Aplicaciones de las

Ecuaciones Diferenciales

Gloria Aguilar
Natalia Boal
Carmelo Clavero
Francisco Gaspar

Departamento de Matemática Aplicada

Universidad de Zaragoza

Selección de ejemplos obtenidos de los libros de Nagle-Saff, Braun, Finzio-Ladas, Campbell, entre otros.

Trayectorias ortogonales

1. En ingeniería se presenta a menudo el problema geométrico de encontrar una familia de curvas (**trayectorias ortogonales**) que intersequen ortogonalmente en cada punto a una familia dada de curvas. Por ejemplo, es posible que se den las líneas de fuerza y se pida obtener la ecuación de las líneas equipotenciales. Consideremos la familia de curvas descrita por la ecuación $F(x,y)=k$, donde k es un parámetro real.

i) Usando diferenciación implícita, demuestra que, para cada curva de la familia, la pendiente está dada por

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

ii) Usando que la pendiente de una curva ortogonal (perpendicular) a una curva es la inversa de la pendiente de la curva dada, demuestra que las curvas ortogonales a la familia $F(x,y)=k$ satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dx - \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)dy = 0.$$

iii) Utilizando la ecuación diferencial precedente, demuestra que las trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias $x^2+y^2=k$ son rectas que pasan por el origen.

2. Usa el método del problema anterior para encontrar las trayectorias ortogonales de cada familia de curvas dada. Dibuja conjuntamente la familia de curvas y sus trayectorias ortogonales.

$$i)\; xy = k, \quad ii)\; 2x^2 + y^2 = k, \quad iii)\; x^2 - y^2 = k.$$

Problemas de mezclas

3. En los problemas de mezclas se quiere calcular la cantidad de una sustancia, $x(t)$, que hay en un tanque en cada instante de tiempo t. Usando que la derivada de x respecto a t expresa la razón de cambio de la sustancia presente en el tanque, se cumple la relación

$$\frac{dx}{dt} = \text{ velocidad de entrada - velocidad de salida }.$$

Dada la velocidad a la que un fluido que contiene la sustancia entra en el tanque y la concentración de la sustancia, se cumple la relación

$$\text{velocidad de flujo entrante } \times \text{ concentración } = \text{ velocidad de entrada }.$$

Suponiendo que la concentración de la sustancia es uniforme, para calcular la concentración se divide $x(t)$ por el volumen de la mezcla que hay en el instante t. Así,

$$\text{velocidad de flujo saliente } \times \text{ concentración } = \text{ velocidad de salida }.$$

Por ejemplo, en un tanque de 1000 l (litros) una solución salada de salmuera empieza a fluir a velocidad constante de 6 l/min. La solución se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior con velocidad de 6 l/min. Sabiendo que la concentración de salmuera que entra es de 1 Kg/l, calcula cuándo la concentración de sal será de 1/2 Kg/l. Si la velocidad de salida es 5 l/min, determina la concentración de sal en función del tiempo.

4. La corriente sanguínea lleva un medicamento hacia el interior de un órgano a razón de $3cm^3/seg$ y sale de él a la misma velocidad. Se sabe que el volumen del órgano es $125\,cm^3$ y la concentración del medicamento que entra es de $0.2\,g/cm^3$. ¿Cuál es la concentración del medicamento en el órgano si inicialmente no había vestigio alguno del medicamento? ¿Cuándo la concentración será de $0.1\,g/cm^3$?

5. El agua del río Aguadulce fluye hacia el lago Magdalena a razón de 300 gal/min (1 galón es una medida inglesa de capacidad que equivale a 4.5459 litros; en Estados Unidos equivale a 3.7853 litros). El lago Magdalena contiene aproximadamente 100 millones de galones de agua. La fumigación de los naranjales cercanos ha ocasionado que la concentración de plaguicidas en el lago llegue a ser de 35 partes por millón. Si se suspende la aplicación de plaguicidas, ¿cuánto tiempo transcurrirá antes de que la concentración de los mismos en el lago esté por debajo de 10 partes por millón? (Se supone que el río no contiene plaguicidas y que el volumen del lago es constante).

