) + \frac{3554}{45} = -3(8) + C_5 \Rightarrow C_5 = \frac{66}{5}$$

Aplicando la cuarta condición de continuidad resulta

$$\frac{1}{720}x^5 - \frac{7}{72}x^4 + \frac{71}{36}x^3 - \frac{335}{18}x^2 + C_3x + C_4 = -\frac{3}{2}x^2 + C_5x + C_6, \text{ en } x = 8m$$

$$\left( \frac{1}{720} \right) (8)^5 - \left( \frac{7}{72} \right) (8)^4 + \left( \frac{71}{36} \right) (8)^3 - \left( \frac{335}{18} \right) (8)^2 + \left( \frac{3554}{45} \right) (8) - \frac{880}{9}$$

$$= \left( -\frac{3}{2} \right) (8)^2 + \frac{66}{5}(8) + C_6 \Rightarrow C_6 = -\frac{48}{5}$$

En consecuencia, las ecuaciones de la pendiente y la deflexión de manera respectiva en cada tramo son

$$\begin{aligned}
 &0 \leq x \leq 2m \\
 &EI\theta_1 = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{196}{5} \\
 &EIy_1 = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{196}{5}x - \frac{352}{5} \\
 \\
 &2m \leq x \leq 8m \\
 &EI\theta_2 = -\frac{1}{144}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{12}x^2 - \frac{335}{9}x + \frac{3554}{45} \\
 &EIy_2 = \frac{1}{720}x^5 - \frac{7}{72}x^4 + \frac{71}{36}x^3 - \frac{335}{18}x^2 + \frac{3554}{45}x - \frac{880}{9} \\
 \\
 &8m \leq x \leq 9m \\
 &EI\theta_3 = -3x + \frac{66}{5} \\
 &EIy_3 = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{66}{5}x - \frac{48}{5}
 \end{aligned}$$

**Cálculo de la flecha máxima de cada tramo.**

$$\begin{aligned}
 &0 \leq x \leq 2m \\
 &EI\theta_1 = 0 = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{196}{5}
 \end{aligned}$$

Usando la técnica de la división sintética hallamos una raíz.

	-1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{196}{5}$
2.9635	↓	-2.9635	-13.2276	-39.2
	-1	-4.4635	-13.2276	0

$$(x - 2.9635)(-x^2 - 4.4635x - 13.2276) = 0$$

$$x_1 \approx 2.9635$$

Las raíces restantes se pueden calcular con la fórmula general.

$$\begin{aligned}
 &-x^2 - 4.4635x - 13.2276 = 0 \\
 &x = \frac{-(-4.4635) \pm \sqrt{(-4.4635)^2 - 4(-1)(-13.2276)}}{2(-1)}
 \end{aligned}$$



$$x_1 = \frac{4.4635 - \sqrt{-32.9882}}{-2} = -2.23175 - 2.87174i$$

$$x_2 = \frac{4.4635 + \sqrt{-32.9882}}{-2} = -2.23175 + 2.87174i$$

Obsérvese que de las tres soluciones anteriores ninguna pertenece al intervalo de distancia analizado de la viga  $[0,2m]$ , por lo que la flecha máxima está ubicada en el extremo donde no está el apoyo, así que  $x_{max1} = 0$ . Entonces,

$$EIy_{max1} = -\frac{1}{4}(0)^4 - \frac{1}{2}(0)^2 + \frac{196}{5}(0) - \frac{352}{5} \Rightarrow y_{max1} = -\frac{352}{5EI} = \frac{-70.4}{EI} \Rightarrow \therefore y_{max1} = \frac{70.4}{EI} \downarrow$$

$$2m \leq x \leq 8m$$

$$\theta_2 = 0 = \frac{1}{144}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{12}x^2 - \frac{335}{9}x + \frac{3554}{45}$$

	$\frac{1}{144}$	$-\frac{7}{18}$	$\frac{71}{12}$	$-\frac{335}{9}$	$\frac{3554}{45}$
4.26119		0.02959	-1.53103	18.68801	-78.97778
	$\frac{1}{144}$	-0.35930	4.38563	-18.53421	$\approx 0$

$$(x - 4.26119) \left( \frac{1}{144}x^3 - 0.35930x^2 + 4.38563x - 18.53421 \right) = 0$$

$$x_1 \approx 4.26119$$

	$\frac{1}{144}$	-0.35930	4.38563	-18.53421
36.4053		0.25281	-3.876633	18.53
	$\frac{1}{144}$	-0.106485	0.50900	$\approx 0$

$$(x - 36.4053) \left( \frac{1}{144}x^2 - 0.106485x + 0.50900 \right) = 0$$

$$x_2 \approx 36.4053$$

$$\frac{1}{144}x^2 - 0.106485x + 0.50900 = 0$$

$$x_3 \approx 7.66660 + 3.8122i$$

$$x_4 \approx 7.66660 - 3.8122i$$

Note que de las cuatros soluciones anteriores, la única que está dentro del intervalo de distancia analizado de la viga  $[2m, 8m]$  es  $x_1$ , así que  $x_{max2} = 4.26119 m$ . Por lo tanto,

$$EIy_{max2} = \left(\frac{1}{720}\right)(4.26119)^5 - \left(\frac{7}{72}\right)(4.26119)^4 + \left(\frac{71}{36}\right)(4.26119)^3 - \left(\frac{335}{18}\right)(4.26119)^2 + \left(\frac{3554}{45}\right)(4.26119) - \left(\frac{880}{9}\right) \Rightarrow y_{max2} \approx \frac{23.32049531}{EI} \Rightarrow \therefore y_{max2} \frac{23.32049531}{EI} \uparrow$$

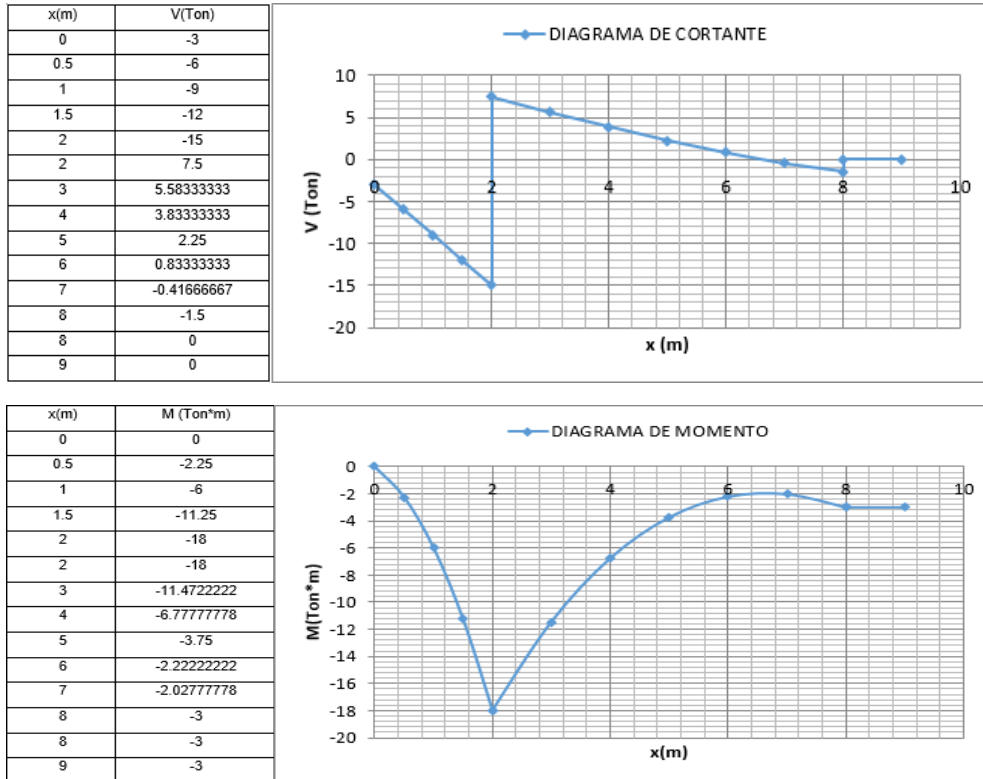
$$8m \leq x \leq 9m$$

$$\theta_3 = 0 = -3x + \frac{66}{5} \Rightarrow x = \frac{66}{5} = 4.4$$

Como  $x$  está fuera del intervalo del intervalo de distancia analizado de la viga  $[8m, 9m]$ , se concluye que  $x_{3max} = 9m$ . En consecuencia,

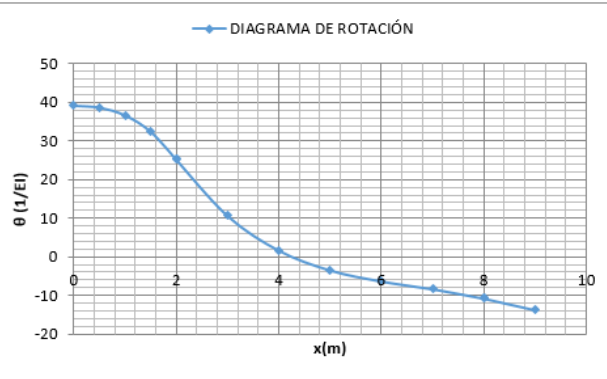
$$EIy_{max3} = \left(-\frac{3}{2}\right)(9)^2 + \left(\frac{66}{5}\right)(9) - \frac{48}{5} \Rightarrow y_{max3} = -\frac{12.3}{EI} \Rightarrow \therefore y_{max3} = \frac{12.3}{EI} \downarrow$$

### Diagramas de fuerza cortante, momento flector, rotación y deflexión (curva elástica)

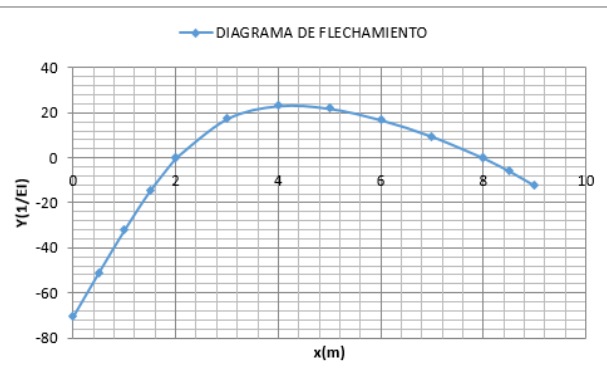


# PROBLEMARIO DE ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS EN 2D Y 3D

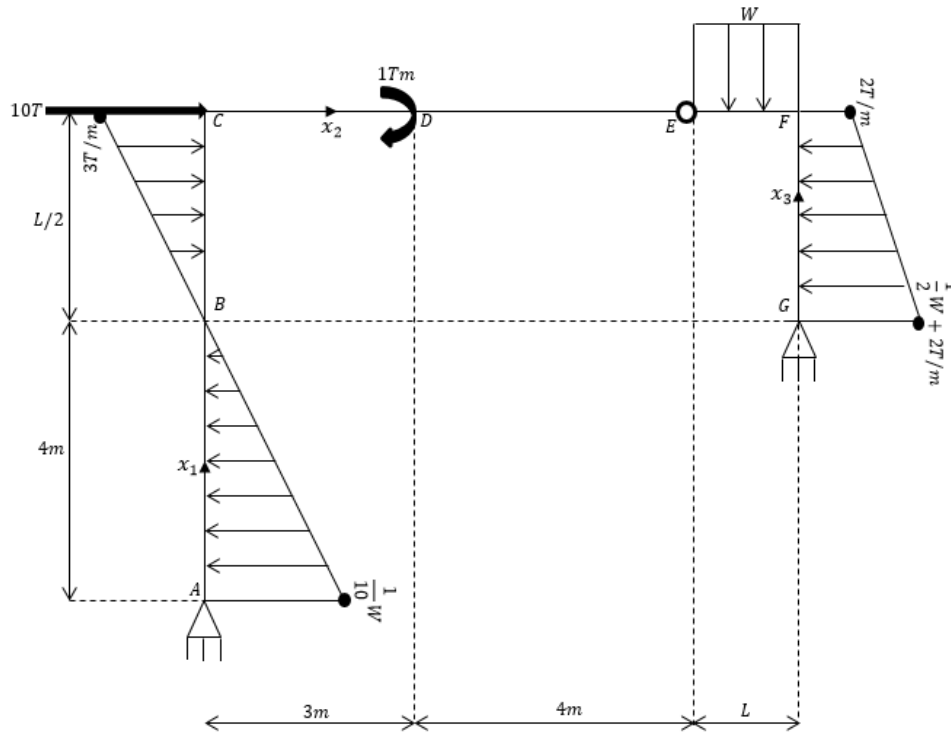
x(m)	$\theta$ (1/EI)
0	39.2
0.5	38.7
1	36.7
1.5	32.45
2	25.2
2	25.2
3	10.6236111
4	1.64444444
5	-3.4875
6	-6.35555556
7	-8.37638889
8	-10.8
8	-10.8
9	-13.8



x(m)	Y(1/EI)
0	-70.4
0.5	-50.878125
1	-31.95
1.5	-14.553125
2	0
2	0
3	17.3680556
4	23.1111111
5	21.9375
6	16.8888889
7	9.50694444
8	0
8	0
8.5	-5.775
9	-12.3



2.- Calcule las reacciones en los soportes del siguiente marco triarticulado. Deduzca las funciones de fuerza cortante, fuerza normal y momento flector para los tres miembros utilizando las coordenadas  $x$  mostradas.



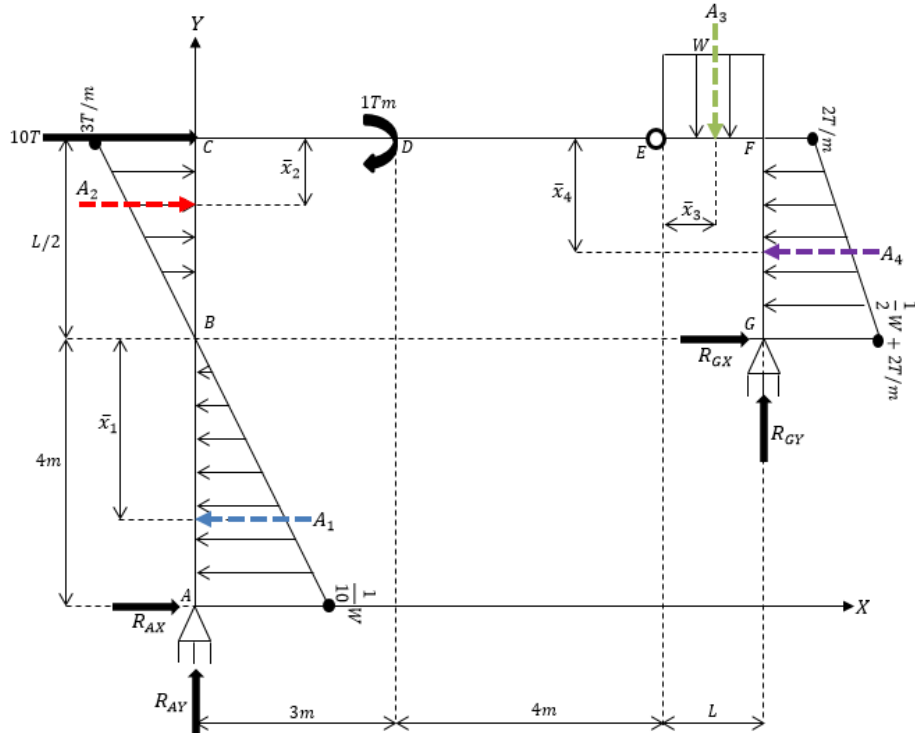
**SOLUCIÓN.**

**Verificación del grado de indeterminación.**

El marco es isostático ya que se cumple la condición  $r + 3m = 3n + c$ , puesto que:  $m$  vale tres porque la estructura tiene tres miembros ( $A - C$ ;  $C - F$ ;  $G - F$ ),  $r = 4$  debido a que en cada apoyo articulado hay dos incógnitas de reacción (una horizontal y una vertical),  $n = 4$  ya que hay cuatro nodos ( $A$ ;  $C$ ;  $F$ ;  $G$ ), y  $c$  vale uno por haber una ecuación de condición, la que indica que para el punto  $E$ , al situarse una articulación, el momento flexionante es nulo.

**Cálculo de las reacciones en los soportes.**

**Diagrama de cargas.** Es mostrado en la siguiente página. Se han establecido los ejes coordenados  $X$  y  $Y$  más convenientes para aplicar las ecuaciones de equilibrio en la estructura. Para cada presión debe calcularse su área bajo la curva, es decir, la carga concentrada equivalente (fuerza resultante) y su correspondiente centroide de área (punto de aplicación). Por otra parte, se identifican las fuerzas reactivas en los soportes suponiendo sus respectivos sentidos arbitrariamente.



➤ Cálculo de las cargas concentradas equivalentes y sus puntos de aplicación de las presiones.

- Carga triangular del tramo A – B.

$$A_1 = \frac{(4) \left( \frac{1}{10} W \right)}{2} = \frac{1}{5} W; \bar{x}_1 = \frac{2}{3} (4m) = \frac{8}{3} m$$

- Carga triangular del tramo B – C.

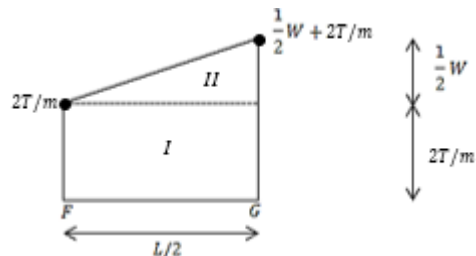
$$A_2 = \frac{\left( \frac{L}{2} \right) (3)}{2} = \frac{3}{4} L; \bar{x}_2 = \frac{1}{3} \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{6} L$$

- Carga uniformemente repartida.

$$A_3 = WL; \bar{x}_2 = \frac{L}{2}$$

- Carga trapezoidal distribuida.

Rotamos la presión para mayor facilidad; conviene subdividirla en dos partes tal y como se muestra en la figura.



$$A_I = \left(\frac{L}{2}\right)(2) = L \qquad A_{II} = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{2}W\right)}{2} = \frac{1}{8}WL$$

$$\bar{x}_I = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L}{4} \qquad \bar{x}_{II} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L}{3}$$

$$\bar{x}_I A_I = \left(\frac{L}{4}\right)(L) = \frac{1}{4}L^2 \qquad \bar{x}_{II} A_{II} = \left(\frac{L}{3}\right)\left(\frac{1}{8}WL\right) = \frac{1}{24}WL^2$$

Los resultados obtenidos pueden visualizarse en la siguiente tabla:

Componente	A	$\bar{x}$	$\bar{x}A$
I = rectángulo	L	$\frac{L}{4}$	$\frac{1}{4}L^2$
II = triángulo	$\frac{1}{8}WL$	$\frac{L}{3}$	$\frac{1}{24}WL^2$
$\Sigma =$	$L + \frac{1}{8}WL$		$\frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{24}WL^2$

$$\therefore A_4 = \sum A = L + \frac{1}{8}WL$$

$$\therefore \bar{x}_4 = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{\frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{24}WL^2}{L + \frac{1}{8}WL}$$

**Ecuaciones de equilibrio.** Se aplican al diagrama de cargas para obtener los valores de las reacciones en los apoyos.

Planteamos una ecuación de condición tomando momentos con respecto a E sólo para la parte izquierda del marco.

$$\curvearrowright \sum M_{E_{izquierda}} = 0 \Rightarrow -R_{AX} \left(4 + \frac{L}{2}\right) + \left(\frac{1}{5}W\right) \left(\frac{L}{2} + \frac{8}{3}\right) + R_{AY}(7) - \left(\frac{3}{4}L\right) \left(\frac{1}{6}L\right) + 1 = 0$$

$$-R_{AX} \left(4 + \frac{L}{2}\right) + \left(\frac{1}{5}W\right) \left(\frac{L}{2} + \frac{8}{3}\right) + R_{AY}(7) - \left(\frac{3}{4}L\right) \left(\frac{1}{6}L\right) + 1 = 0$$

$$-R_{AX} \left(4 + \frac{L}{2}\right) + \frac{1}{10}WL + \frac{8}{15}W + 7R_{AY} - \frac{1}{8}L^2 + 1 = 0$$

$$7R_{AY} - \left(4 + \frac{L}{2}\right)R_{AX} = \frac{1}{8}L^2 - \frac{1}{10}WL - \frac{8}{15}W - 1 \quad \text{--- (1)}$$

Tomando momentos alrededor de  $E$  sólo para la parte derecha del marco tenemos

$$\curvearrowright \sum M_{E_{derecha}} = 0 \Rightarrow (WL) \left(\frac{L}{2}\right) + \left(L + \frac{1}{8}WL\right) \left(\frac{\frac{L^2}{4} + \frac{1}{24}WL^2}{L + \frac{1}{8}WL}\right) - R_{GX} \left(\frac{L}{2}\right) - R_{GY}(L) = 0$$

$$\frac{1}{2}WL^2 + \frac{L^2}{4} + \frac{1}{24}WL^2 - R_{GX} \left(\frac{L}{2}\right) - R_{GY}(L) = 0 \Rightarrow -L \left(\frac{1}{2}R_{GX} + R_{GY}\right) = L \left(-\frac{13}{24}WL - \frac{L}{4}\right)$$

$$\frac{1}{2}R_{GX} + R_{GY} = \frac{13}{24}WL + \frac{L}{4} \quad \text{--- (2)}$$

De la sumatoria de fuerzas en la dirección  $X$  igual a cero es posible obtener una relación entre las reacciones  $R_{GX}$  y  $R_{AX}$ .

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -\frac{1}{5}W + \frac{3}{4}L + 10 - \left(L + \frac{1}{8}WL\right) + R_{GX} + R_{AX} = 0$$

$$R_{GX} + R_{AX} = \frac{1}{8}WL + \frac{1}{5}W - 10 + \frac{1}{4}L \quad \text{--- (3)}$$

La ecuación de equilibrio restante permite obtener una relación entre las reacciones  $R_{AY}$  y  $R_{GY}$ .

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - WL + R_{GY} = 0 \Rightarrow R_{AY} + R_{GY} = WL \quad \text{--- (4)}$$

Resolvemos el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas usando el método de sustitución e igualación.

Despejando  $R_{GX}$  de (2) y (3) respectivamente, se tiene

$$R_{GX} = \frac{13}{12}WL + \frac{L}{2} - 2R_{GY} \quad \text{--- (5)}$$

$$R_{GX} = \frac{1}{8}WL + \frac{1}{5}W - 10 + \frac{1}{4}L - R_{AX} \quad \text{--- (6)}$$

Igualando (5) con (6) da

$$\frac{13}{12}WL + \frac{L}{2} - 2R_{GY} = \frac{1}{8}WL + \frac{1}{5}W - 10 + \frac{1}{4}L - R_{AX} \quad \text{--- (7)}$$

Despejando  $R_{GY}$  de (7) tenemos

$$R_{GY} = \frac{23}{48}WL - \frac{1}{10}W + 5 + \frac{1}{8}L + \frac{1}{2}R_{AX} \quad \text{--- (8)}$$

La sustitución de (8) en (4) conlleva a

$$R_{AY} + \frac{23}{48}WL - \frac{1}{10}W + 5 + \frac{1}{8}L + \frac{1}{2}R_{AX} = WL \quad \text{--- (9)}$$

Despejando  $R_{AY}$  de (1) se tiene

$$R_{AY} = \frac{1}{56}L^2 - \frac{1}{70}WL - \frac{8}{105}W - \frac{1}{7} + \left(\frac{4}{7} + \frac{L}{14}\right)R_{AX} \quad \text{--- (10)}$$

El valor de  $R_{AX}$  se obtiene de sustituir (10) en (9).

$$\frac{1}{56}L^2 - \frac{1}{70}WL - \frac{8}{105}W - \frac{1}{7} + \left(\frac{4}{7} + \frac{L}{14}\right)R_{AX} + \frac{23}{48}WL - \frac{1}{10}W + 5 + \frac{1}{8}L + \frac{1}{2}R_{AX} - WL = 0$$

$$R_{AX} \left(\frac{15}{14} + \frac{L}{14}\right) = -\frac{1}{56}L^2 + \frac{899}{1680}WL + \frac{37}{210}W - \frac{34}{7} - \frac{1}{8}L$$

$$R_{AX} = \frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} \rightarrow \quad \text{--- (11)}$$

Es posible determinar el valor de  $R_{AY}$  si sustituimos (11) en (10).

$$R_{AY} = \frac{1}{56}L^2 - \frac{1}{70}WL - \frac{8}{105}W - \frac{1}{7} + \left(\frac{4}{7} + \frac{L}{14}\right) \left(\frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)}\right)$$

$$R_{AY} = \frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48} \uparrow \quad \text{--- (12)}$$

Despejando  $R_{GY}$  de (4) se tiene

$$R_{GY} = WL - R_{AY} \quad \text{--- (13)}$$

El valor de  $R_{GY}$  se calcula sustituyendo (12) en (13).

$$R_{GY} = WL - \left(\frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48}\right)$$

$$R_{GY} = -\frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{23LW}{48} + \frac{175W + 288}{48} \uparrow \quad \text{--- (14)}$$

Despejando  $R_{GX}$  de (2) da

$$R_{GX} = \frac{13}{12}WL + \frac{1}{2}L - 2R_{GY} \quad \text{--- (15)}$$

Para conocer el valor de  $R_{GX}$  sustituimos (14) en (15).



$$R_{GX} = \frac{13}{12}WL + \frac{1}{2}L - 2 \left( -\frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{23LW}{48} + \frac{175W + 288}{48} \right)$$

$$R_{GX} = \frac{13189W + 11760}{120(L + 15)} + L \left( \frac{W}{8} + \frac{1}{2} \right) - \frac{175W + 288}{24} \rightarrow \dots (16)$$

Como comprobación de los resultados, debe cumplirse que la suma de momentos con respecto al punto A para todo el marco es nula.

$$\sum MA = 0$$

$$- \left[ \frac{4 \left( \frac{1}{10}W \right)}{2} \right] \left( \frac{1}{3}(4) \right) + \left[ \frac{\left( \frac{L}{2} \right) (3)}{2} \right] \left( 4 + \frac{2}{3} \left( \frac{L}{2} \right) \right) + 10 \left( \frac{L}{2} + 4 \right) + 1 + (W)(L) \left( 7 + \frac{L}{2} \right) -$$

$$\left( L + \frac{1}{8}WL \right) \left[ \left( \frac{L}{2} - \frac{\frac{L^2}{4} + \frac{1}{24}WL^2}{L + \frac{1}{8}WL} \right) + 4 \right] + \left( \frac{13189W + 11760}{120(L + 15)} + L \left( \frac{W}{8} + \frac{1}{2} \right) - \frac{175W + 288}{24} \right)$$

$$(4) - \left( -\frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{23LW}{48} + \frac{175W + 288}{48} \right) (7 + L)$$

$$= -\frac{4}{15}W + 3L + \frac{1}{4}L^2 + 5L + 40 + 1 + 7WL + \frac{1}{2}WL^2 - \frac{L^2}{2} - \frac{1}{16}WL^2 + \frac{L^2}{4} + \frac{1}{24}WL^2$$

$$-4L - \frac{1}{2}WL - \frac{23}{48}WL^2 - \frac{13}{2}WL - 4L + \frac{4}{15}W - 41 = 0 \quad OK$$

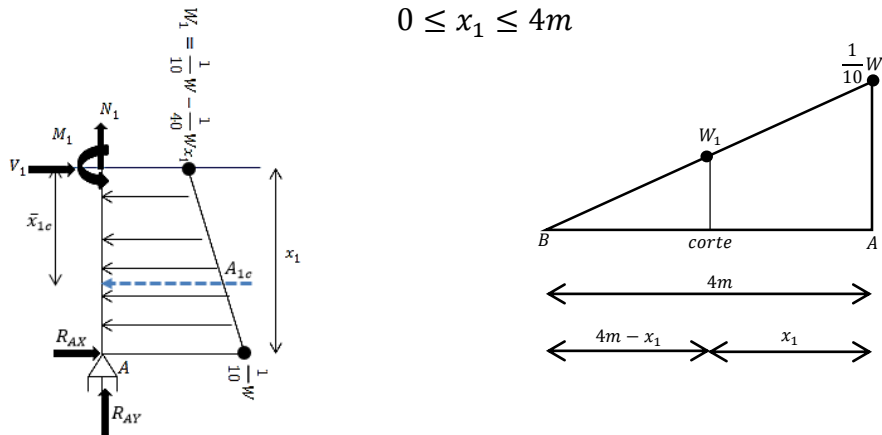
**Funciones de fuerza cortante, fuerza normal y momento flector.**

Una vez que se han calculado las fuerzas reactivas en los soportes, pueden determinarse expresiones algebraicas que describan la variación de los elementos mecánicos; para ello es necesario efectuar cortes en cada miembro de la estructura. En el diagrama de cuerpo libre para un segmento de la estructura,  $V$ ,  $N$  y  $M$  aparecen actuando en sus direcciones positivas de acuerdo a la convención de signos más usual y sus funciones se obtienen aplicando las ecuaciones de equilibrio.

**MIEMBRO A – C.**

La distribución de la carga que está aplicada sobre este miembro presenta una discontinuidad en el punto B; en consecuencia, es necesario efectuar dos cortes perpendiculares al eje del miembro A – C, uno en el tramo A – B y otro en el tramo B – C. Desde el inicio del problema se ha especificado una coordenada  $x$  con origen asociado en A, etiquetada como  $x_1$ .

Corte en el tramo  $A - B$ . Se secciona la estructura en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $A - B$ ) a una distancia  $x_1$  de  $A$ ; se representa el diagrama de cuerpo libre de la porción de la estructura ubicada por debajo del corte para definir las acciones internas. A la derecha del diagrama se muestra un esquema para determinar, por trigonometría, el valor en función de  $x_1$  de la intensidad  $W_1$ .

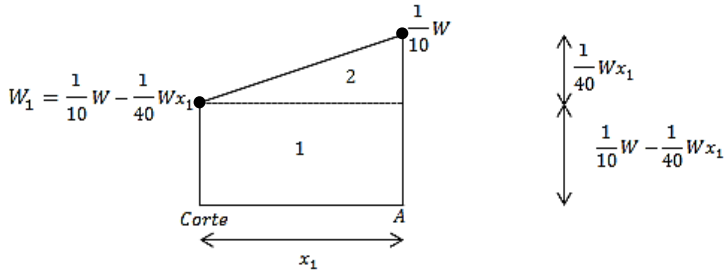


$$0 \leq x_1 \leq 4m$$

$$\frac{\frac{1}{10}W}{4} = \frac{W_1}{4 - x_1} \Rightarrow W_1 = \frac{\frac{1}{10}W(4 - x_1)}{4} = \frac{1}{40}(4W - Wx_1) = \frac{1}{10}W - \frac{1}{40}Wx_1$$

Previo a la aplicación de las ecuaciones de equilibrio, deben calcularse el área y su centroide de la carga trapezoidal distribuida del corte.

Rotamos la presión para mayor facilidad; conviene subdividirla en dos partes tal y como se muestra en la figura.



$$A_{1'} = (x_1) \left( \frac{1}{10}W - \frac{1}{40}Wx_1 \right) = \frac{1}{10}Wx_1 - \frac{1}{40}Wx_1^2 \quad A_{2'} = \frac{(x_1) \left( \frac{1}{40}Wx_1 \right)}{2} = \frac{1}{80}Wx_1^2$$

$$\therefore A_{1c} = \sum A = \frac{1}{10}Wx_1 - \frac{1}{80}Wx_1^2$$

$$\bar{x}_1 \cdot A_{1'} = \left( \frac{1}{2}x_1 \right) \left( \frac{1}{10}Wx_1 - \frac{1}{40}Wx_1^2 \right) = \frac{1}{20}Wx_1^2 - \frac{1}{80}Wx_1^3$$

$$\bar{x}_2 \cdot A_2' = \left(\frac{2}{3}x_1\right) \left(\frac{1}{80}Wx_1^2\right) = \frac{1}{120}Wx_1^3 \quad \sum \bar{x}A = \frac{1}{20}Wx_1^2 - \frac{1}{240}Wx_1^3$$

$$\therefore \bar{x}_{1c} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{\frac{1}{20}Wx_1^2 - \frac{1}{240}Wx_1^3}{\frac{1}{10}Wx_1 - \frac{1}{80}Wx_1^2}$$

donde  $\bar{x}_{1c} < x_1$ .

$$+\circlearrowleft \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_1 - \left(\frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)}\right)(x_1)$$

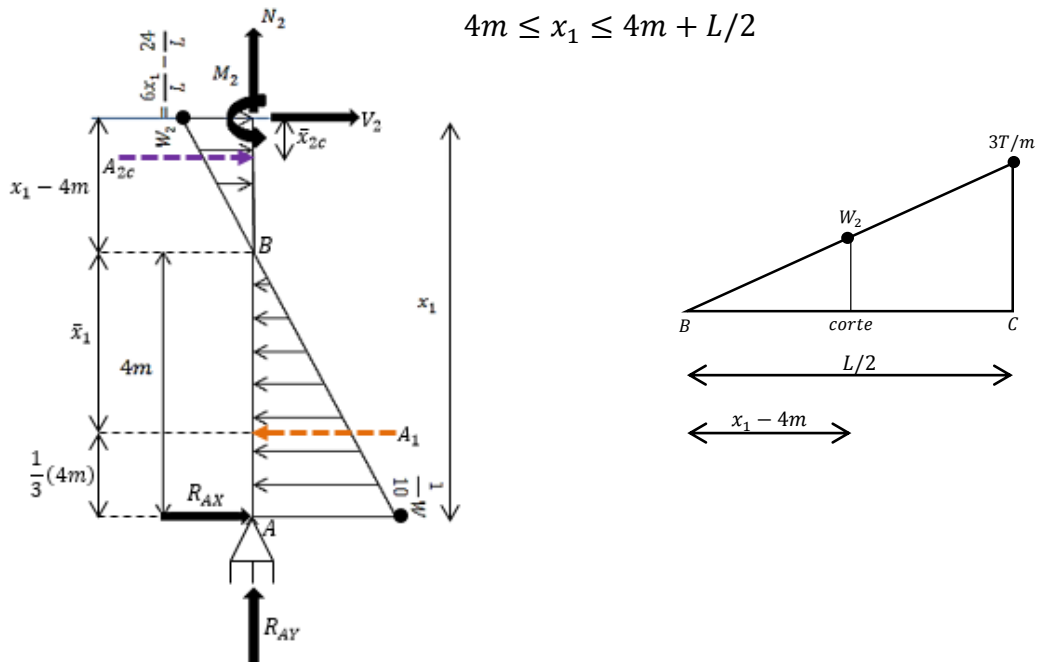
$$+ \left(\frac{1}{10}Wx_1 - \frac{1}{80}Wx_1^2\right) \left(\frac{\frac{1}{20}Wx_1^2 - \frac{1}{240}Wx_1^3}{\frac{1}{10}Wx_1 - \frac{1}{80}Wx_1^2}\right) = 0$$

$$M_1 = -\frac{1}{240}Wx_1^3 + \frac{1}{20}Wx_1^2 + \left(\frac{30L^2 + L(210 - 899W) - 8(37W - 1020)}{120(L + 15)}\right)(x_1)$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = -\frac{1}{80}Wx_1^2 + \frac{1}{10}Wx_1 + \left(\frac{30L^2 + L(210 - 899W) - 8(37W - 1020)}{120(L + 15)}\right)$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow N_1 = -\left(\frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48}\right)$$

Corte en el tramo B – C. Se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente al segmento de la estructura que se produce al cortarla en algún sitio intermedio del tramo B – C. A la derecha se muestra un esquema para determinar el valor en función de  $x_1$  de la intensidad  $W_2$ .



$$\frac{3}{\frac{L}{2}} = \frac{W_2}{x_1 - 4} \Rightarrow W_2 = \frac{3(x_1 - 4)}{\frac{L}{2}} = \frac{3x_1}{\frac{L}{2}} - \frac{12}{\frac{L}{2}} = \frac{6x_1}{L} - \frac{24}{L}$$

La fuerza resultante de la carga triangular seccionada es

$$A_{2c} = \frac{(x_1 - 4) \left( \frac{6x_1}{L} - \frac{24}{L} \right)}{2}$$

y el centroide de su área a través del cual actúa es

$$\bar{x}_{2c} = \frac{1}{3}(x_1 - 4)$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_2 - \left( \frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} \right) (x_1) \\ + \left( \frac{1}{5}W \right) \left( x_1 - \frac{4}{3} \right) - \left( \frac{(x_1 - 4) \left( \frac{6x_1}{L} - \frac{24}{L} \right)}{2} \right) \left( \frac{1}{3}(x_1 - 4) \right) = 0 \end{aligned}$$

$$M_2 = -\frac{1}{L}x_1^3 + \frac{12}{L}x_1^2 + \left( \frac{30L^3 + 35L^2(6 - 25W) + 32L(2W + 75) - 86400}{120L(L + 15)} \right) (x_1) - \frac{4(LW - 240)}{15L}$$

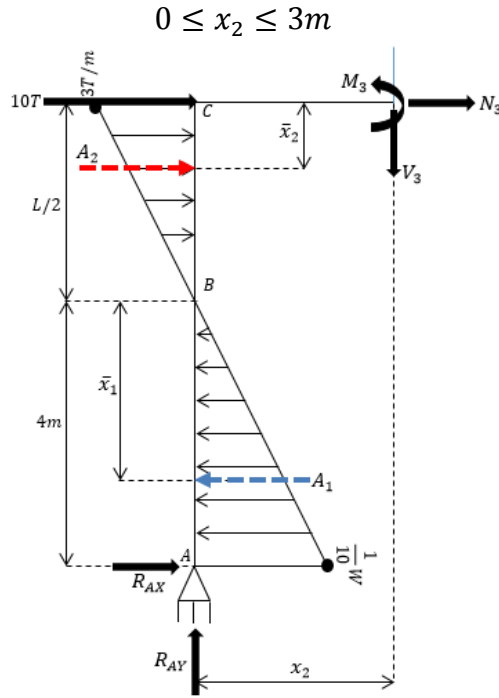
$$V_2 = \frac{dM_2}{dx_1} = -\frac{3}{L}x_1^2 + \frac{24}{L}x_1 + \frac{30L^3 + 35L^2(6 - 25W) + 32L(2W + 75) - 86400}{120L(L + 15)}$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow N_2 = -\left( \frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48} \right)$$

MIEMBRO  $C - F$ .

El momento de par aplicado en  $D$  provocará que la función de momento interno sea discontinua en ese punto; por otra parte, en  $E$  la carga distribuida presenta una discontinuidad. Por tanto, deben realizarse tres cortes perpendiculares al eje de este miembro, uno en el tramo  $C - D$ , otro en el tramo  $D - E$  y finalmente uno en el tramo  $E - F$ , todos considerando como origen del sistema coordenado al punto  $C$  de acuerdo a las instrucciones.

Corte en el tramo  $C - D$ . Se secciona la estructura en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $C - D$ ) a una distancia  $x_2$  del punto  $C$ ; se representa el diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda del corte.



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_3 - \left( \frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} \right) \left( 4 + \frac{L}{2} \right) + \left( \frac{1}{5}W \right) \left( \frac{L}{2} + \frac{8}{3} \right) - \left( \frac{3}{4}L \right) \left( \frac{L}{6} \right) + \left( \frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48} \right) (x_2) = 0$$

$$M_3 = \left( \frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48} \right) (x_2) - \frac{875L^2W + 40L(175W - 246) + 64(7W - 1020)}{240(L + 15)}$$

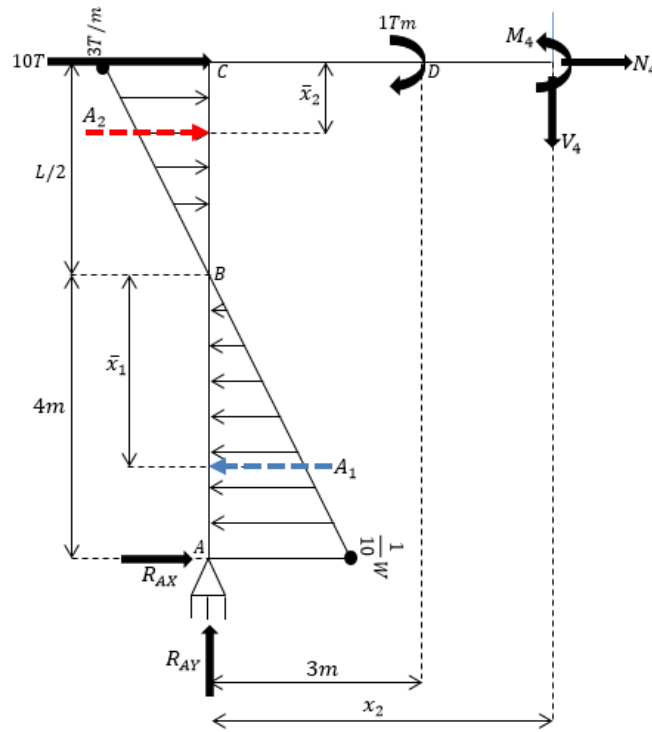
$$V_3 = \frac{dM_3}{dx_2} = \frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48}$$

$$\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_3 = - \left( \frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} - \frac{1}{5}W + \frac{3}{4}L + 10 \right)$$

$$N_3 = \frac{13189W + 11760}{120(L + 15)} - \frac{L}{2} - \frac{175W + 288}{24}$$

Corte en el tramo  $D - E$ . Se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente al segmento izquierdo de la estructura que se produce al cortarla en algún sitio intermedio del tramo  $D - E$ .

$$3m \leq x_2 \leq 7m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_4 - \left( \frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} \right) \left( 4 + \frac{L}{2} \right) + \left( \frac{1}{5}W \right) \left( \frac{L}{2} + \frac{8}{3} \right) - \left( \frac{3}{4}L \right) \left( \frac{L}{6} \right) + \left( \frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48} \right) (x_2) + 1 = 0$$

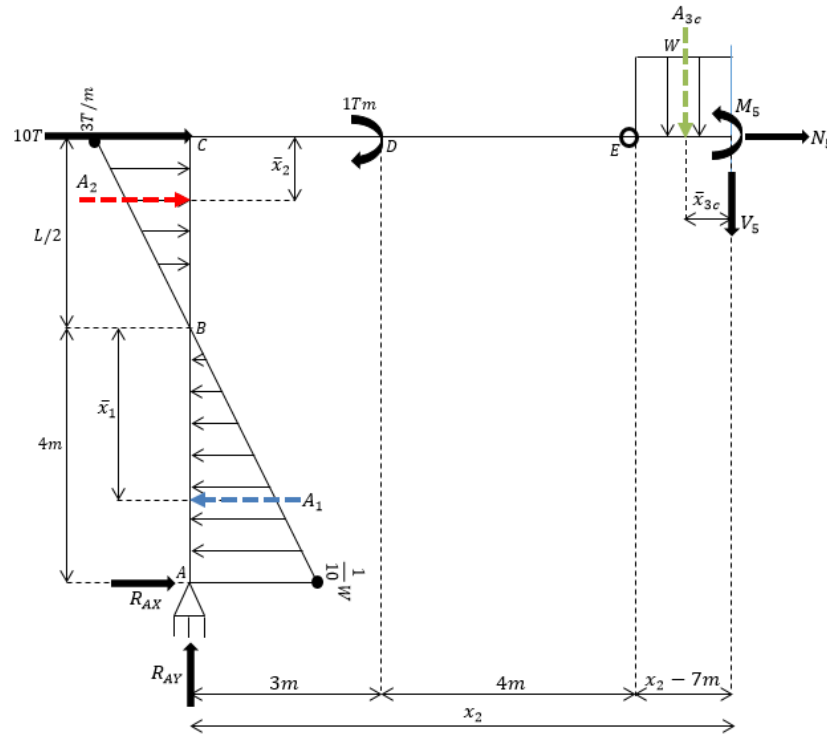
$$M_4 = \left( \frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48} \right) (x_2) - \frac{7(13189W + 11760)}{240(L + 15)} - \frac{175LW}{48} + \frac{7(175W + 288)}{48}$$

$$V_4 = \frac{dM_4}{dx_2} = \frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48}$$

$$\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_4 = \frac{13189W + 11760}{120(L + 15)} - \frac{L}{2} - \frac{175W + 288}{24}$$

Corte en el tramo E – F. Se secciona al miembro C – F a una distancia arbitraria medida desde el punto C; el corte debe ser justo después de que la carga distribuida uniformemente comience. El diagrama de cuerpo libre para la sección cortada se muestra en la siguiente página.

$$7m \leq x_2 \leq 7m + L$$



La fuerza resultante de la carga uniformemente distribuida seccionada es

$$A_{3c} = W(x_2 - 7)$$

y el centroide de su área a través del cual actúa es

$$\bar{x}_{3c} = \frac{x_2 - 7}{2}$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_5 - \left( \frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} \right) \left( 4 + \frac{L}{2} \right) + \left( \frac{1}{5}W \right) \left( \frac{L}{2} + \frac{8}{3} \right) - \left( \frac{3}{4}L \right) \left( \frac{L}{6} \right)$$

$$+ \left( \frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48} \right) (x_2) + 1 - W(x_2 - 7) \left( \frac{x_2 - 7}{2} \right) = 0$$

$$M_5 = -\frac{W}{2}x_2^2 + \left( \frac{125L^2W + 40L(67W - 36) + 16(1579W - 615)}{240(L + 15)} \right) (x_2)$$

$$- \frac{7(125L^2W + 80L(23W - 18) + 8(1583W - 1230))}{240(L + 15)}$$

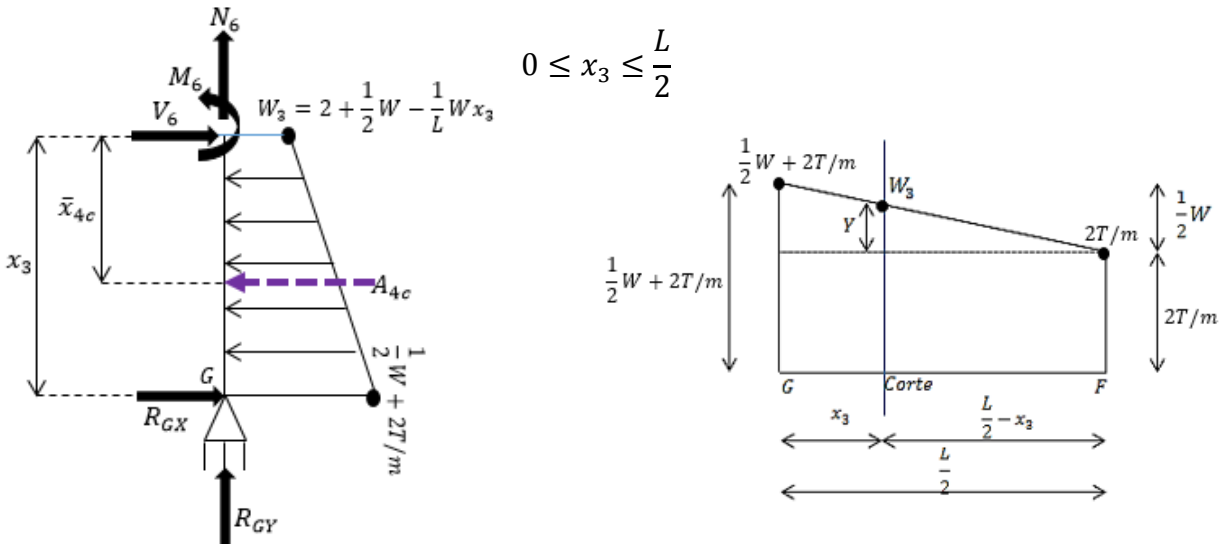
$$V_5 = \frac{dM_5}{dx_2} = \left( \frac{125L^2W + 40L(67W - 36) + 16(1579W - 615)}{240(L + 15)} \right) - Wx_2$$

$$\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_5 = \frac{13189W + 11760}{120(L + 15)} - \frac{L}{2} - \frac{175W + 288}{24}$$

MIEMBRO  $G - F$ .

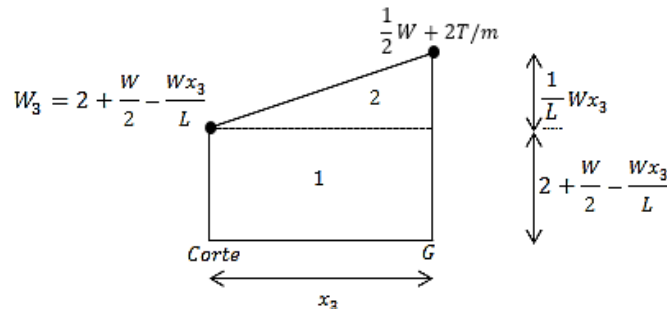
La distribución de la carga que se extiende sobre este miembro no presenta discontinuidad, así que sólo es necesario efectuar un sólo corte perpendicular al eje del miembro.

Corte en el tramo  $G - F$ . El origen de la coordenada  $x$  a utilizar, etiquetada como  $x_3$ , se asocia al punto  $F$ . A continuación se proporciona un diagrama de cuerpo libre del segmento de estructura con longitud  $x_3$ . A la derecha se muestra un esquema para determinar el valor en función de  $x_3$  de la intensidad  $W_3$ .



$$\frac{\frac{1}{2}W}{\frac{L}{2}} = \frac{Y}{\frac{L}{2} - x_3} \Rightarrow Y = \frac{\left(\frac{1}{2}W\right)\left(\frac{L}{2} - x_3\right)}{\frac{L}{2}} = \frac{W}{2} - \frac{Wx_3}{L} \quad \therefore W_3 = 2 + Y = 2 + \left(\frac{W}{2} - \frac{Wx_3}{L}\right)$$

Previo a la aplicación de las ecuaciones de equilibrio, es necesario calcular el área y su centroide de la carga trapezoidal distribuida seccionada.





$$A_{1''} = (x_3) \left( 2 + \left( \frac{W}{2} - \frac{Wx_3}{L} \right) \right) = 2x_3 + \frac{W}{2}x_3 - \frac{W}{L}x_3^2 \quad A_{2''} = \frac{(x_3) \left( \frac{Wx_3}{L} \right)}{2} = \frac{W}{2L}x_3^2$$

$$\therefore A_{4c} = \sum A = 2x_3 + \frac{W}{2}x_3 - \frac{W}{2L}x_3^2$$

$$\bar{x}_{1''}A_{1''} = \left( \frac{1}{2}x_3 \right) \left( 2x_3 + \frac{W}{2}x_3 - \frac{W}{L}x_3^2 \right) = x_3^2 + \frac{W}{4}x_3^2 - \frac{W}{2L}x_3^3$$

$$\bar{x}_{2''}A_{2''} = \left( \frac{2}{3}x_3 \right) \left( \frac{W}{2L}x_3^2 \right) = \frac{W}{3L}x_3^3 \quad \sum \bar{x}A = x_3^2 + \frac{W}{4}x_3^2 - \frac{W}{6L}x_3^3$$

$$\therefore \bar{x}_{4c} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{x_3^2 + \frac{W}{4}x_3^2 - \frac{W}{6L}x_3^3}{2x_3 + \frac{W}{2}x_3 - \frac{W}{2L}x_3^2}$$

donde  $\bar{x}_{4c} < x_3$ .

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_6 - \left( \frac{13189W + 11760}{120(L + 15)} + L \left( \frac{W}{8} + \frac{1}{2} \right) - \frac{175W + 288}{24} \right) (x_3) + \left( 2x_3 + \frac{W}{2}x_3 - \frac{W}{2L}x_3^2 \right) \left( \frac{x_3^2 + \frac{W}{4}x_3^2 - \frac{W}{6L}x_3^3}{2x_3 + \frac{W}{2}x_3 - \frac{W}{2L}x_3^2} \right) = 0$$

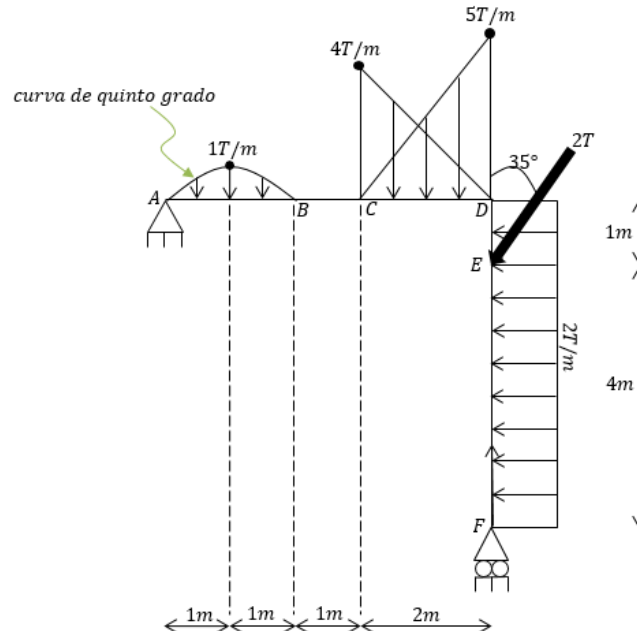
$$M_6 = -\frac{W}{6L}x_3^3 + \left( \frac{W}{4} + 1 \right) x_3^2 - \left( \frac{15L^2(W + 4) - 10L(65W + 54) + 16(4W - 615)}{120(L + 15)} \right) (x_3)$$

$$V_6 = \frac{dM_6}{dx_3} = -\frac{W}{2L}x_3^2 + \frac{(W + 4)}{2}x_3$$

$$-\frac{15L^2(W + 4) - 10L(65W + 54) + 16(4W - 615)}{120(L + 15)}$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow N_6 = -\left( -\frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{23LW}{48} + \frac{175W + 288}{48} \right)$$

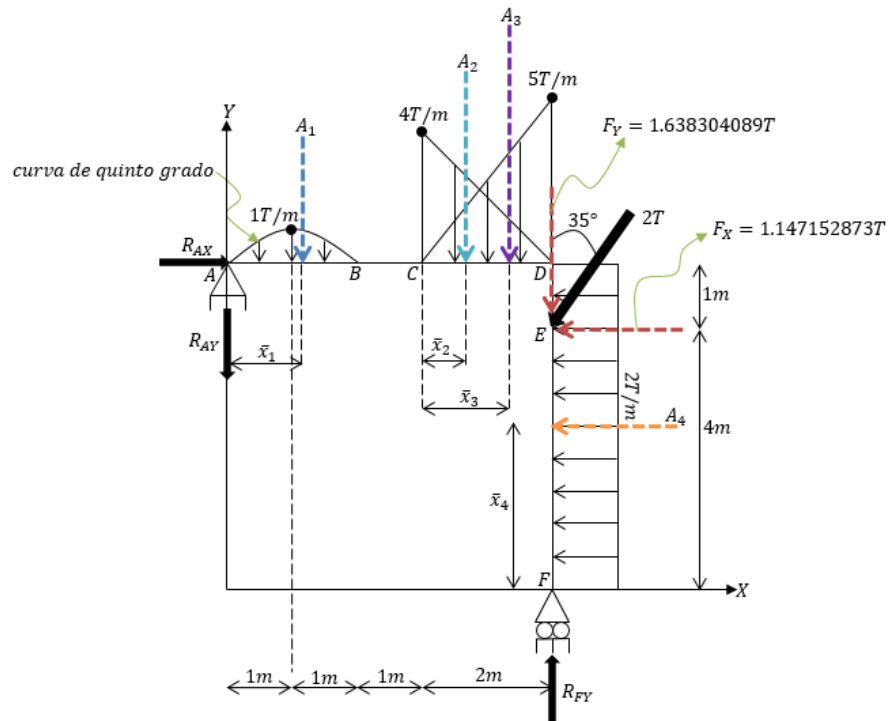
3.- Obtenga las expresiones algebraicas que describen la variación de la fuerza axial, de la fuerza cortante y del momento flector en toda la estructura, la cual está sometida a la acción de las cargas indicadas.



**SOLUCIÓN.**

**Cálculo de las reacciones en los soportes.**

**Diagrama de cargas.**



- Cálculo de las cargas concentradas equivalentes y sus puntos de aplicación de las presiones.
  - Carga cuya intensidad es descrita por la curva de quinto grado.

El siguiente procedimiento debe llevarse a cabo para determinar el área bajo la curva que representa la fuerza resultante y para localizar el punto donde actúa tal fuerza, es decir el centroide de su área.

Siendo conocidos tres puntos de la curva, la expresión más sencilla que la ajusta es

$$y = ax^5 + bx + c \text{ --- (I)}$$

Si tomamos como origen el punto A, entonces

$$\text{en } x = 0m, y = 0; \quad \text{en } x = 1m, y = 1T; \quad \text{en } x = 2m, y = 0$$

Las constantes  $a, b$  y  $c$  pueden calcularse construyendo un sistema de ecuaciones reemplazando cada punto conocido de manera individual en la ecuación (I).

$$\begin{aligned} a(0)^5 + b(0) + c &= 0 \\ a(1)^5 + b(1) + c &= 1 \\ a(2)^5 + b(2) + c &= 0 \end{aligned}$$

Simplificando se tiene

$$\begin{aligned} 0a + 0b + c &= 0 \text{ --- (1)} \\ a + b + c &= 1 \text{ --- (2)} \\ 32a + 2b + c &= 0 \text{ --- (3)} \end{aligned}$$

Si aplicamos el método de Gauss – Jordan para resolver el sistema simultáneo de ecuaciones obtenemos

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 32 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 32 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -30 & -31 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{31}{30} & \frac{16}{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{16}{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Intercambiando renglones  $\quad -32R_1 + R_2 \quad \quad \quad -\frac{1}{30}R_2 \quad \quad \quad -\frac{31}{30}R_3 + R_2$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{16}{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{16}{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$-R_2 + R_1 \quad \quad \quad -R_3 + R_1$

$$\therefore a = -\frac{1}{15}, b = \frac{16}{15}, c = 0$$

De tal modo que

$$y = -\frac{1}{15}x^5 + \frac{16}{15}x$$

El área bajo la curva es

$$A_1 = \int dA = \int_{L_1}^{L_2} y dx = \int_0^2 \left( -\frac{1}{15}x^5 + \frac{16}{15}x \right) dx = \left[ -\frac{1}{90}x^6 + \frac{8}{15}x^2 \right]_0^2 = \frac{64}{45} T$$

El centroide del área es

$$\bar{x}_1 = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} xy dx}{\int_{L_1}^{L_2} y dx} = \frac{\int_0^2 x \left( -\frac{1}{15}x^5 + \frac{16}{15}x \right) dx}{\int_0^2 \left( -\frac{1}{15}x^5 + \frac{16}{15}x \right) dx} = \frac{\left[ -\frac{1}{105}x^7 + \frac{16}{45}x^3 \right]_0^2}{\frac{64}{45}} = \frac{\frac{512}{315}}{\frac{64}{45}} = \frac{8}{7} m$$

- Carga triangular de menor intensidad.

$$A_2 = \frac{(2m)(4T/m)}{2} = 4T \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{3}(2m) = \frac{2}{3} m$$

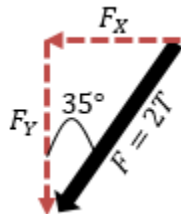
- Carga triangular de mayor intensidad.

$$A_3 = \frac{(2m)(5T/m)}{2} = 5T \quad \bar{x}_2 = \frac{2}{3}(2m) = \frac{4}{3} m$$

- Carga distribuida uniformemente.

$$A_4 = (2m)(5T/m) = 10T \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{2}(5m) = \frac{5}{2} m$$

➤ Cálculo de las componentes rectangulares de  $F = 2T$ .



$$F_x = 2T(\text{sen}35^\circ) = 1.147152873 T$$

$$F_y = 2T(\text{cos} 35^\circ) = 1.638304089 T$$

**Ecuaciones de equilibrio.**

$$\sum MA = 0 \Rightarrow \left(\frac{64}{45}\right)\left(\frac{8}{7}\right) + (4)\left(3 + \frac{2}{3}\right) + (5)\left(3 + \frac{4}{3}\right) + 1.638304089(5)$$

$$+ 1.147152873(1) + (10)\left(\frac{5}{2}\right) - R_{FY}(5) = 0$$

$$R_{FY} = - \left[ \frac{\frac{512}{315} + \frac{44}{3} + \frac{65}{3} + 8.191520445 + 1.147152873 + 25}{-5} \right] = \frac{72.29740348}{5}$$

$$\therefore R_{FY} = 14.45948070T \uparrow$$

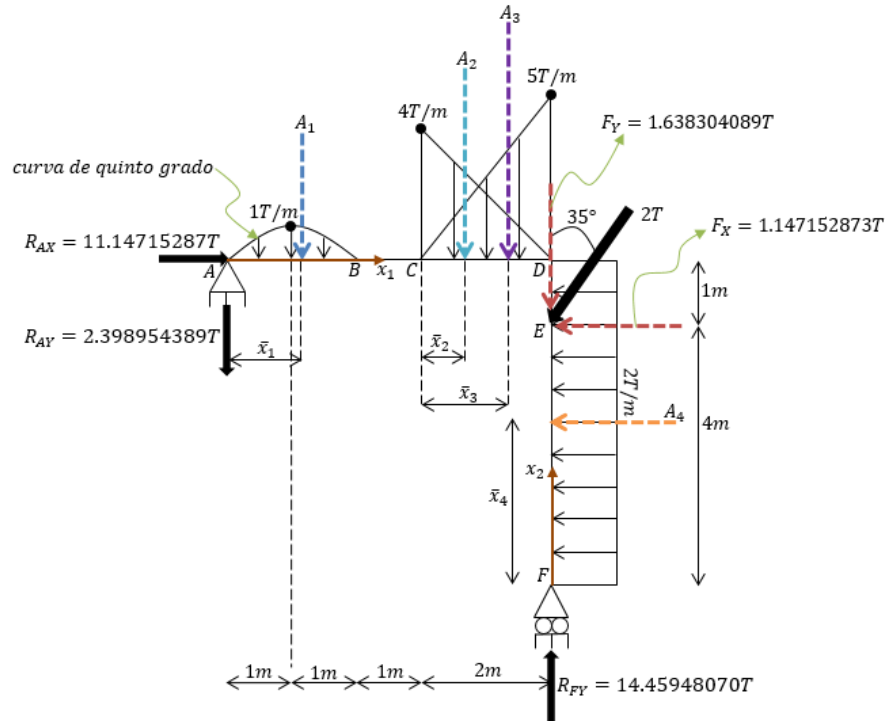
$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow R_{AY} - \frac{64}{45} - 4 - 5 - 1.638304089 + 14.45948070 = 0$$

$$R_{AY} = -2.398954389 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 2.398954389T \downarrow$$

$$+\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow R_{AX} - 1.147152873 - 10 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 11.14715287T \rightarrow$$

**Funciones de la fuerza cortante, de la fuerza normal y del momento flector.**

Los resultados obtenidos se muestran a continuación:



La distribución de la carga que actúa sobre el marco presenta discontinuidades en los puntos  $B, C, D$  y  $E$  y en el punto  $D$  existe un cambio en la geometría de la estructura; por tanto, para obtener las expresiones algebraicas que definan la variación de las acciones internas es necesario cortar la estructura a través de secciones arbitrarias en los tramos  $A - B, B - C, C - D, F - E$  y  $E - D$ .

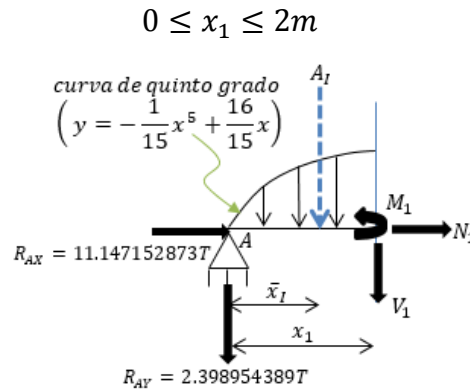
Se ha definido una sola coordenada  $x$  por miembro. La coordenada  $x_1$  con origen en  $A$ , es válida para la región que va desde  $A$  hasta  $D$  y es positiva hacia la derecha. La coordenada  $x_2$ , por su parte, tiene origen en  $F$ , es válida dentro de la región desde  $F$  hasta  $D$  y es positiva hacia arriba.

**Miembro  $A - D$ .**

Obsérvese que en los puntos  $B$  y  $C$  existen discontinuidades en la distribución de la carga, ya que de  $A$  a  $B$  se extiende una carga repartida variable en forma de curva

de grado cinco, desde  $B$  hasta  $C$  no hay carga alguna y del punto  $C$  al  $D$  se extienden dos presiones triangulares de distinta intensidad que se traslapan. Entonces, necesariamente el miembro  $A - D$  debe ser cortado perpendicularmente a su eje tres veces, siempre considerando como origen del sistema coordenado al punto  $A$ .

Corte en el tramo  $A - B$ . Se secciona la estructura en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $A - B$ ) a una distancia  $x_1$  de  $A$ ; se representa el diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la estructura para definir las acciones internas.



Previo al establecimiento del equilibrio estático del cuerpo libre, deben calcularse el área y su centroide de la presión del corte cuya intensidad es descrita por la función polinomial de quinto grado.

$$\bar{x}_I = \frac{\int_0^{x_1} x \left( -\frac{1}{15}x^5 + \frac{16}{15}x \right) dx}{\int_0^{x_1} \left( -\frac{1}{15}x^5 + \frac{16}{15}x \right) dx} = \frac{\int_0^{x_1} \left( -\frac{1}{15}x^6 + \frac{16}{15}x^2 \right) dx}{\int_0^{x_1} \left( -\frac{1}{15}x^5 + \frac{16}{15}x \right) dx} = \frac{\left[ -\frac{1}{105}x^7 + \frac{16}{45}x^3 \right]_0^{x_1}}{\left[ -\frac{1}{90}x^6 + \frac{8}{15}x^2 \right]_0^{x_1}}$$

$$\bar{x}_I = \frac{-\frac{1}{105}x_1^7 + \frac{16}{45}x_1^3}{-\frac{1}{90}x_1^6 + \frac{8}{15}x_1^2}$$

$$A_I = \int_0^{x_1} \left( -\frac{1}{15}x^5 + \frac{16}{15}x \right) dx = -\frac{1}{90}x_1^6 + \frac{8}{15}x_1^2$$

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_1 - 2.398954389(x_1) - \left( -\frac{1}{90}x_1^6 + \frac{8}{15}x_1^2 \right)$$

$$\left( x_1 - \frac{-\frac{1}{105}x_1^7 + \frac{16}{45}x_1^3}{-\frac{1}{90}x_1^6 + \frac{8}{15}x_1^2} \right) = 0$$

$$M_1 = -2.398954389(x_1) - \frac{1}{105}x_1^7 + \frac{16}{45}x_1^3 + \frac{1}{90}x_1^7 - \frac{8}{15}x_1^3$$

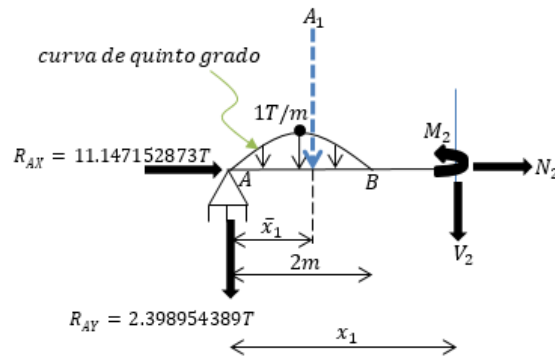
$$M_1 = \frac{1}{630}x_1^7 - \frac{8}{45}x_1^3 - 2.398954389x_1$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = \frac{1}{90}x_1^6 - \frac{8}{15}x_1^2 - 2.398954389$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 11.14715287 + N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = -11.14715287$$

Corte en el tramo  $B - C$ . Se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente al segmento izquierdo de la estructura que se produce al cortarla en algún sitio intermedio del tramo  $B - C$ . El equilibrio estático del cuerpo libre implica que

$$2m \leq x_1 \leq 3m$$



$$\curvearrowright \sum Mcorte = 0 \Rightarrow -M_2 - 2.398954389(x_1) - \left(\frac{64}{45}\right)\left(x_1 - \frac{8}{7}\right) = 0$$

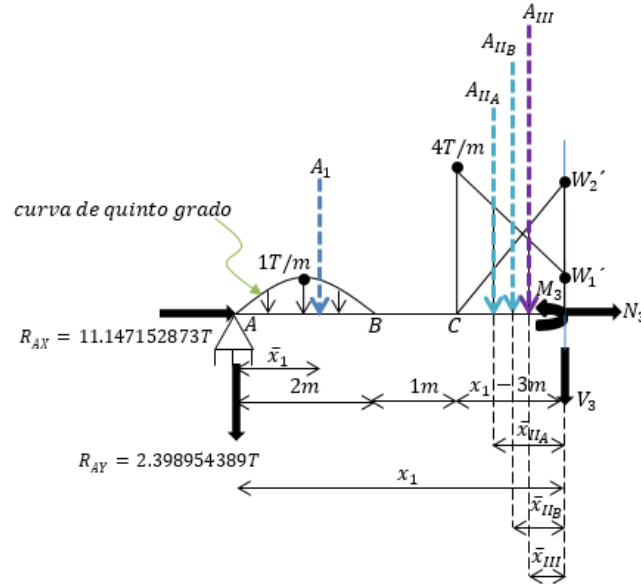
$$M_2 = -3.821176611x_1 + \frac{512}{315}$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx_1} = -3.821176611$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 11.14715287 + N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = -11.14715287$$

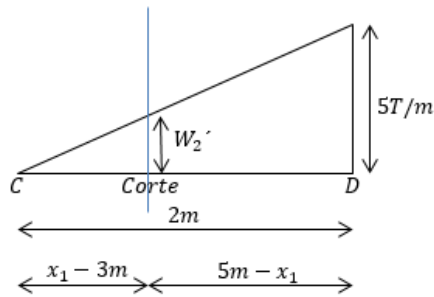
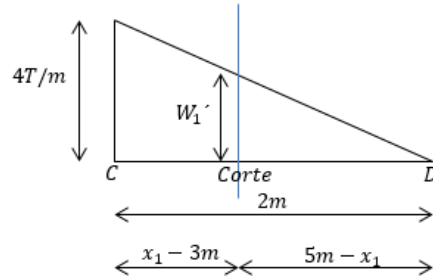
Corte en el tramo  $C - D$ . Se secciona la estructura en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $C - D$ ) a una distancia  $x_1$  de A; se representa el diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda del corte para definir las acciones internas.

$$3m \leq x_1 \leq 5m$$



Los siguientes esquemas son útiles para determinar, por trigonometría, los valores en función de  $x_1$  de las intensidades  $W_1'$  y  $W_2'$ , respectivamente.

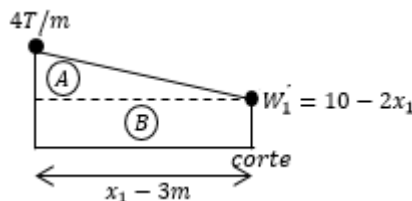
$$\frac{4T/m}{2m} = \frac{W_1'}{5m - x_1} \Rightarrow W_1' = 10 - 2x_1$$



$$\frac{5T/m}{2m} = \frac{W_2'}{x_1 - 3m} \Rightarrow W_2' = 2.5x_1 - 7.5$$

A continuación, se analizan las presiones trapezoidal y triangular generadas al haber hecho el corte anterior en la estructura.

Es conveniente subdividir a la carga distribuida, cuya intensidad varía linealmente desde  $4T/m$  en el punto C hasta  $W_1'$  en el punto D, de tal modo que se formen dos presiones más simples de analizar, una rectangular y una triangular, justo como se observa en la siguiente figura:





Las cargas concentradas equivalentes con sus puntos de aplicación son

$$A_{IIA} = \left[ \frac{(x_1 - 3)(4 - (10 - 2x_1))}{2} \right] \quad \bar{x}_{IIA} = \frac{2}{3}(x_1 - 3)$$

$$A_{IIB} = (x_1 - 3)(10 - 2x_1) \quad \bar{x}_{IIB} = \frac{1}{2}(x_1 - 3)$$

Para la carga distribuida, cuya intensidad varía linealmente desde 0 en el punto C hasta  $W_2'$  en el punto D, la fuerza resultante y el punto en el que actúa son

$$A_{III} = \left[ \frac{(x_1 - 3)(2.5x_1 - 7.5)}{2} \right] \quad \bar{x}_{III} = \frac{1}{3}(x_1 - 3)$$

El equilibrio estático del cuerpo libre del corte en el tramo C – D implica que

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$-M_3 - 2.398954389(x_1) - \left(\frac{64}{45}\right)\left(x_1 - \frac{8}{7}\right) - \left[\frac{(x_1 - 3)(4 - (10 - 2x_1))}{2}\right]\left(\frac{2}{3}(x_1 - 3)\right)$$

$$-(x_1 - 3)(10 - 2x_1)\left(\frac{1}{2}(x_1 - 3)\right) - \left[\frac{(x_1 - 3)(2.5x_1 - 7.5)}{2}\right]\left(\frac{1}{3}(x_1 - 3)\right) = 0$$

$$M_3 = -2.398954389x_1 - \frac{64}{45}x_1 + \frac{512}{315} + x_1^3 - 11x_1^2 + 39x_1 - 45 - \frac{2}{3}x_1^3 + 6x_1^2$$

$$-18x_1 + 18 - \frac{5}{12}x_1^3 + \frac{15}{4}x_1^2 - \frac{45}{4}x_1 + \frac{45}{4} = -\frac{x_1^3}{12} - \frac{5x_1^2}{4} + 5.928823389x_1 - \frac{17797}{1260}$$

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx_1} = -\frac{x_1^2}{4} - \frac{5x_1}{2} + 5.928823389$$

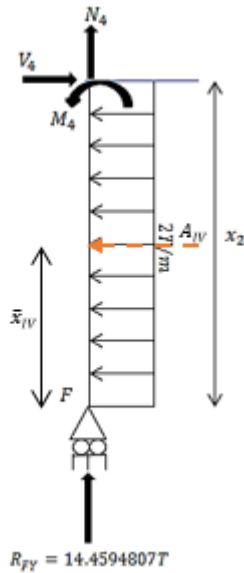
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 11.14715287 + N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = -11.14715287$$

Miembro F – D.

Aunque la carga distribuida uniforme de  $2T/m$  no provoca que las funciones de las acciones internas varíen en la región F – D debido a que tal presión se encuentra aplicada a lo largo de todo el miembro citado, la carga puntual de  $2T$  en E hará que las funciones de la fuerza cortante, de la fuerza axial y del momento flector sean discontinuas en ese punto; por tanto, se tienen que hacer dos cortes perpendiculares al eje del miembro F – D.

Corte en el tramo  $F - E$ . A continuación se muestra un diagrama de cuerpo libre de la sección cortada. La fuerza resultante de la carga distribuida uniforme es  $A_{IV} = (2T/m)(x_2)$  y su punto de aplicación es  $\bar{x}_{IV} = x_2/2$ . Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, se tiene

$$0m \leq x_2 \leq 4m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_4 + 2(x_2) \left( \frac{x_2}{2} \right) = 0 \Rightarrow M_4 = x_2^2$$

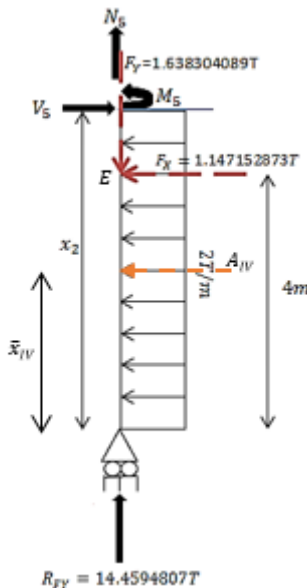
$$V_4 = \frac{dM_4}{dx_2} = 2x_2$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow 14.4594807 + N_4 = 0$$

$$N_4 = -14.4594807$$

Corte en el tramo  $E - D$ . El siguiente diagrama de cuerpo libre corresponde al segmento inferior con longitud  $x_2$  que se origina al seccionar el marco en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $E - D$ ). Por lo tanto,

$$4m \leq x_2 \leq 5m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_5 + 2(x_2) \left( \frac{x_2}{2} \right) + 1.147152873(x_2 - 4) = 0$$

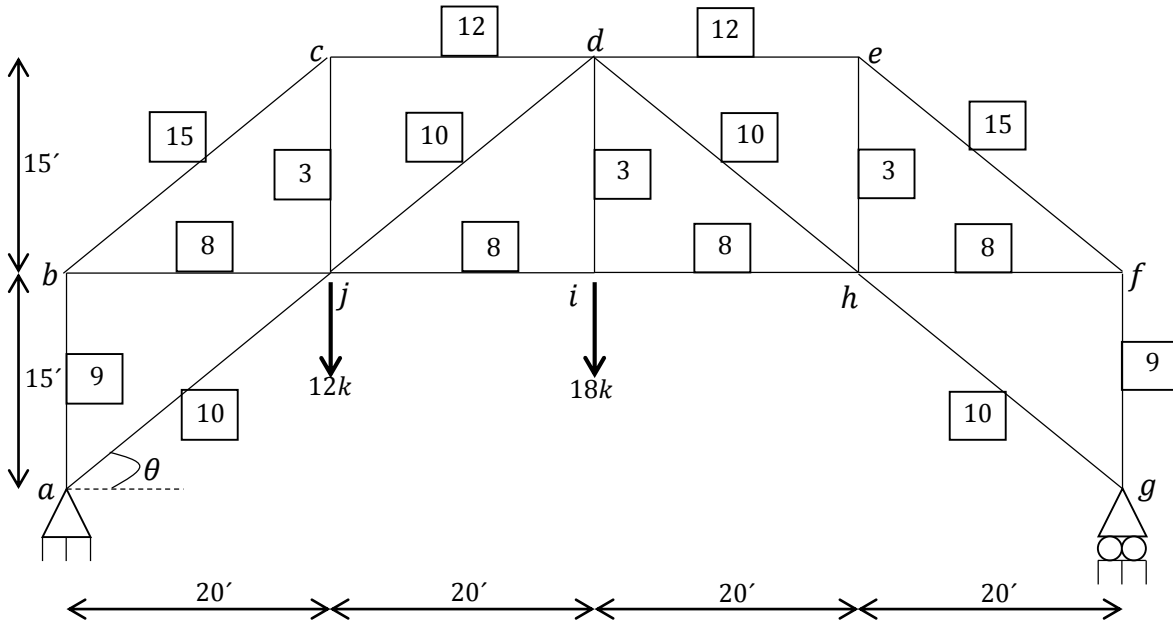
$$M_5 = x_2^2 + 1.147152873x_2 - 4.588611492$$

$$V_5 = \frac{dM_5}{dx_2} = 2x_2 + 1.147152873$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow 14.4594807 + N_5 = 0$$

$$N_5 = -14.4594807$$

4.- Calcule el desplazamiento que experimenta el nudo  $i$  de la armadura que se muestra en la siguiente figura, al actuar sobre ella el sistema de cargas indicado. El área de la sección transversal de cada elemento es constante y su valor se indica en el cuadrado adyacente; se expresa en pulgadas cuadradas. El módulo de elasticidad del material de los miembros de la estructura es  $30000k/pulg^2$ .



**SOLUCIÓN.**

**Fuerzas reales  $N$ .**

Las reacciones en los soportes son resultado de

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{aX} = 0$$

$$\curvearrowright \sum Ma = 0 \Rightarrow 12(20) + 18(40) - R_{gY}(80) = 0 \Rightarrow R_{gY} = \frac{960}{80} = 12 \Rightarrow R_{gY} = 12k \uparrow$$

$$\uparrow + \sum FY = 0 \Rightarrow 12 - 18 + 12 - R_{aY} = 0 \Rightarrow R_{aY} = 18k \uparrow$$

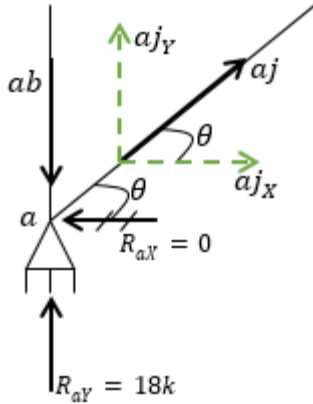
La longitud de cada barra inclinada es

$$L_{a-j} = L_{a-c} = L_{b-c} = L_{j-d} = L_{h-d} = L_{f-e} = L_{g-h} \sqrt{(20')^2 + (15')^2} = 25'$$

Por otra parte,

$$\sin \theta = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \quad \cos \theta = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

El cálculo las fuerzas en las barras causadas por las cargas reales que actúan sobre la armadura se presenta en seguida.



Nodo a.

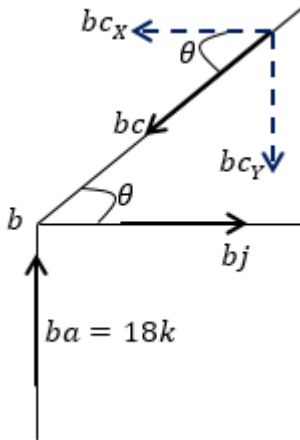
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -R_{ax} + aj_x = 0 \Rightarrow -R_{ax} + aj\cos\theta = 0$$

$$aj = \frac{R_{ax}}{\cos\theta} = \frac{0}{4/5} \Rightarrow \therefore aj = 0$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -ab + R_{ay} + aj_y = 0 \Rightarrow -ab + R_{ay} + aj\sin\theta = 0$$

$$-ab + 18 + 0\left(\frac{3}{5}\right) = 0 \Rightarrow \therefore ab = 18k(\text{Compresión})$$

Nodo b.



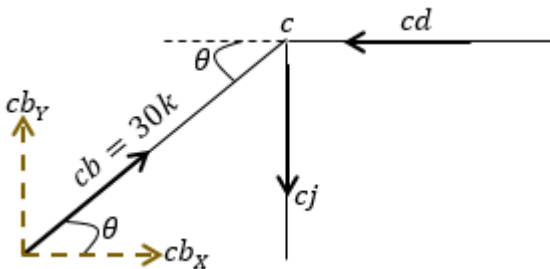
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow ba - bc_y = 0 \Rightarrow ba - bc\sin\theta = 0$$

$$bc = \frac{ba}{\sin\theta} = \frac{18}{3/5} \Rightarrow \therefore bc = 30k(\text{Compresión})$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow bj - bc_x = 0 \Rightarrow bj - bc\cos\theta = 0$$

$$bj = bc\cos\theta = 30\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \therefore bj = 24k(\text{Tensión})$$

Nodo c.



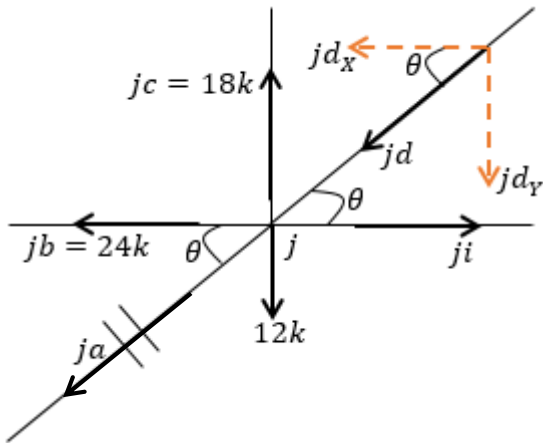
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow cb_x - cd = 0 \Rightarrow cb\cos\theta - cd = 0$$

$$cd = cb\cos\theta = 30\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \therefore cd = 24k(\text{Compresión})$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow cb_y - cj = 0 \Rightarrow cb\sin\theta - cj = 0$$

$$cj = cb\sin\theta = 30\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \therefore cj = 18k(\text{Tensión})$$

Nodo  $j$ .



$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow jc - 12 - jd_y$$

$$jc - 12 - jd \sin \theta = 0$$

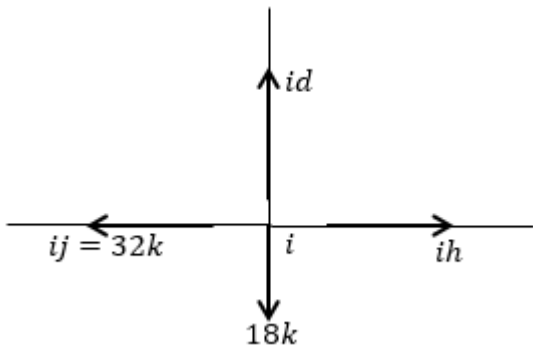
$$jd = \frac{jc - 12}{\sin \theta} = \frac{18 - 12}{3/5} \Rightarrow \therefore jd = 10k(\text{Compresión})$$

$$+\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow -jb + ji - jd_x = 0$$

$$-jb + ji - jd \cos \theta = 0$$

$$ji = jb + jd \cos \theta = 24 + 10 \left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \therefore ji = 32k(\text{Tensión})$$

Nodo  $i$ .



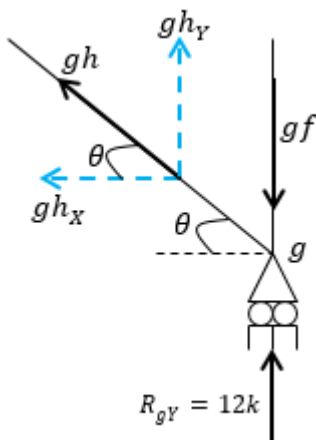
$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow id - 18 = 0$$

$$\therefore id = 18k(\text{Tensión})$$

$$+\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow -ij + ih = 0$$

$$ih = ij \Rightarrow \therefore ih = 32k(\text{Tensión})$$

Nodo  $g$ .



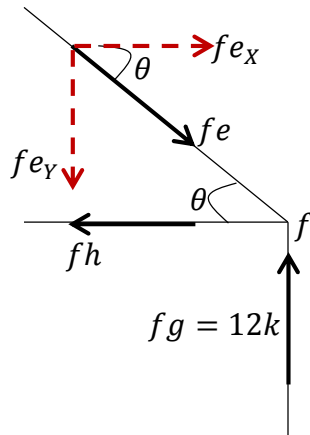
$$+\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow -gh_x = 0 \Rightarrow -gh \cos \theta = 0$$

$$gh = 0 / \cos \theta = \frac{0}{4/5} \Rightarrow \therefore gh = 0$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow R_{gY} - gf + gh_y = 0 \Rightarrow R_{gY} - gf + gh \sin \theta = 0$$

$$gf = R_{gY} + gh \sin \theta = 12 + 0 \left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \therefore gf = 12k(\text{Compresión})$$

Nodo *f*.



$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -fe_y + fg = 0$$

$$-fesin\theta + fg = 0$$

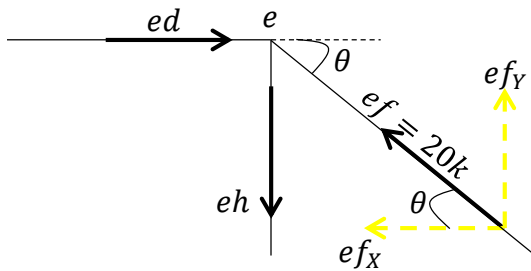
$$fe = fg/\sin\theta = \frac{12}{\frac{3}{5}} \Rightarrow \therefore fe = 20k(\text{Compresión})$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -fh + fe_x = 0$$

$$-fh + fecos\theta = 0$$

$$fh = fecos\theta = 20\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \therefore fh = 16k(\text{Tensión})$$

Nodo *e*.



$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow ed - ef_x = 0$$

$$ed = ef_x$$

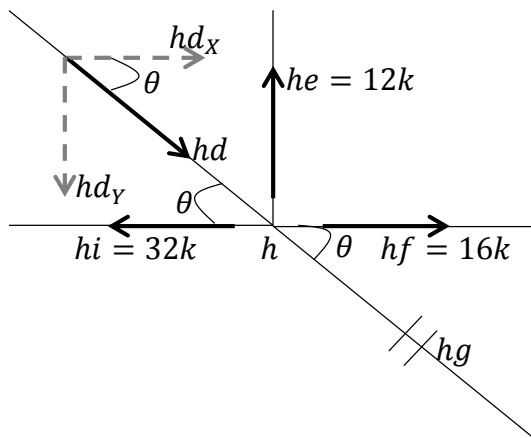
$$ed = efcos\theta = 20\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \therefore ed = 16k(\text{Compresión})$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -eh + ef_y = 0$$

$$eh = ef_y$$

$$eh = efsin\theta = 20\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \therefore eh = 12k(\text{Tensión})$$

Nodo *h*.