Problemas de crecimiento de población

6. El modelo **malthusiano** de crecimiento de una población $p(t)$ supone que la tasa de crecimiento es proporcional a la población presente. Sabiendo que la población de Estados Unidos en 1790 era de 3.93 millones y en 1800 de 5.31 millones, usa el modelo anterior para conocer la población en función del tiempo. Este modelo supone que la tasa de mortalidad es nula, que desde luego es errónea. Parece natural pensar que la tasa de mortalidad natural también es proporcional al tamaño de la población. No obstante, debido a otros factores de mortalidad (desnutrición, enfermedades, crímenes violentos, etc), se puede suponer que la tasa de mortalidad es proporcional al número de interacciones bipartitas. Para una población de tamaño p, existen $p(p-1)/2$ interacciones de este tipo. Prueba que con esta hipótesis, el PVI que rige el modelo tiene la forma

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2, \quad p(0) = p_0.$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de **ecuación logística**. Calcula la población en función del tiempo. En el caso particular de que la población en 1790 sea de 3.93 millones, en 1840 de 17.07 millones y en 1890 de 62.95 millones, determina la solución usando el modelo logístico.

7. Un modelo de crecimiento de población que se utiliza en predicciones actuariales se basa en la **ecuación de Gompertz**

$$\frac{dp}{dt} = p(a - b\ln p),$$

con a y b constantes reales.

i) Resuelve la ecuación diferencial para calcular $p(t)$.

ii) Si $p(0) = p_0 > 0$, proporciona una fórmula para $p(t)$ en términos de a, b, p_0 y t.

iii) Describe el comportamiento de $p(t)$ cuando $t \to \infty$, considerando los casos $b > 0$ y $b < 0$.

8. Una bola de nieve se derrite de forma que la razón de cambio de su volumen es proporcional al área de su superficie. Si el diámetro inicial de la bola es de 4 pulgadas y al cabo de 30 min. es de 3 pulgadas, ¿cuándo será de 2 pulgadas?, ¿cuando desaparecerá la bola de nieve? Si suponemos que la bola se derrite tal que la razón de cambio de su diámetro es proporcional al área de su superficie, con los mismos datos, ¿cuándo será su diámetro de 2 pulgadas?; en términos matemáticos ¿cuándo desaparecerá la bola de nieve?.

9. Uno de los métodos más precisos para determinar la edad de restos arqueológicos es el **método del carbono 14** (C^{14}), basado en que para cualquier organismo vivo una proporción constante de átomos de carbono está formada por el isótopo radiactivo C^{14}. La proporción permanece prácticamente constante durante toda la vida y cuando el organismo muere el C^{14} sigue su proceso de desintegración, con lo cual la proporción disminuye. Un modelo simple para describir el fenómeno supone que la cantidad de átomos que se desintegran es proporcional a la cantidad de átomos presentes, es decir, se cumple la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t),$$

siendo $N(t)$ la cantidad de C^{14} en una muestra en el tiempo t. Suponiendo que $N(0) = N_0$ calcula la solución del PVI. A $R(t) = \lambda N(t)$ se le llama **tasa de desintegración** y $R(0)$ es la tasa original de desintegración que coincide con la tasa de desintegración de la materia viva. Sabiendo que la edad media del C^{14} (la edad media es el tiempo que debe transcurrir para que se desintegre la mitad de la sustancia) es aproximadamente de 5600 años, resuelve los siguientes casos:

i) El nivel de carbón vegetal extraído en las grutas de Lascaux (Francia) en 1950 dio una medida de 0.91 desintegraciones por minuto y gramo, mientras que la materia viva da 6.68 desintegraciones. Calcula la época en que las grutas estuvieron habitadas.

ii) En la excavación en Ninpur (Babilonia), en 1950 el carbón vegetal de una viga dio 4.09 desintegraciones por minuto y gramo. Suponiendo que este carbón se formó en la época Hamurabi, calcula una fecha probable de la sucesión de Hamurabi.

iii) En una cueva de Sudáfrica se encontró un cráneo humano junto a los restos de una fogata. Los arqueólogos creen que la edad del cráneo es igual a la de la fogata. Sabiendo que solo un 2% de la cantidad original de C^{14} queda en la madera, calcula la edad aproximada del cráneo.

Problemas de calefacción y de enfriamiento de edificios

10. Sea $T(t)$ la temperatura interior de un edificio para el que la razón de cambio de temperatura es la diferencia entre la razón a la que aumenta y la razón a la que disminuye. Suponemos que afectan tres factores en la temperatura. El primero (calor producido por las personas, luces y máquinas) incrementa la temperatura a razón de $H(t)$. El segundo es el calentamiento (enfriamiento) producido por la calefacción (aire acondicionado) a razón de $U(t)$. El tercer factor es el efecto de la temperatura exterior $M(t)$, para el que la razón de cambio es proporcional a la diferencia entre la temperatura exterior y la interior (**ley de Newton del enfriamiento**). Recogiendo todo, la ecuación diferencial que modela el fenómeno es

$$\frac{dT}{dt} = k(M(t) - T(t)) + H(t) + U(t),$$

con k constante real que depende de las propiedades del edificio (número de puertas y ventanas, aislamiento, material, etc); al valor $1/k$ se le llama **constante de tiempo del edificio**. Resuelve la ecuación diferencial para calcular la temperatura en función del tiempo.

i) Si la temperatura exterior es constante $M = 0$ y se cumple $H = U = 0$, escribe la solución sabiendo que $T(t_0) = T_0$ (esto refleja como varía la temperatura del edificio).

ii) Supongamos que H es constante H_0, $U = 0$ (no hay calefacción o enfriamiento) y la temperatura exterior está dada por $M(t) = M_0 - B\cos\omega t$, donde B es una constante real positiva y $\omega = \pi/12$ (onda senoidal de período 24 horas, con mínimo en $t = 0$ (medianoche) y máximo en $t = 12$ (mediodía)). Calcula la solución sabiendo que a medianoche la temperatura es T_0 (esto refleja como varía la temperatura en primavera u otoño cuando no hay calefacción ni aire acondicionado).

iii) En el apartado anterior ii) supongamos que hay un termostato para controlar la temperatura del edificio en relación con la temperatura deseada T_d. Suponiendo que el calentamiento o enfriamiento suministrado es proporcional a la diferencia de temperatura, es decir,

$U(t) = k_u(T_d - T(t))$, calcula $T(t)$ siendo de nuevo $T(0) = T_0$ (esto refleja como varía la temperatura en verano (aire acondicionado) y en invierno (calefacción)).

11. En una mañana, mientras las personas trabajan, la calefacción mantiene la temperatura interior a 21^0C. A mediodía se apaga y se sabe que la temperatura exterior es de 12^0 C durante la tarde. Sabiendo que la constante de tiempo del edificio es de 3 horas, ¿cuándo la temperatura será de 16^0C? Si se dejan abiertas algunas ventanas, la constante de tiempo se reduce a 2 horas; ¿cuándo se alcanzarán ahora los 16^0C?.

12. La **ley de Stefan** de la radiación establece que la razón de cambio de la temperatura de un cuerpo que se encuentra a T grados Kelvin en un medio a M grados Kelvin, es proporcional a $M^4 - T^4$. Plantea y resuelve la ecuación diferencial. Explica por qué las leyes de Newton y Stefan son aproximadamente iguales cuando T se acerca a M y M es constante. (Ayuda: factoriza $M^4 - T^4$).

13. Un vino tinto se saca de la bodega, que es un lugar frío a 10^0C, y se deja reposar en un cuarto con temperatura de 23^0C. ¿En qué momento la temperatura del vino será de 18^0C si transcurren 10 minutos para alcanzar los 15^0C?

Mecánica Newtoniana

14. A un objeto de masa m se le aplica una velocidad inicial dirigida hacia abajo v_0 y cae bajo la acción de la fuerza de la gravedad, que se supone constante, y la fuerza debida a la resistencia del aire que es proporcional a la velocidad. Calcula la ecuación del movimiento del objeto.

15. Un paracaidista cuya peso (masa) es de 100 Kg se deja caer desde un helicóptero situado a 3000 metros. Suponiendo que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad con constante $k_1 = 20$ kg/seg si el paracaídas está cerrado y $k_1 = 100$ kg/seg si está abierto y que el paracaídas se abre transcurridos 30 segundos, ¿cuándo llegará a la superficie?. Si el paracaídas se abre al cabo de 1 minuto, ¿cuándo llegará el paracaidista a la superficie?.