$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -32 + 16 + hd_x = 0$$

$$-16 + hdcos\theta = 0$$

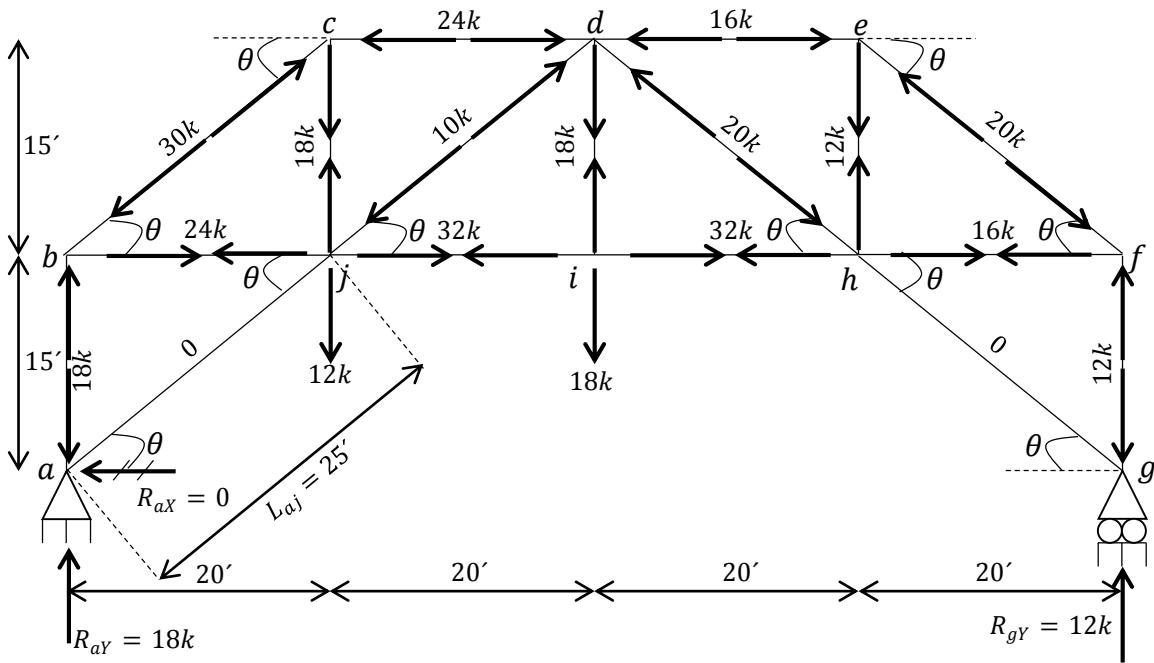
$$hd = 16/\cos\theta = \frac{16}{\frac{4}{5}} \Rightarrow \therefore hd = 20k(\text{Compresión})$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow he - hd_y = 0$$

$$he - hdsin\theta = 0$$

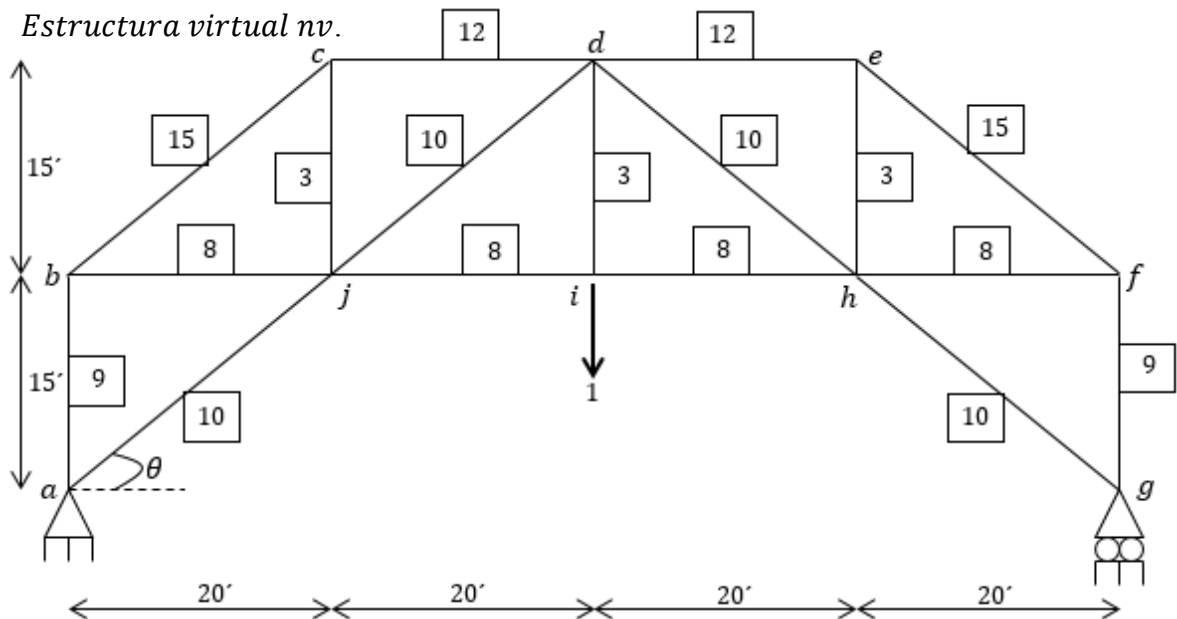
$$12 - 20\left(\frac{3}{5}\right) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ ok}$$

Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente figura



Como se desconoce la dirección del desplazamiento del nudo  $i$ , no es posible aplicar una carga virtual unitaria en su dirección y calcularlo directamente. Sin embargo, el desplazamiento del nudo  $i$  se determina si, por ejemplo, se conocen sus componentes vertical y horizontal.

**Fuerzas virtuales  $nv$ .** Dado que debe determinarse el desplazamiento vertical en la junta  $i$ , se aplica una fuerza virtual de 1 en  $i$  con dirección vertical hacia abajo.



Se calculan las reacciones en los soportes *a* y *g* y después se determina la fuerza *nv* en cada elemento por el método de los nodos.

La aplicación de las ecuaciones de equilibrio conlleva a

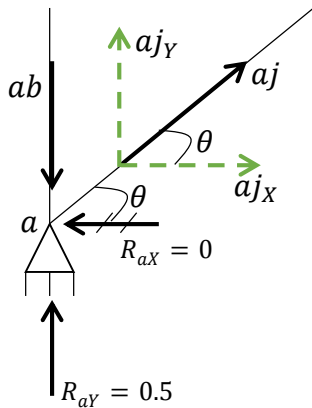
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{ax} = 0$$

$$+\curvearrowright \sum Ma = 0 \Rightarrow 1(40) - R_{gy}(80) = 0 \Rightarrow R_{gy} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2} \Rightarrow R_{gy} = 0.5 \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{ay} - 1 + 0.5 = 0 \Rightarrow R_{ay} = 0.5 \uparrow$$

Se proporciona el cálculo de las fuerzas que se producen en las barras al aplicar una carga virtual vertical unitaria en el nudo *i*.

Nodo *a*.



$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$-R_{ax} + aj_x = 0 \Rightarrow -R_{ax} + aj \cos \theta = 0$$

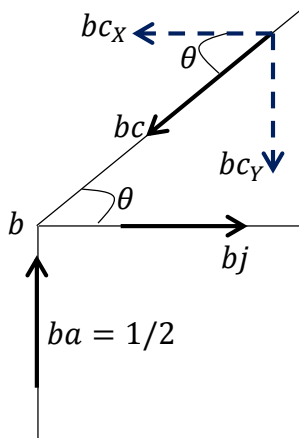
$$aj = \frac{R_{ax}}{\cos \theta} = \frac{0}{4/5} \Rightarrow aj = 0$$

$$+\rightarrow \sum FY = 0$$

$$-ab + R_{ay} + aj_y = 0 \Rightarrow -ab + R_{ay} + aj \sin \theta = 0$$

$$-ab + 0.5 + 0 \left(\frac{3}{5}\right) = 0 \Rightarrow ab = 0.5 (\text{Compresión})$$

Nodo *b*.



$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$ba - bc_y = 0 \Rightarrow ba - bc \sin \theta = 0$$

$$bc = \frac{ba}{\sin \theta} = \frac{0.5}{3/5} = 5/6 \Rightarrow bc = 0.8333 (\text{Compresión})$$

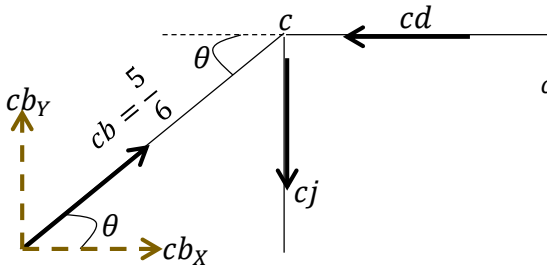
$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$bj - bc_x = 0 \Rightarrow bj - bc \cos \theta = 0$$

$$bj = bc \cos \theta = \left(\frac{5}{6}\right) \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow bj = 0.6667 (\text{Tensión})$$



Nodo c.



$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$cb_x - cd = 0 \Rightarrow cb \cos \theta - cd = 0$$

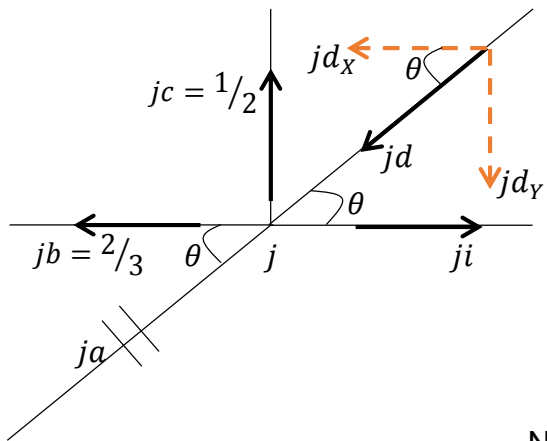
$$cd = cb \cos \theta = \frac{5}{6} \left( \frac{4}{5} \right) = \frac{2}{3} \Rightarrow \therefore cd = 0.6667 (\text{Compresión})$$

$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$cb_y - cj = 0 \Rightarrow cb \sin \theta - cj = 0$$

$$cj = cb \sin \theta = \left( \frac{5}{6} \right) \left( \frac{3}{5} \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \therefore cj = 0.5 (\text{Tensión})$$

Nodo j



$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$jc - jd_y = 0 \Rightarrow jc - jd \sin \theta = 0$$

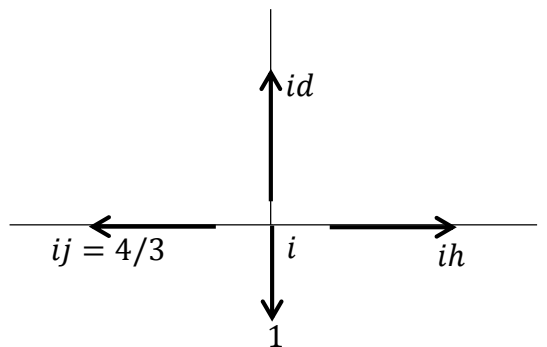
$$jd = \frac{jc}{\sin \theta} = \frac{1/2}{3/5} = \frac{5}{6} \Rightarrow \therefore jd = 0.8333 (\text{Compresión})$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$-jb + ji - jd_x = 0 \Rightarrow ji = jb + jd \cos \theta$$

$$ji = 2/3 + \left( \frac{5}{6} \right) \left( \frac{4}{5} \right) = \frac{4}{3} \Rightarrow \therefore ji = 1.3333 (\text{Tensión})$$

Nodo i



$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$id - 1 = 0$$

$$\therefore id = 1 (\text{Tensión})$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$-ij + ih = 0$$

$$ih = ij = 4/3 \Rightarrow \therefore ih = 1.3333 (\text{Tensión})$$

Por la simetría en la armadura en cuanto a cargas y geometría, se tiene

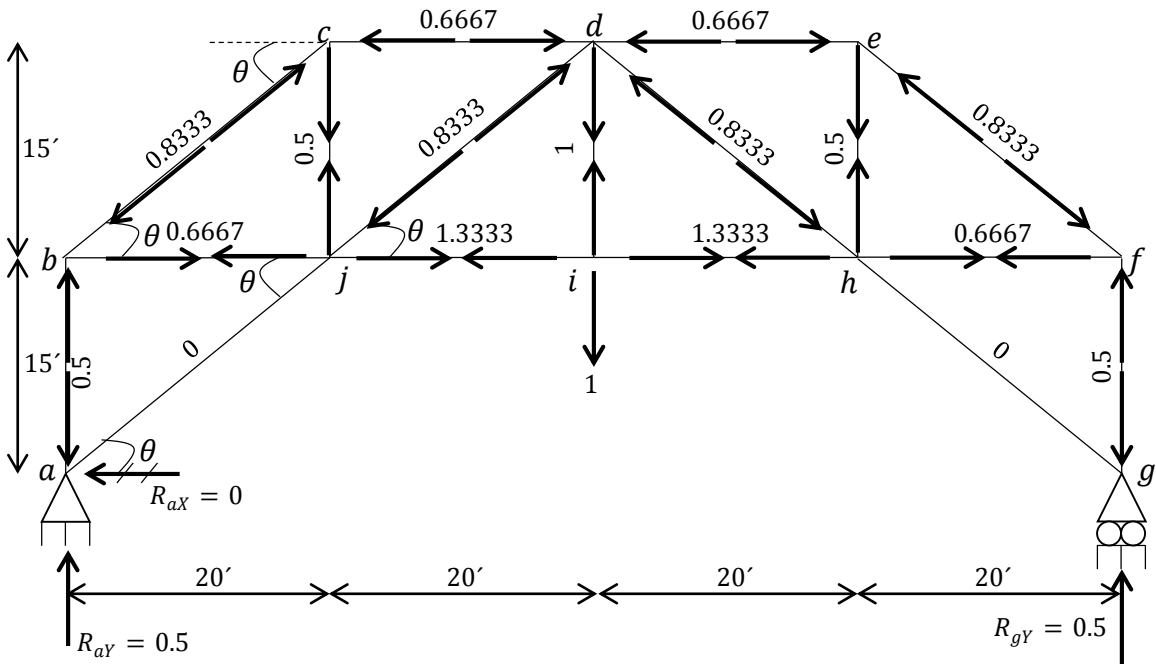
$$ab = gf = 0.5 (\text{Compresión}) \quad bj = fh = 0.6667 (\text{Tensión}) \quad jd = hd = 0.8333 (\text{Compresión})$$

$$aj = gh = 0 \quad bc = fe = 0.8333 (\text{Compresión}) \quad cd = ed = 0.6667 (\text{Compresión})$$

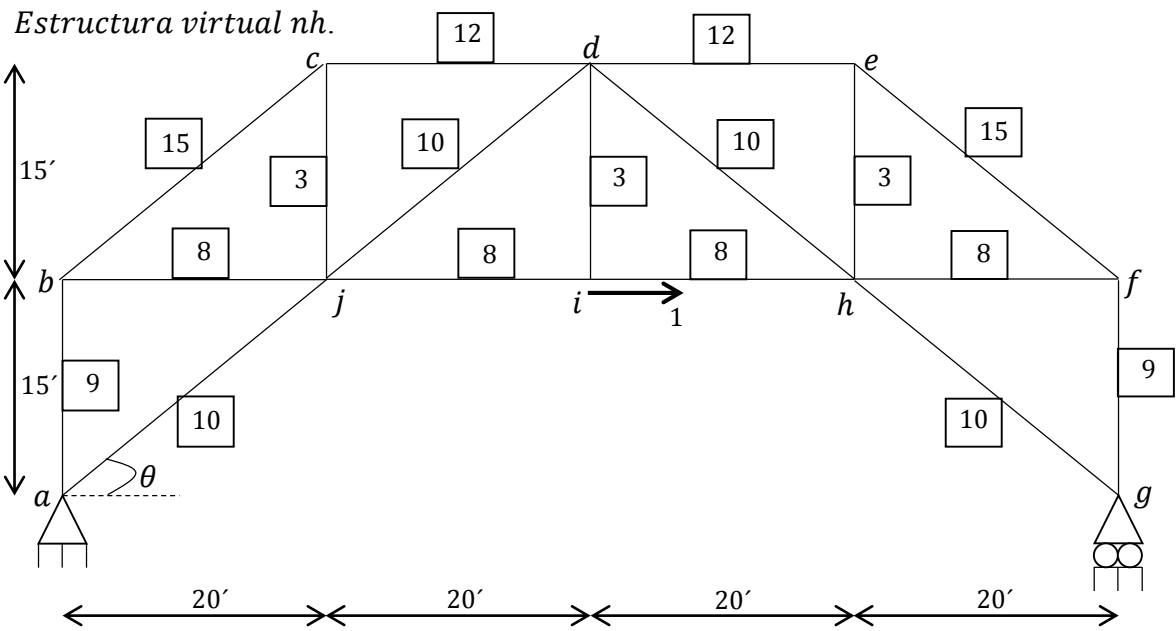
PROBLEMATARIO DE ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS EN 2D Y 3D

$$cj = eh = 0.5(\text{Tensión})$$

Los resultados obtenidos se visualizan a continuación



**Fuerzas virtuales  $nh$ .** Se aplica una carga horizontal que vaya hacia la derecha de 1 sobre la armadura en la junta  $i$  y se calculan las fuerzas en los elementos.



Las reacciones en los soportes son

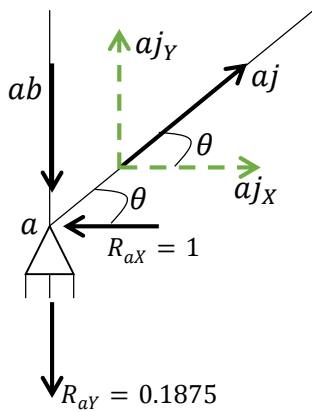
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -R_{ax} + 1 = 0 \Rightarrow \therefore R_{ax} = 1 \leftarrow$$

$$\curvearrowright \sum Ma = 0 \Rightarrow 1(15) - R_{gY}(80) = 0 \Rightarrow R_{gY} = \frac{15}{80} = \frac{3}{16} \Rightarrow \therefore R_{gY} = 0.1875 \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{aY} + \frac{3}{16} = 0 \Rightarrow R_{aY} = 3/16 \Rightarrow R_{aY} = 0.1875 \downarrow$$

Las fuerzas que se producen en las barras al aplicar una carga virtual vertical unitaria en el nudo  $i$  son

Nodo  $a$ .



$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$-R_{ax} + aj_x = 0 \Rightarrow -R_{ax} + aj \cos \theta = 0$$

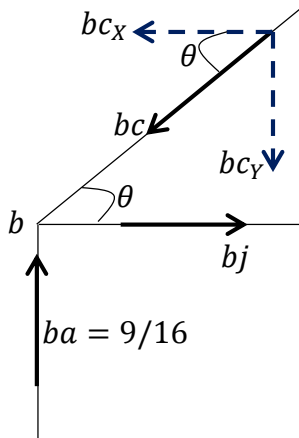
$$aj = \frac{R_{ax}}{\cos \theta} = \frac{1}{4/5} = \frac{5}{4} \Rightarrow \therefore aj = 1.25 (\text{Tensión})$$

$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$-R_{aY} - ab + aj_y = 0 \Rightarrow ab = aj \sin \theta - R_{aY}$$

$$ab = \left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{3}{5}\right) - \frac{3}{16} = \frac{9}{16} \Rightarrow \therefore ab = 0.5625 (\text{Compresión})$$

Nodo  $b$ .



$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$ba - bc_y = 0 \Rightarrow ba - bc \sin \theta = 0$$

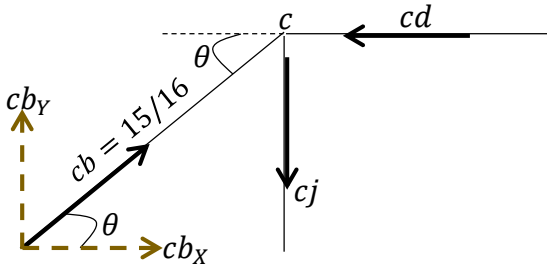
$$bc = \frac{ba}{\sin \theta} = \frac{9/16}{3/5} = 15/16 \Rightarrow \therefore bc = 0.9375 (\text{Compresión})$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$bj - bc_x = 0 \Rightarrow bj - bc \cos \theta = 0$$

$$bj = bc \cos \theta = \left(\frac{15}{16}\right) \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow \therefore bj = 0.75 (\text{Tensión})$$

Nodo c.



$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$cb_x - cd = 0 \Rightarrow cb \cos \theta - cd = 0$$

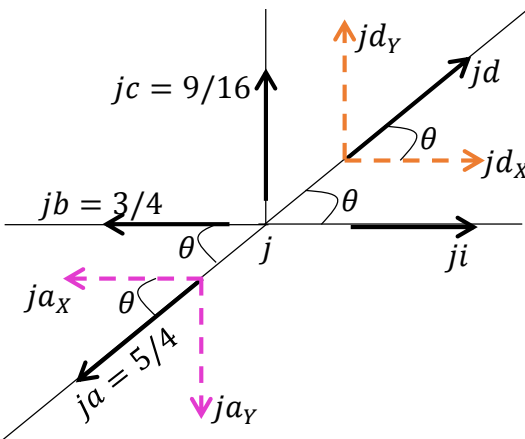
$$cd = cb \cos \theta = \frac{15}{16} \left( \frac{4}{5} \right) = \frac{3}{4} \Rightarrow \therefore cd = 0.75 (\text{Compresión})$$

$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$cb_y - cj = 0 \Rightarrow cb \sin \theta - cj = 0$$

$$cj = cb \sin \theta = \frac{15}{16} \left( \frac{3}{5} \right) = \frac{9}{16} \Rightarrow \therefore cj = 0.5625 (\text{Tensión})$$

Nodo j.



$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$-ja_y + jc + jd_y = 0 \Rightarrow -ja \sin \theta + jc + jd \sin \theta = 0$$

$$jd = \frac{ja \sin \theta - jc}{\sin \theta} = \frac{\frac{5}{4} \left( \frac{3}{5} \right) - \frac{9}{16}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{16} \Rightarrow \therefore jd = 0.3125 (\text{Tensión})$$

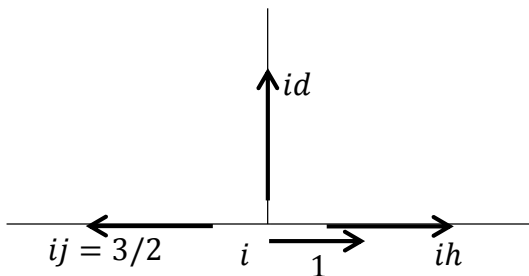
$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$-ja_x - jb + ji + jd_x = 0 \Rightarrow -ja \cos \theta - jb + ji + jd \cos \theta = 0$$

$$ji = ja \cos \theta + jb - jd \cos \theta = \left( \frac{5}{4} \right) \left( \frac{4}{5} \right) + \frac{3}{4} - \left( \frac{5}{16} \right) \left( \frac{4}{5} \right)$$

$$ji = \frac{3}{2} \Rightarrow \therefore ji = 1.5 (\text{Tensión})$$

Nodo i.



$$+\uparrow \sum FY = 0$$

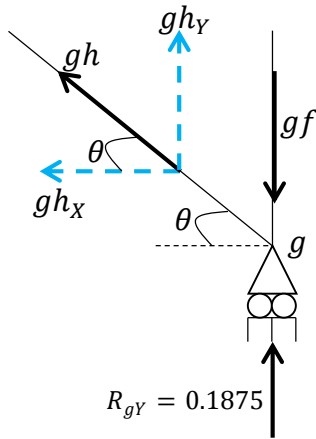
$$\therefore id = 0$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$-ij + 1 + ih = 0$$

$$ih = ij - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \therefore ih = 0.5 (\text{Tensión})$$

Nodo *g*.



$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$-gh_x = 0 \Rightarrow -gh \cos \theta = 0$$

$$gh = 0 / \cos \theta = \frac{0}{\frac{4}{5}} \Rightarrow \therefore gh = 0$$

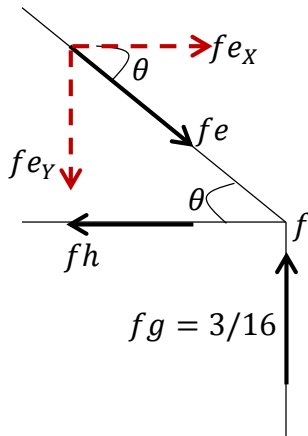
$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$R_{gY} - gf + gh_y = 0 \Rightarrow R_{gY} - gf + gh \sin \theta = 0$$

$$gf = R_{gY} + gh \sin \theta = \frac{3}{16} + 0 \left( \frac{3}{5} \right) = \frac{3}{16}$$

$$\therefore gf = 0.1875 (\text{Compresión})$$

Nodo *f*.



$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$-fe_y + fg = 0 \Rightarrow -fe \sin \theta + fg = 0$$

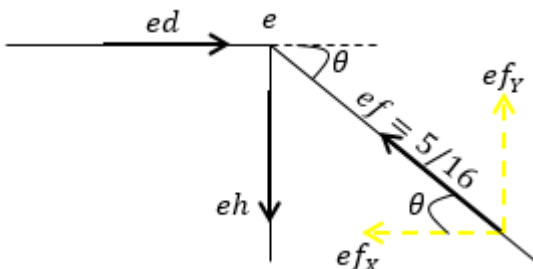
$$fg = \frac{fe}{\sin \theta} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{16} \Rightarrow \therefore fg = 0.3125 (\text{Compresión})$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$-fh + fe_x = 0 \Rightarrow -fh + fe \cos \theta = 0$$

$$fh = fe \cos \theta = \left( \frac{5}{16} \right) \left( \frac{4}{5} \right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \therefore fh = 0.25 (\text{Tensión})$$

Nodo *e*.



$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$ed - ef_x = 0 \Rightarrow ed = ef_x$$

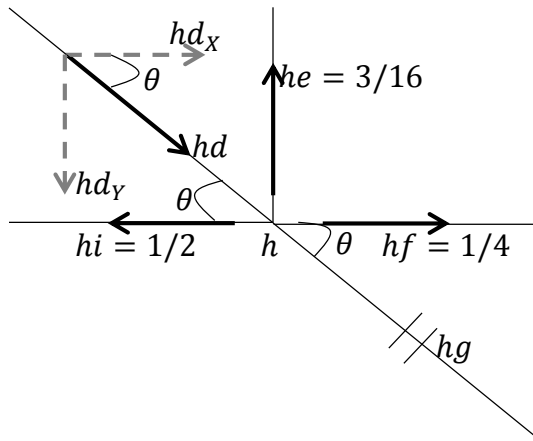
$$ed = ef \cos \theta = \left( \frac{5}{16} \right) \left( \frac{4}{5} \right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \therefore ed = 0.25 (\text{Compresión})$$

$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$-eh + ef_y = 0 \Rightarrow eh = ef_y$$

$$eh = ef \sin \theta = \left( \frac{5}{16} \right) \left( \frac{3}{5} \right) = \frac{3}{16} \Rightarrow \therefore eh = 0.1875 (\text{Tensión})$$

Nodo *h*.



$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$he - hd_y = 0 \Rightarrow he - hdsin\theta = 0$$

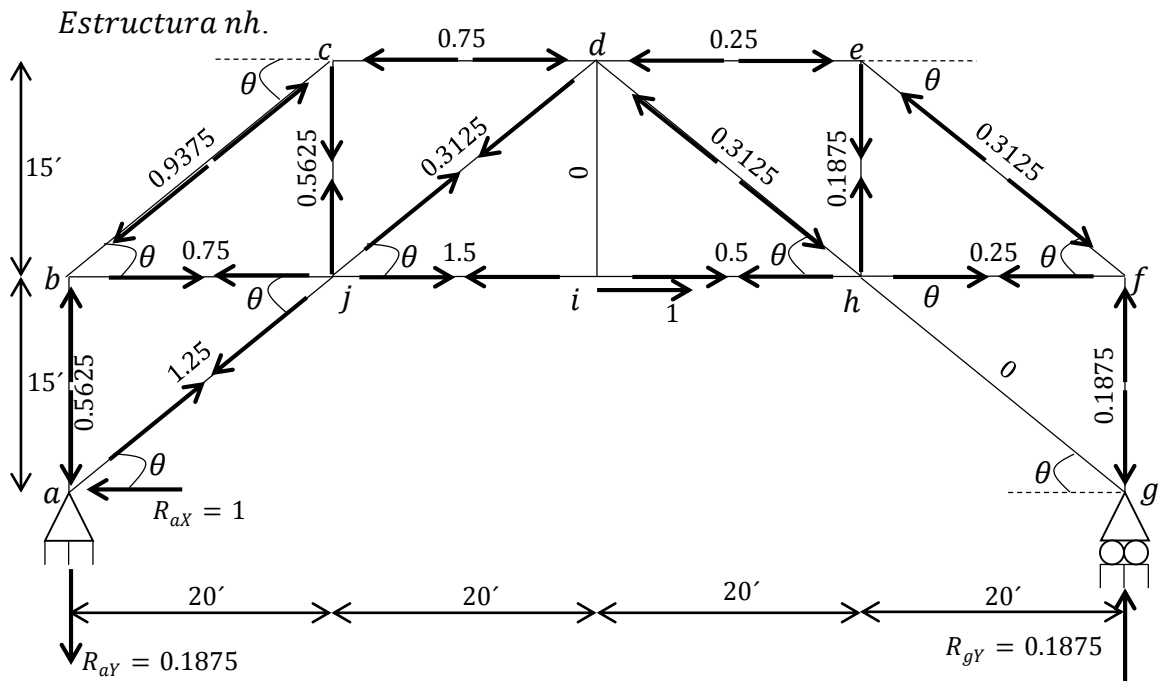
$$hd = \frac{he}{\sin\theta} = \frac{3/16}{3/5} = \frac{5}{16} \Rightarrow \therefore hd = 0.3125 \text{ (Compresión)}$$

$$+\rightarrow \sum F_X = 0$$

$$-hi + hf + hd_x = 0 \Rightarrow -hi + hf + hdcos\theta = 0$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \left(\frac{5}{16}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ ok}$$

Los resultados obtenidos se visualizan a continuación



### Ecuación del trabajo virtual.

En la siguiente tabla se consignan todos los datos requeridos para el cálculo de las componentes horizontal y vertical del desplazamiento del nudo *i*. Observe que debe manejarse una congruencia de unidades. Aquí las fuerzas de tensión son indicadas con números positivos y fuerzas de compresión con números negativos.

PROBLEMARIO DE ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS EN 2D Y 3D

Barra	N (k)	L (pulg)	A(pulg^2)	E(k/pulg^2)	vertical		horizontal	
					nv	$\frac{NnvL}{AE}$	nh	$\frac{NnhL}{AE}$
a-b	-18	180	9	30000	-0.5000	0.0060	-0.5625	0.0068
b-c	-30	300	15	30000	-0.8333	0.0167	-0.9375	0.0188
c-d	-24	240	12	30000	-0.6667	0.0107	-0.7500	0.0120
d-e	-16	240	12	30000	-0.6667	0.0071	-0.2500	0.0027
e-f	-20	300	15	30000	-0.8333	0.0111	-0.3125	0.0042
f-g	-12	180	9	30000	-0.5000	0.0040	-0.1875	0.0015
a-j	0	300	10	30000	0.0000	0.0000	1.2500	0.0000
g-h	0	300	10	30000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
b-j	24	240	8	30000	0.6667	0.0160	0.7500	0.0180
j-i	32	240	8	30000	1.3333	0.0427	1.5000	0.0480
i-h	32	240	8	30000	1.3333	0.0427	0.5000	0.0160
h-f	16	240	8	30000	0.6667	0.0107	0.2500	0.0040
j-c	18	180	3	30000	0.5000	0.0180	0.5625	0.0203
j-d	-10	300	10	30000	-0.8333	0.0083	0.3125	-0.0031
i-d	18	180	3	30000	1.0000	0.0360	0.0000	0.0000
h-d	-20	300	10	30000	-0.8333	0.0167	-0.3125	0.0063
h-e	12	180	3	30000	0.5000	0.0120	0.1875	0.0045
					$\Sigma =$	0.2586		0.1597

La componente vertical del desplazamiento del nudo i es

$$1 \cdot \delta_{vi} = \sum \frac{NnvL}{AE} = 0.2586pulg$$

Como el resultado obtenido es positivo, tal desplazamiento tiene la misma dirección que la propuesta para la carga virtual vertical unitaria, es decir,  $\delta_{vi} = 0.2586pulg \downarrow$ .

La componente horizontal del desplazamiento del nudo i es

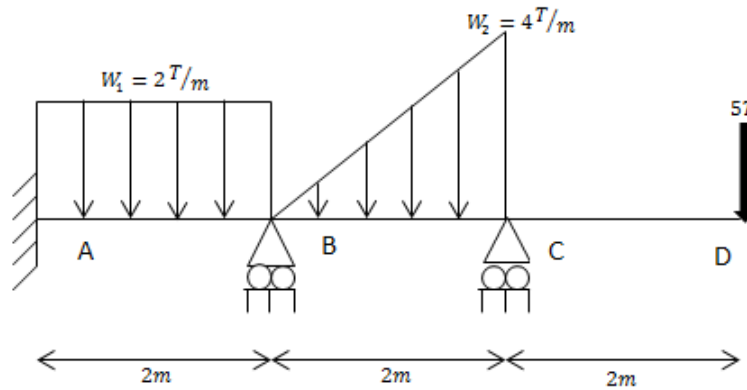
$$1 \cdot \Delta_{Hi} = \sum \frac{NnhL}{AE} = 0.1597pulg$$

La magnitud positiva indica que el desplazamiento es de la misma dirección que la supuesta para la carga virtual horizontal unitaria. Por lo tanto  $\Delta_{Hi} = 0.1597pulg \rightarrow$ .

Finalmente, la deflexión del nudo i es

$$d_i = \sqrt{(\delta_{vi})^2 + (\Delta_{Hi})^2} = \sqrt{(0.2586pulg)^2 + (0.1597pulg)^2} = 0.304pulg \searrow$$

5.- Calcular las reacciones en los soportes de la viga que se muestra con el método de flexibilidades. Dibujar los diagramas de momento, cortante, giro y flecha.



Datos:

- $E$  (Maderas duras) =  $2.1 \cdot 10^6 T/m^2$
- Sección transversal cuadrada de  $40\text{cm}$  por lado

### SOLUCIÓN.

#### Verificación del grado de indeterminación.

En primer lugar debe determinarse el grado de indeterminación de la viga real u original ( $VR$ ) para saber cuántas restricciones hiperestáticas eliminar; ese mismo número nos indicará la cantidad de ecuaciones simultáneas a plantear para resolver el problema. Hay  $r = 5$  incógnitas de reacción ( $R_{AX}, R_{AY}, M_A, R_{BY}$  y  $R_{CY}$ ), ninguna condición impuesta por la construcción, es decir,  $c = 0$ , y sólo  $n = 3$  ecuaciones de equilibrio ( $\sum M = 0, \sum FX = 0, \sum FY = 0$ ), así que la estructura es estáticamente indeterminada (hiperestática) de segundo grado ya que  $r > (n + c)$  puesto que  $5 > (3 + 0)$  con una diferencia de  $5 - 3 = 2$ .

#### Elección de las reacciones redundantes o fuerzas correctivas.

Como la viga es estáticamente indeterminada en grado dos, hay dos redundantes, lo cual significa que existe tal cantidad de fuerzas en exceso de las fuerzas primarias o son sobrantes o superabundantes de las necesarias para mantener el equilibrio estático. Nótese que de la suma de fuerzas en  $X$  directamente obtenemos



$R_{AX} = 0$  ya que no hay cargas en tal dirección. Se opta porque  $R_{BY}$  y  $R_{CY}$  sean las redundantes, pero considérese que  $M_A$  y  $R_{AY}$  también son elegibles.

**Planteamiento de la estructura primaria.**

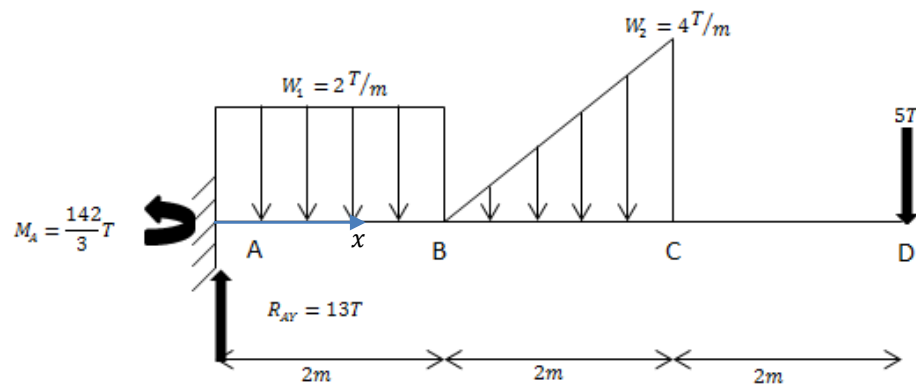
Con esto podemos idealizar una nueva estructura llamada estructura primaria o isostática fundamental, la cual corresponde a la nomenclatura VIF 1 de este problema; se trata de convertir la viga hiperestática en una isostática y estable eliminando precisamente las redundantes seleccionadas, es por ello que en VIF 1 ya no aparecen los apoyos simples (rodillos u osciladores)  $B$  y  $C$ ; forzosamente esta estructura liberada debe soportar las carga reales.

**Principio de superposición.**

Aquí se esquematiza claramente que la estructura estáticamente indeterminada puede ser igual a la suma de una serie de estructuras estáticamente determinadas compuesta por la estructura primaria y otro número de estructuras igual a la cantidad de redundantes. Entonces, la viga real es igual a VIF 1 más otras dos vigas que aquí hemos etiquetado como VIF II y VIF III, es decir,  $VR = VIF1 + VIF II + VIF III$ .

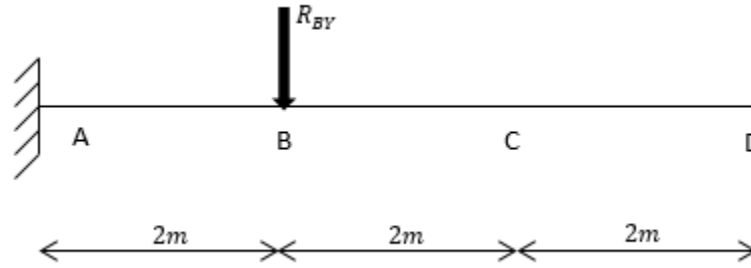
Las estructuras subsecuentes a la estructura primaria deben tener la misma geometría e idénticas condiciones de apoyo que esta última, pero únicamente se encuentran sometidas por una de las redundantes seleccionadas, en este caso,  $R_{BY}$  y  $R_{CY}$ . Lo explicado puede verificarse en las figuras correspondientes.

Estructura primaria  $\Rightarrow$  VIF 1(M)



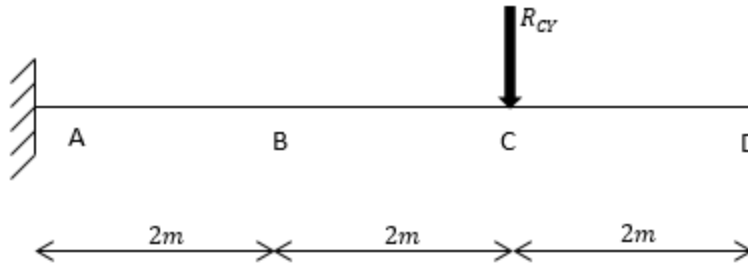
Esta viga, contrariamente a la viga real, experimenta desplazamientos verticales en los puntos  $B$  y  $C$  iguales a una cierta cantidad de  $\delta_{VBVIF1} = d_1$  y  $\delta_{VCVIF1} = d_2$ , respectivamente.

Estructura liberada con fuerza redundante  $R_{BY}$  aplicada  $\Rightarrow$  VIF II



Para VIF II, los desplazamientos verticales en los puntos  $B$  y  $C$  son iguales a una cierta cantidad de  $\delta_{VB_{VIFII}} = R_{BY}(f_{11})$  y  $\delta_{VC_{VIFII}} = R_{BY}(f_{21})$ , respectivamente.

Estructura liberada con fuerza redundante  $R_{CY}$  aplicada  $\Rightarrow$  VIF III



De manera análoga, para la viga anterior,  $\delta_{VB_{VIFIII}} = R_{CY}(f_{12})$  y  $\delta_{VC_{VIFIII}} = R_{CY}(f_{22})$ .

### Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica.

Para obtener ecuaciones adicionales que coadyuven a la solución del problema hacemos uso del principio de superposición formulado anteriormente y tomamos en cuenta la compatibilidad del desplazamiento vertical en los soportes  $B$  y  $C$ ; por lo tanto, las ecuaciones de compatibilidad para la deflexión en  $B$  y  $C$  son, respectivamente

$$\delta_{VB_{VIF1}} + \delta_{VB_{VIFII}} + \delta_{VB_{VIFIII}} = \delta_{VB_{VR}} \quad \text{--- (1)}$$

$$\delta_{VC_{VIF1}} + \delta_{VC_{VIFII}} + \delta_{VC_{VIFIII}} = \delta_{VC_{VR}} \quad \text{--- (2)}$$

Como en la viga real ( $VR$ ) los puntos  $B$  y  $C$  no experimentan desplazamiento vertical debido a que las reacciones verticales de sus respectivos rodillos lo impiden,  $\delta_{VB_{VR}}$  y  $\delta_{VC_{VR}}$  son nulos.

Cada desplazamiento del punto de aplicación de la acción redundante  $R_i$  en la dirección de ésta, producido al actuar la carga original sobre la estructura primaria es expresado, como se pudo observar, por  $d_i$ . Estas deflexiones son las incompatibilidades geométricas porque en la viga original no hay deflexiones en estas secciones ya que los soportes las restringen (impiden).

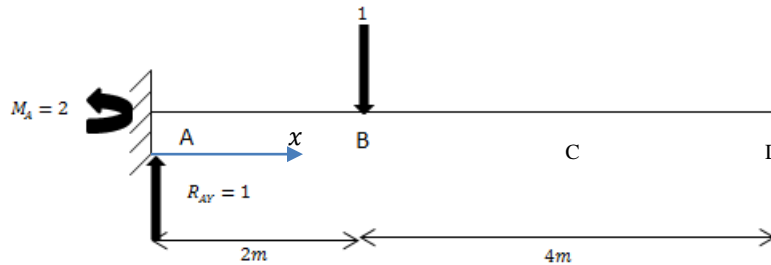
Si hacemos las sustituciones correspondientes en (1) y (2), el sistema de ecuaciones de compatibilidad geométrica es equivalente a

$$d_1 + f_{11}R_{BY} + f_{12}R_{CY} = 0 \text{ --- (3)}$$

$$d_2 + f_{21}R_{BY} + f_{22}R_{CY} = 0 \text{ --- (4)}$$

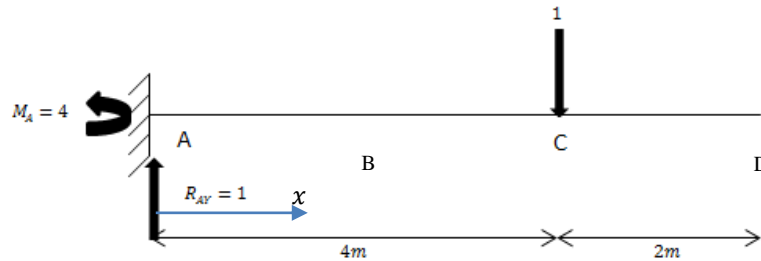
Los coeficientes de flexibilidad  $f_{ij}$  anteriores conforman la matriz de flexibilidad de la estructura y pueden calcularse fácilmente si aplicamos una carga unitaria de sentido arbitrario correspondiente a cada fuerza redundante en la estructura liberada. A estas nuevas estructuras les llamaremos VIF 2 y VIF 3 y se muestran a continuación.

Estructura liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en B  $\Rightarrow$  VIF 2 ( $m_1$ )



Para VIF 2, los desplazamientos verticales en B y C son iguales a una cierta cantidad de  $\delta_{VB_{VIF2}} = f_{11}$  y  $\delta_{VC_{VIF2}} = f_{21}$ , respectivamente.

Estructura liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en C  $\Rightarrow$  VIF 3 ( $m_2$ )



De manera análoga, para la viga anterior,  $\delta_{VB_{VIF3}} = f_{12}$  y  $\delta_{VC_{VIF3}} = f_{22}$ .

**Cálculo de las incompatibilidades geométricas y de los coeficientes de flexibilidad.**

En resumen, en las vigas VIF 1, VIF 2 y VIF 3 es necesario conocer los valores del desplazamiento vertical en  $B$  dado que  $R_{BY}$  (fuerza reactiva vertical en el rodillo del punto  $B$ ) fue suprimida y del desplazamiento vertical en  $C$  debido a que  $R_{CY}$  (fuerza reactiva vertical en el rodillo del punto  $C$ ) fue eliminada.

Los desplazamientos requeridos pueden obtenerse con cualquiera de los métodos explicados en el tema 1.6 para vigas; aquí se empleará el método del trabajo virtual (es lo más recomendable) y se considerarán únicamente las deformaciones debidas a flexión. Para asociar a los momentos internos (se calculan con el método de secciones) con las estructuras, le hemos denominado  $M$  a la primaria,  $m_1$  a la liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en  $B$  y  $m_2$  a la liberada con fuerza vertical unitaria aplicada en  $C$ . Es importante recordar que las coordenadas  $x$  a emplear y las direcciones positivas de los momentos  $d$  entre las tres estructuras recién mencionadas. En las figuras correspondientes se puede observar que usaremos únicamente la coordenada  $x$  cuyo origen se asocia en  $A$  y es válida para  $0 \leq x \leq 6m$ , pero el lector puede usar otra(s) distinta (s) que sea(n) válida(s) para cubrir todas las regiones de la viga.