16. Vuelo de un cohete. Un cohete con masa inicial de m_0 Kg se lanza verticalmente desde la superficie de la Tierra. El cohete expele gas a razón de α Kg/seg y a una velocidad constante de β m/seg relativa al cohete. Suponiendo que el campo gravitacional es constante de g kg/seg^2, la segunda ley de Newton da lugar a la ecuación

$$(m_0 - \alpha t)\frac{dv}{dt} - \alpha\beta = -g(m_0 - \alpha t),$$

donde $v = dx/dt$ es la velocidad del cohete, x es su altura respecto de la superficie de la Tierra y $m_0 - \alpha t$ es la masa del cohete a los t segundos del lanzamiento. Sabiendo que la velocidad inicial es cero, resuelve la ecuación anterior para calcular la velocidad y altura del cohete para $0 \leq t \leq m_0/\alpha$.

Problemas de reacciones químicas

17. Se considera una reacción química que ocurre en una solución bien mezclada. Se supone que la reacción es irreversible, mientras que la temperatura y el volumen son constantes. Al inicio, la reacción incluye dos reactivos A, B y un producto E; se supone que una molécula de A y una de B producen una de E. Sean a, b las concentraciones en el tiempo t de A y B respectivamente. Sabiendo que se satisface la **ley de acción de masas** que establece que la tasa instantánea de producción de un producto por unidad de volumen es proporcional al producto de las concentraciones de los reactivos, prueba que el PVI es

$$\frac{dx}{dt} = k(a(0) - x)(b(0) - x), \quad x(0) = 0,$$

donde k es la **constante de reacción** y $a(0), b(0)$ son conocidos. Resuelve en el caso que $a(0) = 3, b(0) = 1$ mol/l y $k = 1$ l/mol.s. Interpreta el resultado.

18. Supongamos que dos tanques A, B de volúmenes V_1, V_2 están separados por una frontera, a través de la cual una sustancia fluye proporcionalmente (con constante k) de la diferencia de concentraciones $C_1 - C_2$. Calcula la concentración en función del tiempo en cada tanques.

Aplicaciones de las EDO de segundo orden

19. Consideremos un sistema mecánico que consiste de un resorte (muelle) en espiral suspendido de un soporte rígido con una masa sujeta al extremo (ver figura 1). Para analizar el fenómeno usamos dos leyes: **ley de Hooke** y la **segunda ley de Newton**. La ley de Hooke establece que el resorte ejerce una fuerza de restitución opuesta a la dirección de alargamiento del resorte (peso=kl donde k es la constante de restitución y l es el alargamiento hasta la posición de equilibrio). Para aplicar la ley de Newton, hay que tener en cuenta que sobre la masa m actúa la fuerza de la gravedad (mg, g vale $9.8m/seg^2$), la fuerza de restitución ($-kx - mg$ donde x es el alargamiento), la fuerza de amortiguación que es proporcional a la velocidad de la masa ($-b(dx/dt)$ con b la constante de amortiguación) y las fuerzas externas ($f(t)$). Así, la ecuación diferencial que resulta es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = f(t).$$

Si $b = 0$ el sistema es **no amortiguado**; en otro caso se dice **amortiguado**. Si $f(t) = 0$ se dice **libre**; en otro caso se dice **forzado**. Sabiendo esto, resuelve los siguientes casos.

i) Una masa de 5 Kg se sujeta de un resorte y ocasiona un estiramiento de 0.5 m. A continuación se tira de la masa 0.1 m abajo del punto de equilibrio y se le aplica una velocidad dirigida hacia arriba de 0.1 m/seg. Calcula la ecuación del movimiento armónico simple de la masa. ¿Cuando alcanzará la masa por primera vez su mínima altura después de haberse puesto en movimiento?

ii) Una masa de 2 kg estira un resorte 49 cm al llegar al reposo en equilibrio. La constante de amortiguación es $8\sqrt{5}N \cdot seg/m$. Si la masa se tira 10 cm hacia abajo del punto de equilibrio y se le aplica una velocidad de 2 m/seg dirigida hacia abajo, ¿cuál es el desplazamiento máximo que alcanzará a partir de la posición de equilibrio?

iii) Una masa de 2 kg estira un resorte 20 cm al llegar al reposo en equilibrio. La constante de amortiguación es $5N \cdot seg/m$. En $t = 0$ la masa se desplaza 5 cm hacia abajo y se suelta. En el mismo instante se aplica una fuerza externa $f(t) = 0.3 \cos t$ N al sistema. Calcula la ecuación de movimiento de la masa.