Note que para determinar  $d_1$ , es decir, el desplazamiento vertical en el punto  $B$  de la viga VIF 1, se requiere de la combinación apropiada de los momentos internos  $M$  y  $m_1$ ; algo análogo ocurre con las expresiones restantes.

$$d_1 = \delta_{VB_{VIF1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_1}{EI} dx ; d_2 = \delta_{VC_{VIF1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_2}{EI} dx$$

$$f_{11} = \delta_{VB_{VIF2}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1m_1}{EI} dx ; f_{21} = \delta_{VC_{VIF2}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1m_2}{EI} dx$$

$$f_{12} = \delta_{VB_{VIF3}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2m_1}{EI} dx ; f_{22} = \delta_{VC_{VIF3}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2m_2}{EI} dx$$

- Análisis de la estructura isostática VIF 1.

Las reacciones en los soportes son

$$\curvearrowright \sum MA = 0$$

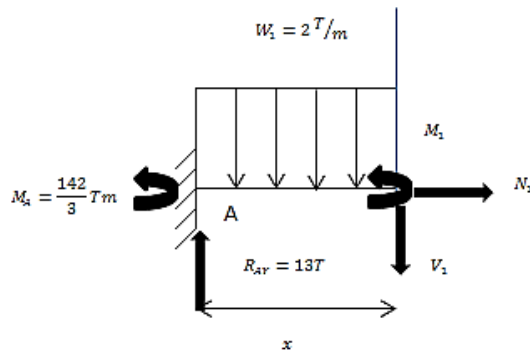
$$-M_A + (2)(2) \left( \frac{1}{2}(2) \right) + \left[ \frac{(4)(2)}{2} \right] \left( 2 + \frac{2}{3}(2) \right) + 5(6) = 0 \Rightarrow \therefore M_A = \frac{142}{3} T.m \quad \curvearrowright$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$R_{AY} - (2)(2) - \frac{(4)(2)}{2} - 5 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 13T \quad \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 0$$

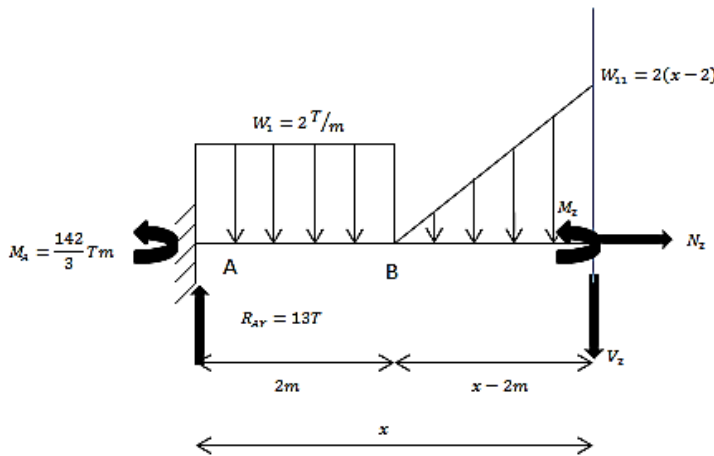
Se calculan los momentos internos  $M$ .



$$0 \leq x \leq 2m$$

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -\frac{142}{3} + 13x - x^2$$



$$2m \leq x \leq 4m$$

$$\frac{4T/m}{2m} = \frac{W_{11}}{x-2m}$$

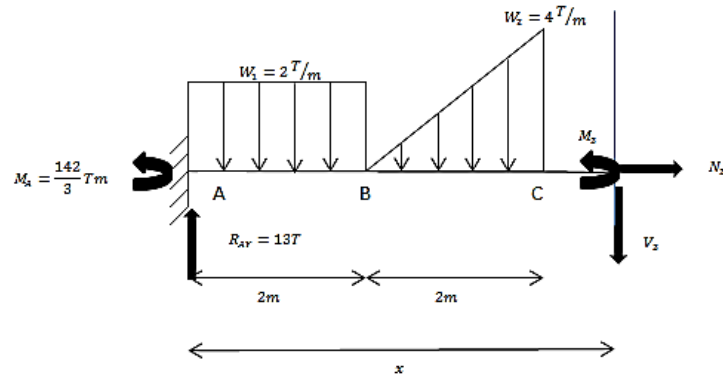
$$W_{11} = 2(x-2)$$

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = -\frac{142}{3} + 13x - (2)(2)(x-1) - \left[ \frac{(x-2)(2(x-2))}{2} \right] \left( \frac{1}{3}(x-2) \right)$$

$$M_2 = -\frac{142}{3} + 13x - 4x + 4 - \frac{1}{3}(x-2)^3 = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - \frac{122}{3}$$

$$4m \leq x \leq 6m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = -\frac{142}{3} + 13x - (2)(2)(x-1) - \left[ \frac{(4)(2)}{2} \right] \left( x - \left( 2 + \frac{2}{3}(2) \right) \right)$$

$$M_3 = -\frac{142}{3} + 13x - 4x + 4 - 4x + \frac{40}{3} = 5x - 30$$

- Análisis de la estructura isostática VIF 2.

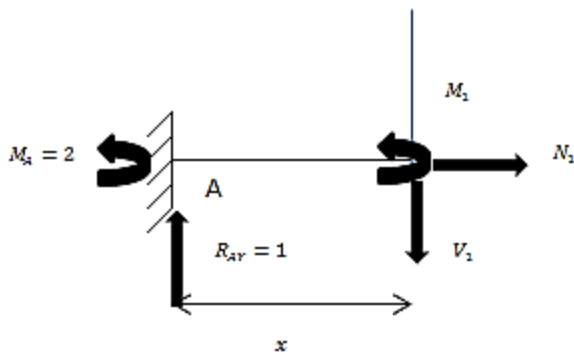
Al aplicar las ecuaciones de equilibrio se tiene

$$\sum MA = 0 \Rightarrow -M_A + 1(2) = 0 \Rightarrow \therefore M_A = 2$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 1 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 1$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 0$$

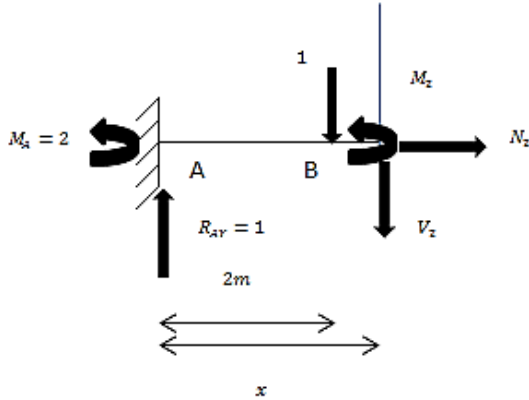
Se determinan los momentos internos  $m_1$ .



$$0 \leq x \leq 2m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -2 + 1(x) = -2 + x$$



$$2m \leq x \leq 6m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = -2 + 1(x) - 1(x - 2)$$

$$M_2 = 0$$

- Análisis de la estructura isostática VIF 3.

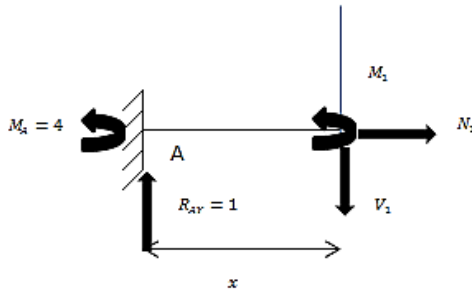
Las fuerzas reactivas en los apoyos son resultado de

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A + 1(4) = 0 \Rightarrow \therefore M_A = 4$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow R_{AY} - 1 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 1$$

$$+\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 0$$

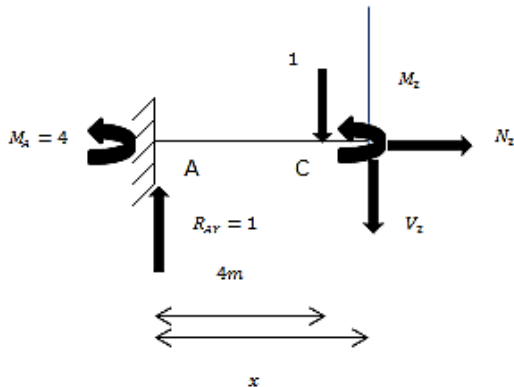
Se formulan los momentos internos  $m_2$ .



$$0 \leq x \leq 4m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -4 + x$$



$$4m \leq x \leq 6m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = -4 + x - 1(x - 4)$$

$$M_2 = 0$$

Se presenta el cálculo de las incompatibilidades geométricas.

$$d_1 = \frac{1}{EI} \int_0^2 \left( -\frac{142}{3} + 13x - x^2 \right) (-2 + x) dx + \frac{1}{EI} \int_2^4 \left( -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - \frac{122}{3} \right) (0) dx + \frac{1}{EI} \int_4^6 (5x - 30)(0) dx$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int_0^2 \left( -\frac{142}{3} + 13x - x^2 \right) (-2 + x) dx &= \frac{1}{EI} \int_0^2 \left( -x^3 + 15x^2 - \frac{220}{3}x + \frac{284}{3} \right) dx \\ &= \frac{1}{EI} \left[ -\frac{x^4}{4} + 5x^3 - \frac{110}{3}x^2 + \frac{284}{3}x \right]_0^2 = \frac{1}{EI} \left( \frac{236}{3} \right) \end{aligned}$$

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{236}{3} + 0 + 0 \right] = \frac{1}{EI} \left[ \frac{236}{3} \right]$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \int_0^2 \left( -\frac{142}{3} + 13x - x^2 \right) (-4 + x) dx + \frac{1}{EI} \int_2^4 \left( -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - \frac{122}{3} \right) (-4 + x) dx + \frac{1}{EI} \int_4^6 (5x - 30)(0) dx$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int_0^2 \left( -\frac{142}{3} + 13x - x^2 \right) (-4 + x) dx &= \frac{1}{EI} \int_0^2 \left( -x^3 + 17x^2 - \frac{298}{3}x + \frac{568}{3} \right) dx \\ &= \frac{1}{EI} \left[ -\frac{x^4}{4} + \frac{17}{3}x^3 - \frac{149}{3}x^2 + \frac{568}{3}x \right]_0^2 = \frac{1}{EI} \left( \frac{664}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int_2^4 \left( -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - \frac{122}{3} \right) (-4 + x) dx &= \frac{1}{EI} \int_2^4 \left( -\frac{x^4}{3} + \frac{10}{3}x^3 - 3x^2 - \frac{182}{3}x + \frac{448}{3} \right) dx \\ &= \frac{1}{EI} \left[ -\frac{x^5}{15} + \frac{5x^4}{6} - x^3 - \frac{91}{3}x^2 + \frac{488}{3}x \right]_2^4 = \frac{1}{EI} \left( \frac{196}{5} \right) \end{aligned}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{664}{3} + \frac{196}{5} + 0 \right] = \frac{1}{EI} \left[ \frac{3908}{15} \right]$$

Se muestra el cálculo de los coeficientes de flexibilidad.

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^2 (-2 + x)^2 dx + \frac{1}{EI} \int_2^6 (0)^2 dx$$



$$\frac{1}{EI} \int_0^2 (-2+x)^2 dx = \frac{1}{EI} \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_0^2 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{8}{3} \right]$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{8}{3} + 0 \right] = \frac{1}{EI} \left[ \frac{8}{3} \right]$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^2 (-2+x)(-4+x) dx + \frac{1}{EI} \int_2^4 (0)(-4+x) dx + \frac{1}{EI} \int_4^6 (0)(0) dx$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^2 (-2+x)(-4+x) dx = \frac{1}{EI} \int_0^2 (x^2 - 6x + 8) dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_0^2 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{20}{3} \right]$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{20}{3} + 0 + 0 \right] = \frac{1}{EI} \left[ \frac{20}{3} \right]$$

Como una consecuencia del teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos se cumple que  $f_{12} = f_{21}$ .

$$\therefore f_{12} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{20}{3} \right]$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^4 (-4+x)^2 dx + \frac{1}{EI} \int_4^6 (0)^2 dx$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^4 (-4+x)^2 dx = \frac{1}{EI} \int_0^4 (x^2 - 8x + 16) dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x \right]_0^4 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{64}{3} \right]$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{64}{3} + 0 \right] = \frac{1}{EI} \left[ \frac{64}{3} \right]$$

### Cálculo de las fuerzas correctivas (redundantes).

Con la finalidad de corregir las incompatibilidades geométricas, se determinan las fuerzas correctivas, es decir, las redundantes. Al expresar matricialmente el sistema de ecuaciones de compatibilidad se tiene

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix} \dots (5)$$

Despejando las incógnitas obtenemos

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} -d_1 \\ -d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix} \dots (6)$$

Sustituyendo los resultados en la expresión (6) y simplificando (los  $EI$  se eliminan lógicamente porque este valor es constante en toda la viga y todos los desplazamientos están en función de ello) da

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{20}{3} \\ \frac{20}{3} & \frac{64}{3} \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} -\frac{236}{3} \\ -\frac{3908}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix} \text{ --- (7)}$$

En seguida se determina la matriz inversa aplicando el método de Gauss-Jordan.

$$\text{inversa} \left[ \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{20}{3} \\ \frac{20}{3} & \frac{64}{3} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{12}{7} & -\frac{15}{28} \\ -\frac{15}{28} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{20}{3} & | & 1 & 0 \\ \frac{20}{3} & \frac{64}{3} & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & | & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{20}{3} & \frac{64}{3} & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & | & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & \frac{14}{3} & | & -\frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$(3/8)R_1 \qquad -(20/3)R_1 + R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & | & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 1 & | & -\frac{15}{28} & \frac{3}{14} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{12}{7} & -\frac{15}{28} \\ 0 & 1 & | & -\frac{15}{28} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$$

$$(3/14)R_2 \qquad -(5/2)R_2 + R_1$$

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} \frac{12}{7} & -\frac{15}{28} \\ -\frac{15}{28} & \frac{3}{14} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -\frac{236}{3} \\ -\frac{3908}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33/7 \\ -479/35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix}$$

El signo de la magnitud de las fuerzas reactivas indica que

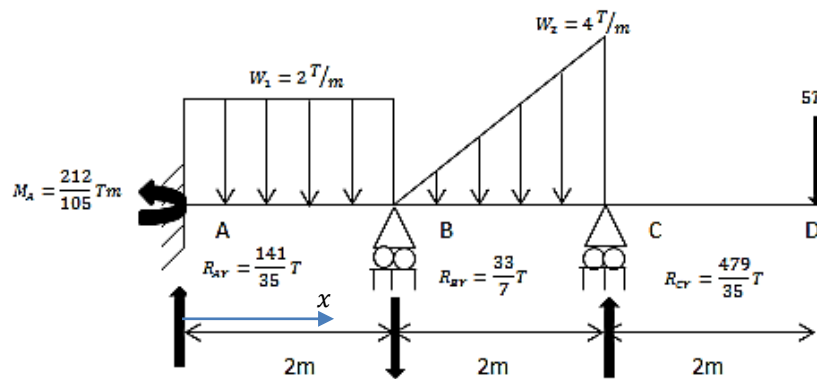
$$R_{BY} = 33/7 \text{ T} = 4.7143\text{T} \quad \downarrow$$

$$R_{CY} = 479/35 T = 13.6857T \uparrow$$

debido a que si el valor numérico de una redundante es negativo, ésta actúa en sentido opuesto a su fuerza unitaria correspondiente, mientras que si es positivo, ambas actúan en el mismo sentido.

**Ecuaciones de equilibrio.**

Como las reacciones redundantes ya han sido calculadas, los valores de las reacciones desconocidas faltantes pueden deducirse aplicando las ecuaciones de equilibrio.



$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 4 - 4 - 5 - \frac{33}{7} + \frac{479}{35} = 0$$

$$\therefore R_{AY} = \frac{141}{35} T = 4.0286T \uparrow$$

$$+\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow -M_A + (4)(1) + (4)\left(\frac{10}{3}\right) + 5(6) + \left(\frac{33}{7}\right)(2) - \left(\frac{479}{35}\right)(4) = 0$$

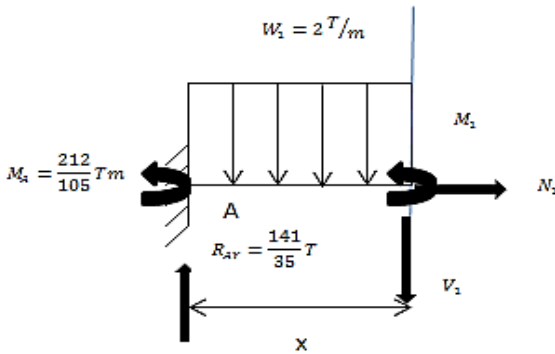
$$\therefore M_A = \frac{212}{105} T \cdot m = 2.019 T \cdot m \curvearrowleft$$

**Diagramas de fuerza cortante, momento flexionante, rotación y deflexión.**

Ya que se han calculado todas las reacciones en los soportes se puede dibujar el diagrama de fuerza cortante y de momento flector. Como es válido aplicar cualquiera de los métodos de deformaciones usados en las estructuras isostáticas, emplearemos el método de integración doble para poder trazar los diagramas de Giro y Flecha. En la viga real, nuevamente se ocupará una sólo coordenada  $x$ , la cual también es válida para  $0 \leq x \leq 6m$ .

Las Funciones de momento y de fuerza cortante de la estructura real son

$$0 \leq x \leq 2m$$



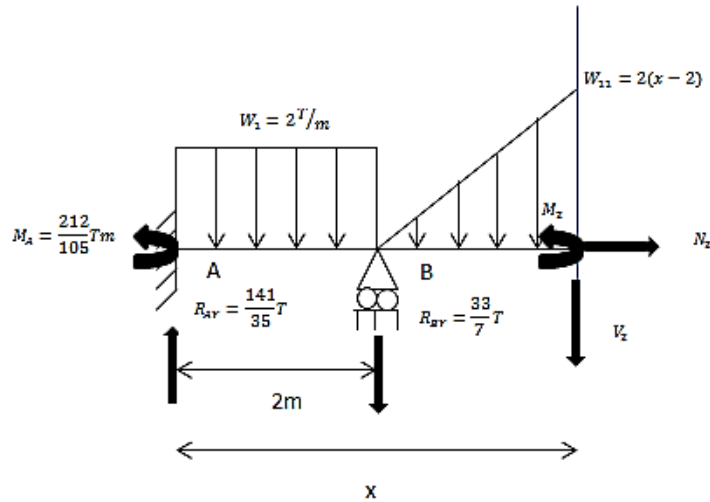
$$+\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -\frac{212}{105} + \frac{141}{35}x - x^2$$

$$x = 2m, M_1 = \frac{214}{105}T \cdot m$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx} = -2x + \frac{141}{35}$$

$$2m \leq x \leq 4m$$



$$+\sum M_{corte} = 0$$

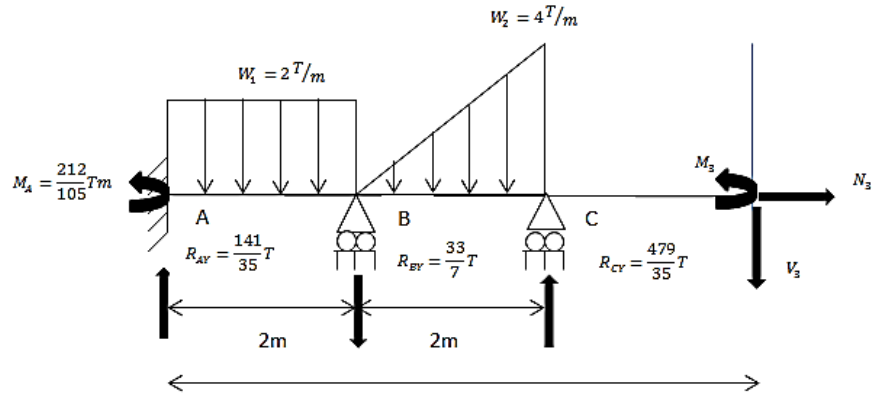
$$M_2 = -\frac{212}{105} + \frac{141}{35}x - \left(\frac{33}{7}\right)(x-2) - 4(x-1) - \left[\frac{(x-2)(2(x-2))}{2}\right] \left(\frac{1}{3}(x-2)\right)$$

$$M_2 = -\frac{1}{3}(x-2)^3 - \frac{164}{35}x + \frac{1198}{105} = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{304}{35}x + \frac{1478}{105}$$

$$x = 2m, M_2 = \frac{214}{105}T \cdot m; x = 4m, M_2 = -10T \cdot m$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx} = -x^2 + 4x - \frac{304}{35}$$

$$4m \leq x \leq 6m$$



$$\sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$M_3 = -\frac{212}{105} + \frac{141}{35}x - \left(\frac{33}{7}\right)(x-2) + \left(\frac{479}{35}\right)(x-4) - 4(x-1) - 4\left(x - \frac{10}{3}\right)$$

$$M_3 = 5x - 30$$

$$x = 4m, M_3 = -10T.m$$

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx} = 5$$

Aplicando la ecuación diferencial

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

e integrándola dos veces en cada tramo se obtiene

$$0 \leq x \leq 2m$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{212}{105} + \frac{141}{35}x - x^2 \Rightarrow EI \int \frac{d(dy)}{dx} = \int \left(-\frac{212}{105} + \frac{141}{35}x - x^2\right) dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{141}{70}x^2 - \frac{212}{105}x + C_1$$

$$\text{si } \frac{dy}{dx} = \theta, \text{ entonces } EI\theta_1 = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{141}{70}x^2 - \frac{212}{105}x + C_1 \text{ --- (1)}$$

$$EI \int dy = \int \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{141}{70}x^2 - \frac{212}{105}x + C_1\right) dx$$

$$EIy_1 = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{47}{70}x^3 - \frac{106}{105}x^2 + C_1x + C_2 \dots (2)$$

$$2m \leq x \leq 4m$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{304}{35}x + \frac{1478}{105}$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int \left( -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{304}{35}x + \frac{1478}{105} \right) dx$$

$$EI\theta_2 = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{152}{35}x^2 + \frac{1478}{105}x + C_3 \dots (3)$$

$$EI \int dy = \int \left( -\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{152}{35}x^2 + \frac{1478}{105}x + C_3 \right) dx$$

$$EIy_2 = -\frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{152}{105}x^3 + \frac{739}{105}x^2 + C_3x + C_4 \dots (4)$$

$$4m \leq x \leq 6m$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = 5x - 30 \Rightarrow EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int (5x - 30) dx$$

$$EI\theta_3 = \frac{5}{2}x^2 - 30x + C_5 \dots (5) \Rightarrow EI \int dy = \int \left( \frac{5}{2}x^2 - 30x + C_5 \right) dx$$

$$EIy_3 = \frac{5}{6}x^3 - 15x^2 + C_5x + C_6 \dots (6)$$

Las seis constantes de integración se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones enumerado anteriormente; para ello necesitamos plantear seis condiciones.

Como el empotre en A impide la rotación y la deflexión en ese punto, establecemos las siguientes dos condiciones de frontera:

$$1) y = 0 \text{ en } x = 0 \text{ y } 2) \theta = 0 \text{ en } x = 0.$$

Sustituyendo las condiciones 1) y 2) en (1) y (2) respectivamente, da

$$EI(0) = -\frac{1}{3} * 0^3 + \frac{141}{70} * 0^2 - \frac{212}{105} * 0 + C_1 \Rightarrow \therefore C_1 = 0$$

$$EI(0) = -\frac{1}{12} * 0^4 + \frac{47}{70} * 0^3 - \frac{106}{105} * 0^2 + (0)(0) + C_2 \Rightarrow \therefore C_2 = 0$$

Las otras cuatro constantes se pueden conocer a partir de establecer un mismo número de condiciones de continuidad, tal y como se efectúa a continuación.

Si 3)  $\theta_1 = \theta_2$  en  $x = 2m$ , entonces

$$-\frac{1}{3} * 2^3 + \frac{141}{70} * 2^2 - \frac{212}{105} * 2 = -\frac{1}{12} * 2^4 + \frac{2}{3} * 2^3 - \frac{152}{35} * 2^2 + \frac{1478}{105} * 2 + C_3$$

$$\frac{142}{105} = \frac{1552}{105} + C_3 \Rightarrow \therefore C_3 = -\frac{94}{7}$$

Dado que 4)  $y_1 = y_2$  en  $x = 2m$ , tenemos

$$-\frac{1}{12} * 2^4 + \frac{47}{70} * 2^3 - \frac{106}{105} * 2^2 = -\frac{1}{60} * 2^5 + \frac{1}{6} * 2^4 - \frac{152}{105} * 2^3 + \frac{739}{105} * 2^2 - \frac{94}{7} (2) + C_4$$

$$0 = -\frac{806}{105} + C_4 \Rightarrow \therefore C_4 = \frac{806}{105}$$

Al hacer 5)  $\theta_2 = \theta_3$  en  $x = 4m$  resulta

$$= -\frac{1}{12} * 4^4 + \frac{2}{3} * 4^3 - \frac{152}{35} * 4^2 + \frac{1478}{105} * 4 - \frac{94}{7} = \frac{5}{2} * 4^2 - 30(4) + C_5$$

$$-\frac{554}{105} = -80 + C_5 \Rightarrow \therefore C_5 = \frac{7846}{105}$$

Al plantear 6)  $y_2 = y_3$  en  $x = 4m$  obtenemos

$$-\frac{1}{60} * 4^5 + \frac{1}{6} * 4^4 - \frac{152}{105} * 4^3 + \frac{739}{105} * 4^2 - \frac{94}{7} (4) + \frac{856}{105} = \frac{5}{6} * 4^3 - 15 * 4^2 + \frac{7846}{105} (4) + C_6$$

$$0 = \frac{3928}{35} + C_6 \rightarrow C_6 = \frac{-3928}{35}$$

Además, se sabe que

$$E = 2.1 * 10^6 \frac{T}{m^2} \quad I = \frac{l^4}{12} = \frac{0.4^4}{12} = 0.0021333m^4$$

$$EI = \left( 2.1 * 10^6 \frac{T}{m^2} \right) (0.0021333m^4) = 4480T - m^2$$

Al sustituir los resultados obtenidos en las ecuaciones (1) hasta (6) tenemos que las ecuaciones generales de giro y flecha son

$$0 \leq x \leq 2m$$

$$\theta_1 = \left(\frac{1}{4480}\right) \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{141}{70}x^2 - \frac{212}{105}x\right)$$

$$y_1 = \left(\frac{1}{4480}\right) \left(-\frac{1}{12}x^4 + \frac{47}{70}x^3 - \frac{106}{105}x^2\right)$$

$$2m \leq x \leq 4m$$

$$\theta_2 = \left(\frac{1}{4480}\right) \left(-\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{152}{35}x^2 + \frac{1478}{105}x - \frac{94}{7}\right)$$

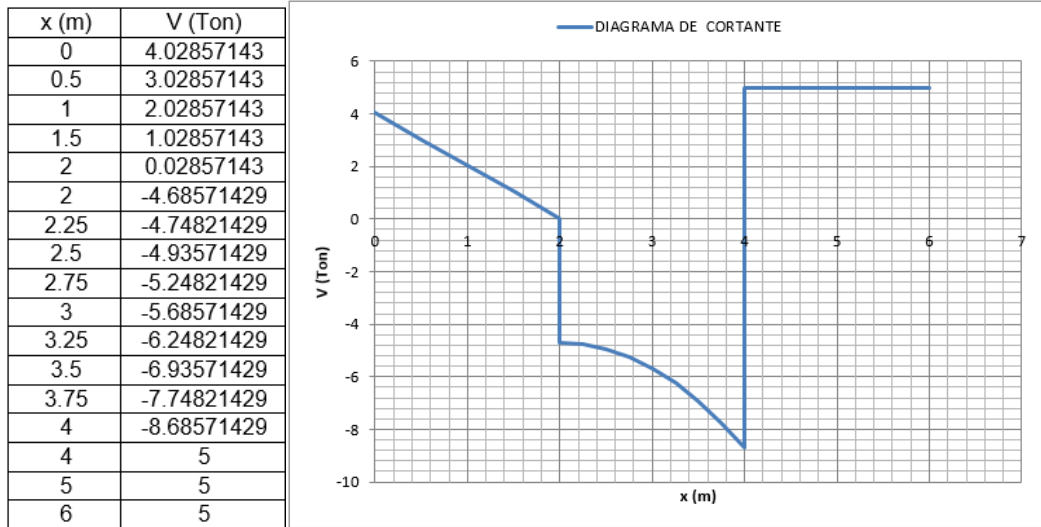
$$y_2 = \left(\frac{1}{4480}\right) \left(-\frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{152}{105}x^3 + \frac{739}{105}x^2 - \frac{94}{7}x + \frac{856}{105}\right)$$

$$4m \leq x \leq 6m$$

$$\theta_3 = \left(\frac{1}{4480}\right) \left(\frac{5}{2}x^2 - 30x + \frac{7846}{105}\right)$$

$$y_3 = \left(\frac{1}{4480}\right) \left(\frac{5}{6}x^3 - 15x^2 + \frac{7846}{105}x - \frac{3928}{35}\right)$$

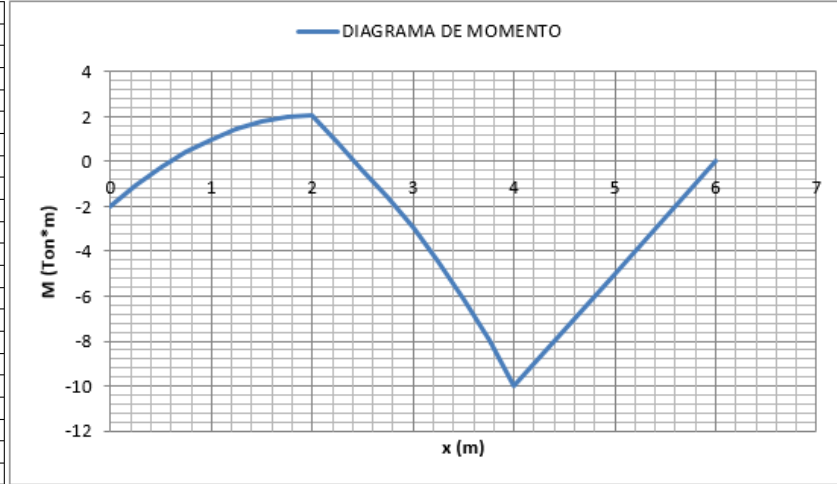
Finalmente se presentan los diagramas de la viga.



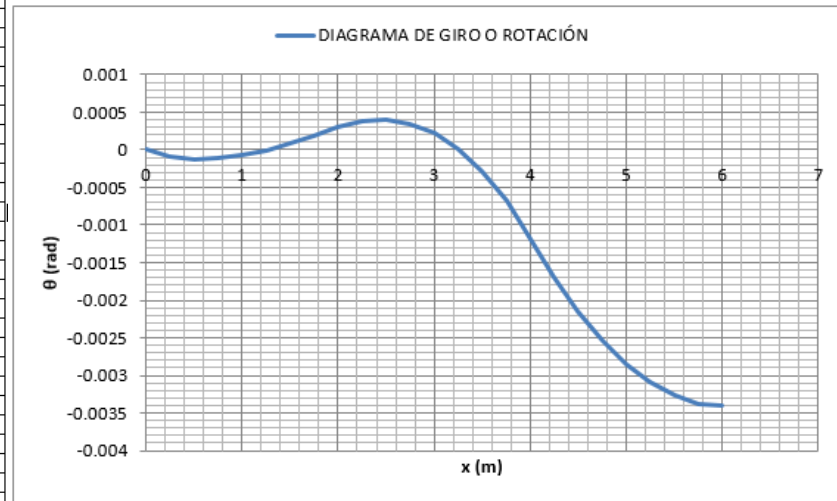


# PROBLEMARIO DE ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS EN 2D Y 3D

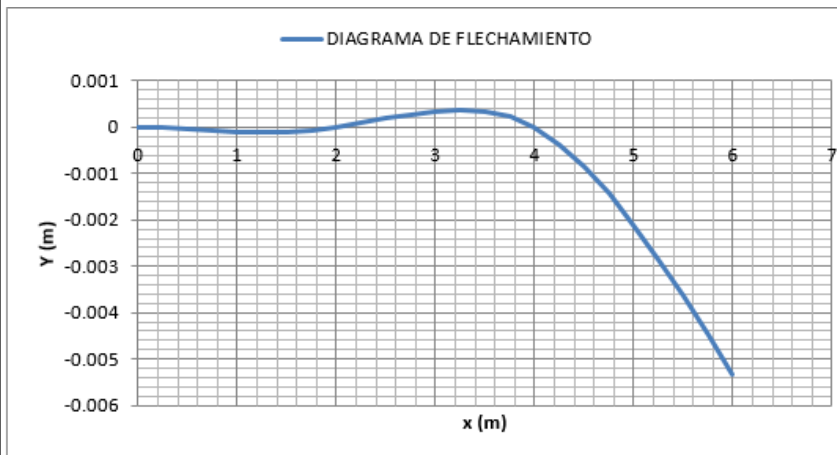
x (m)	M (Ton*m)
0	-2.01904762
0.25	-1.07440476
0.5	-0.2547619
0.75	0.43988095
1	1.00952381
1.25	1.45416667
1.5	1.77380952
1.75	1.96845238
2	2.03809524
2	2.03809524
2.25	0.86145833
2.5	-0.34642857
2.75	-1.61681548
3	-2.98095238
3.25	-4.47008929
3.5	-6.11547619
3.75	-7.9483631
4	-10
4	-10
5	-5
6	0



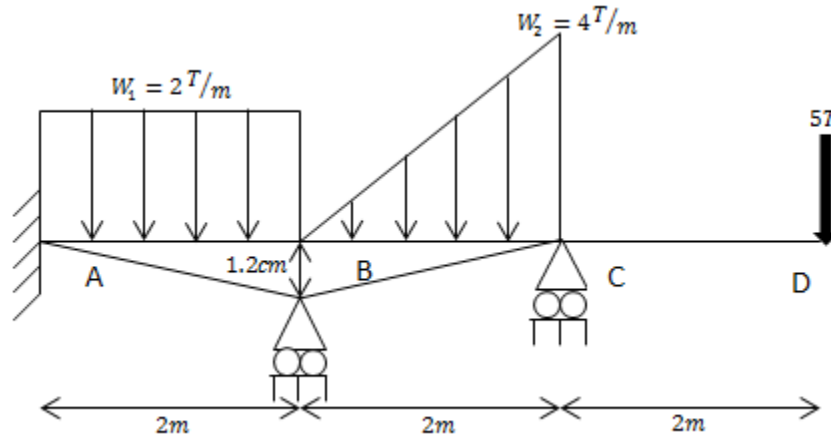
x (m)	$\theta$ (rad)
0	0
0.25	-8.5732E-05
0.5	-0.00012224
0.75	-0.00011649
1	-7.5468E-05
1.25	-6.145E-06
1.5	8.4503E-05
1.75	0.0001895
2	0.00030187
2	0.00030187
2.25	0.00038285
2.5	0.00039743
2.75	0.00034302
3	0.00021524
3.25	7.9989E-06
3.5	-0.00028656
3.75	-0.00067802
4	-0.00117772
4	-0.00117772
4.25	-0.00170088
4.5	-0.00215428
4.75	-0.00253793
5	-0.00285183
5.25	-0.00309597
5.5	-0.00327036
5.75	-0.00337499
6	-0.00340986



x (m)	Y (m)
0	0
0.25	-1.18147E-05
0.5	-3.87636E-05
0.75	-6.94119E-05
1	-9.40689E-05
1.25	-0.000104787
1.5	-9.53643E-05
1.75	-6.13403E-05
2	0
2	0
2.25	8.69569E-05
2.5	0.000185896
2.75	0.000279929
3	0.000351297
3.25	0.000380933
3.5	0.000348025
3.75	0.000229583
4	0
4	0
4.25	-0.000361278
4.5	-0.000844627
4.75	-0.001432607
5	-0.002107781
5.25	-0.002852708
5.5	-0.003649952
5.75	-0.004482073
6	-0.005331633



2.- Calcule las reacciones sobre la viga del ejercicio anterior, pero ahora suponga que el apoyo  $B$  sufre un asentamiento de  $1.2\text{cm}$ .



Se realizan los mismos pasos que en la viga analizada previamente, pero se toman en cuenta ciertas consideraciones que en seguida se explican.

En primer lugar, la deflexión total en el apoyo simple  $B$  ya no es nula, sino que ahora es igual al valor de su asentamiento, es decir,  $\delta_{VBVR} = 0.012\text{m}$ , y es positiva debido a que al haber propuesto las cargas unitarias hacia abajo (remítase al ejercicio anterior) la magnitud de un desplazamiento en tal dirección es de ese mismo signo.

Entonces, el planteamiento matricial del sistema de ecuaciones de compatibilidad geométrica para esta viga es

$$\begin{pmatrix} 0.012 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \dots (1)$$

Aunque el valor de  $EI$  sea constante, a diferencia del problema pasado en el que al simplificar el sistema dicho factor desapareció, ahora debe incluirse en los cálculos, pues el efecto de los asentamientos depende de la rigidez de las vigas; mientras más rígidas, mayores serán los momentos flexionantes debidos a los asentamientos.

Si retomamos los desplazamientos calculados y les aplicamos  $EI = 4480T \cdot \text{m}^2$  da

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{236}{3} \right] = \frac{1}{4480} \left[ \frac{236}{3} \right] = 0.01756\text{m}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{3908}{15} \right] = \frac{1}{4480} \left[ \frac{3908}{15} \right] = 0.05815\text{m}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{8}{3} + 0 \right] = \frac{1}{EI} \left[ \frac{8}{3} \right] = \frac{1}{4480} \left[ \frac{8}{3} \right] = 0.00060\text{m}$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{20}{3} + 0 + 0 \right] = \frac{1}{EI} \left[ \frac{20}{3} \right] = \frac{1}{4480} \left[ \frac{20}{3} \right] = 0.00149m$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{20}{3} \right] = \frac{1}{4480} \left[ \frac{20}{3} \right] = 0.00149m$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{64}{3} + 0 \right] = \frac{1}{EI} \left[ \frac{64}{3} \right] = \frac{1}{4480} \left[ \frac{64}{3} \right] = 0.00476m$$

Remplazando los valores anteriores en la expresión (1) se obtiene

$$\begin{pmatrix} 0.012 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.01756 \\ 0.05815 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.00060 & 0.00149 \\ 0.00149 & 0.00476 \end{pmatrix} \dots (2)$$

Despejando las incógnitas resulta

$$\begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00060 & 0.00149 \\ 0.00149 & 0.00476 \end{pmatrix}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} 0.012 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.01756 \\ 0.05815 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 94.6342 \\ -41.8393 \end{pmatrix}$$

La magnitud positiva de  $R_{BY}$  indica que ésta redundante tiene el mismo sentido que el propuesto para su correspondiente carga unitaria. Lo contrario ocurre con  $R_{CY}$  por haber resultado negativa.

$$\therefore R_{BY} = 94.6342T \downarrow$$

$$\therefore R_{CY} = 41.8393T \uparrow$$

Las reacciones restantes se obtienen aplicando las ecuaciones de equilibrio.

$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$R_{AY} - 4 - 4 - 5 - 94.6342 + 41.8393 = 0$$

$$R_{AY} = 65.7949T \uparrow$$

$$+\curvearrowright \sum MA = 0$$

$$-M_A + (4)(1) + (4) \left( \frac{10}{3} \right) + 5(6) + (94.6342)(2) - (41.8393)(4) = 0$$

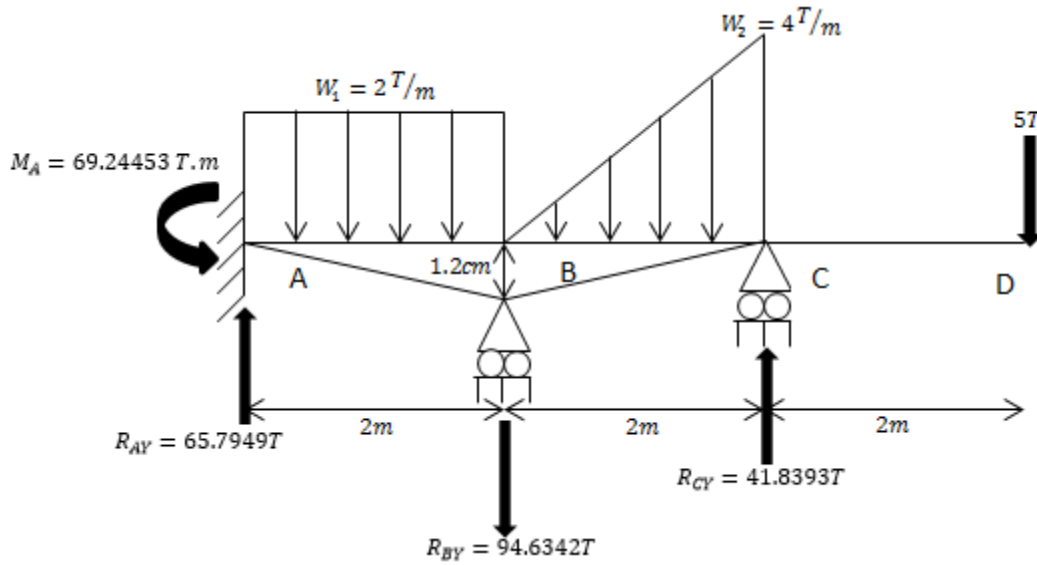
$$M_A = 69.24453 T.m \curvearrowleft$$

Para comprobar el equilibrio hacemos

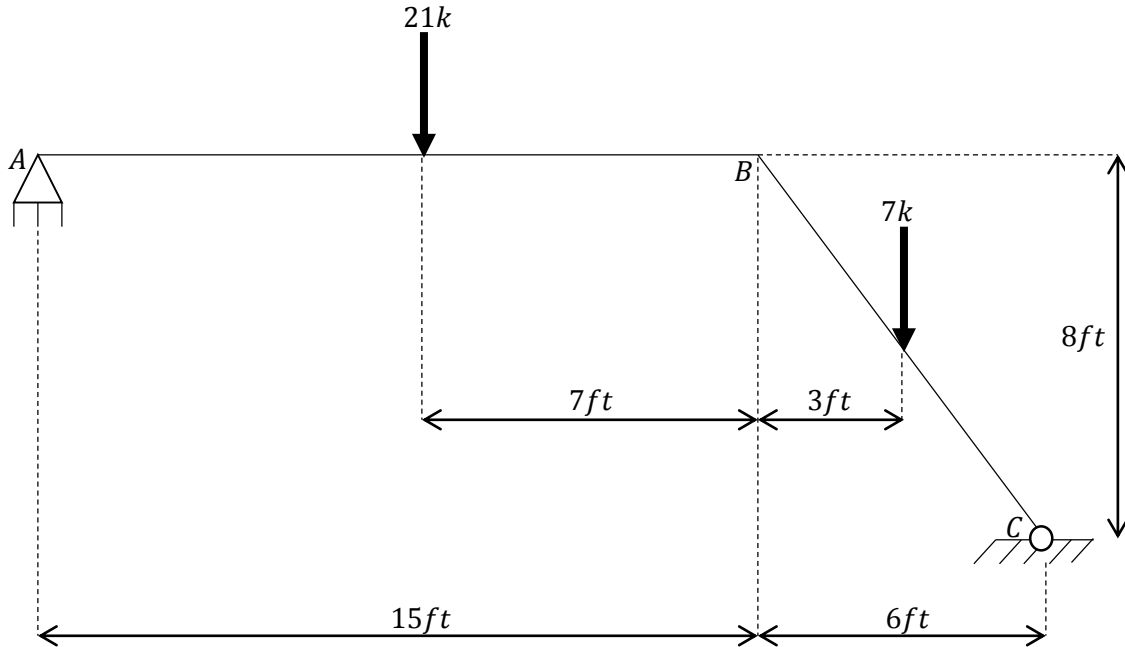
$$+\curvearrowright \sum MD = 0$$

$$-69.24453 + 65.7949(6) - 4(5) - 94.6342(4) - 4\left(2 + \frac{2}{3}\right) + 41.8393(2) = 0 \text{ ok}$$

Los resultados obtenidos se visualizan a continuación



6.- Calcular las reacciones correspondientes a las cargas indicadas por el método de las fuerzas.  $E$  e  $I$  son constantes.



### SOLUCIÓN.

#### Verificación del grado de indeterminación.

Para el marco mostrado, el número de nodos es  $j = 3(A; B; C)$  y no hay condiciones impuestas por la construcción, es decir  $c = 0$ .

La estructura está compuesta por  $m = 2(A - B; C - B)$  miembros. Tanto en el pasador (apoyo articulado)  $A$  como en el  $B$  hay dos incógnitas de reacción, una horizontal y una vertical, por lo que  $r = 4(R_{AX}; R_{AY}; R_{CX}; R_{CY})$ .