Sabiendo que la **frecuencia de resonancia** del sistema es $\gamma_r/2\pi$ donde

$$\gamma_r = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}},$$

determina la frecuencia de resonancia del sistema. Se dice que un sistema está en **resonancia** cuando es estimulado por una fuerza externa cuya frecuencia coincide con la frecuencia de resonancia del sistema. En el caso de que la constante de amortiguamiento sea pequeña, si la fuerza externa tiene una frecuencia cercana a la frecuencia del sistema, el sistema está sujeto a grandes oscilaciones. Estas grandes vibraciones son las que preocupan a los ingenieros, puesto que pueden ocasionar que las alas de los aviones se rompan, los puentes se desplomen o (menos importante) que las copas de vidrio se hagan añicos.

20. Se considera un servomecanismo que modela a un piloto automático. Si $y(t)$ es la dirección real de la nave en el instante t y $g(t)$ la dirección deseada, entonces el error o desviación es

$e(t) = y(t) - g(t)$. La segunda ley de Newton, expresada en términos de momentos de las fuerzas proporciona la ecuación

$$Iy''(t) = -ke(t),$$

donde I es el momento de inercia del eje del timón y k es una constante positiva. Calcula el error cuando $g(t) = at$ con a constante, sabiendo que el eje del timón se encuentra inicialmente en reposo. Supongamos ahora que para controlar las oscilaciones se suministra al eje del timón una fuerza giratoria proporcional a $e'(t)$, pero de signo opuesto. Prueba que ahora la ecuación diferencial es

$$Iy''(t) = -ke(t) - \mu e'(t),$$

donde μ es una constante positiva. Determina ahora el error sabiendo que $g(t) = a$ con a constante y de nuevo el eje del timón se encuentra inicialmente en reposo.

21. Consideremos un circuito eléctrico elemental que consta de una fuerza electromotriz (batería o generador), una resistencia, una bobina y un condensador en serie (ver figura 2). Estos circuitos se rigen por dos principios físicos: la conservación de la carga eléctrica y la conservación de la energía. Las leyes que formulan estos principios son las **leyes de Kirchoff** que establecen:

i) La corriente I que pasa a través de cada elemento de un circuito en serie debe ser la misma.

ii) La suma algebraica de los cambios instantáneos de potencial (caída de voltaje) en un circuito cerrado debe ser cero.

En cada elemento la caída de voltaje es la siguiente:

a) Según la **ley de Ohm**, la caída de voltaje en una resistencia es proporcional a la corriente I que pasa por ella, es decir, $E_R = RI$ donde R es la **resistencia**.

b) Según las **leyes de Faraday y Lenz**, la caída de voltaje en una bobina es proporcional a la razón de cambio instantánea de la corriente I que pasa por ella, es decir, $E_L = L\dfrac{dI}{dt}$ donde L es la **inductancia**.

c) La caída de voltaje en un condensador es proporcional a la carga eléctrica q del condensador, es decir, $E_C = \dfrac{1}{C}q$ donde C es la **capacitancia** y $\dfrac{1}{C}$ es la **elastancia**.

Se sabe que la carga y la corriente están relacionadas por $I = \dfrac{dq}{dt}$. Así, la ecuación diferencial que rige el modelo es

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t),$$

donde $E(t)$ es el voltaje aplicado por la fuerza electromotriz., o en términos de la corriente

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE(t)}{dt}.$$

A partir de esto calcula la corriente (amperios) y la carga (culombios) en los siguientes casos; en todos ellos analiza la solución.

i) La resistencia es de 0.02 ohmios, la inductancia es de 0.001 henrios, la capacitancia es de 2 faradios, la fuerza electromotriz es $E(t) = \mathrm{sen}(100t)$ voltios y la corriente y carga inicial son cero.

ii) La resistencia es de 120 ohmios, la inductancia es de 4 henrios, la capacitancia es de 2200^{-1} faradios, la fuerza electromotriz es $E(t) = 10\cos(2t)$ voltios y la corriente y carga inicial son cero.

iii) La resistencia es de 10 ohmios, la inductancia es de 4 henrios, la capacitancia es de 0.01 faradios, la fuerza electromotriz es $E(t) = E_0\cos\gamma t$ voltios con E_0, γ constantes y la corriente y carga inicial son cero.