Como  $3m + r > 3j + c$ , ya que  $3(2) + 4 > 3(3) + 0 \Rightarrow 10 > 9$ , el marco es estáticamente indeterminado (hiperestático) de grado uno ( $10 - 9 = 1$ ).

#### Elección de la reacción redundante o fuerza correctiva y planteamiento de la estructura primaria.

Se optará porque  $R_{CX}$  sea la redundante, pero considérese que las reacciones restantes también son elegibles. En consecuencia, para idealizar la estructura primaria, el apoyo articulado (pasador) en  $C$  se reemplaza por un apoyo simple (rodillo u oscilador), puesto que éste último soporte no restringirá  $C$  en la dirección

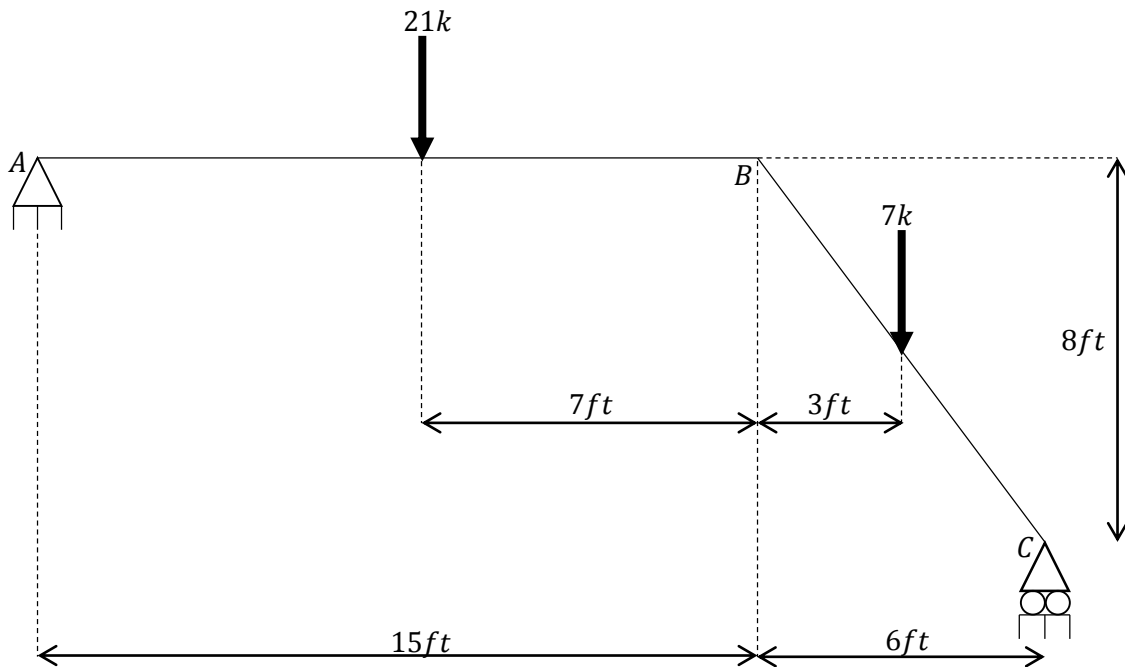
horizontal ya que se está eliminando a  $R_{CX}$ . Esta nueva estructura (MIF 1) es isostática, estable (de ningún modo debe ser inestable) y está sometida a las mismas cargas que la estáticamente indeterminada.

**Principio de superposición.**

El marco real u original ( $MR$ ) al ser estáticamente indeterminado es equivalente a la suma de una serie de marcos isostáticos conformada por la estructura primaria y otro número de estructuras igual a la cantidad de redundantes. Entonces, el marco de este ejemplo es igual a MIF 1 más otro marco que aquí hemos etiquetado como MIF II, es decir,  $MR = MIF\ 1 + MIF\ II$ .

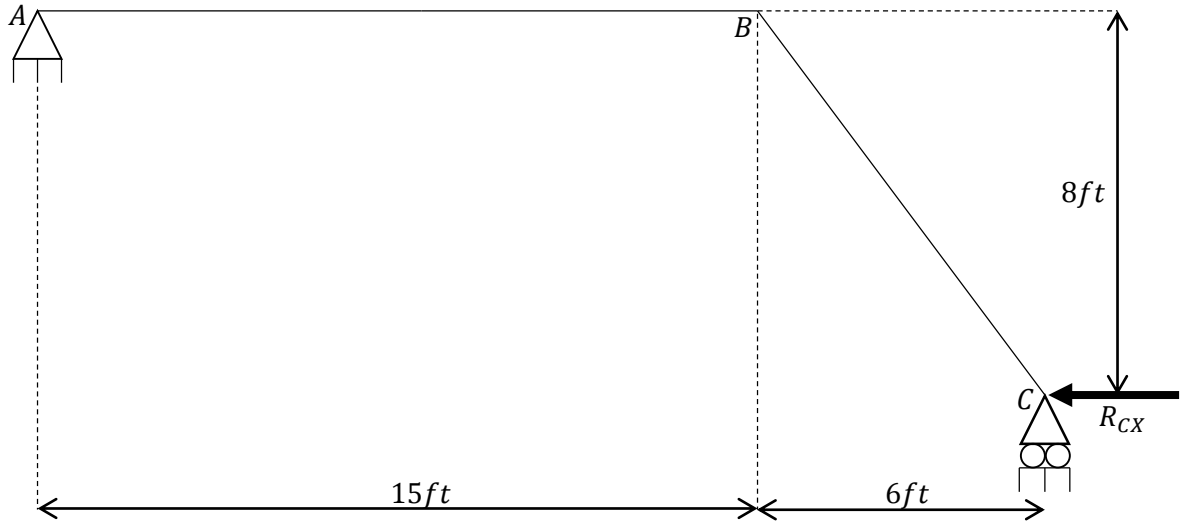
La estructura primaria y su subsecuente (MIF II) deben tener entre sí la misma geometría e idénticas condiciones de apoyo con la diferencia de que en la segunda, las cargas reales han sido removidas y únicamente soporta a la redundante elegida, o sea,  $R_{CX}$  (actúa hacia la izquierda, pero su sentido puede ser opuesto).

Estructura primaria  $\Rightarrow$  MIF 1(M)



Este marco, contrariamente al marco original, experimenta un desplazamiento horizontal en el punto C igual a una cierta cantidad de  $\Delta_{HC\ MIF1} = d_1$ .

Estructura liberada con fuerza redundante  $R_{CX}$  aplicada  $\Rightarrow$  MIF II



En este marco, el punto  $C$  se desplaza horizontalmente una cierta cantidad de  $\Delta_{HC_{MIFII}} = R_{CX}(f_{11})$ .

### Planteamiento de la ecuación de compatibilidad geométrica.

Para obtener una ecuación adicional que haga posible la solución del problema hacemos uso del principio de superposición formulado anteriormente y tomamos en cuenta la compatibilidad del desplazamiento horizontal en el soporte articulado  $C$ . Por lo tanto,

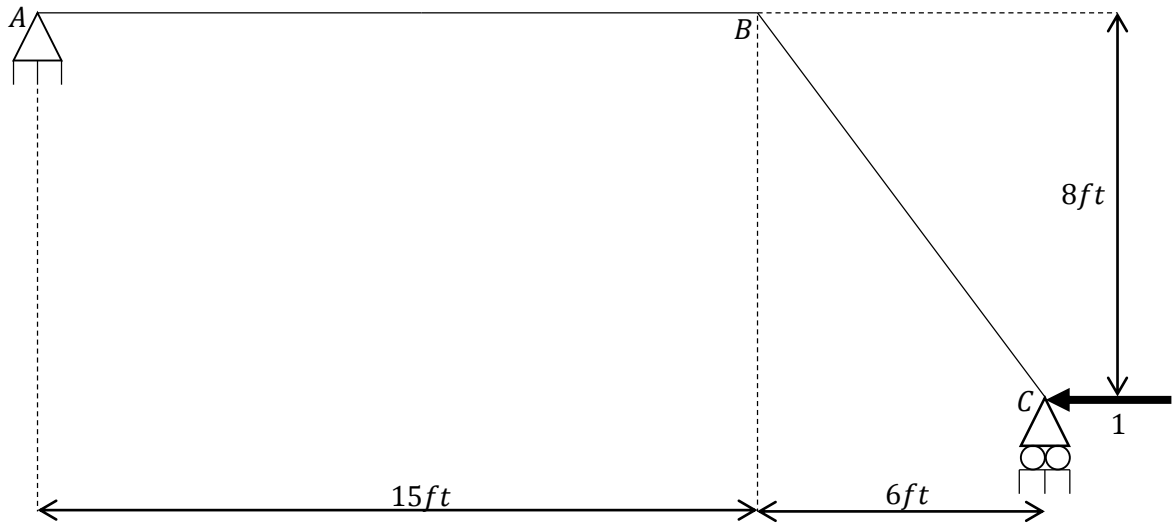
$$\Delta_{HC_{MIF1}} + \Delta_{HC_{MIFII}} = \Delta_{HC_{MR}} \quad \text{--- (1)}$$

Obsérvese que en el punto  $C$  del marco real ( $MR$ ) no se produce desplazamiento horizontal ya que la reacción en esa dirección del soporte articulado ahí situado lo impide, así que  $\Delta_{HC_{MR}}$  es nulo. Efectuando las sustituciones correspondientes, la ecuación (1) puede escribirse del siguiente modo

$$d_1 + f_{11}R_{CX} = 0 \quad \text{--- (2)}$$

Si a la estructura liberada le aplicamos una unidad de carga horizontal en el punto  $C$  correspondiente a la fuerza redundante, el coeficiente de flexibilidad puede obtenerse directamente al calcular el desplazamiento horizontal en ese mismo punto ya que este último es igual a una cierta cantidad de  $\Delta_{HC_{MIF2}} = f_{11}$ .

Estructura liberada con fuerza horizontal unitaria aplicada en  $C \Rightarrow$  MIF 2( $m$ )



**Cálculo de las incompatibilidades geométricas y de los coeficientes de flexibilidad.**

En resumen, en los marcos MIF 1 y MIF 2 es necesario determinar el valor del desplazamiento horizontal en  $C$  ya que  $R_{CX}$  (fuerza reactiva horizontal en el pasador del punto  $C$ ) fue suprimida en el marco hiperestático.

Los desplazamientos requeridos pueden obtenerse con cualquiera de los métodos explicados en el tema 1.6 para marcos. Aquí se usará el método del trabajo virtual, debido a que es lo más recomendable, y se considerarán únicamente las deformaciones debidas a la flexión. Para asociar a los momentos internos con las estructuras, le hemos denominado estructura  $M$  a la primaria y estructura  $m$  a la liberada con fuerza horizontal unitaria aplicada en  $C$ . Es importante recordar que las coordenadas  $x$  a emplear y las direcciones positivas de los momentos tienen que ser iguales entre las dos estructuras recién mencionadas.

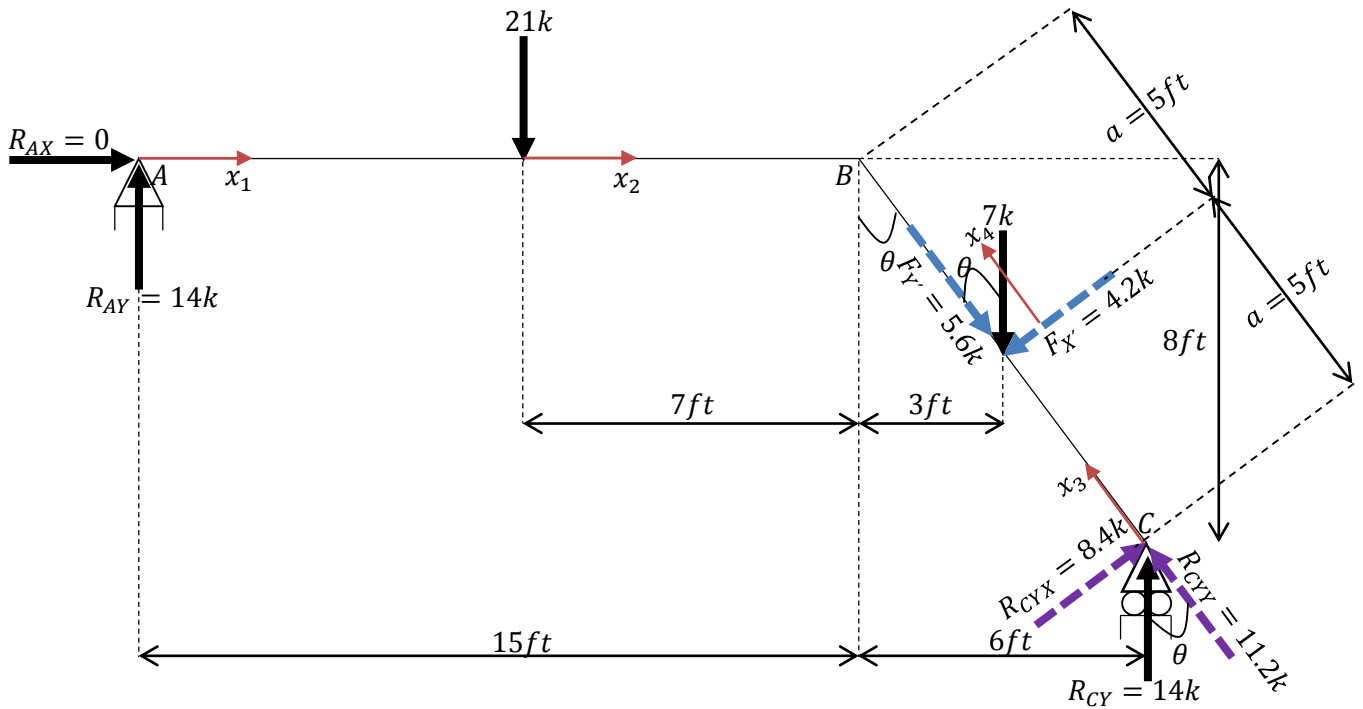
Obsérvese que para determinar  $d_1$ , es decir, el desplazamiento horizontal en el punto  $C$  del marco MIF 1, se requiere de la combinación adecuada de los momentos internos  $M$  y  $m$ , mientras que la expresión de  $f_{11}$ , o sea, la del desplazamiento horizontal en el punto  $C$  del marco MIF 2, sólo involucra a los momentos  $m$ .

$$d_1 = \Delta_{HC_{MIF1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx$$

$$f_{11} = \Delta_{HC_{MIF2}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{mm}{EI} dx$$



- Análisis de la estructura isostática MIF 1.



Se calculan las reacciones en los apoyos.

$$\curvearrowleft \sum MA = 0 \Rightarrow -21(8) - 7(18) + R_{CY}(21) = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = 14k \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 21 + 14 - 7 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 14k \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} = 0$$

La longitud del miembro inclinado es

$$L_{C-B} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10'$$

La fuerza de 7k se encuentra aplicada sobre el miembro anterior a una distancia de

$$a = \frac{1}{2}L_{C-B} = \frac{1}{2}(10') = 5'$$

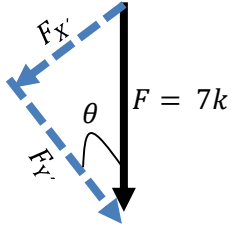
Por otra parte, se infiere que

$$\sin \theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \cos \theta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Las componentes rectangulares para los ejes que coinciden con las líneas de acción

de la fuerza normal y de la fuerza cortante del miembro  $C - B$  son

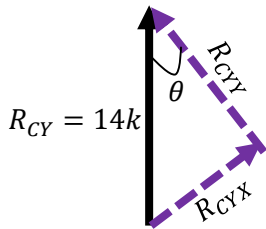
- Para  $F = 7k$



$$F_{Y'} = F \cos \theta = 7k \left( \frac{4}{5} \right) = 5.6k$$

$$F_{X'} = F \sin \theta = 7k \left( \frac{3}{5} \right) = 4.2k$$

- Para  $R_{CY} = 14k$

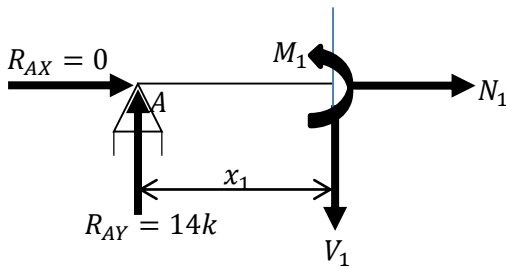


$$R_{CYY} = R_{CY} \cos \theta = 14k \left( \frac{4}{5} \right) = 10.2k$$

$$R_{CYX} = R_{CY} \sin \theta = 14k \left( \frac{3}{5} \right) = 8.4k$$

Se formulan los momentos internos  $M$ .

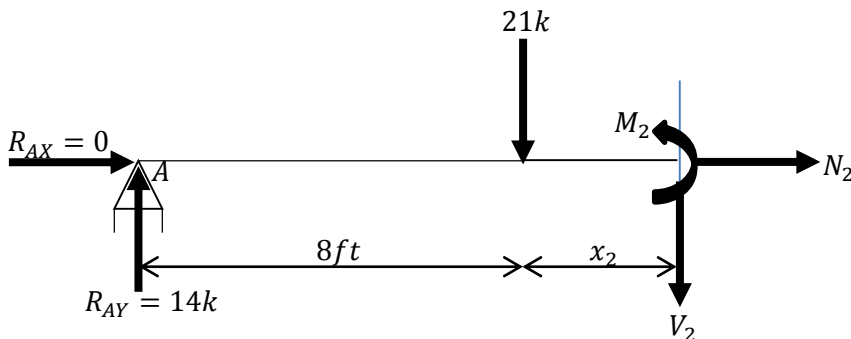
Miembro  $A - B$ .



$$0 \leq x_1 \leq 8'$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-14(x_1) + M_1 = 0 \Rightarrow M_1 = 14x_1$$



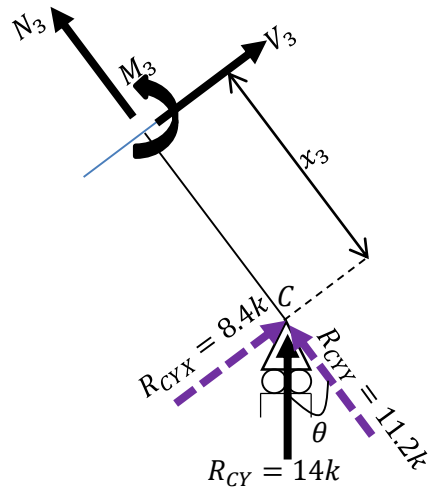
$$0 \leq x_2 \leq 7'$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 + 21(x_2) - 14(8 + x_2) = 0$$

$$M_2 = -7x_2 + 112$$

Miembro C – B.

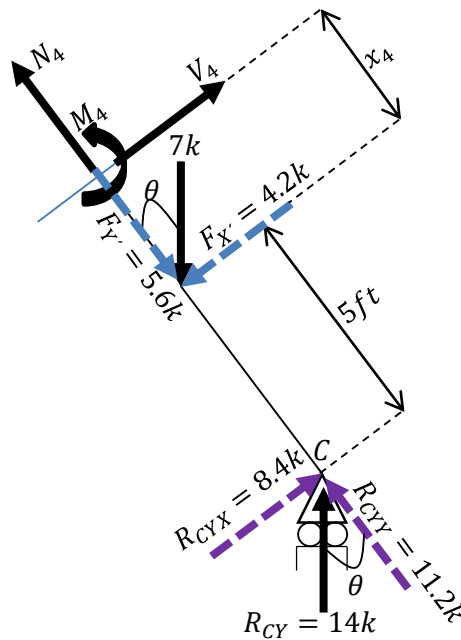


$$0 \leq x_3 \leq 5'$$

$$+\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_3 - 8.4(x_3) = 0$$

$$M_3 = -8.4x_3$$



$$0 \leq x_4 \leq 5'$$

$$+\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_4 + 4.2(x_4) - 8.4(x_4 + 5) = 0$$

$$M_4 = -4.2x_4 - 42$$

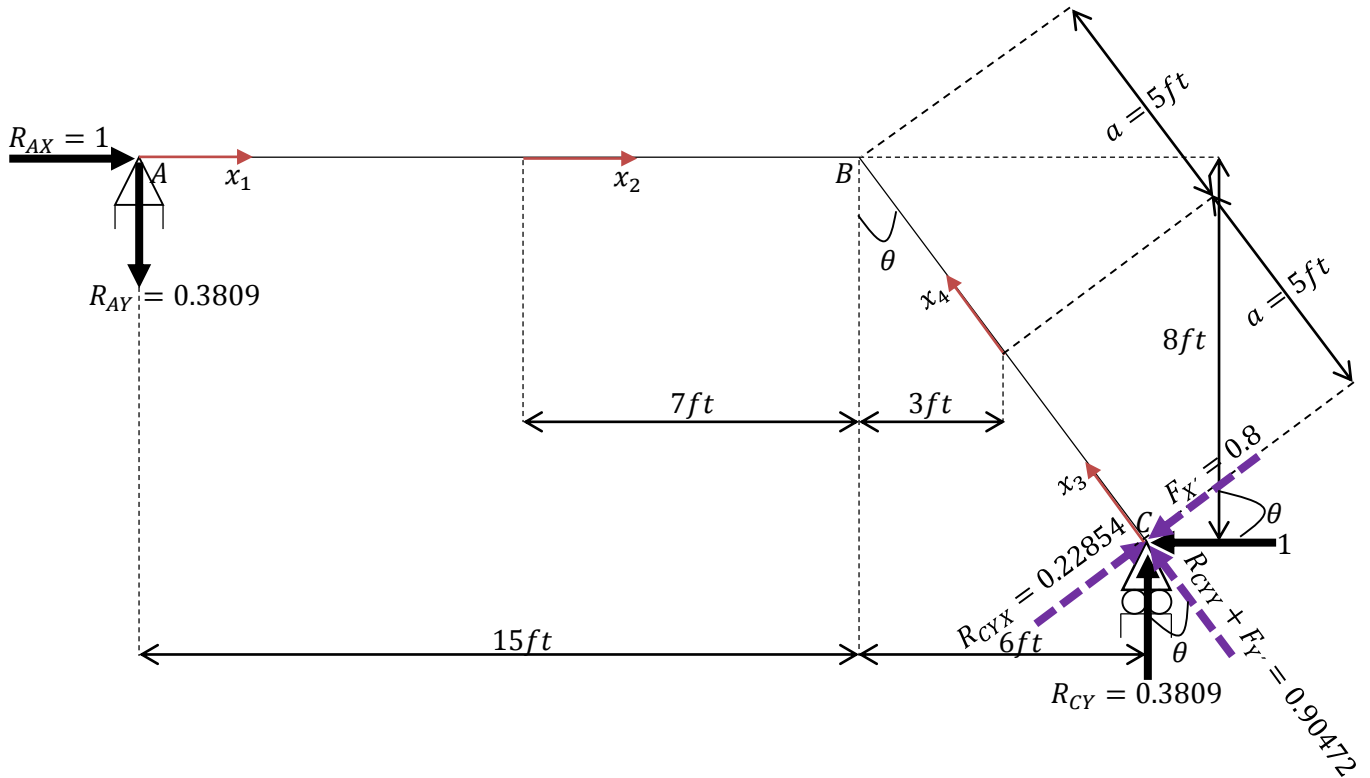
- Análisis de la estructura isostática MIF 2

Al aplicar las ecuaciones de equilibrio resulta

$$\sum MA = 0 \Rightarrow R_{CY}(21) - 1(8) = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = 0.3809 \uparrow$$

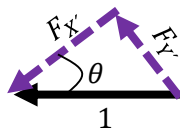
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + 0.3809 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 0.3809 \downarrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} - 1 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 1 \rightarrow$$



Se calculan las siguientes componentes rectangulares

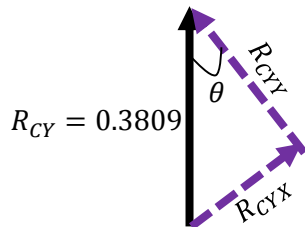
- Para  $F = 1$



$$F_{X'} = F \cos \theta = 1 \left( \frac{4}{5} \right) = 0.8$$

$$F_{Y'} = F \sin \theta = 1 \left( \frac{3}{5} \right) = 0.6$$

- Para  $R_{CY} = 0.3809$

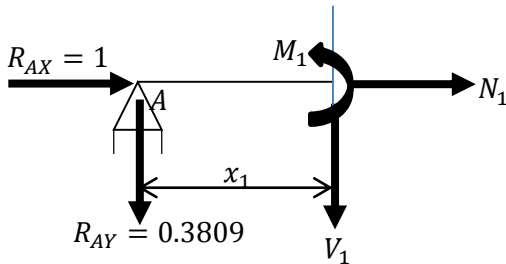


$$R_{CY Y'} = R_{CY} \cos \theta = 0.3809 \left( \frac{4}{5} \right) = 0.30472$$

$$R_{CY X'} = R_{CY} \sin \theta = 0.3809 \left( \frac{3}{5} \right) = 0.22854$$

Se determinan los momentos internos  $m$ .

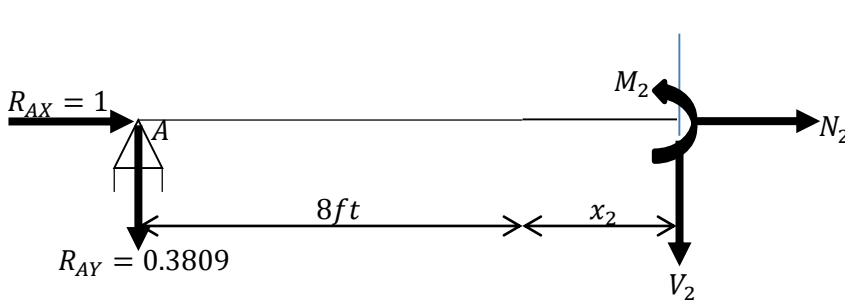
Miembro A – B.



$$0 \leq x_1 \leq 8'$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 + 0.3809(x_1) = 0 \Rightarrow M_1 = -0.3809x_1$$



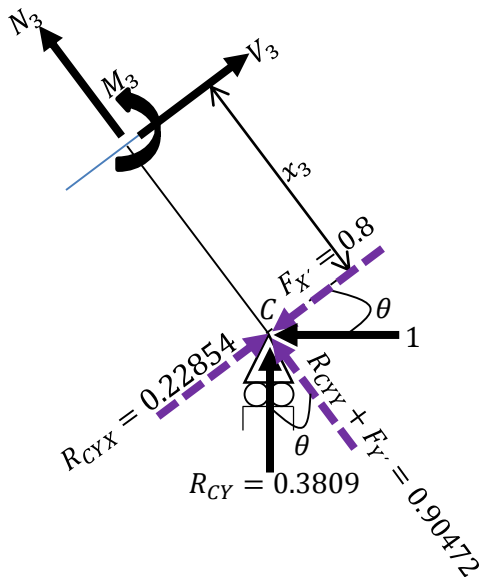
$$0 \leq x_2 \leq 7'$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 + 0.3809(8 + x_2) = 0$$

$$M_2 = -3.0472 - 0.3809x_2 = 0$$

Miembro C – B.

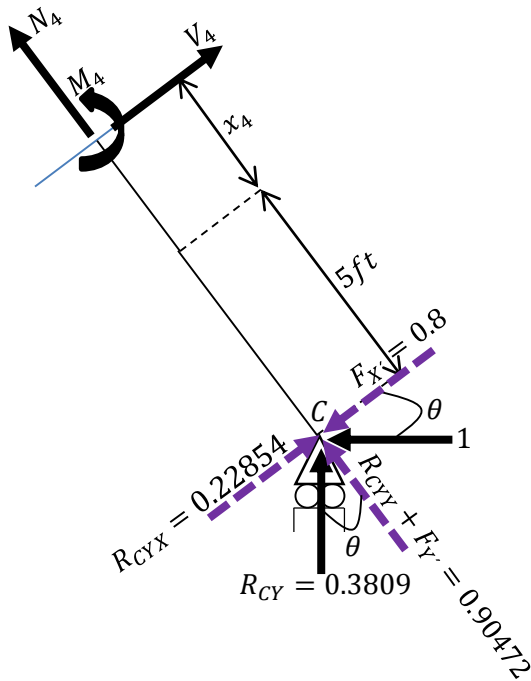


$$0 \leq x_3 \leq 5'$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_3 - 0.22854(x_3) + 0.8(x_3) = 0$$

$$M_3 = 0.5715x_3$$



$$0 \leq x_4 \leq 5'$$

$$+\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_4 - 0.2285(x_4 + 5) + 0.8(x_4 + 5) = 0$$

$$M_4 = 2.8575 + 0.5715x_4$$

Se presenta el cálculo de la incompatibilidad geométrica  $d_1$ .

$$d_1 = \int_0^8 \frac{(14x_1)(-0.3809x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^7 \frac{(-7x_2 + 112)(-3.0472 - 0.3809x_2)}{EI} dx_2$$

$$+ \int_0^5 \frac{(-8.4x_3)(0.5715x_3)}{EI} dx_3 + \int_0^5 \frac{(-4.2x_4 - 42)(2.8575 + 0.5715x_4)}{EI} dx_4 = -\frac{4867.02}{EI}$$

Se muestra el cálculo del coeficiente de flexibilidad  $f_{11}$ .

$$f_{11} = \int_0^8 \frac{(-0.3809x_1)^2}{EI} dx_1 + \int_0^7 \frac{(-3.0472 - 0.3809x_2)^2}{EI} dx_2 + \int_0^5 \frac{(0.5715x_3)^2}{EI} dx_3$$

$$+ \int_0^5 \frac{(2.8575 + 0.5715x_4)^2}{EI} dx_4 = \frac{272.091}{EI}$$

### Cálculo de la reacción redundante o fuerza correctiva.

Al sustituir los resultados en la ecuación (2) tenemos

$$-\frac{4867.02}{EI} + \frac{272.091}{EI} R_{CX} = 0 \text{ --- (3)}$$

Si se despeja la incógnita resulta

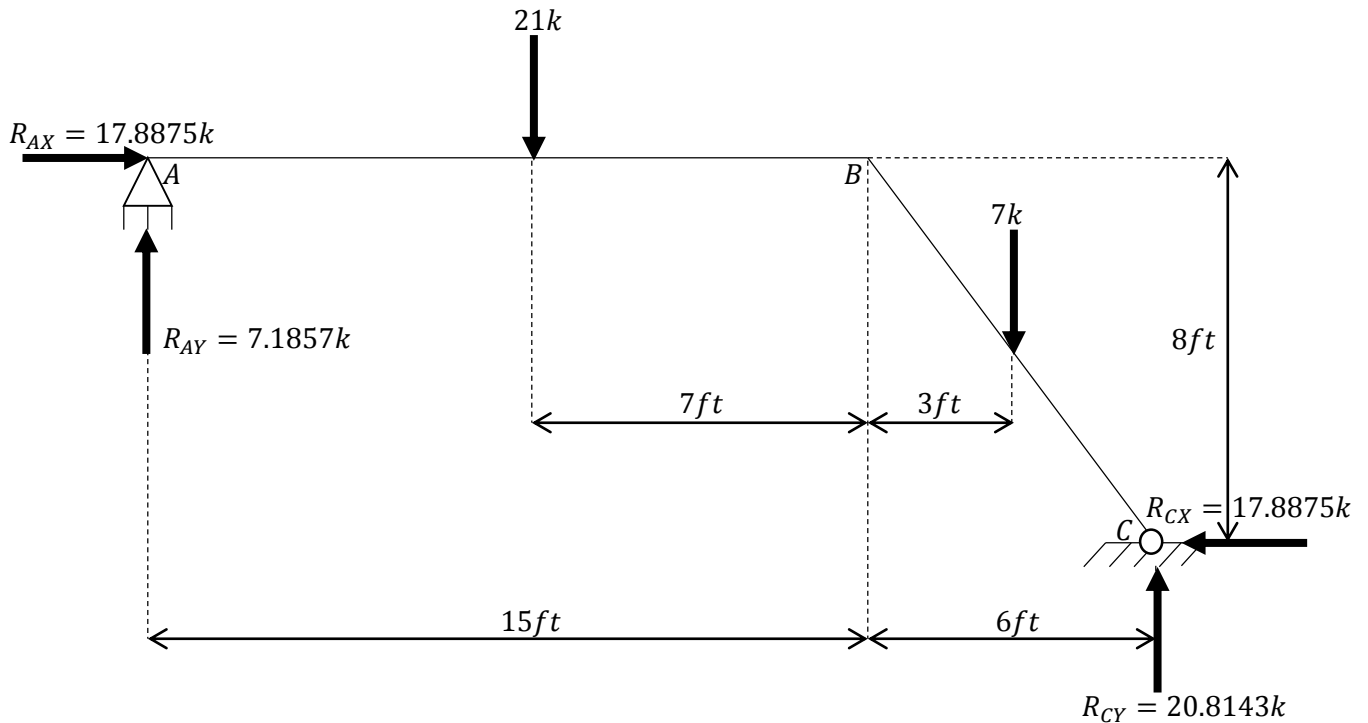
$$R_{CX} = \frac{4867.02}{272.091} = 17.8875$$

Como se obtuvo una magnitud positiva para  $R_{CX}$ , se concluye que ésta fuerza tiene el mismo sentido que el propuesto para la carga unitaria. Por lo tanto,

$$R_{CX} = 17.8875k \leftarrow$$

### Ecuaciones de equilibrio.

Las fuerzas reactivas desconocidas restantes pueden determinarse si aplicamos las ecuaciones de equilibrio a un diagrama de cuerpo libre en el que coloquemos la fuerza redundante que ha sido calculada.



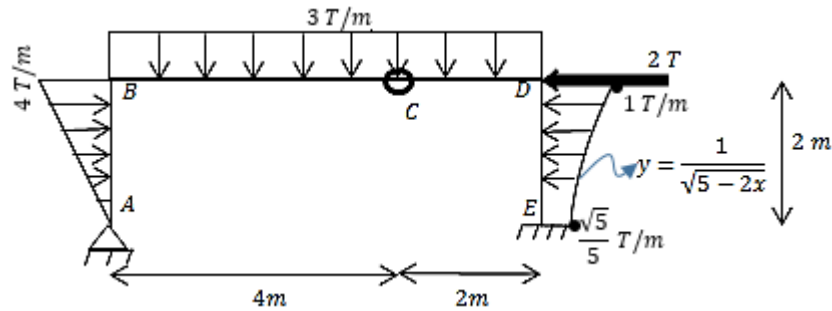
Finalmente,

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -17.8875 + R_{AX} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 17.8875k \rightarrow$$

$$\curvearrow + \sum MA = 0 \Rightarrow -21(8) - 7(18) - 17.8875(8) + R_{CY}(21) = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = 20.8143k \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} + 20.8143 - 21 - 7 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 7.1857k \uparrow$$

7.- Calcular las reacciones en los soportes del marco mostrado en la siguiente figura con el método de la fuerza. Sobre los miembros  $A - B$ ,  $B - D$  y  $E - D$  se extienden de forma respectiva una carga cuya intensidad varía linealmente desde 0 en el punto  $A$  hasta  $4T/m$  en  $B$ , una carga distribuida uniforme de  $3T/m$  y una carga cuya intensidad, definida por la función  $y = 1/\sqrt{5 - 2x}$ , varía desde  $\frac{\sqrt{5}}{5} T/m$  en  $E$  hasta  $1 T/m$  en  $D$ . En la trabe hay una articulación en  $C$ . Considerar un  $EI$  constante. Determinar además las funciones de momento, de fuerza cortante y de fuerza normal.



### SOLUCIÓN.

#### Verificación del grado de indeterminación.

Para este marco, hay  $m = 3(A - B; B - D; E - D)$  miembros,  $j = 4(A; B; D; E)$  nodos,  $c = 1$  (la articulación en  $C$ ) ecuación de condición y  $r = 5$  ( $R_{AX}; R_{AY}; R_{EX}; R_{EY}; M_E$ ) incógnitas de reacción.

Si  $r + 3m = 5 + 3(3) = 14$  y  $3j + c = 3(4) + 1 = 13$ , entonces  $r + 3m > 3n + c$ , por lo que el marco es estáticamente indeterminado de grado  $14 - 13 = 1$ .

#### Elección de la reacción redundante y planteamiento de la estructura primaria.

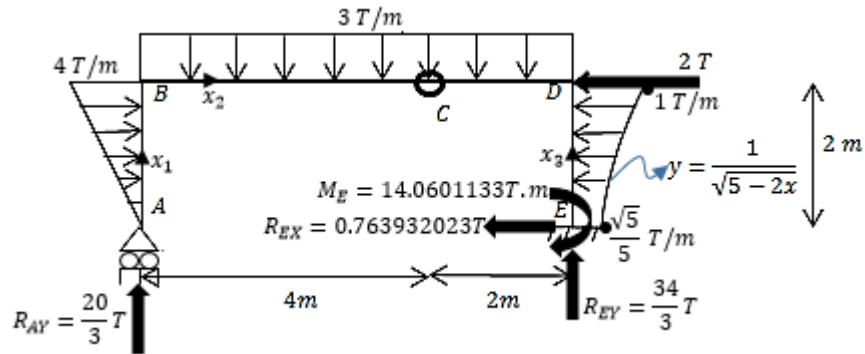
Seleccionaremos como acción redundante a  $R_{AX}$ . En consecuencia, para idealizar a la estructura primaria, el apoyo articulado (pasador) en  $A$  se reemplaza por un apoyo simple (oscilador o rodillo), puesto que éste último no restringirá  $A$  horizontalmente, es decir, la capacidad del marco para soportar una fuerza horizontal en ese punto se elimina.

#### Principio de superposición.

El marco real ( $MR$ ) es igual a la estructura primaria más la estructura liberada bajo la acción de la redundante  $R_{AX}$ , o sea,  $MR = MIF\ I + MIF\ II$ .

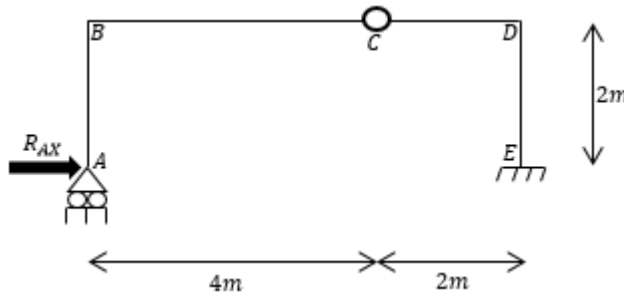


Estructura primaria  $\Rightarrow$  MIF 1(M)



En este marco, A se desplaza horizontalmente una cantidad de  $\Delta_{HAMIF1} = d_1$ .

Estructura liberada con fuerza redundante  $R_{AX}$  aplicada  $\Rightarrow$  MIF II



En este marco, A se desplaza horizontalmente una cantidad de  $\Delta_{HAMIFII} = R_{AX}(f_{11})$ .

**Planteamiento de la ecuación de compatibilidad geométrica.**

Por superposición, la ecuación de compatibilidad para el desplazamiento horizontal en A es

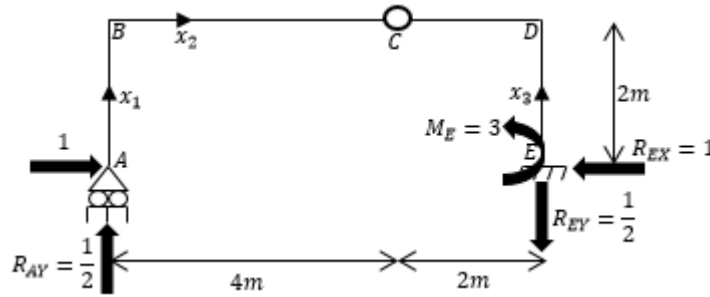
$$\Delta_{HAMIF1} + \Delta_{HAMIFII} = \Delta_{HAMR} \quad \text{--- (1)}$$

En el marco real no hay desplazamiento horizontal en A ya que está restringido por el pasador, así que  $\Delta_{HAMR}$  es nulo. Realizando las sustituciones correspondientes la ecuación puede expresarse en términos de la incógnita  $R_{AX}$  como

$$d_1 + f_{11}R_{AX} = 0 \quad \text{--- (2)}$$

Si a la estructura liberada le aplicamos una unidad de fuerza horizontal en A correspondiente a la fuerza redundante, el coeficiente de flexibilidad puede obtenerse directamente al calcular el desplazamiento horizontal en ese punto, ya que este último es igual a una cierta cantidad de  $\Delta_{HAMIF2} = f_{11}$ .

Estructura liberada con fuerza horizontal unitaria aplicada en A  $\Rightarrow$  MIF 2(m)



### Cálculo de las incompatibilidades geométricas y de los coeficientes de flexibilidad.

En resumen, en los marcos MIF 1 y MIF 2 es necesario determinar el valor del desplazamiento horizontal en A ya que  $R_{AX}$  (fuerza reactiva horizontal en el apoyo articulado del punto A) fue suprimido en el marco hiperestático. A continuación se proporciona el orden con el que se calcularán los desplazamientos por medio del método del trabajo virtual en el que se considerarán únicamente las deformaciones debidas a la flexión.

$$d_1 = \Delta_{HA_{MIF1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx ; f_{11} = \Delta_{HA_{MIF2}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{mm}{EI} dx$$

- Análisis de la estructura isostática MIF1.

La expresión matemática para determinar la fuerza resultante de la carga distribuida cuya intensidad se define por la función radical es

$$A_C = \int dA = \int_{L_1}^{L_2} y dx = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{5-2x}} dx$$

Resolvemos la integral de forma indefinida.

$$\int \frac{1}{\sqrt{5-2x}} dx = \int (5-2x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Sean  $n = -\frac{1}{2}$  y  $u = 5 - 2x$ . Entonces  $du = -2dx$ , y por tanto  $dx = -\frac{1}{2}du$ . Así, la regla de sustitución da

$$\begin{aligned} \int (5-2x)^{-\frac{1}{2}} dx &= \int u^n \cdot -\frac{1}{2} du = -\frac{1}{2} \int u^n du = -\frac{1}{2} \left( \frac{u^{n+1}}{n+1} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{(5-2x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right) \\ &= -(5-2x)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{5-2x}} dx = \left[ -(5-2x)^{\frac{1}{2}} \right]_0^2 = \left[ -(5-2(2))^{\frac{1}{2}} \right] - \left[ -(5-2(0))^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= -1 + 2.23606777 = 1.236067977$$

Por lo tanto,

$$Ac = 1.236067977 T$$

El punto de aplicación de tal fuerza es

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} xy dx}{\int_{L_1}^{L_2} y dx} = \frac{\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{5-2x}} dx}{\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{5-2x}} dx}$$

Como el denominador ya ha sido resuelto, sólo atendemos al numerador.

$$\int \frac{x}{\sqrt{5-2x}} dx$$

Sea

$$u = x \quad dv = \frac{1}{\sqrt{5-2x}} dx$$

Entonces

$$du = dx \quad \int dv = v = \int \frac{1}{\sqrt{5-2x}} dx = -(5-2x)^{\frac{1}{2}}$$

Al integrar por partes tendremos

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{5-2x}} dx = (x) \left[ -(5-2x)^{\frac{1}{2}} \right] + \int (5-2x)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\int (5-2x)^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{2} \int (5-2x)^{\frac{1}{2}} (-2dx) = -\frac{1}{2} \left( \frac{(5-2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) = -\frac{(5-2x)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{5-2x}} dx = -x(5-2x)^{\frac{1}{2}} - \frac{(5-2x)^{\frac{3}{2}}}{3} = -x(5-2x)^{\frac{1}{2}} - \frac{(5-2x)(5-2x)^{\frac{1}{2}}}{3}$$

$$= (5-2x)^{\frac{1}{2}} \left( -x - \frac{5-2x}{3} \right)$$

$$-x - \frac{5 - 2x}{3} = \frac{-3x - 5 + 2x}{3} = \frac{-x - 5}{3} = -\frac{1}{3}(x + 5)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{5 - 2x}} dx = -\frac{(\sqrt{5 - 2x})(x + 5)}{3}$$

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{5 - 2x}} dx = \left[ -\frac{(\sqrt{5 - 2x})(x + 5)}{3} \right]_0^2 = \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{7}{3} \approx 1.393446629$$

Por lo tanto,

$$\bar{x} = \frac{1.393446629}{1.236067977} = 1.127322004m$$

Las reacciones en los soportes son

$$\curvearrowright \sum MC_{izq} = 0 \Rightarrow R_{AY}(4) - \left[ \frac{(4)(2)}{2} \right] \left( \frac{1}{3}(2) \right) - (3)(4) \left( \frac{1}{2}(4) \right) = 0 \Rightarrow R_{AY} = \frac{20}{3} T \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \left[ \frac{(4)(2)}{2} \right] - 2 - 1.236067977 - R_{EX} = 0 \Rightarrow R_{EX} = 0.763932023 T \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{20}{3} - (3)(6) + R_{EY} = 0 \Rightarrow R_{EY} = \frac{34}{3} T \uparrow$$

$$\curvearrowright \sum MC_{der} = 0 \Rightarrow (3)(2) \left( \frac{1}{2}(2) \right) + 1.236067977(2 - 1.127322004)$$

$$+ (0.763932023)(2) \left( -\frac{34}{3}(2) \right) + M_E = 0 \Rightarrow M_E = 14.0601133 T \cdot m \curvearrowright$$

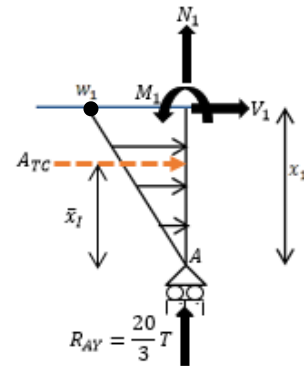
Se deducen los momentos internos  $M$ .