22. En el diseño de una planta de tratamiento de aguas residuales, se propuso el siguiente PVI

$$60 - H = 77.8H'' + 19.42(H')^2, \quad H(0) = H'(0) = 0,$$

donde $H(t)$ es el nivel del fluido en una cámara de eyección y t es el tiempo en segundos. Usa el método de Euler para aproximar $H(t)$ en $[0,5]$.

Aplicaciones de los sistemas de EDO

23. Un material radiactivo A se descompone de acuerdo a la reacción $A \to B \to C$ con constantes k_1 y k_2 respectivamente, siendo B, C el producto intermedio y final respectivamente. Prueba que el sistema diferencial es

$$\frac{dC_A}{dt} = -k_1 C_A,$$
$$\frac{dC_B}{dt} = k_1 C_A - k_2 C_B,$$
$$\frac{dC_C}{dt} = k_2 C_B,$$

con C_A, C_B, C_C las concentraciones de las tres sustancias. Sabiendo que $k_1 = 3, k_2 = 1, C_A(0) = 1, C_B(0) = C_C(0) = 0$, calcula las concentraciones en función del tiempo. Representa la concentración de las 3 sustancias en $[0,10]$.

24. En una reacción química intervienen 3 sustancias A, B, C. Se sabe que la constante de paso de A a B es k_1, de B a A es k_2, de B a C es k_3 y de C a B es k_4. Calcula la concentración de cada sustancia, sabiendo que $k_1 = 1, k_2 = 0, k_3 = 2, k_4 = 3, C_A(0) = 1, C_B(0) = C_C(0) = 0$, y representa la concentración de las 3 sustancias en $[0,10]$.

25. En el estudio de la fermentación cinética que permite generar penicilina, la ley logística

$$\frac{dy_1}{dt} = k_1 y_1 (1 - y_1/k_2),$$

ha sido usada para describir la dinámica de crecimiento. El término $(1 - y_1/k_2)$ incluye los efectos del cese de crecimiento por falta de nutriente. Se sabe que el grado de producción de penicilina satisface la ecuación

$$\frac{dy_2}{dt} = k_3 y_1 - k_4 y_2,$$

es decir, es proporcional al grado de concentración de células y se degrada por hidrólisis. Resuelve el modelo en el intervalo $[0,12]$ usando el método de Euler e interpreta los resultados sabiendo que $k_1 = 0.0312, k_2 = 47.7, k_3 = 3.374, k_4 = 0.01268, y_1(0) = 5, y_2(0) = 0$.

26. La conversión de glucosa a ácido glucónico es una simple oxidación producida por un microorganismo en un proceso de fermentación. El mecanismo del proceso de fermentación es

$$\begin{array}{l} \text{glucosa} + \text{células} \to \text{células} \quad \text{(crecimiento celular)}\ , \\ \text{glucosa} + O_2 \to \text{gluco...} + H_2O_2 \quad \text{(oxidación)}\ , \\ \text{gluco...} + H_2O \to \text{ácido glucónico} \quad \text{(hidrólisis)}\ , \\ H_2O_2 \to H_2O + \frac{1}{2}O_2 \quad \text{(descomposición)}\ . \end{array}$$

Un modelo está dado por

$$\frac{dy_1}{dt} = b_1 y_1 (1 - y_1/b_2),$$
$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{b_3 y_1 y_4}{b_4 + y_4} - 0.9082 b_5 y_2,$$
$$\frac{dy_3}{dt} = b_5 y_2,$$
$$\frac{dy_4}{dt} = -1.011 \left(\frac{b_3 y_1 y_4}{b_4 + y_4} \right),$$

donde y_1 es la concentración de células, y_2 es la concentración de gluco..., y_3 es la concentración de ácido glucónico, y_4 es la concentración de glucosa y $b_i, i = 1, \cdots, 5$ son parámetros. Sabiendo que $b_1 = 0.949, b_2 = 3.439, b_3 = 18.72, b_4 = 37.51, b_5 = 1.169, y_1(0) = y_4(0) = 5, y_2(0) = y_3(0) = 0$, resuelve el modelo en el intervalo $[0, 9]$ usando el método de Euler e interpreta los resultados.