Miembro A - B.

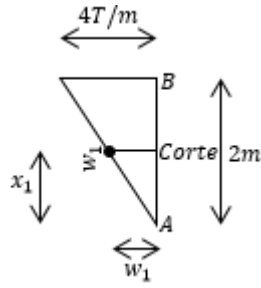
$$0 \leq x_1 \leq 2m$$

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$-M_1 - \underbrace{\left[ \frac{(x_1)(2x_1)}{2} \right]}_{A_{TC}} \left( \underbrace{x_1 - \frac{2}{3}x_1}_{\bar{x}_I} \right) = 0 \Rightarrow M_1 = -\frac{x_1^3}{3}$$



La intensidad  $w_1$  en función de  $x_1$  se obtiene de



$$\frac{4}{2} = w_1/x_1 \Rightarrow w_1 = 2x_1$$

Miembro B – D.

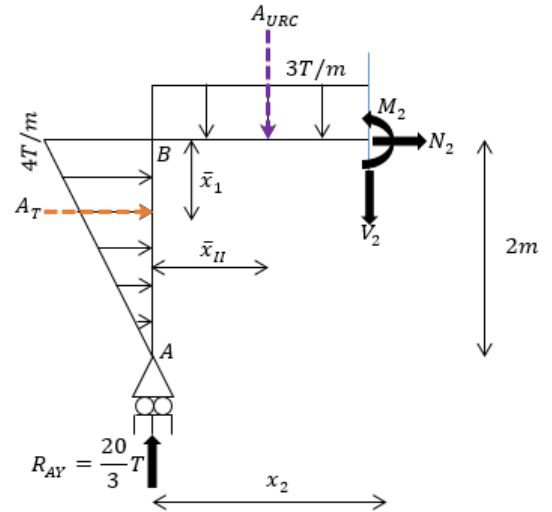
$$0 \leq x_2 \leq 6m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_2 + \frac{20}{3}(x_2) - \underbrace{\left[\frac{(4)(2)}{2}\right]}_{A_T} \underbrace{\left(\frac{1}{3}(2)\right)}_{\bar{x}_1} - \underbrace{(3)(x_2)}_{A_{URC}} \underbrace{\left(\frac{1}{2}x_2\right)}_{\bar{x}_{II}} = 0$$

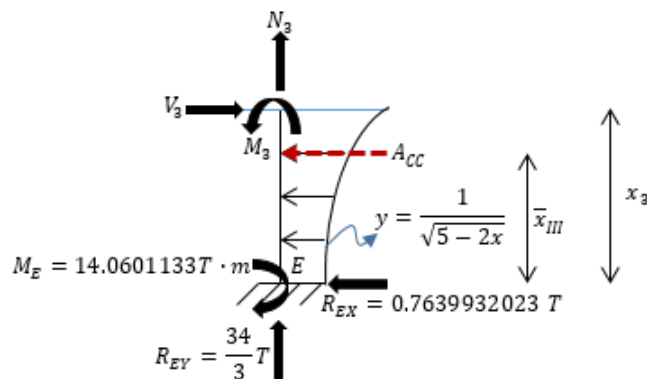
$$M_2 = -\frac{8}{3} + \frac{20}{3}x_2 - \frac{3}{2}x_2^2$$

en  $x_2 = 4, M_2 = 0 \rightarrow$  el momento en la articulación es cero.



Miembro E – D.

$$0 \leq x_3 \leq 2$$



La carga concentrada equivalente de la carga distribuida seccionada es

$$A_{CC} = \int_0^{x_3} \frac{1}{\sqrt{5-2x}} dx = \left[ -(5-2x)^{\frac{1}{2}} \right]_0^{x_3} = \sqrt{5} - \sqrt{5-2x_3}$$

y su punto de aplicación es

$$\bar{x}_{III} = \frac{\int_0^{x_3} \frac{x}{\sqrt{5-2x}} dx}{\int_0^{x_3} \frac{1}{\sqrt{5-2x}} dx}$$

$$\int_0^{x_3} \frac{x}{\sqrt{5-2x}} dx = \left[ -\frac{(\sqrt{5-2x})(x+5)}{3} \right]_0^{x_3} = \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{(\sqrt{5-2x_3})(x_3+5)}{3}$$

$$\therefore \bar{x}_{III} = \frac{\frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{(\sqrt{5-2x_3})(x_3+5)}{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{5-2x_3}}$$

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_3 + 14.06011330 + 0.763932023(x_3)$$

$$+(\sqrt{5} - \sqrt{5-2x_3}) \left( x_3 - \frac{\frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{(\sqrt{5-2x_3})(x_3+5)}{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{5-2x_3}} \right) = 0$$

$$M_3 = \frac{1}{3}(5-2x_3)^{\frac{3}{2}} + 3x_3 + 10.33333333$$

- Análisis de la estructura isostática MIF2.

Al aplicar las ecuaciones de equilibrio resulta

$$+ \sum MC_{izq} = 0 \Rightarrow -(1)(2) + R_{AY}(4) = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = \frac{1}{2} \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 1 - R_{EX} = 0 \Rightarrow \therefore R_{EX} = 1 \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - R_{EY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{EY} = \frac{1}{2} \downarrow$$

$$\sum MC_{der} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(2) + 1(2) - M_E = 0 \Rightarrow \therefore M_E = 3 \curvearrowright$$

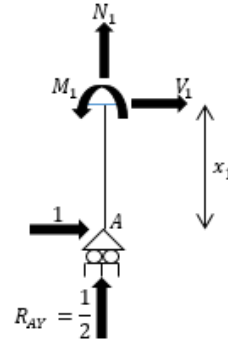
Se formulan los momentos internos  $m$ .

Miembro A - B.

$$0 \leq x_1 \leq 2m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_1 - 1(x_1) = 0 \Rightarrow M_1 = -x_1$$



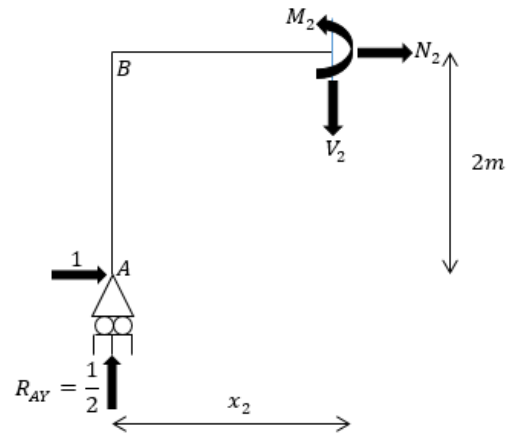
Miembro B – D.

$$0 \leq x_2 \leq 6m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_2 + \frac{1}{2}(x_2) - 1(2) = 0 \Rightarrow M_2 = \frac{1}{2}x_2 - 2$$

en  $x_2 = 4, M_2 = 0 \rightarrow$  el momento en la articulación es nulo.

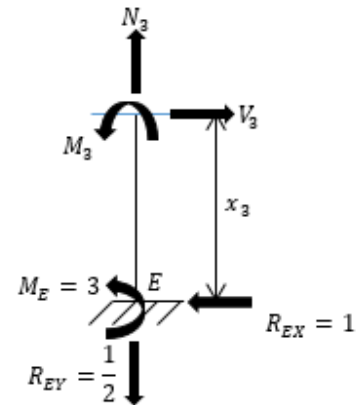


Miembro E – D.

$$0 \leq x_3 \leq 2m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_3 + 1(x_3) - 3 \Rightarrow M_3 = x_3 - 3$$



Se presenta el cálculo de la incompatibilidad geométrica  $d_1$ .

$$d_1 = \left(\frac{1}{EI}\right) \left[ \int_0^2 \left(-\frac{x_1^3}{3}\right) (-x_1) dx_1 + \int_0^6 \left(-\frac{8}{3} + \frac{20}{3}x_2 - \frac{3}{2}x_2^2\right) \left(\frac{1}{2}x_2 - 2\right) dx_2 \right]$$

$$+ \int_0^2 \left( \frac{1}{3} (5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} + 3x_3 + 10.33333333 \right) (x_3 - 3) dx_3 \Big]$$

Se resuelven las integrales por separado.

$$\int_0^2 \left( -\frac{x_1^3}{3} \right) (-x_1) dx_1 = \int_0^2 \left( \frac{x_1^4}{3} \right) dx_1 = \left[ +\frac{x_1^5}{15} \right]_0^2 = \frac{32}{15}$$

$$\begin{aligned} \int_0^6 \left( -\frac{8}{3} + \frac{20}{3} x_2 - \frac{3}{2} x_2^2 \right) \left( \frac{1}{2} x_2 - 2 \right) dx_2 &= \int_0^6 \left( -\frac{3x_2^3}{4} + \frac{19x_2^2}{3} - \frac{44x_2}{3} + \frac{16}{3} \right) dx_2 \\ &= \left[ -\frac{3x_2^4}{16} + \frac{19x_2^3}{9} - \frac{22x_2^2}{3} + \frac{16x_2}{3} \right]_0^6 = -19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \left( \frac{1}{3} (5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} + 3x_3 + 10.33333333 \right) (x_3 - 3) dx_3 \\ &= \int_0^2 \left[ -(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} - \frac{2x_3^2(5 - 2x_3)^{\frac{1}{2}}}{3} + \frac{5x_3(5 - 2x_3)^{\frac{1}{2}}}{3} + 3x_3^2 + 1.333333x_3 - 31 \right] dx_3 \end{aligned}$$

Una vez más se resuelven las integrales por separado.

$$\begin{aligned} \int_0^2 -(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} dx_3 &= \frac{1}{2} \int_0^2 -(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} (2) dx_3 = \frac{1}{2} \left[ \frac{(5 - 2x_3)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_0^2 = \frac{1}{5} \left[ (5 - 2x_3)^{\frac{5}{2}} \right]_0^2 \\ &= -10.98033989 \end{aligned}$$

$$\int_0^2 -\frac{2x_3^2(5 - 2x_3)^{\frac{1}{2}}}{3} dx_3 = -\frac{2}{3} \int_0^2 x_3^2 (5 - 2x_3)^{\frac{1}{2}} dx_3$$

Sea

$$u = x_3^2 \quad dv = (5 - 2x_3)^{\frac{1}{2}} dx_3$$

Entonces

$$du = 2x_3 dx_3 \quad \int dv = v = \frac{-(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

Al integrar por partes tendremos

$$\int u dv = uv - \int v du$$



$$\begin{aligned}
 -\frac{2}{3} \int_0^2 x_3^2 (5 - 2x_3)^{\frac{1}{2}} dx_3 &= -\frac{2}{3} \left[ x_3^2 \left( \frac{-(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) - \int \frac{-2x_3 (5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3} dx_3 \right]_0^2 \\
 &= -\frac{2}{3} \left[ \frac{-x_3^2 (5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2}{3} \int x_3 (5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} dx_3 \right]_0^2 \\
 &\quad \int x_3 (5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} dx_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{Sea} & u = x_3 & dv = (5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} dx_3 \\
 \text{Entonces} & du = dx_3 & \int dv = v = -\frac{1}{5} (5 - 2x_3)^{\frac{5}{2}}
 \end{array}$$

Al integrar por partes tendremos  $\int u dv = uv - \int v du$ , es decir,

$$\begin{aligned}
 \int x_3 (5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} dx_3 &= -\frac{1}{5} x_3 (5 - 2x_3)^{\frac{5}{2}} - \int -\frac{1}{5} (5 - 2x_3)^{\frac{5}{2}} dx_3 \\
 &= -\frac{1}{5} x_3 (5 - 2x_3)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{35} (5 - 2x_3)^{\frac{7}{2}} = (5 - 2x_3)^{\frac{5}{2}} \left( -\frac{1}{5} x_3 - \frac{1}{35} (5 - 2x_3) \right) \\
 &= (5 - 2x_3)^{\frac{5}{2}} \left( -\frac{1}{7} x_3 - \frac{1}{7} \right) = -\frac{(x_3 + 1)(5 - 2x_3)^{\frac{5}{2}}}{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 -\frac{2x_3^2 (5 - 2x_3)^{\frac{1}{2}}}{3} dx_3 &= -\frac{2}{3} \left[ \frac{-x_3^2 (5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2}{3} \left[ \frac{-(x_3 + 1)(5 - 2x_3)^{\frac{5}{2}}}{7} \right] \right]_0^2 \\
 &= \left[ \frac{2x_3^2 (5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}}}{9} + \frac{4(x_3 + 1)(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}}(5 - 2x_3)}{63} \right]_0^2 \\
 &= \left[ (5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{2}{9} x_3^2 + \frac{4}{63} (x_3 + 1)(5 - 2x_3) \right) \right]_0^2 = \left[ (5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{2}{9} x_3^2 - \frac{8}{63} x_3^2 + \frac{4}{21} (x_3) + \frac{20}{63} \right) \right]_0^2 \\
 &= \left[ (5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{2}{21} x_3^2 + \frac{4}{21} x_3 + \frac{20}{63} \right) \right]_0^2 = \left[ (5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{6}{63} x_3^2 + \frac{12}{63} x_3 + \frac{20}{63} \right) \right]_0^2 \\
 &= \left[ \frac{2(3x_3^2 + 6x_3 + 10)(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}}}{63} \right]_0^2 = -2.46995
 \end{aligned}$$

$$\int_0^2 \left[ \frac{5x_3(5-2x_3)^{\frac{1}{2}}}{3} \right] dx_3 = \frac{5}{3} \int_0^2 x_3(5-2x_3)^{\frac{1}{2}} dx_3$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } u &= x_3 & dv &= (5-2x_3)^{\frac{1}{2}} dx_3 \\ \text{Entonces } du &= dx_3 & \int dv &= v = -\frac{(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3} \end{aligned}$$

Al integrar por partes tendremos  $\int u dv = uv - \int v du$ , es decir,

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} \int_0^2 x_3(5-2x_3)^{\frac{1}{2}} dx_3 &= \frac{5}{3} \left[ -\frac{x_3(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{3} \int (5-2x_3)^{\frac{3}{2}} dx_3 \right]_0^2 \\ &= \frac{5}{3} \left[ -\frac{x_3(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{3} \left( -\frac{(5-2x_3)^{\frac{5}{2}}}{5} \right) \right]_0^2 = \left[ -\frac{5x_3(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{9} - \frac{(5-2x_3)(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{9} \right]_0^2 \\ &= \left[ (5-2x_3)^{\frac{3}{2}} \left( -\frac{5}{9}x_3 - \frac{1}{9}(5-2x_3) \right) \right]_0^2 = \left[ (5-2x_3)^{\frac{3}{2}} \left( -\frac{1}{9}(3x_3+5) \right) \right]_0^2 \\ &= \left[ -\frac{(3x_3+5)(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{9} \right]_0^2 = 4.989077715 \end{aligned}$$

$$\int_0^2 (3x_3^2 + 1.33333x_3 - 31) dx_3 = [x_3^3 + 0.666665x_3^2 - 31x_3]_0^2 = -51.33334$$

$$\therefore d_1 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{32}{15} - 19 - 10.98033989 - 2.46995 + 4.989077715 - 51.33334 \right] = -76.66121884$$

Se muestra el cálculo del coeficiente de flexibilidad  $f_{11}$

$$f_{11} = \left[ \int_0^2 (-x_1)^2 dx_1 + \int_0^6 \left( \frac{1}{2}x_2 - 2 \right)^2 dx_2 + \int_0^2 (x_3 - 3)^2 dx_3 \right] \left( \frac{1}{EI} \right)$$

Resolviendo las integrales por separado tenemos

$$\int_0^2 (-x_1)^2 dx_1 = \left[ \frac{x_1^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$\int_0^6 \left(\frac{1}{2}x_2 - 2\right)^2 dx_2 = \int_0^6 \left(\frac{x_2^2}{4} - 2x_2 + 4\right) dx_2 = \left[\frac{x_2^3}{12} - x_2^2 + 4x_2\right]_0^6 = 6$$

$$\int_0^2 (x_3 - 3)^2 dx_3 = \int_0^2 (x_3^2 - 6x_3 + 9) dx_3 = \left[\frac{x_3^3}{3} - 3x_3^2 + 9x_3\right]_0^2 = \frac{26}{3}$$

$$\therefore f_{11} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{8}{3} + 6 + \frac{26}{3} \right] = \frac{52}{3}$$

**Cálculo de la reacción redundante.**

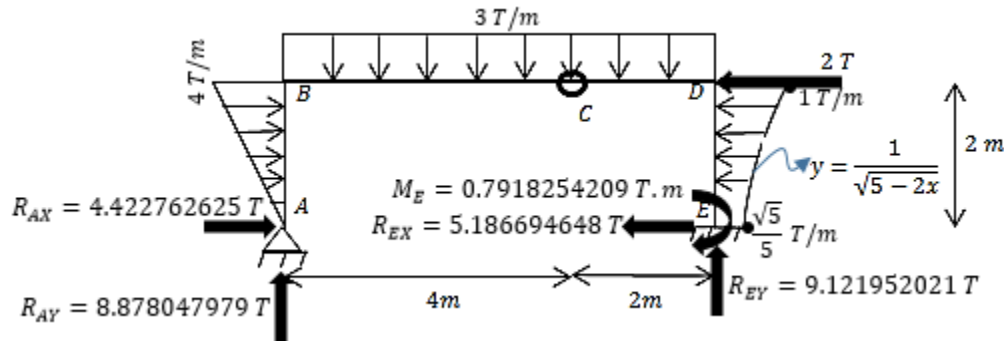
Sustituyendo los resultados en la ecuación (2) y resolviendo se obtiene

$$-76.66121884 + \frac{52}{3} R_{AX} = 0 \text{ --- (3)} \Rightarrow R_{AX} = \frac{76.66121884}{\frac{52}{3}} = 4.422762625$$

El signo positivo indica que  $R_{AX}$  actúa en el mismo sentido al que se muestra en la figura de MIF II.

$$\therefore R_{AX} = 4.422762625 T \rightarrow$$

**Ecuaciones de equilibrio.**



Con el valor obtenido, podemos calcular las demás fuerzas reactivas en los soportes aplicando las ecuaciones de equilibrio.

$$\curvearrowright \sum MC_{izq} = 0 \Rightarrow R_{AY}(4) - 4.422762625(2) - \left[\frac{(4)(2)}{2}\right] \left(\frac{1}{3}(2)\right) - 3(4) \left(\frac{1}{2}(4)\right) = 0$$

$$R_{AY} = \frac{35.51219192}{4} \Rightarrow \therefore R_{AY} = 8.878047979 T \uparrow$$

$$\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \left[\frac{(4)(2)}{2}\right] - 2 - 1.236067977 + 4.422762625 - R_{EX} = 0$$

$$\therefore R_{EX} = 5.186694648 T \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow 8.878047979 - (3)(6) + R_{EY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{EY} = 9.121952021 \text{ T} \uparrow$$

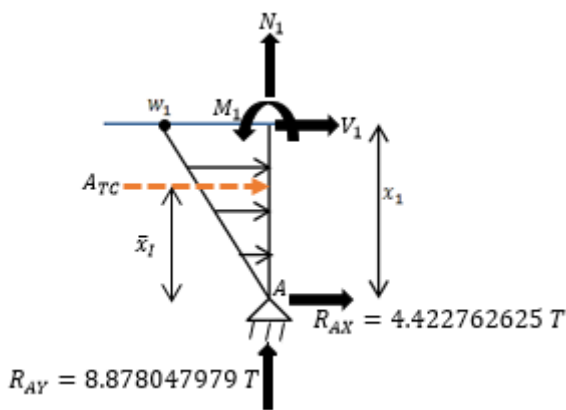
$$+\circlearrowleft \sum MC \text{ der} = 0 \Rightarrow (3)(2) \left( \frac{1}{2}(2) \right) + 1.236067977(2 - 1.127322004)$$

$$+(5.186694648)(2) - 9.121952021(2) + M_E = 0 \Rightarrow \therefore M_E = 0.7918254209 \text{ T} \cdot \text{m} \circlearrowleft$$

**Funciones de momento, cortante y normal de la estructura real**

Miembro A - B.

$$0 \leq x_1 \leq 2\text{m}$$



$$+\circlearrowleft \sum M_{corte} = 0$$

$$-M_1 - \left[ \frac{(x_1)(2x_1)}{2} \right] \left( \frac{1}{3} x_1 \right) - 4.422762625(x_1) = 0$$

$$M_1 = -\frac{x_1^3}{3} - 4.422762625x_1$$

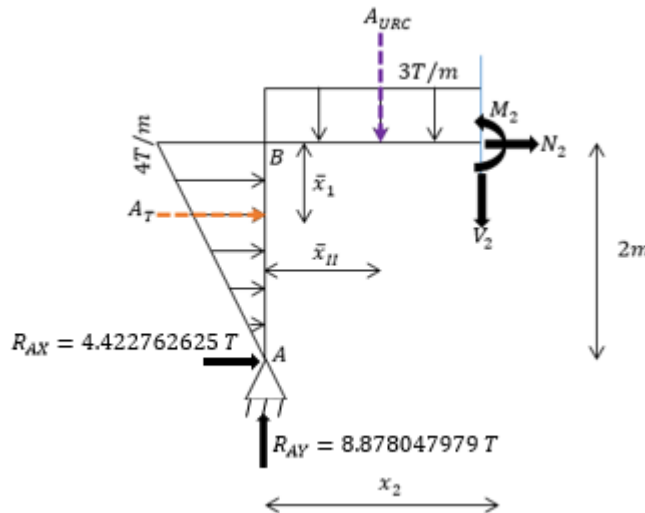
$$\text{en } x_1 = 2\text{m}, M_1 = -11.51219\text{T} \cdot \text{m}$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = -x_1^2 - 4.422762625$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 = -8.878047979$$

Miembro B - D.

$$0 \leq x_2 \leq 6\text{m}$$



$$+\circlearrowleft \sum M_{corte} = 0$$

$$-M_2 + 8.878047979(x_2) - 4.422762625(2) - \left[ \frac{(4)(2)}{2} \right] \left( \frac{1}{3}(2) \right) - 3(x_2) \left( \frac{1}{2}x_2 \right) = 0$$

$$M_2 = -\frac{3}{2}x_2^2 + 8.878047979x_2 - 11.51219192$$

$$x_2 = 0, M_2 = -11.51219T.m$$

en  $x_2 = 4m, M_2 = 0 \rightarrow$  El momento es nulo en la articulación.

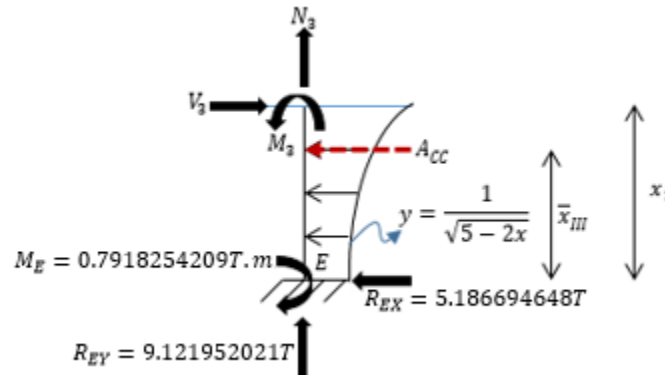
$$\text{en } x_2 = 6m, M_2 = -12.2439T.m$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx_2} = -3x_2 + 8.878047979$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \left[ \frac{(4)(2)}{2} \right] + 4.422762625 + N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = -8.422762625$$

Miembro E - D.

$$0 \leq x_3 \leq 2m$$



$$+\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow M_3 = 5.186694648x_3 + 0.7918254209 + (\sqrt{5} - \sqrt{5 - 2x_3})$$

$$\left( x_3 - \frac{5\sqrt{5} - (\sqrt{5 - 2x_3})(x_3 + 5)}{3\sqrt{5} - \sqrt{5 - 2x_3}} \right) \Rightarrow M_3 = \frac{(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3} + 7.422762625x_3 - 2.934954541$$

$$\text{em } x_3 = 2m, M_3 = 12.2439T.m$$

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx_3} = 7.422762625 - (5 - 2x_3)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow N_3 = -9.121952021$$

Se ha escrito este libro con la finalidad primordial de apoyar a profesores y estudiantes en la enseñanza y el aprendizaje del análisis estructural. Esta disciplina es trascendental en las licenciaturas de Ingeniería Civil, Ingeniería Mecánica, Ingeniería Aeronáutica, Arquitectura, entre otras. Su dominio es fundamental para todo aquel profesionista cuya ocupación sea el diseño de obras, tales como naves industriales, rascacielos, puentes, presas, plantas industriales, plataformas marítimas, etc.

En el libro se ofrece inicialmente conceptos básicos sobre la teoría del análisis estructural y finalmente la aplicación de ello a través de un problemario consistente en una gran variedad de ejercicios resueltos minuciosamente sobre estructuras isostáticas e hiperestáticas, en el plano y en el espacio, particularmente vigas, marcos y armaduras, los cuales son comunes encontrarlos en las tareas y exámenes de varias asignaturas del área de Estructuras en los cursos de Licenciatura, Propedéutico y Maestría.

Se les recomienda a los lectores tener conocimientos acerca de mecánica de materiales, estática, estructuras isostáticas, álgebra, álgebra matricial, cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales y si es posible, programación con matlab.

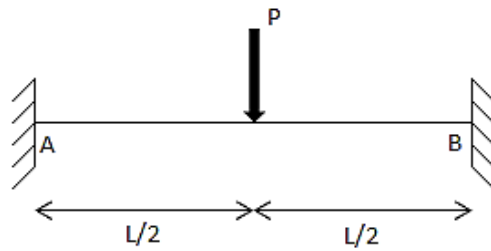
Los autores consideramos que el dominio de los principios básicos es indispensable para el uso de los programas de cómputo disponibles hoy en día, debido a que una vez desarrollada en el lector la habilidad de analizar a mano las estructuras, este comprenderá el modo de funcionamiento de los softwares y poseerá un mejor criterio. Contrariamente, si se hace uso de programas sin dicho conocimiento, es muy riesgoso.



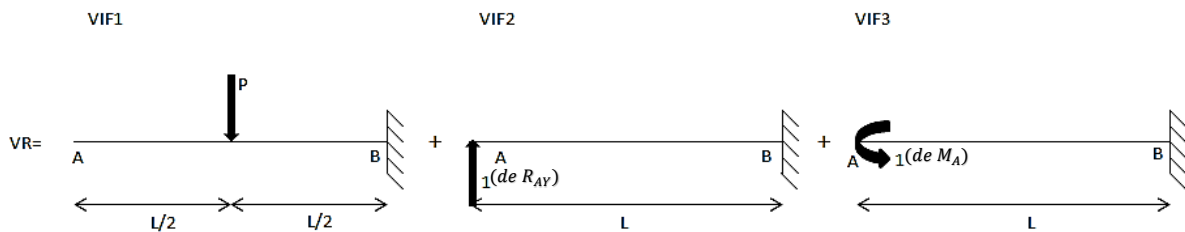
**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS UTILIZANDO EL MÉTODO DE LA RIGIDEZ.**

**4.1. DEDUCCIÓN DE LAS FUERZAS DE FIJACIÓN Y LOS MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO PARA VIGAS CON CARGAS COMUNES.**

VIGA 1.



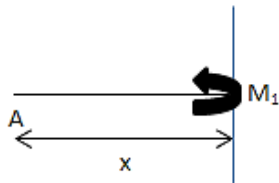
**Principio de Superposición.**



**Incompatibilidades geométricas y coeficientes de flexibilidad.**

Se obtienen los momentos internos  $M$  con base en VIF 1.

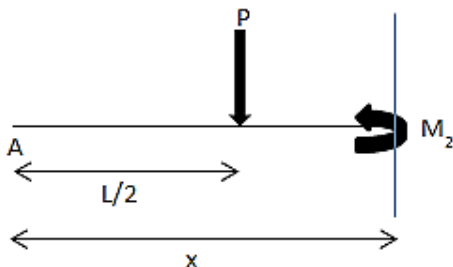
$$0 \leq x \leq L/2$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = 0$$

$$L/2 \leq x \leq L$$

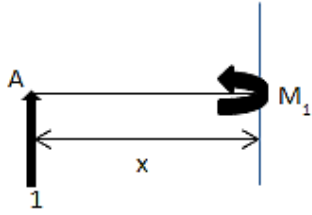


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_2 - P\left(x - \frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow M_2 = -Px + \frac{PL}{2}$$

De VIF 2, el momento interno  $m_1$  es

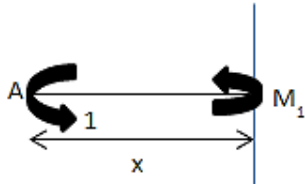
$$0 \leq x \leq L$$



$$\begin{aligned} \sum M_{corte} &= 0 \\ -M_1 + (1)(x) &= 0 \Rightarrow M_1 = x \end{aligned}$$

A partir de VIF 3, se formula el momento interno  $m_2$ .

$$0 \leq x \leq L$$



$$\begin{aligned} \sum M_{corte} &= 0 \\ -M_1 - 1 &= 0 \Rightarrow M_1 = -1 \end{aligned}$$

Se calculan los desplazamientos y pendientes requeridos.

$$d_1 = \delta_{VA_{VIF1}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{L/2} (0)(x) dx + \int_{L/2}^L \left(-Px + \frac{PL}{2}\right)(x) dx \right] = -\frac{5PL^3}{48EI}$$

$$d_2 = \theta_{AVIF1} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{L/2} (0)(-1) dx + \int_{L/2}^L \left(-Px + \frac{PL}{2}\right)(-1) dx \right] = \frac{PL^2}{8EI}$$

$$f_{11} = \delta_{VA_{VIF2}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1m_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(x) dx = \frac{L^3}{3EI}$$

$$f_{21} = \theta_{AVIF2} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_1m_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(-1) dx = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{12} = \delta_{VA_{VIF3}} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2m_1}{EI} dx = f_{21} = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{22} = \theta_{AVIF3} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{m_2m_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L (-1)(-1) dx = \frac{L}{EI}$$



**Sistema de ecuaciones de flexibilidades y cálculo de las redundantes.**

Las ecuaciones de compatibilidad para la deflexión en  $A$  y la pendiente en  $A$  son, respectivamente

$$d_1 + f_{11}R_{AY} + f_{12}M_A = 0 \text{ --- (1)}$$

$$d_2 + f_{21}R_{AY} + f_{22}M_A = 0 \text{ --- (2)}$$

Al sustituir los resultados en el sistema simultáneo de ecuaciones se tiene

$$-\frac{5PL^3}{48EI} + \frac{L^3}{3EI}R_{AY} - \frac{L^2}{2EI}M_A = 0 \text{ --- (3)}$$

$$\frac{PL^2}{8EI} - \frac{L^2}{2EI}R_{AY} + \frac{L}{EI}M_A = 0 \text{ --- (4)}$$

Resolviendo el sistema resulta

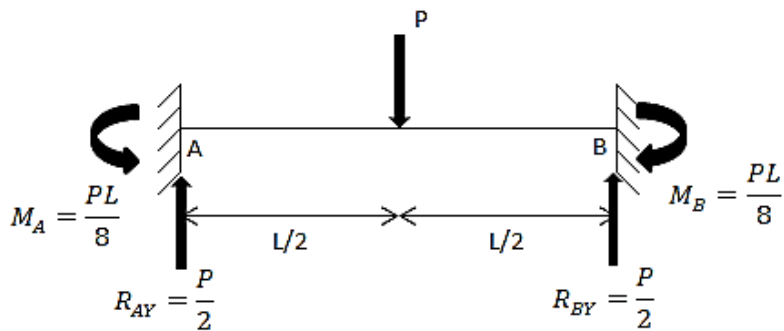
$$R_{AY} = \frac{P}{2} \uparrow \quad M_A = \frac{PL}{8} \curvearrowright$$

**Ecuaciones de equilibrio.**

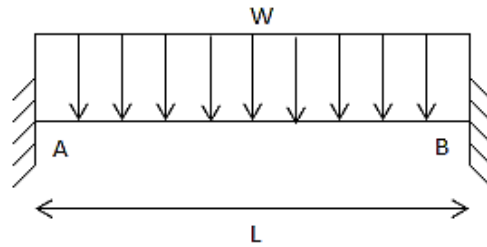
Las reacciones desconocidas restantes se obtienen de

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - P + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{P}{2} \uparrow$$

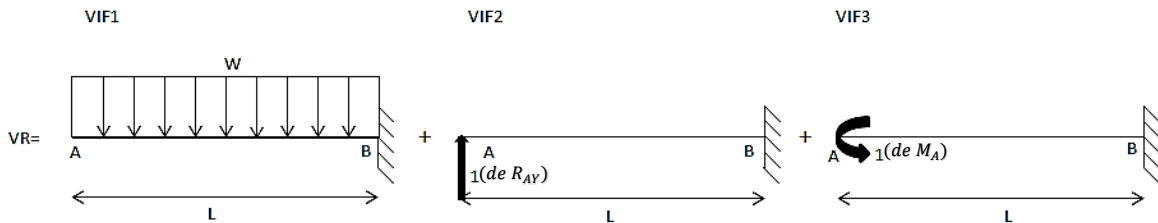
$$\curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow -\frac{PL}{8} + P\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{P}{2}(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{PL}{8} \curvearrowright$$



VIGA 2.



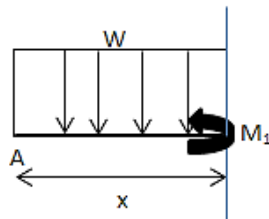
Principio de Superposición.



Incompatibilidades geométricas y coeficientes de flexibilidad.

Con base en VIF 1 se deducen los momentos internos \$M\$.

$$0 \leq x \leq L$$



$$+\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_1 - W(x) \left( \frac{x}{2} \right) = 0 \Rightarrow M_1 = -\frac{Wx^2}{2}$$

Se retoman los momentos internos \$m\_1\$ y \$m\_2\$ de la primera deducción.

$$m_1 \Leftrightarrow M_1 = x \quad 0 \leq x \leq L$$

$$m_2 \Leftrightarrow M_1 = -1 \quad 0 \leq x \leq L$$

Se obtienen los desplazamientos y pendientes necesarios.

$$d_1 = \delta_{VA} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( -\frac{Wx^2}{2} \right) (x) dx = -\frac{WL^4}{8EI}$$

$$d_2 = \theta_{AVIF1} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( -\frac{Wx^2}{2} \right) (-1) dx = \frac{WL^3}{6EI}$$

Remítase a la viga 1 y observe que

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI} \quad f_{21} = -\frac{L^2}{2EI} \quad f_{12} = -\frac{L^2}{2EI} \quad f_{22} = \frac{L}{EI}$$

**Sistema de ecuaciones de flexibilidades y cálculo de las redundantes.**

Con los resultados se plantea

$$-\frac{WL^4}{8EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} - \frac{L^2}{2EI} M_A = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{WL^3}{6EI} - \frac{L^2}{2EI} R_{AY} + \frac{L}{EI} M_A = 0 \quad \text{--- (2)}$$

Al resolver el sistema se obtiene

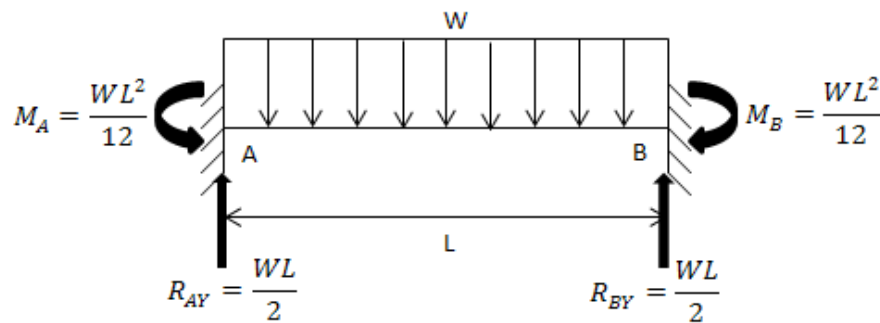
$$R_{AY} = \frac{WL}{2} \uparrow \quad M_A = \frac{WL^2}{12} \curvearrowright$$

**Ecuaciones de equilibrio.**

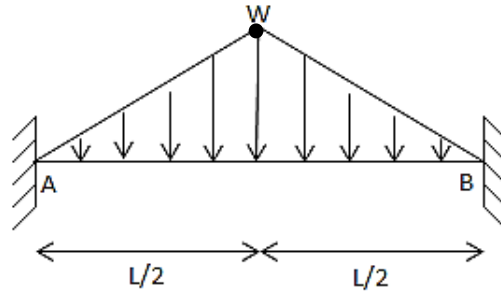
Por lo tanto,

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{WL}{2} - WL + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{WL}{2} \uparrow$$

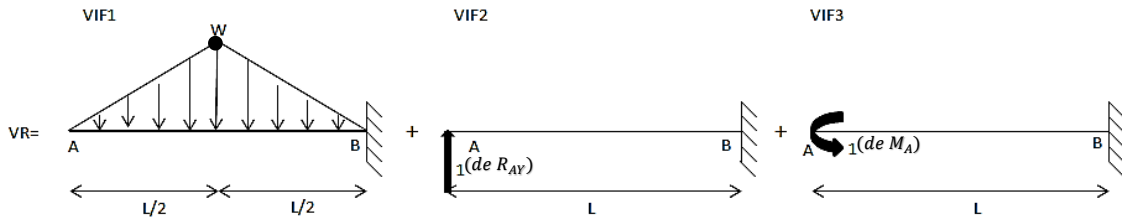
$$+\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow -\frac{WL^2}{12} + WL \left( \frac{L}{2} \right) - \frac{WL}{2} (L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{WL^2}{12} \curvearrowright$$



VIGA 3.



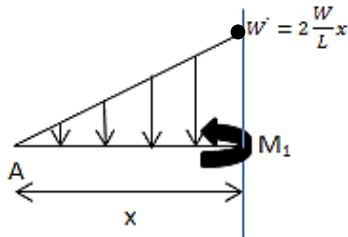
Principio de Superposición.



Incompatibilidades geométricas y coeficientes de flexibilidad.

De VIF 1, las funciones de momento  $M$  son

$$0 \leq x \leq L/2$$



$$+\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_1 - \left[ \frac{\left( \frac{2W}{L}x \right) (x)}{2} \right] \left( \frac{x}{3} \right) = 0 \Rightarrow M_1 = -\frac{Wx^3}{3L}$$

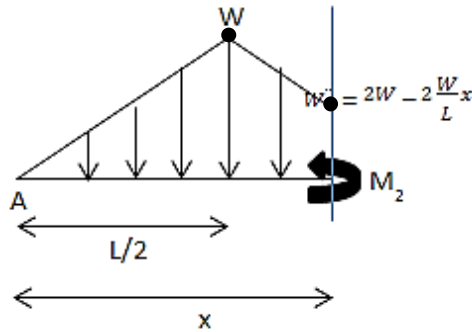
La intensidad  $W'$  se obtiene de

$$\frac{W}{\frac{L}{2}} = \frac{W'}{x} \Rightarrow W' = \frac{2W}{L}x$$

$$L/2 \leq x \leq L$$

Se deduce la intensidad  $W''$ .

$$\frac{W}{L} = \frac{W'''}{L-x} \Rightarrow W''' = \frac{W(L-x)}{\frac{L}{2}} = 2W - \frac{2W}{L}x$$



La carga concentrada equivalente de la carga seccionada es

$$A_T = -\frac{W}{L}x^2 + 2Wx - \frac{WL}{2}$$

y su punto de aplicación es

$$\bar{x} = \frac{-\frac{2W}{3L}x^3 + Wx^2 - \frac{WL^2}{12}}{-\frac{W}{L}x^2 + 2Wx - \frac{WL}{2}} \text{ a la derecha de A}$$

$$\sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$-M_2 - \left(-\frac{W}{L}x^2 + 2Wx - \frac{WL}{2}\right) \left(x - \frac{-\frac{2W}{3L}x^3 + Wx^2 - \frac{WL^2}{12}}{-\frac{W}{L}x^2 + 2Wx - \frac{WL}{2}}\right) = 0$$

$$M_2 = \frac{W}{3L}x^3 - Wx^2 + \frac{WL}{2}x - \frac{WL^2}{12}$$

Se usan los siguientes momentos internos

$$m_1 \Leftrightarrow M_1 = x \quad 0 \leq x \leq L$$

$$m_2 \Leftrightarrow M_1 = -1 \quad 0 \leq x \leq L$$

Se requiere de

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{L/2} \left(-\frac{Wx^3}{3L}\right) (x) dx + \int_{L/2}^L \left(\frac{W}{3L}x^3 - Wx^2 + \frac{WL}{2}x - \frac{WL^2}{12}\right) (x) dx \right] = -\frac{11WL^4}{192EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{L/2} \left( -\frac{Wx^3}{3L} \right) (-1) dx + \int_{L/2}^L \left( \frac{W}{3L} x^3 - Wx^2 + \frac{WL}{2} x - \frac{WL^2}{12} \right) (-1) dx \right] = \frac{7WL^3}{96EI}$$

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI} \quad f_{21} = -\frac{L^2}{2EI} \quad f_{12} = -\frac{L^2}{2EI} \quad f_{22} = \frac{L}{EI}$$

**Sistema de ecuaciones de flexibilidades y cálculo de las redundantes.**

En consecuencia,

$$-\frac{11WL^4}{192EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} - \frac{L^2}{2EI} M_A = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{7WL^3}{96EI} - \frac{L^2}{2EI} R_{AY} + \frac{L}{EI} M_A = 0 \quad \text{--- (2)}$$

Por lo tanto,

$$R_{AY} = \frac{WL}{4} \uparrow \quad M_A = \frac{5WL^2}{96} \curvearrowright$$

**Ecuaciones de equilibrio.**

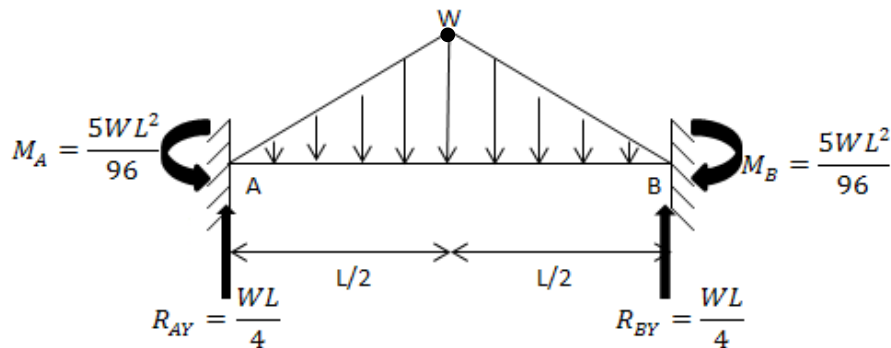
Finalmente, se tiene

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{WL}{4} - \frac{WL}{2} + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{WL}{4} \uparrow$$

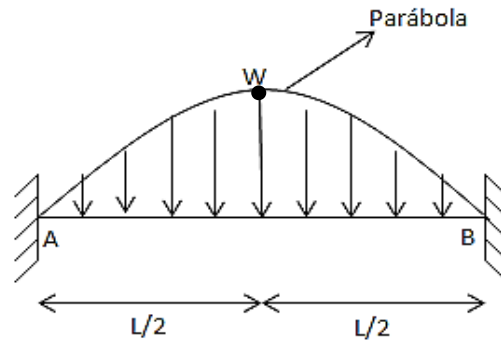
$$+\curvearrowright \sum MA = 0$$

$$-\frac{5WL^2}{96} + \left(\frac{L}{2}\right) (W) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{L}{2}\right) + \left(\frac{L}{2}\right) (W) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{L}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{L}{2}\right)\right) - \frac{WL}{4} (L) + M_B = 0$$

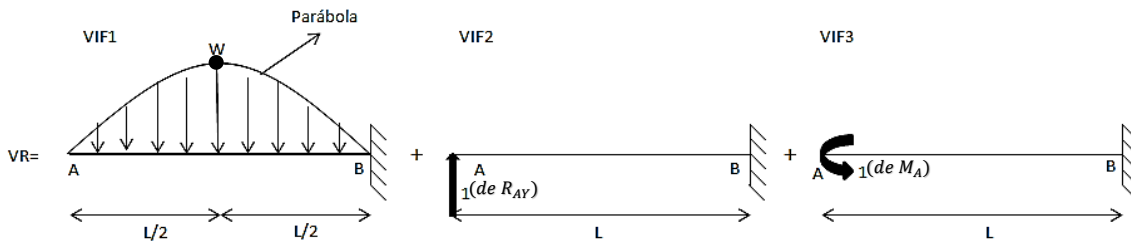
$$M_B = \frac{5WL^2}{96} \curvearrowright$$



VIGA 4.



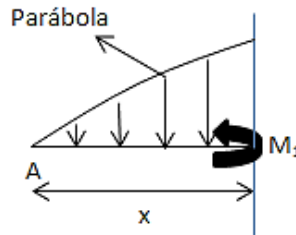
Principio de Superposición.



Incompatibilidades geométricas y coeficientes de flexibilidad.

Se formula el momento interno  $M$  con base en VIF 1.

$$0 \leq x \leq L$$



La fuerza resultante de la carga distribuida seccionada es

$$A_c = \int_0^x \left( -4 \frac{W}{L^2} x^2 + 4 \frac{W}{L} x \right) dx = -\frac{4W}{3L^2} x^3 + \frac{2W}{L} x^2$$

y su punto de aplicación es

$$\bar{x}_c = \frac{\int_0^x x \left( -4 \frac{W}{L^2} x^2 + 4 \frac{W}{L} x \right) dx}{\int_0^x \left( -4 \frac{W}{L^2} x^2 + 4 \frac{W}{L} x \right) dx} = \frac{-\frac{W}{L^2} x^4 + \frac{4W}{3L} x^3}{-\frac{4W}{3L^2} x^3 + \frac{2W}{L} x^2} \text{ a la derecha de A}$$

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$-M_1 - \left( -\frac{4W}{3L^2}x^3 + \frac{2W}{L}x^2 \right) \left( x - \frac{-\frac{W}{L^2}x^4 + \frac{4W}{3L}x^3}{-\frac{4W}{3L^2}x^3 + \frac{2W}{L}x^2} \right) = 0 \Rightarrow M_1 = \frac{W}{3L^2}x^4 - \frac{2W}{3L}x^3$$

Además,

$$m_1 \Leftrightarrow M_1 = x \quad 0 \leq x \leq L$$

$$m_2 \Leftrightarrow M_1 = -1 \quad 0 \leq x \leq L$$

Se calculan los desplazamientos y pendientes necesarios.

$$d_1 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{W}{3L^2}x^4 - \frac{2W}{3L}x^3 \right) (x) dx = -\frac{7WL^4}{90EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{W}{3L^2}x^4 - \frac{2W}{3L}x^3 \right) (-1) dx = \frac{WL^3}{10EI}$$

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI} \quad f_{21} = -\frac{L^2}{2EI} \quad f_{12} = -\frac{L^2}{2EI} \quad f_{22} = \frac{L}{EI}$$

### Sistema de ecuaciones de flexibilidades y cálculo de las redundantes.

El sistema de ecuaciones de compatibilidad geométrica es

$$-\frac{7WL^4}{90EI} + \frac{L^3}{3EI}R_{AY} - \frac{L^2}{2EI}M_A = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{WL^3}{10EI} - \frac{L^2}{2EI}R_{AY} + \frac{L}{EI}M_A = 0 \quad \text{--- (2)}$$

Por consiguiente, las fuerzas correctivas son

$$R_{AY} = \frac{WL}{3} \uparrow \quad M_A = \frac{WL^2}{15} \curvearrowright$$

### Ecuaciones de equilibrio.

La carga concentrada equivalente de la carga distribuida con intensidad parabólica es

$$A = \int_0^L \left( -4\frac{W}{L^2}x^2 + 4\frac{W}{L}x \right) dx = \frac{2}{3}WL$$



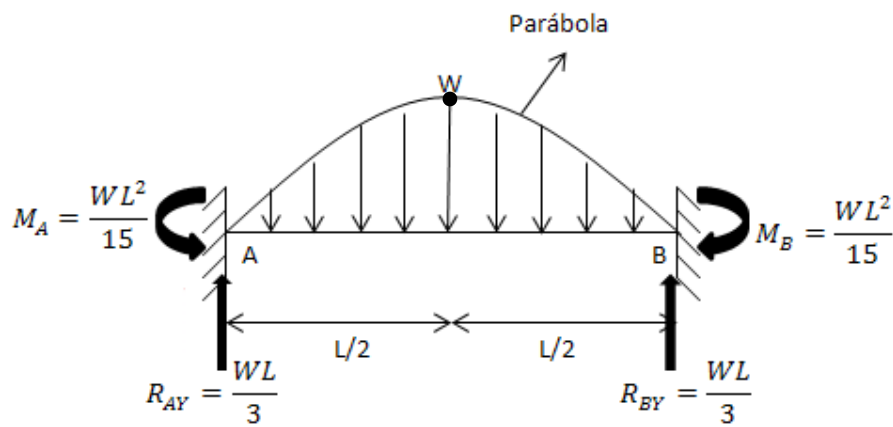
y su línea de acción se ubica en

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x \left( -4 \frac{W}{L^2} x^2 + 4 \frac{W}{L} x \right) dx}{\int_0^L \left( -4 \frac{W}{L^2} x^2 + 4 \frac{W}{L} x \right) dx} = \frac{\frac{WL^2}{3}}{\frac{2}{3}WL} = \frac{1}{2}L$$

Así que,

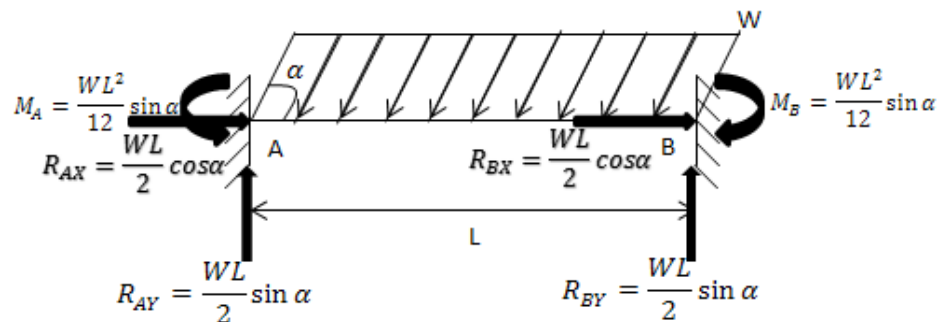
$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow \frac{WL}{3} - \frac{2}{3}WL + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{WL}{3} \uparrow$$

$$\curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow -\frac{WL^2}{15} + \frac{2}{3}WL \left( \frac{L}{2} \right) - \frac{WL}{3}(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{WL^2}{15} \curvearrowright$$

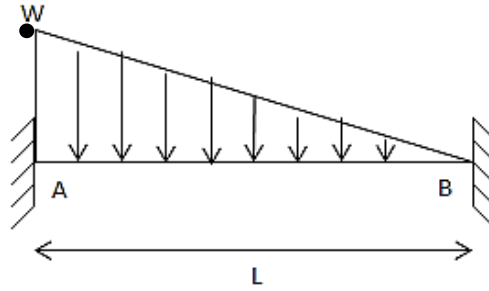


VIGA 5.

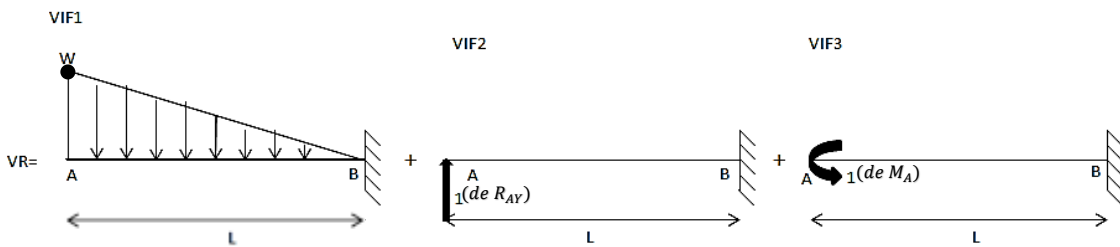
De forma similar a la viga 2, se tiene



VIGA 6.



Principio de Superposición.

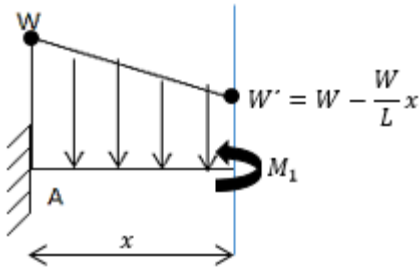


Incompatibilidades geométricas y coeficientes de flexibilidad.

De VIF 1, el momento interno  $M$  es

$$0 \leq x \leq L$$

La intensidad  $W'$  es



$$\frac{W}{L} = \frac{W'}{L-x}$$

$$W' = \frac{W(L-x)}{L} = W - \frac{W}{L}x$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_1 - \left( \frac{(x) \left( W - \left( W - \frac{W}{L}x \right) \right)}{2} \right) \left( \frac{2}{3}x \right) - \left( W - \frac{W}{L}x \right) (x) \left( \frac{1}{2}x \right) = 0 \Rightarrow M_1 = \frac{Wx^3}{6L} - \frac{Wx^2}{2}$$

Por otra parte,

$$m_1 \Leftrightarrow M_1 = x \quad 0 \leq x \leq L$$

$$m_2 \Leftrightarrow M_1 = -1 \quad 0 \leq x \leq L$$

Se calculan los desplazamientos y pendientes requeridos.

$$d_1 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{Wx^3}{6L} - \frac{Wx^2}{2} \right) (x) dx = -\frac{11WL^4}{120EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{Wx^3}{6L} - \frac{Wx^2}{2} \right) (-1) dx = \frac{WL^3}{8EI}$$

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI} \quad f_{21} = -\frac{L^2}{2EI} \quad f_{12} = -\frac{L^2}{2EI} \quad f_{22} = \frac{L}{EI}$$

**Sistema de ecuaciones de flexibilidades y cálculo de las redundantes.**

$$-\frac{11WL^4}{120EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} - \frac{L^2}{2EI} M_A = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{WL^3}{8EI} - \frac{L^2}{2EI} R_{AY} + \frac{L}{EI} M_A = 0 \quad \text{--- (2)}$$

Se resuelve el sistema simultáneo de ecuaciones. En consecuencia,

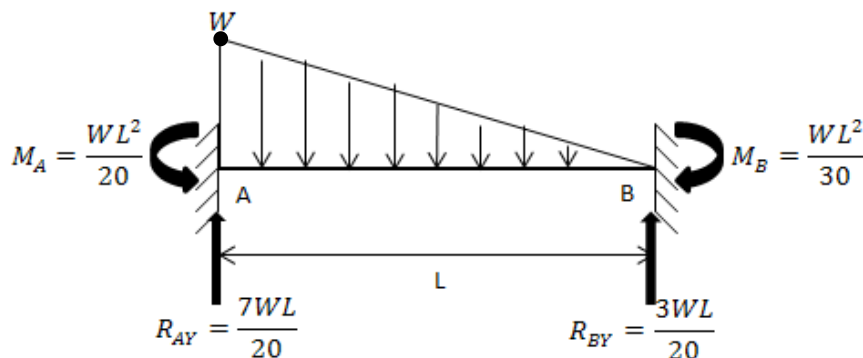
$$R_{AY} = \frac{7WL}{20} \uparrow \quad M_A = \frac{WL^2}{20} \curvearrowright$$

**Ecuaciones de equilibrio.**

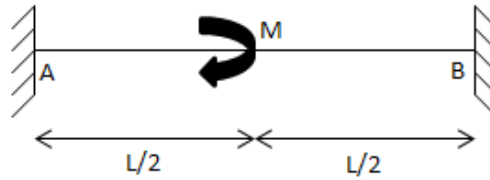
Las reacciones faltantes son

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow \frac{7WL}{20} - \frac{WL}{2} + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{3WL}{20} \uparrow$$

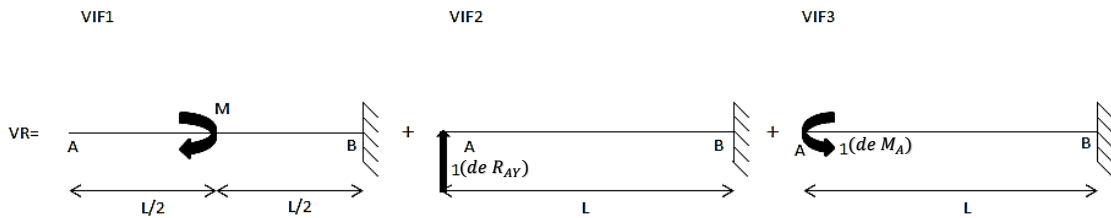
$$\curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow -\frac{WL^2}{20} + \frac{WL}{2} \left( \frac{L}{3} \right) - \frac{3WL}{20} (L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{WL^2}{30} \curvearrowright$$



VIGA 7.



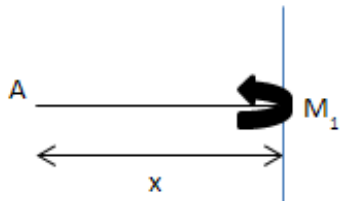
**Principio de Superposición.**



**Incompatibilidades geométricas y coeficientes de flexibilidad.**

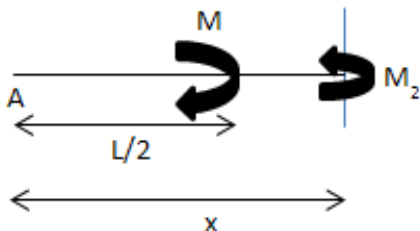
Se deducen los momentos internos  $M$  con base en VIF 1.

$$0 \leq x \leq L/2$$



$$\begin{aligned} \sum M_{corte} &= 0 \\ M_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$L/2 \leq x \leq L$$



$$\begin{aligned} \sum M_{corte} &= 0 \\ -M_2 - M &= 0 \Rightarrow M_2 = M \end{aligned}$$

Se retoman los siguientes momentos internos

$$m_1 \Leftrightarrow M_1 = x \quad 0 \leq x \leq L$$

$$m_2 \Leftrightarrow M_1 = -1 \quad 0 \leq x \leq L$$

Se requiere de

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{L/2} (0)(x)dx + \int_{L/2}^L (M)(x)dx \right] = \frac{3ML^2}{8EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{L/2} (0)(-1)dx + \int_{L/2}^L (M)(-1)dx \right] = -\frac{ML}{2EI}$$

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI} \quad f_{21} = -\frac{L^2}{2EI} \quad f_{12} = -\frac{L^2}{2EI} \quad f_{22} = \frac{L}{EI}$$

**Sistema de ecuaciones de flexibilidades y cálculo de las redundantes.**

Las ecuaciones de compatibilidad necesarias son

$$\frac{3ML^2}{8EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} - \frac{L^2}{2EI} M_A = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$-\frac{ML}{2EI} - \frac{L^2}{2EI} R_{AY} + \frac{L}{EI} M_A = 0 \quad \text{--- (2)}$$

La solución del sistema es

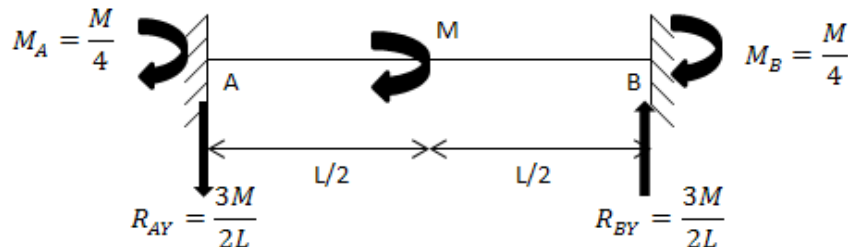
$$R_{AY} = -\frac{3M}{2L} \Rightarrow \therefore R_{AY} = \frac{3M}{2L} \downarrow \quad M_A = -\frac{M}{4} \therefore M_A = \frac{M}{4} \curvearrowright$$

**Ecuaciones de equilibrio.**

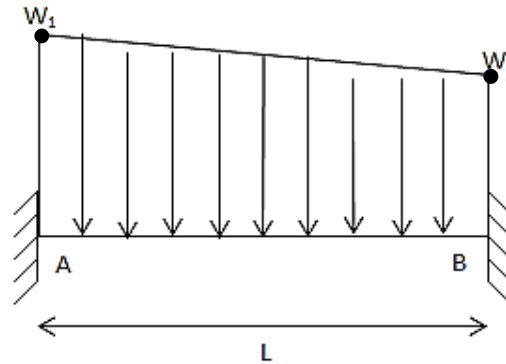
Las reacciones restantes desconocidas son

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow -\frac{3M}{2L} + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{3M}{2L} \uparrow$$

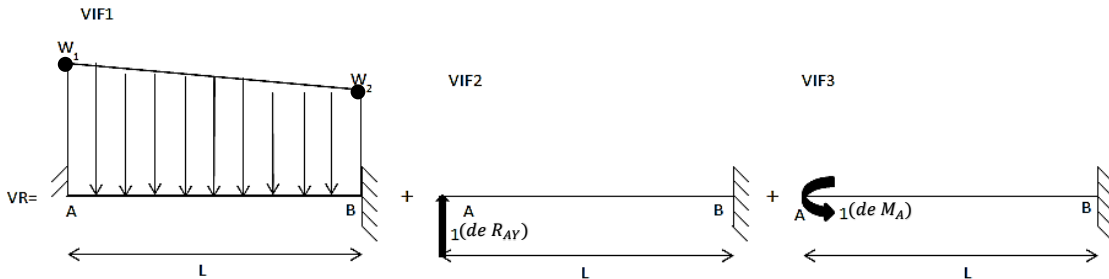
$$\curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{M}{4} + M - \left(\frac{3M}{2L}\right)(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{M}{4} \curvearrowright$$



VIGA 8.



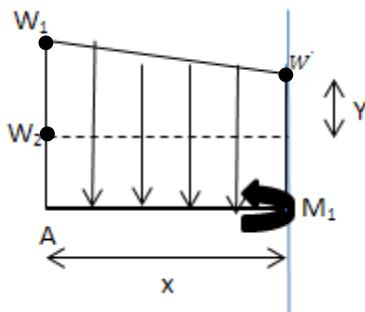
Principio de Superposición.



Incompatibilidades geométricas y coeficientes de flexibilidad.

A partir de VIF 1, se calculan los momentos internos  $M$ .

$$0 \leq x \leq L$$



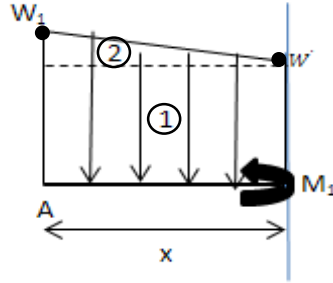
La intensidad  $W'$  es

$$\frac{W_1 - W_2}{L} = \frac{Y}{L - x}$$

$$Y = \frac{(W_1 - W_2)(L - x)}{L} = W_1 - W_2 + \frac{W_2}{L}x - \frac{W_1}{L}x$$

$$W' = W_2 + Y = W_2 + W_1 - W_2 + \frac{W_2}{L}x - \frac{W_1}{L}x = W_1 + \frac{W_2}{L}x - \frac{W_1}{L}x$$

Como se muestra en la siguiente figura, la carga trapezoidal distribuida seccionada se divide en una carga triangular y una carga uniforme.



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_1 - (x) \left( W_1 + \frac{W_2}{L}x - \frac{W_1}{L}x \right) \left( \frac{1}{2}x \right) - \left[ \frac{(x) \left( W_1 - \left( W_1 + \frac{W_2}{L}x - \frac{W_1}{L}x \right) \right)}{2} \right] \left( \frac{2}{3}x \right) = 0$$

$$M_1 = \frac{W_1 x^3}{2L} - \frac{W_2 x^3}{2L} - \frac{W_1 x^2}{2} + \frac{W_2 x^3}{3L} - \frac{W_1 x^3}{3L} = \frac{W_1 x^3}{6L} - \frac{W_2 x^3}{6L} - \frac{W_1 x^2}{2}$$

Los momentos internos restantes son

$$m_1 \Leftrightarrow M_1 = x \quad 0 \leq x \leq L$$

$$m_2 \Leftrightarrow M_1 = -1 \quad 0 \leq x \leq L$$

Se necesita de los siguientes desplazamientos y pendientes

$$d_1 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{W_1 x^3}{6L} - \frac{W_2 x^3}{6L} - \frac{W_1 x^2}{2} \right) (x) dx = -\frac{11W_1 L^4}{120EI} - \frac{W_2 L^4}{30EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{W_1 x^3}{6L} - \frac{W_2 x^3}{6L} - \frac{W_1 x^2}{2} \right) (-1) dx = \frac{W_1 L^3}{8EI} + \frac{W_2 L^3}{24EI}$$

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI} \quad f_{21} = -\frac{L^2}{2EI} \quad f_{12} = -\frac{L^2}{2EI} \quad f_{22} = \frac{L}{EI}$$

### Sistema de ecuaciones de flexibilidades y cálculo de las redundantes.

Al construir el sistema de ecuaciones de compatibilidad y reemplazar los resultados se tiene

$$-\left( \frac{11W_1 L^4}{120EI} + \frac{W_2 L^4}{30EI} \right) + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} - \frac{L^2}{2EI} M_A = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\left(\frac{W_1 L^3}{8EI} + \frac{W_2 L^3}{24EI}\right) - \frac{L^2}{2EI} R_{AY} + \frac{L}{EI} M_A = 0 \dots (2)$$

Al resolver el sistema se obtiene

$$R_{AY} = \left(\frac{7W_1 L}{20} + \frac{3W_2 L}{20}\right) \uparrow \qquad M_A = \left(\frac{W_1 L^2}{20} + \frac{W_2 L^2}{30}\right) \curvearrowright$$

**Ecuaciones de equilibrio.**

Finalmente,

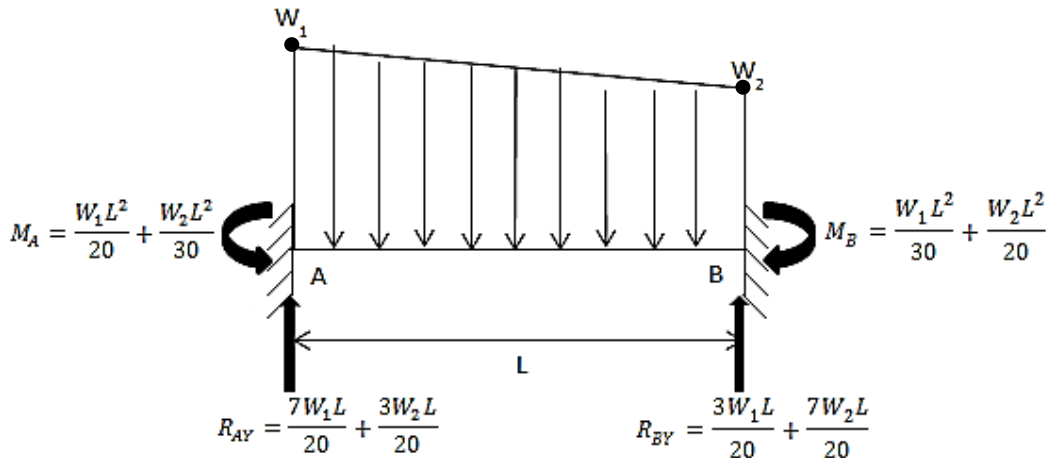
$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow \frac{7W_1 L}{20} + \frac{3W_2 L}{20} - W_2 L - \left[\frac{(L)(W_1 - W_2)}{2}\right] + R_{BY} = 0$$

$$R_{BY} = \left(\frac{3W_1 L}{20} + \frac{7W_2 L}{20}\right) \uparrow$$

$$\curvearrowright \sum M_A = 0$$

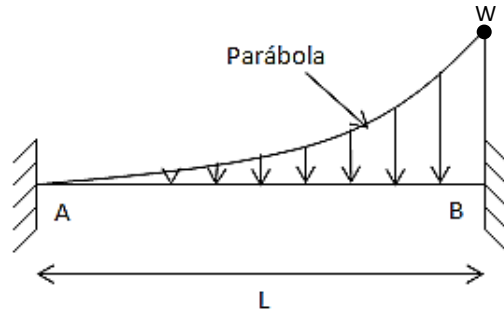
$$-\left(\frac{W_1 L^2}{20} + \frac{W_2 L^2}{30}\right) + W_2 (L) \left(\frac{L}{2}\right) + \left(\frac{(L)(W_1 - W_2)}{2}\right) \left(\frac{L}{3}\right) - \left(\frac{3W_1 L}{20} + \frac{7W_2 L}{20}\right) (L) + M_B = 0$$

$$M_B = \left(\frac{W_1 L^2}{30} + \frac{W_2 L^2}{20}\right) \curvearrowright$$

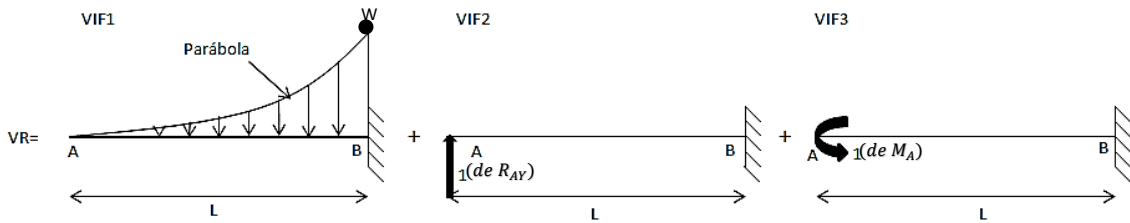




VIGA 9.



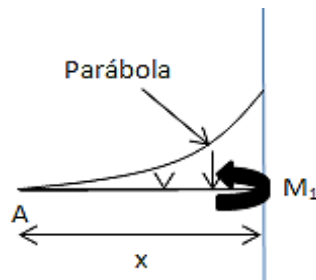
**Principio de Superposición.**



**Incompatibilidades geométricas y coeficientes de flexibilidad.**

De VIF 1, se formulan los momentos internos  $M$ .

$$0 \leq x \leq L$$



La fuerza resultante de la carga distribuida seccionada es

$$A_c = \int_0^x \left( \frac{W}{L^2} x^2 \right) dx = \frac{1}{3} \frac{W}{L^2} x^3$$

y su punto de aplicación es

$$\bar{x}_c = \frac{\int_0^x x \left( \frac{W}{L^2} x^2 \right) dx}{\int_0^x \left( \frac{W}{L^2} x^2 \right) dx} = \frac{\frac{1}{4} \frac{W}{L^2} x^4}{\frac{1}{3} \frac{W}{L^2} x^3} = \frac{3}{4} x \text{ a la derecha de A}$$

$$\sum M_{\text{corte}} = 0 \Rightarrow -M_1 - \left(\frac{1}{3} \frac{W}{L^2} x^3\right) \left(x - \frac{3}{4}x\right) = 0 \Rightarrow M_1 = -\frac{Wx^4}{12L^2}$$

Los momentos internos de las otras estructuras isostáticas son

$$m_1 \Leftrightarrow M_1 = x \quad 0 \leq x \leq L$$

$$m_2 \Leftrightarrow M_1 = -1 \quad 0 \leq x \leq L$$

Se calculan los desplazamientos y pendientes necesarios.

$$d_1 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-\frac{Wx^4}{12L^2}\right) (x) dx = -\frac{WL^4}{72EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-\frac{Wx^4}{12L^2}\right) (-1) dx = \frac{WL^3}{60EI}$$

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI} \quad f_{21} = -\frac{L^2}{2EI} \quad f_{12} = -\frac{L^2}{2EI} \quad f_{22} = \frac{L}{EI}$$

**Sistema de ecuaciones de flexibilidades y cálculo de las redundantes.**

Las ecuaciones de compatibilidad para la deflexión en A y la pendiente en A son, respectivamente

$$-\frac{WL^4}{72EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} - \frac{L^2}{2EI} M_A = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{WL^3}{60EI} - \frac{L^2}{2EI} R_{AY} + \frac{L}{EI} M_A = 0 \quad \text{--- (2)}$$

Al resolver el sistema resulta

$$R_{AY} = \frac{WL}{15} \uparrow \quad M_A = \frac{WL^2}{60} \curvearrowright$$

**Ecuaciones de equilibrio.**

La fuerza resultante de la carga distribuida tipo enjuta parabólica es

$$A = \int_0^L \left(\frac{W}{L^2} x^2\right) dx = \frac{1}{3} LW$$

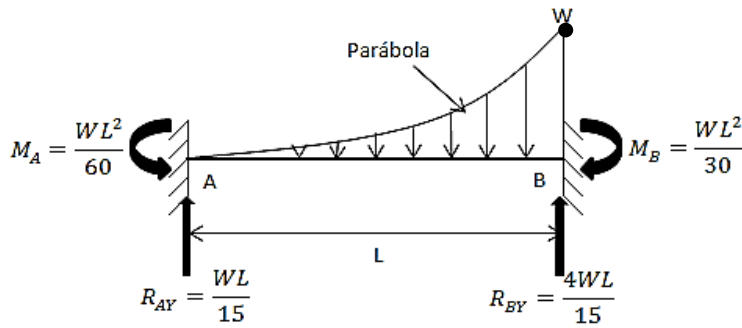
y su línea de acción se localiza a una distancia

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x \left(\frac{W}{L^2} x^2\right) dx}{\int_0^L \left(\frac{W}{L^2} x^2\right) dx} = \frac{3}{4}L \text{ a la derecha de A}$$

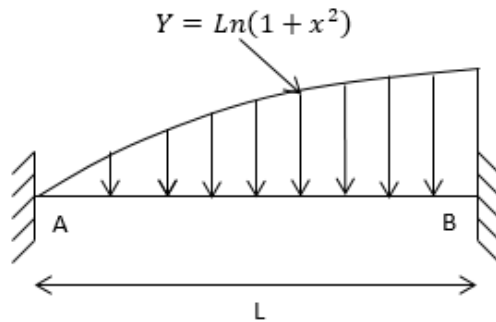
Las reacciones desconocidas restantes se obtienen de

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow \frac{WL}{15} - \frac{1}{3}WL + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{4WL}{15} \uparrow$$

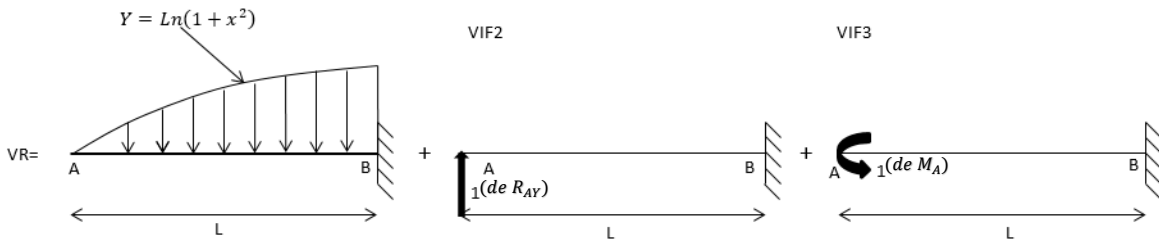
$$\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow -\frac{WL^2}{60} + \frac{1}{3}WL \left(\frac{3}{4}L\right) - \frac{4WL}{15}(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{WL^2}{30} \curvearrowright$$



VIGA 10.



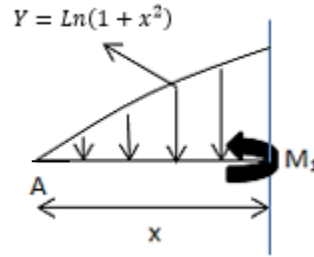
Principio de Superposición.



**Incompatibilidades geométricas y coeficientes de flexibilidad.**

Con base en VIF 1 se deducen los momentos internos  $M$ .

$$0 \leq x \leq L$$



La fuerza resultante de la carga distribuida seccionada es

$$A_c = \int_0^x (\text{Ln}(1 + x^2)) dx = x * \text{Ln}(x^2 + 1) + 2(\arctan(x) - x)$$

y su punto de aplicación es

$$\bar{x}_c = \frac{\int_0^x x(\text{Ln}(1 + x^2)) dx}{\int_0^x \text{Ln}(1 + x^2) dx} = \frac{\frac{(x^2 + 1) * \text{Ln}(x^2 + 1)}{2} - \frac{x^2}{2}}{x * \text{Ln}(x^2 + 1) + 2(\arctan(x) - x)} \text{ a la derecha de A}$$

$$\sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$-M_1 - [x * \text{Ln}(x^2 + 1) + 2(\arctan(x) - x)] \left[ x - \frac{\frac{(x^2 + 1) * \text{Ln}(x^2 + 1)}{2} - \frac{x^2}{2}}{x * \text{Ln}(x^2 + 1) + 2(\arctan(x) - x)} \right] = 0$$

$$M_1 = -\frac{x^2 * \text{Ln}(x^2 + 1)}{2} + \frac{\text{Ln}(x^2 + 1)}{2} - 2x * \arctan(x) + \frac{3}{2}x^2$$

Se usan los siguientes momentos internos

$$m_1 \Leftrightarrow M_1 = x \quad 0 \leq x \leq L$$

$$m_2 \Leftrightarrow M_1 = -1 \quad 0 \leq x \leq L$$

Se requiere de

$$d_1 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( -\frac{x^2 * \text{Ln}(x^2 + 1)}{2} + \frac{\text{Ln}(x^2 + 1)}{2} - 2x * \arctan(x) + \frac{3}{2}x^2 \right) (x) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \left[ -\frac{L^4 * \text{Ln}(L^2 + 1)}{8} + \frac{L^2 * \text{Ln}(L^2 + 1)}{4} + \frac{\text{Ln}(L^2 + 1)}{24} - \frac{2L^3 * \arctan(L)}{3} + \frac{7L^4}{16} - \frac{L^2}{24} \right]$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( -\frac{x^2 * \text{Ln}(x^2 + 1)}{2} + \frac{\text{Ln}(x^2 + 1)}{2} - 2x * \arctan(x) + \frac{3}{2}x^2 \right) (-1) dx = \frac{1}{EI}$$

$$\left[ \frac{L^3 * \text{Ln}(L^2 + 1)}{6} - \frac{L * \text{Ln}(L^2 + 1)}{2} + L^2 * \arctan(L) - \frac{\arctan(L)}{3} - \frac{11L^3}{18} + \frac{L}{3} \right]$$

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI} \quad f_{21} = -\frac{L^2}{2EI} \quad f_{12} = -\frac{L^2}{2EI} \quad f_{22} = \frac{L}{EI}$$

**Sistema de ecuaciones de flexibilidades y cálculo de las redundantes.**

En consecuencia,

$$\frac{1}{EI} \left[ -\frac{L^4 * \text{Ln}(L^2 + 1)}{8} + \frac{L^2 * \text{Ln}(L^2 + 1)}{4} + \frac{\text{Ln}(L^2 + 1)}{24} - \frac{2L^3 * \arctan(L)}{3} + \frac{7L^4}{16} - \frac{L^2}{24} \right] + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} - \frac{L^2}{2EI} M_A \dots (1)$$

$$\frac{1}{EI} \left[ \frac{L^3 * \text{Ln}(L^2 + 1)}{6} - \frac{L * \text{Ln}(L^2 + 1)}{2} + L^2 * \arctan(L) - \frac{\arctan(L)}{3} - \frac{11L^3}{18} + \frac{L}{3} \right] - \frac{L^2}{2EI} R_{AY} + \frac{L}{EI} M_A = 0 \dots (2)$$

Por lo tanto,

$$R_{AY} = \frac{6(L^4 - 1) * \text{Ln}(L^2 + 1) + L(24(L^2 + 1)\arctan(L) - L(19L^2 + 18))}{12L^3} \uparrow$$

$$M_A = \frac{6(L^4 + 6L^2 - 3) * \text{Ln}(L^2 + 1) + L(96\arctan(L) - 13L(L^2 + 6))}{72L^2} \curvearrowright$$

**Ecuaciones de equilibrio.**

La carga concentrada equivalente de la carga distribuida con intensidad logarítmica es

$$A = \int_0^L \text{Ln}(1 + x^2) dx = L * \text{Ln}(L^2 + 1) + 2(\arctan(L) - L)$$

y su línea de acción se localiza a una distancia de

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x(\text{Ln}(1 + x^2)) dx}{\int_0^L (\text{Ln}(1 + x^2)) dx} = \frac{\frac{(L^2 + 1) * \text{Ln}(L^2 + 1)}{2} - \frac{L^2}{2}}{L * \text{Ln}(L^2 + 1) + 2(\arctan(L) - L)} \text{ a la derecha de A}$$

Finalmente, se tiene

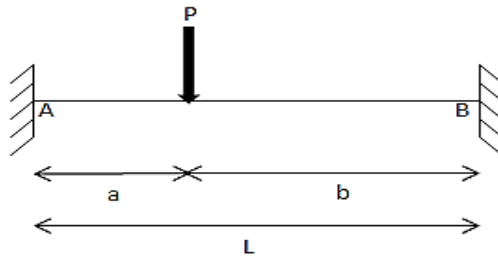
$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow R_{AY} - A_c + R_{BY} = 0$$

$$R_{BY} = \frac{6(L^4 + 1) * \ln(L^2 + 1) - L(24\arctan(L) + L(5L^2 - 18))}{12L^3} \uparrow$$

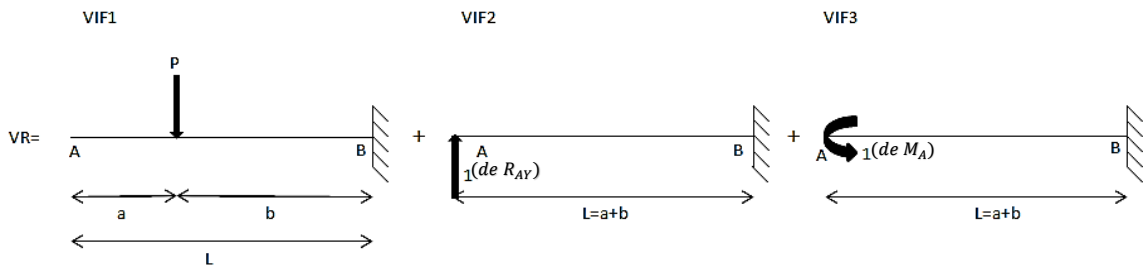
$$+\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow -M_A + A * \bar{x} - R_{BY} * L + M_B = 0$$

$$M_B = \frac{6(L^4 + 3) * \ln(L^2 + 1) - L(48\arctan(L) + L(7L^2 - 30))}{72L^2} \curvearrowright$$

VIGA 11.



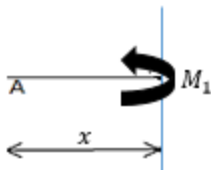
Principio de Superposición.



Incompatibilidades geométricas y coeficientes de flexibilidad.

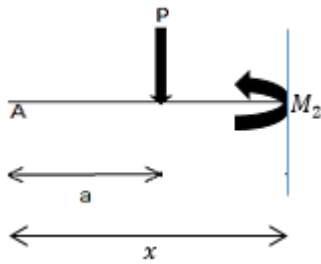
Se deducen los momentos internos  $M$  con base en VIF 1.

$$0 \leq x \leq a$$



$$+\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow M_1 = 0$$

$$a \leq x \leq a + b$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_2 - P(x - a) = 0 \Rightarrow M_2 = -Px + Pa$$

Los momentos internos de las otras estructuras isostáticas son

$$m_1 \Leftrightarrow M_1 = x \quad 0 \leq x \leq a + b$$

$$m_2 \Leftrightarrow M_1 = -1 \quad 0 \leq x \leq a + b$$

Se requiere de

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^a (0)(x)dx + \int_a^{a+b} (-Px + Pa)(x)dx \right] = -\frac{ab^2P}{2EI} - \frac{Pb^3}{3EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^a (0)(-1)dx + \int_a^{a+b} (-Px + Pa)(-1)dx \right] = \frac{Pb^2}{2EI}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^{a+b} (x)(x)dx = \frac{(a+b)^3}{3EI}$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^{a+b} (x)(-1)dx = -\frac{(a+b)^2}{2EI}$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{(a+b)^2}{2EI}$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^{a+b} (-1)(-1)dx = \frac{a+b}{EI}$$

### Sistema de ecuaciones de flexibilidades y cálculo de las redundantes.

Las ecuaciones de compatibilidad necesarias son

$$-\left(\frac{ab^2P}{2EI} + \frac{Pb^3}{3EI}\right) + \frac{(a+b)^3}{3EI} R_{AY} - \frac{(a+b)^2}{2EI} M_A = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{Pb^2}{2EI} - \frac{(a+b)^2}{2EI} R_{AY} + \frac{a+b}{EI} M_A = 0 \quad \text{--- (2)}$$

La solución del sistema es

$$R_{AY} = \frac{(3a+b)b^2P}{(a+b)^3} = \frac{(3a+b)b^2P}{(L)^3} = \frac{Pb^2}{L^3} (3(L-b) + b) = \frac{Pb^2}{L^2} \left( \frac{3L-2b}{L} \right)$$

$$= \left[ \frac{Pb^2}{L^2} \left( 3 - 2\frac{b}{L} \right) \right] \uparrow$$

$$M_A = \frac{ab^2P}{a^2+2ab+b^2} = \frac{Pab^2}{(a+b)^2} = \frac{Pab^2}{L^2} \curvearrowright$$

**Ecuaciones de equilibrio.**

Por lo tanto,

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{(3a+b)b^2P}{(a+b)^3} - P + R_{BY} = 0$$

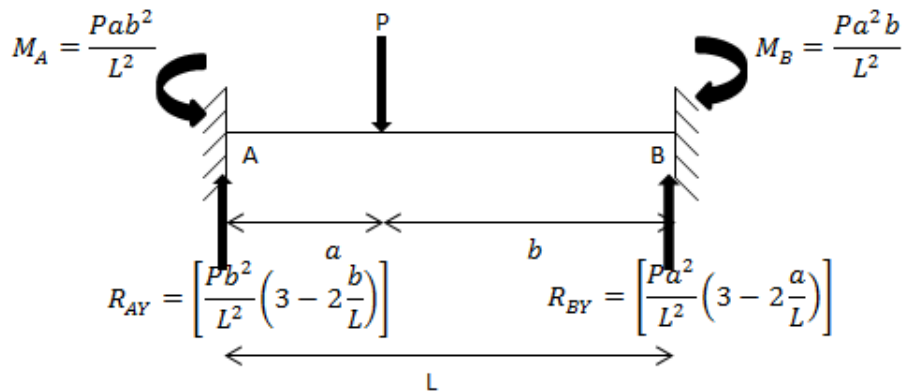
$$R_{BY} = \frac{a^2(a+3b)P}{(a+b)^3} = \frac{Pa^2(a+3b)}{L^3} = \frac{Pa^2}{L^3} (a+3(L-a)) = \frac{Pa^2}{L^3} (3L-2a)$$

$$= \frac{Pa^2}{L^2} \left( \frac{3L-2a}{L} \right) = \left[ \frac{Pa^2}{L^2} \left( 3 - 2\frac{a}{L} \right) \right] \uparrow$$

$$\curvearrowright \sum MA = 0$$

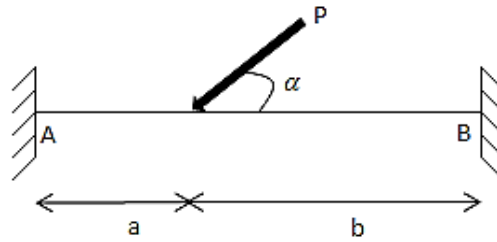
$$- \frac{Pab^2}{(a+b)^2} + Pa - \frac{Pa^2(a+3b)}{(a+b)^3} (a+b) + M_B = 0$$

$$M_B = \frac{Pa^2b}{(a+b)^2} = \frac{Pa^2b}{L^2} \curvearrowright$$

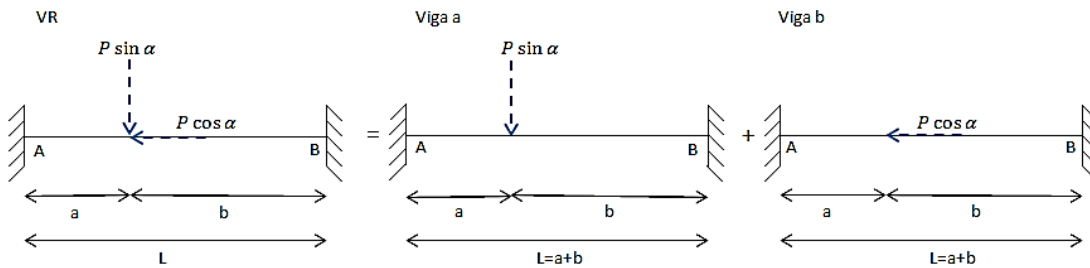




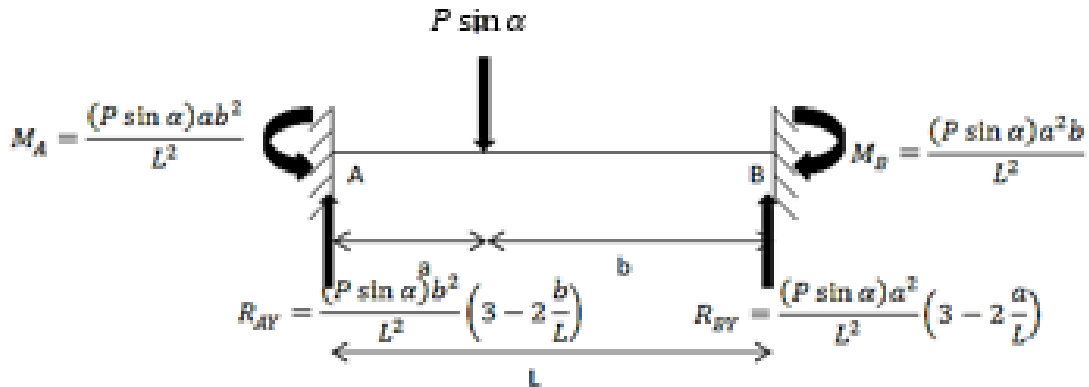
VIGA 12.



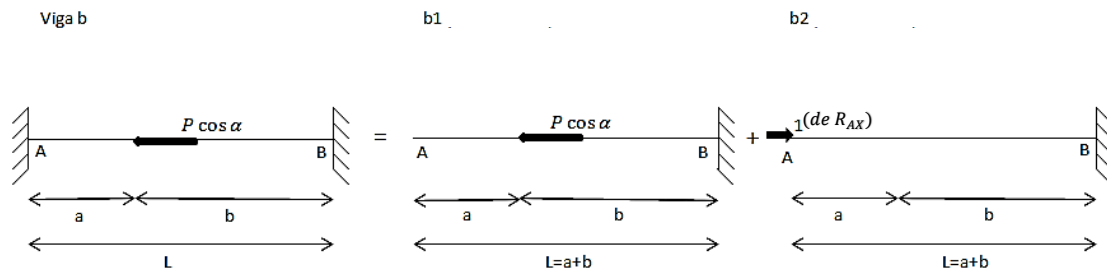
Principio de Superposición.



La viga a es una viga del tipo 11 en la que  $P = P \sin \alpha$ . En consecuencia,

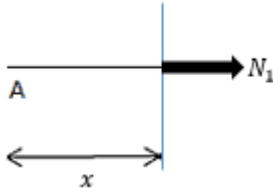


Resolvemos la viga b. Aplicando nuevamente el principio de superposición se tiene



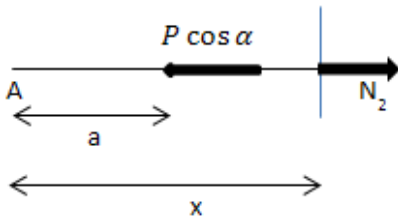
Se determinan las fuerzas normales  $N$  de la viga b1.

$$0 \leq x \leq a$$



$$\begin{aligned} +\rightarrow \sum FX &= 0 \\ N_1 &= 0 \end{aligned}$$

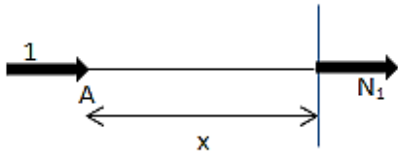
$$a \leq x \leq a + b$$



$$\begin{aligned} +\rightarrow \sum FX &= 0 \\ N_2 - P \cos \alpha &= 0 \Rightarrow N_2 = P \cos \alpha \end{aligned}$$

Se deduce la fuerza normal  $n$  de la viga b2.

$$0 \leq x \leq a + b$$



$$\begin{aligned} +\rightarrow \sum FX &= 0 \\ N_1 + 1 &= 0 \Rightarrow N_1 = -1 \end{aligned}$$

La ecuación de compatibilidad para el desplazamiento horizontal en  $A$  es

$$\Delta_{HA_{b1}} + \Delta_{HA_{b2}} = \Delta_{HA_{Viga\ b}} \quad \text{--- (1)}$$

Expresando la ecuación (1) en términos de la incógnita se tiene

$$d_1 + f_{11}R_{AX} = 0 \quad \text{--- (2)}$$

La incompatibilidad geométrica es

$$d_1 = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Nn}{AE} dx = \int_0^a \frac{(0)(-1)}{AE} dx + \int_a^{a+b} \frac{(P \cos \alpha)(-1)}{AE} dx = -\frac{Pb \cos \alpha}{AE}$$

o también

$$d_1 = \frac{NnL}{AE} = \frac{(0)(-1)(a)}{AE} + \frac{(P \cos \alpha)(-1)(b)}{AE} = -\frac{Pb \cos \alpha}{AE}$$

El coeficiente de flexibilidad es

$$f_{11} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Nn}{AE} dx = \int_0^{a+b} \frac{(-1)(-1)}{AE} dx = \frac{a+b}{AE}$$

o también

$$f_{11} = \frac{nnL}{AE} = \frac{(-1)(-1)(a+b)}{AE} = \frac{a+b}{AE}$$

Nota: Para las ecuaciones anteriores,  $L$  no es necesariamente la longitud de la viga, más bien hace referencia a la longitud del tramo analizado.

A continuación se sustituyen los resultados en la ecuación (2)

$$-\frac{Pb \cos \alpha}{AE} + \frac{a+b}{AE} R_{AX} = 0$$

Despejando la incógnita resulta

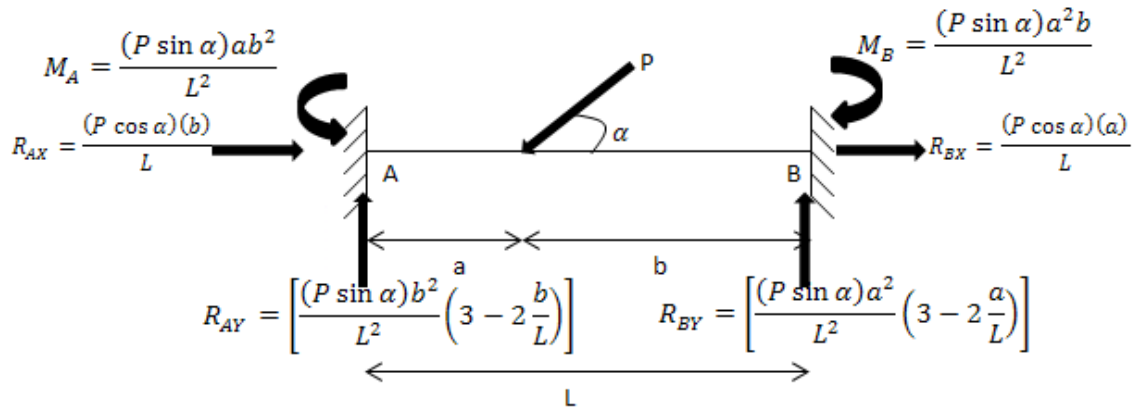
$$R_{AX} = \frac{\frac{Pb \cos \alpha}{AE}}{\frac{a+b}{AE}} = \frac{Pb \cos \alpha}{a+b} = \frac{(P \cos \alpha)(b)}{L} \rightarrow$$

La reacción restante desconocida es

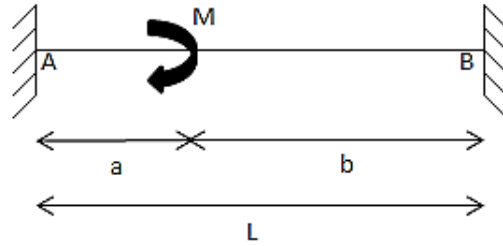
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -P \cos \alpha + \frac{(P \cos \alpha)(b)}{L} + R_{BX} = 0$$

$$R_{BX} = \frac{Pa \cos \alpha}{a+b} = \frac{(P \cos \alpha)(a)}{L} \rightarrow$$

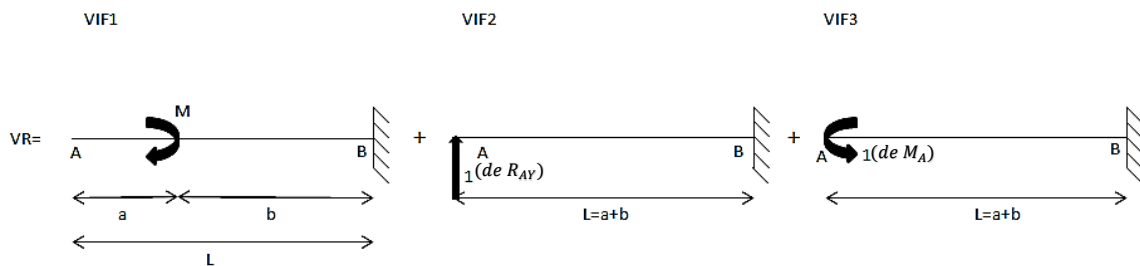
Sumando los resultados de las vigas a y b se obtienen las reacciones de la viga 12.



VIGA 13.



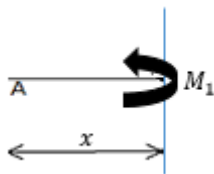
**Principio de Superposición.**



**Incompatibilidades geométricas y coeficientes de flexibilidad.**

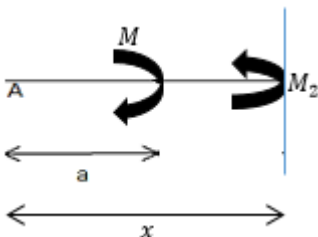
Se formulan los momentos internos  $M$  con base en VIF 1.

$$0 \leq x \leq a$$



$$\begin{aligned} \sum M_{corte} &= 0 \\ M_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$a \leq x \leq a + b$$



$$\begin{aligned} \sum M_{corte} &= 0 \\ -M_2 + M &= 0 \Rightarrow M_2 = M \end{aligned}$$

Se retoman los momentos internos  $m_1$  y  $m_2$  de la viga 11.

$$m_1 \Leftrightarrow M_1 = x \quad 0 \leq x \leq a + b$$

$$m_2 \Leftrightarrow M_1 = -1 \quad 0 \leq x \leq a + b$$

Los desplazamientos y pendientes necesarios son

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^a (0)(x) dx + \int_a^{a+b} (M)(x) dx \right] = \frac{(2a+b)(bM)}{2EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^a (0)(-1) dx + \int_a^{a+b} (M)(-1) dx \right] = -\frac{bM}{2EI}$$

Remítase a la viga 11 y observe que

$$f_{11} = \frac{(a+b)^3}{3EI} \quad f_{21} = -\frac{(a+b)^2}{2EI} \quad f_{12} = -\frac{(a+b)^2}{2EI} \quad f_{22} = \frac{a+b}{EI}$$

**Sistema de ecuaciones de flexibilidades y cálculo de las redundantes.**

En consecuencia,

$$\frac{(2a+b)(bM)}{2EI} + \frac{(a+b)^3}{3EI} R_{AY} - \frac{(a+b)^2}{2EI} M_A = 0$$

$$-\frac{bM}{2EI} - \frac{(a+b)^2}{2EI} R_{AY} + \frac{a+b}{EI} M_A = 0$$

Al resolver el sistema da

$$R_{AY} = -\frac{6Mab}{(a+b)^3} = -\frac{6Mab}{L^3} \Rightarrow \therefore R_{AY} \frac{6Mab}{L^3} \downarrow$$

$$M_A = \frac{-(2a-b)(bM)}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{-(2a-b)(bM)}{(a+b)^2} = \frac{Mb}{L} \left( \frac{b-2a}{L} \right)$$

$$\frac{Mb}{L} \left( \frac{b-2(L-b)}{L} \right) = \frac{Mb}{L} \left( \frac{3b}{L} - 2 \right) \curvearrowright$$

**Ecuaciones de equilibrio.**

Las reacciones restantes desconocidas son

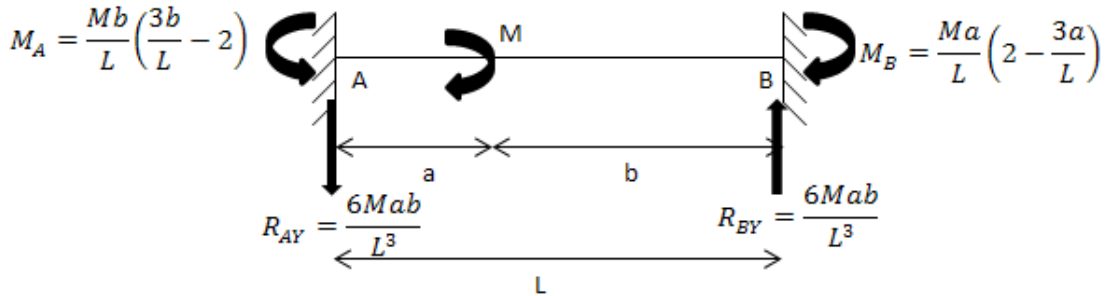
$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow R_{BY} - \frac{6Mab}{L^3} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{6Mab}{L^3} \uparrow$$

$$\curvearrowright \sum M_A = 0$$

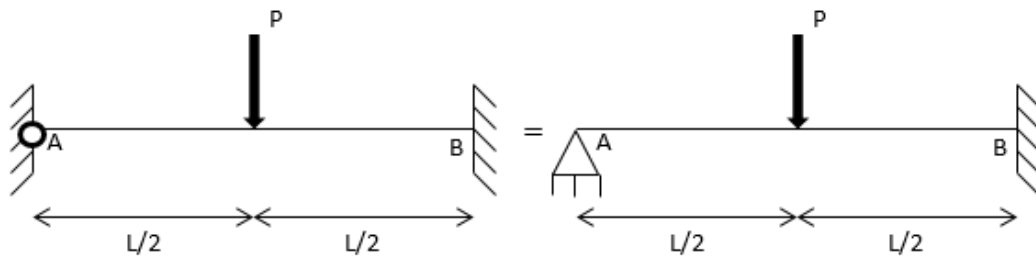
$$-\left(\frac{-(2a-b)(bM)}{a^2+2ab+b^2}\right) + M - \frac{6Mab}{(a+b)^3}(a+b) + M_B = 0$$

$$M_B = \frac{-a(a-2b)M}{(a+b)^2} = \frac{Ma}{L} \left(\frac{-a+2b}{L}\right) = \frac{Ma}{L} \left(\frac{-a+2(L-a)}{L}\right)$$

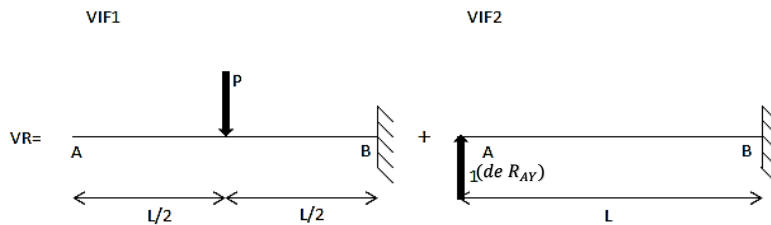
$$= \frac{Ma}{L} \left(\frac{2L-3a}{L}\right) = \frac{Ma}{L} \left(2 - \frac{3a}{L}\right) \curvearrowright$$



VIGA 14.



**Principio de Superposición.**



**Incompatibilidad geométrica y coeficiente de flexibilidad.**

De la viga 1, se retoman los siguientes desplazamientos

$$d_1 = -\frac{5PL^3}{48EI} \quad f_{11} = \frac{L^3}{3EI}$$

**Ecuación de flexibilidad y cálculo de la redundante.**

La ecuación de compatibilidad para la deflexión en  $A$  es

$$d_1 + f_{11}R_{AY} = 0 \quad \text{--- (1)}$$

Efectuando las sustituciones correspondientes tenemos

$$-\frac{5PL^3}{48EI} + \frac{L^3}{3EI}R_{AY} = 0 \quad \text{--- (2)}$$

Al despejar la incógnita se obtiene

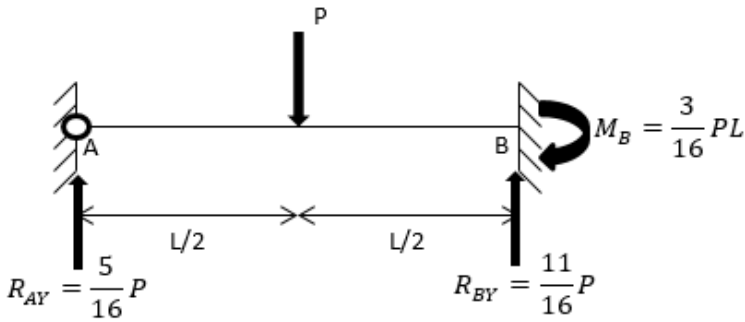
$$R_{AY} = \frac{\frac{5PL^3}{48EI}}{\frac{L^3}{3EI}} = \frac{5}{16}P \uparrow$$

**Ecuaciones de equilibrio.**

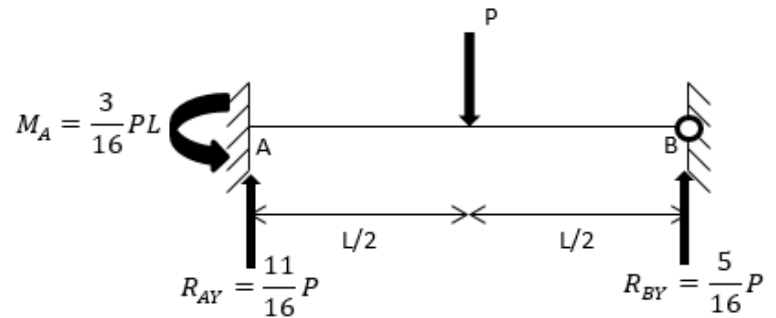
Por lo tanto,

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{5}{16}P - P + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{11}{16}P \uparrow$$

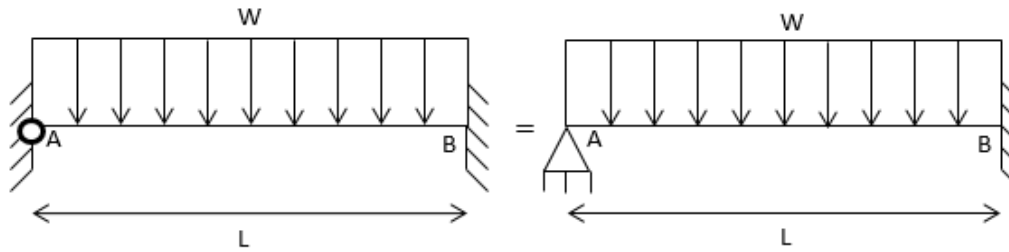
$$\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow P\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{11}{16}P(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{3}{16}PL \curvearrowright$$



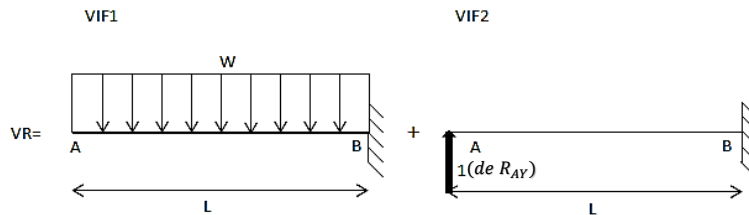
o también



VIGA 15.



**Principio de Superposición.**



**Incompatibilidad geométrica y coeficiente de flexibilidad.**

De la viga 2, se retoman los siguientes desplazamientos

$$d_1 = -\frac{WL^4}{8EI} \quad f_{11} = \frac{L^3}{3EI}$$

**Ecuación de flexibilidad y cálculo de la redundante.**

Al plantear la ecuación lineal

$$-\frac{WL^4}{8EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} = 0 \quad \text{--- (1)}$$

y resolverla, se tiene

$$R_{AY} = \frac{WL^4}{8EI} \Big/ \frac{L^3}{3EI} \Rightarrow R_{AY} = \frac{3}{8} WL \uparrow$$

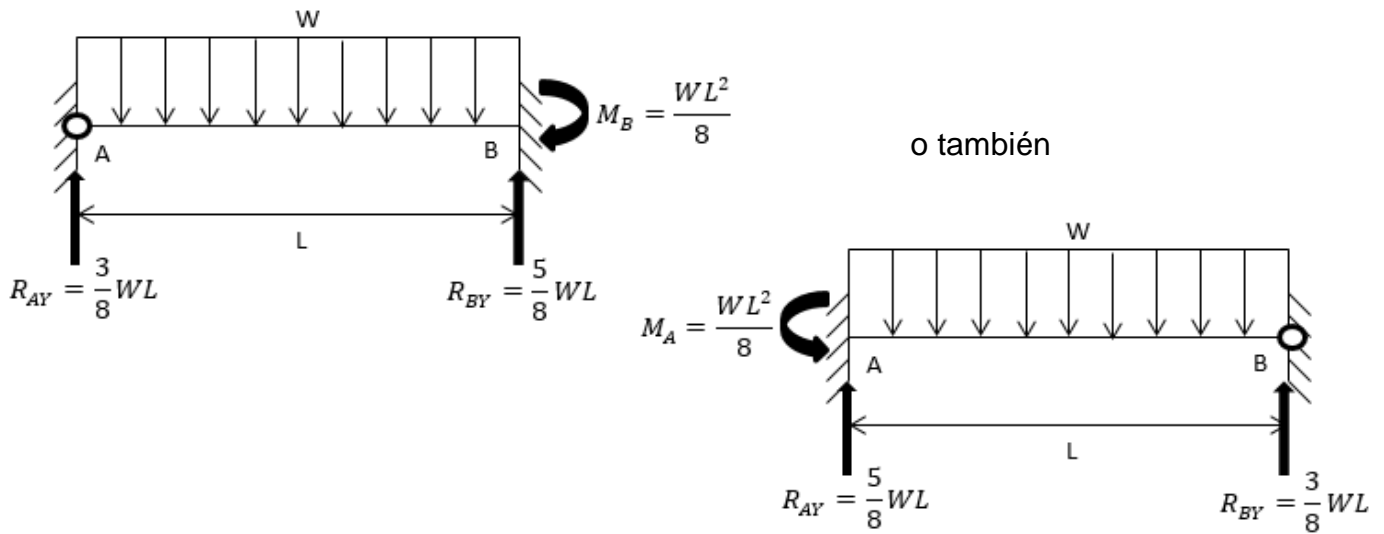
**Ecuaciones de equilibrio.**

Las reacciones desconocidas restantes son

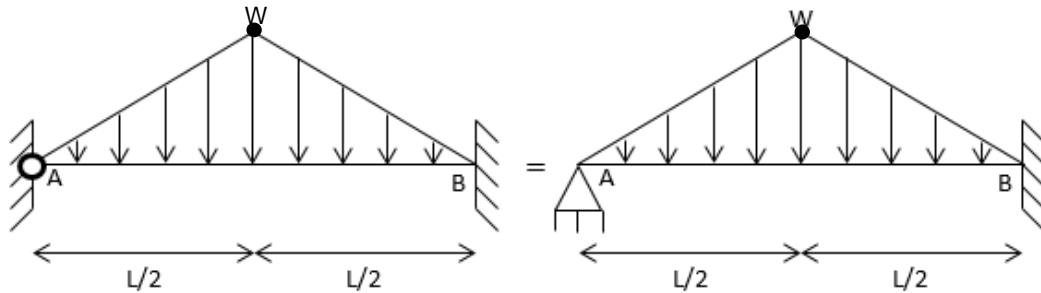
$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow \frac{3}{8} WL - WL + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{5}{8} WL \uparrow$$



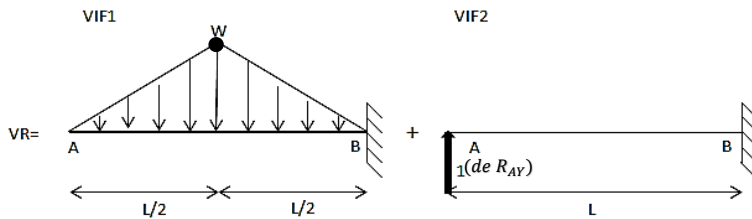
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow WL \left( \frac{L}{2} \right) - \frac{5}{8} WL(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{WL^2}{8}$$



VIGA 16.



**Principio de Superposición.**



**Incompatibilidad geométrica y coeficiente de flexibilidad.**

De la viga 3, se retoman los siguientes desplazamientos

$$d_1 = -\frac{11WL^4}{192EI} \quad f_{11} = \frac{L^3}{3EI}$$

**Ecuación de flexibilidad y cálculo de la redundante.**

Al formular la ecuación de compatibilidad para la deflexión en *A*

$$-\frac{11WL^4}{192EI} + \frac{L^3}{3EI}R_{AY} = 0$$

y resolverla, se tiene

$$R_{AY} = \frac{11WL^4}{192EI} \bigg/ \frac{L^3}{3EI} = \frac{11}{64}WL \uparrow$$

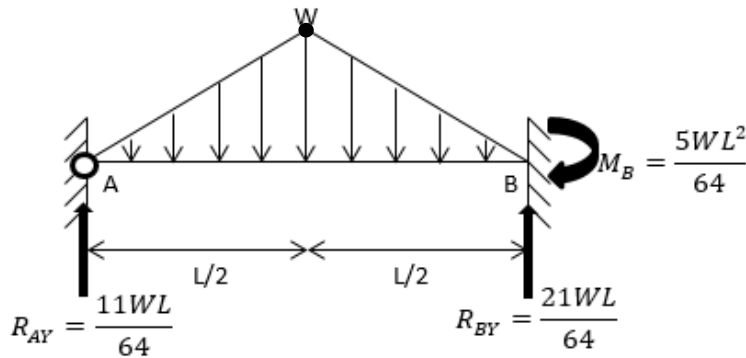
**Ecuaciones de equilibrio.**

Finalmente,

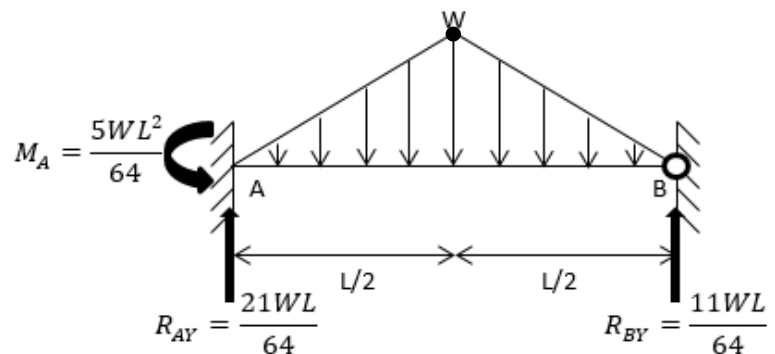
$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow \frac{11}{64}WL - \frac{WL}{2} + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{21}{64}WL \uparrow$$

$$+\curvearrowright \sum M_A = 0$$

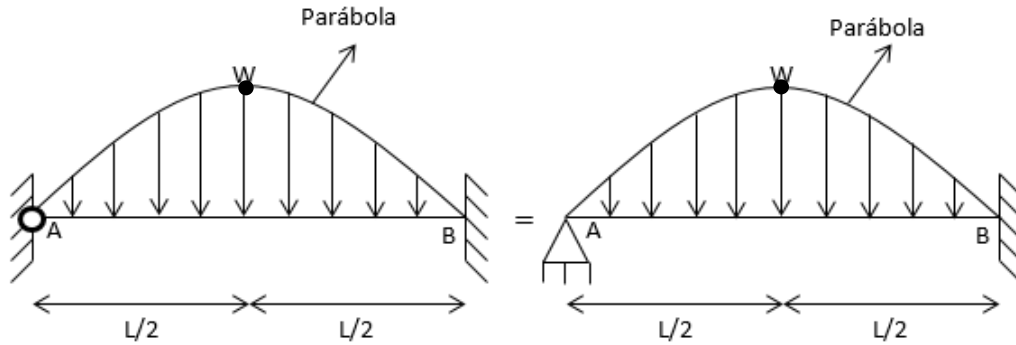
$$\left(\frac{L}{2}\right)(W)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L}{2}\right) + \left(\frac{L}{2}\right)(W)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{L}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)\right) - \frac{21WL}{64}(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{5WL^2}{64} \curvearrowright$$



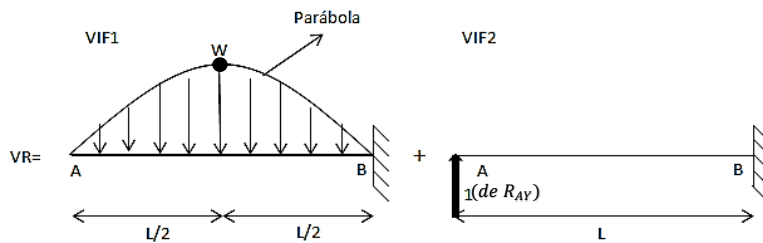
o también



VIGA 17.



**Principio de Superposición.**



**Incompatibilidad geométrica y coeficiente de flexibilidad.**

De la viga 4, se retoman los siguientes desplazamientos

$$d_1 = -\frac{7WL^4}{90EI} \quad f_{11} = \frac{L^3}{3EI}$$

**Ecuación de flexibilidad y cálculo de la redundante.**

Al resolver la ecuación

$$-\frac{7WL^4}{90EI} + \frac{L^3}{3EI}R_{AY} = 0 \quad \text{--- (1)}$$

resulta

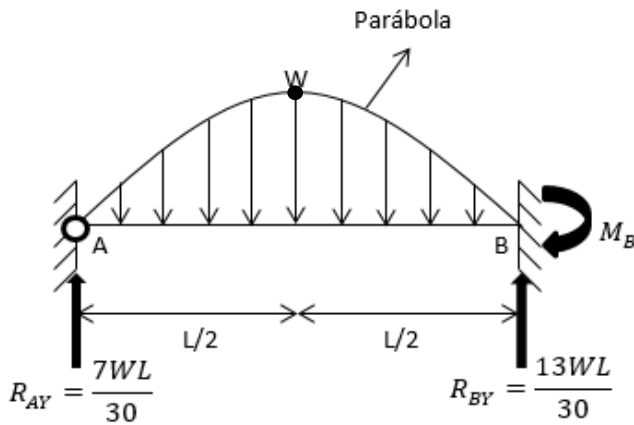
$$R_{AY} = \frac{7WL^4}{90EI} \Big/ \frac{L^3}{3EI} = \frac{7}{30}WL \uparrow$$

**Ecuaciones de equilibrio.**

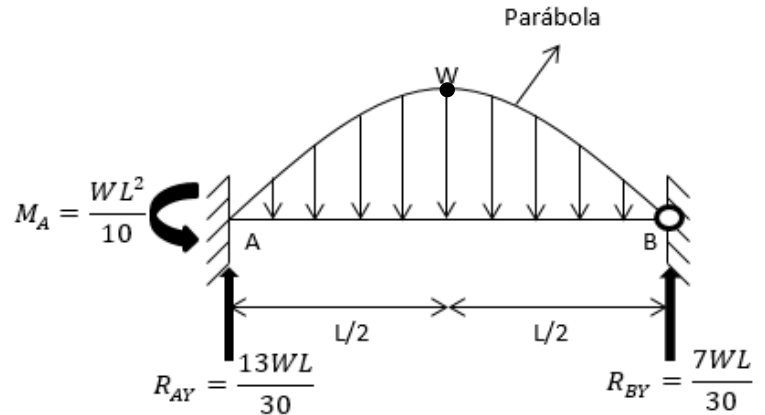
Las fuerzas reactivas en el empotramiento B son

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}WL + \frac{7WL}{30} + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{13}{30}WL \uparrow$$

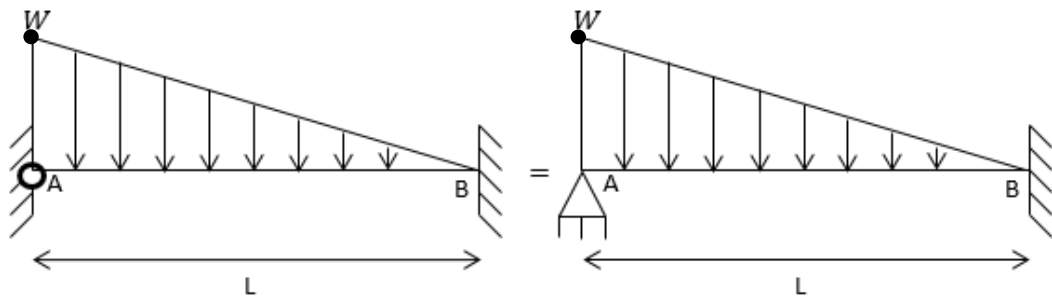
$$+\curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}WL \left(\frac{L}{2}\right) - \frac{13}{30}WL(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{WL^2}{10} \curvearrowright$$



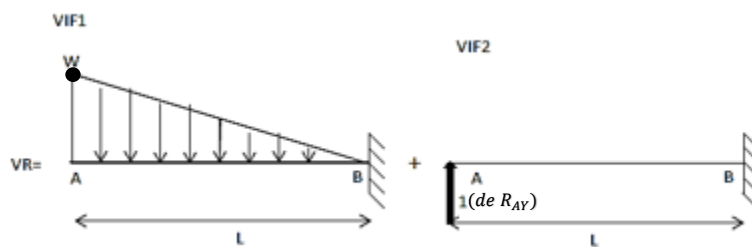
o también



VIGA 18.



**Principio de Superposición.**



**Incompatibilidad geométrica y coeficiente de flexibilidad.**

De la viga 6, se retoman los siguientes desplazamientos

$$d_1 = -\frac{11WL^4}{120EI} \quad f_{11} = \frac{L^3}{3EI}$$

**Ecuación de flexibilidad y cálculo de la redundante.**

Al plantear la ecuación lineal

$$-\frac{11WL^4}{120EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} = 0 \quad \text{--- (1)}$$

y resolverla, obtenemos

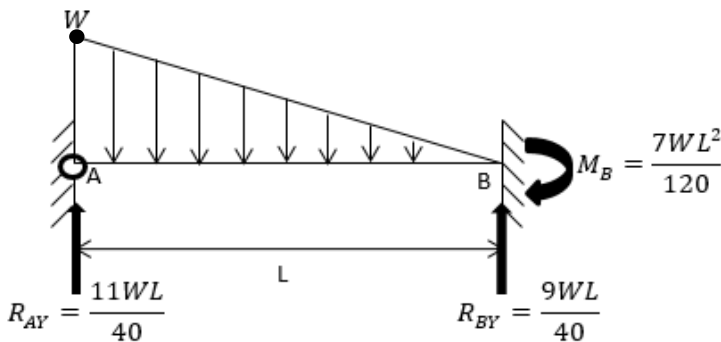
$$R_{AY} = \frac{\frac{11WL^4}{120EI}}{\frac{L^3}{3EI}} = \frac{11}{40} WL \uparrow$$

**Ecuaciones de equilibrio.**

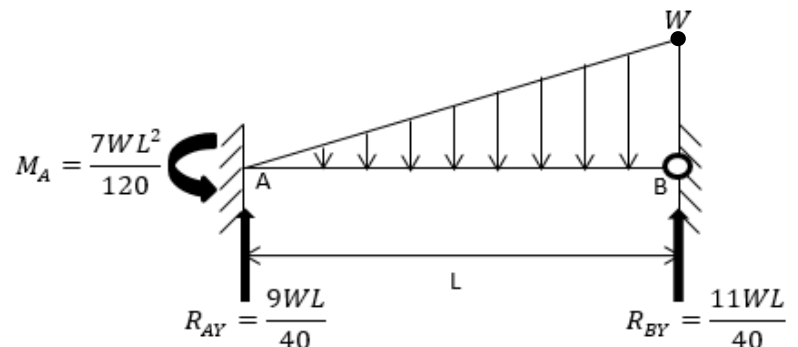
Por lo tanto,

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow -\frac{WL}{2} + \frac{11WL}{40} + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{9}{40} WL \uparrow$$

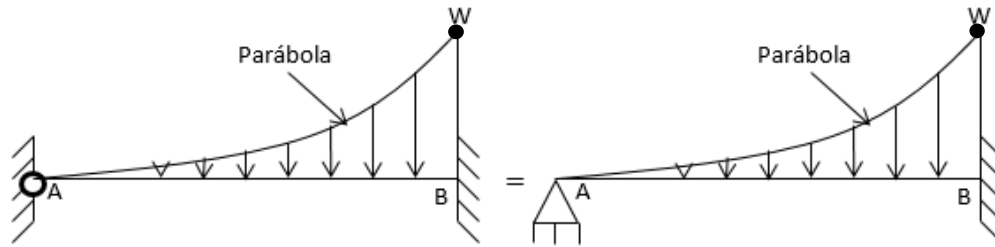
$$\curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{WL}{2} \left(\frac{L}{3}\right) - \frac{9}{40} WL(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{7WL^2}{120} \curvearrowright$$



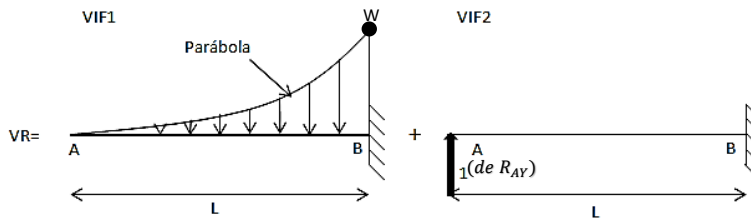
o también



VIGA 19.



**Principio de Superposición.**



**Incompatibilidad geométrica y coeficiente de flexibilidad.**

De la viga 9, se retoman los siguientes desplazamientos

$$d_1 = -\frac{11WL^4}{120EI} \quad f_{11} = \frac{L^3}{3EI}$$

**Ecuación de flexibilidad y cálculo de la redundante.**

Se formula la ecuación de compatibilidad para la deflexión en A.

$$-\frac{WL^4}{72EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} = 0 \quad \text{--- (1)}$$

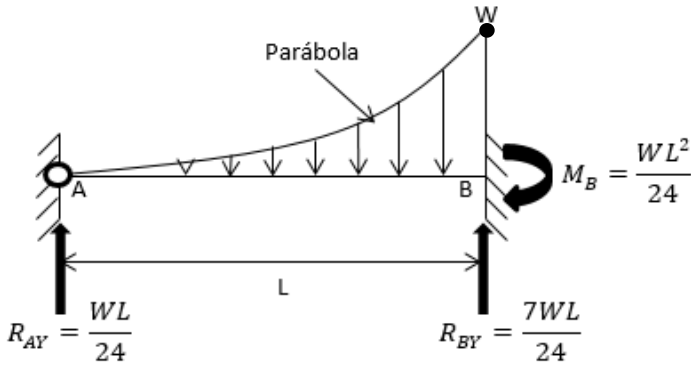
La solución de la ecuación (1) es

$$R_{AY} = \frac{WL^4}{72EI} \cdot \frac{3EI}{L^3} = \frac{1}{24} WL \uparrow$$

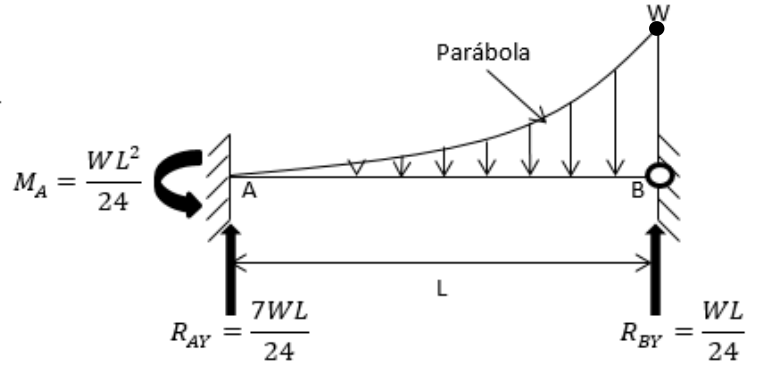
**Ecuaciones de equilibrio.**

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow -\frac{WL}{3} + \frac{WL}{24} + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{7}{24} WL \uparrow$$

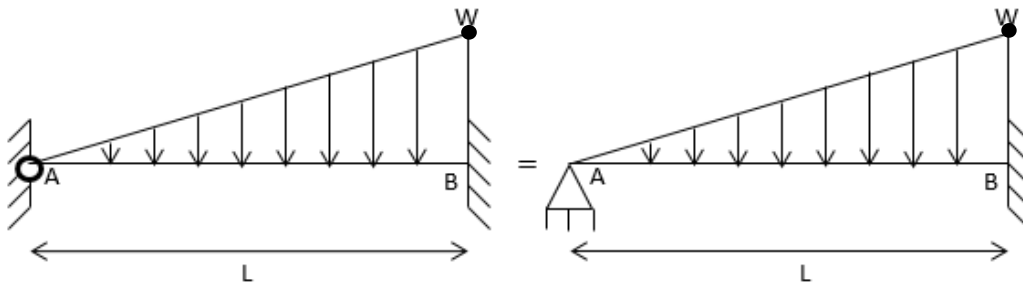
$$+\sum MA = 0 \Rightarrow \frac{WL}{3} \left( \frac{3}{4}L \right) - \frac{7}{24}WL(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{WL^2}{24}$$



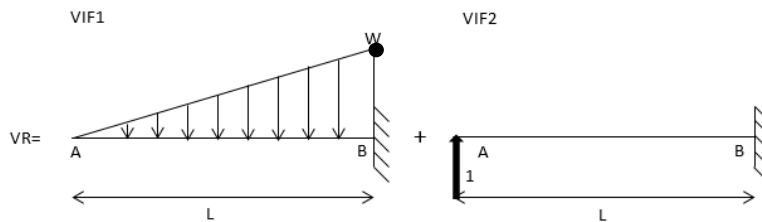
o también



VIGA 20.



**Principio de Superposición.**



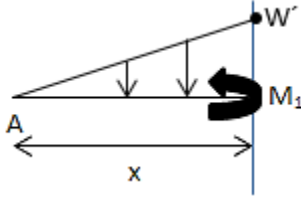
**Incompatibilidad geométrica y coeficiente de flexibilidad.**

Se deduce el momento interno  $M$  con base en VIF 1.

$$0 \leq x \leq L$$

Se calcula la intensidad  $W'$ .

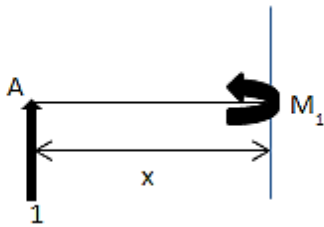
$$\frac{W}{L} = \frac{W'}{x} \Rightarrow W' = \frac{W}{L}x$$



$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_1 - (x) \left( \frac{W}{L}x \right) \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{3}x \right) = 0 \Rightarrow M_1 = -\frac{W}{6L}x^3$$

Se formula el momento interno  $m$  con base en VIF 2.

$$0 \leq x \leq L$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_1 + (1)(x) = 0 \Rightarrow M_1 = x$$

Se requiere de los siguientes desplazamientos

$$d_1 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( -\frac{W}{6L}x^3 \right) (x) dx = -\frac{WL^4}{30EI}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(x) dx = \frac{L^3}{3EI}$$

### Ecuación de flexibilidad y cálculo de la redundante.

Al plantear la ecuación

$$-\frac{WL^4}{30EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} = 0 \text{ --- (1)}$$

y resolverla se tiene

$$R_{AY} = \frac{WL^4}{30EI} \bigg/ \frac{L^3}{3EI} = \frac{1}{10} WL \uparrow$$

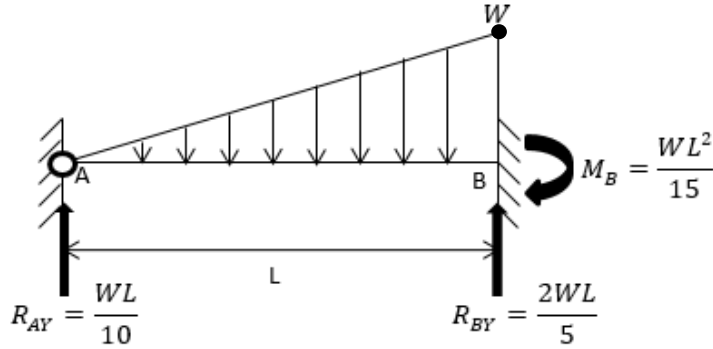


**Ecuaciones de equilibrio.**

Finalmente,

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow -\frac{WL}{2} + \frac{WL}{10} + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{2}{5}WL \uparrow$$

$$+\curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{WL}{2} \left( \frac{2}{3}L \right) - \frac{2}{5}WL(L) + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{WL^2}{15} \curvearrowright$$



o también