27. Sobre una superficie lisa horizontal se sujeta una masa de 2 Kg a una superficie vertical por un medio de un resorte cuya constante es de 4 N/m. Otra masa de 1 kg se conecta al primer objeto mediante un resorte con constante 2 N/m (ver figura 3). Sabiendo que los objetos se desplazan 3 m hacia la derecha de sus posiciones de equilibrio y luego se sueltan, comprueba que el sistema diferencial que rige el modelo es

$$\begin{aligned}
&2\frac{d^2x}{dt^2} + 6x - 2y = 0,\\
&\frac{d^2y}{dt^2} + 2y - 2x = 0,\\
&x(0) = y(0) = 3, \quad \frac{dx}{dt}(0) = \frac{dy}{dt} = 0.
\end{aligned}$$

Calcula un sistema diferencial de primer orden equivalente al dado. Resuelve el problema, representa la solución e interpreta los resultados.

28. Se considera el circuito eléctrico dado en la figura 4. Demuestra que el sistema diferencial que rige el modelo es

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{9}I_1 + 64I_2'' = -2 \text{ sen } \frac{t}{24},\\
&\tfrac{1}{64}I_3 + 9I_3'' - 64I_2'' = 0,\\
&I_1 = I_2 + I_3,
\end{aligned}$$

donde $I_1.I_2, I_3$ son las intensidades que circulan por las distintas ramas de la red.

i) Elimina I_1, I_3 del sistema para probar que se cumple

$$(9^2)(64^2)I_2^{(4)} + (82)(64)I_2'' + I_2 = 0.$$

ii) Resuelve el problema de ii). A partir de la solución de ii) calcula I_1, I_3.

29. Calcula el sistema diferencial y las condiciones iniciales asociadas a los circuitos de las figuras 5 y 6, suponiendo que las corrientes iniciales son todas cero. Resuelve el problema para obtener las corrientes que circulan por cada rama.

30. Dos grandes tanques de 100 galones cada uno se encuentran interconectados por medio de tubos. El líquido fluye del tanque A hacia el tanque B a razón de 3 gal/min. y de B a A a razón de 1 gal/min. El líquido contenido en cada tanque permanece bien agitado. Una solución de salmuera con una concentración de 2 lb/gal de sal fluye hacia el tanque A a razón de 6 gal/min. La solución (diluida) fluye hacia afuera del sistema del tanque A a razón de 4 gal/min y del tanque B a razón de 2 gal/min. Si inicialmente el tanque A contiene sólo agua y el tanque B contiene 200 lb de sal (1 libra equivale a 456.3 gramos), demuestra que el sistema diferencial que rige el modelo es

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = 12 + \frac{1}{100}y - \frac{7}{100}x,\\
&\frac{dy}{dt} = \frac{3}{100}x - \frac{3}{100}y,\\
&x(0) = 0,\ y(0) = 200.
\end{aligned}$$

Resuelve el problema, representa las soluciones e interpreta los resultados.

Supongamos ahora que la solución no fluye de B hacia afuera, que solamente 1 gal/min fluye de A a B y que sólo 4 gal/min de salmuera fluyen hacia el interior del sistema por el tanque

A. Manteniendo los restantes datos iguales, resuelve el problema, representa las soluciones e interpreta los resultados.

31. Un famoso experimento de física llevado a cabo por Thomson para determinar la proporción de carga respecto a la masa m para un electrón, usa las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} + He\frac{dy}{dt} &= Ee, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} - He\frac{dx}{dt} &= 0, \end{aligned}$$

donde H es la intensidad del campo magnético y E es la intensidad del campo eléctrico que se han aplicado.

i) Transforma el sistema anterior en un sistema equivalente de primer orden.

ii) Resuelve para el caso particular $H = 4, e = 1, m = 2, E = 6$.

iii) Resuelve usando transformada de Laplace, suponiendo que $H = 1/4, e = 4, m = 1, E = 2$ con condiciones iniciales $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 1$

Proyectos asociados a ecuaciones diferenciales

32. (**Linealización de problemas no lineales**). Un planteamiento útil para analizar una ecuación no lineal consiste en estudiar su **ecuación linealizada**, la cual se obtiene reemplazando los términos no lineales mediante aproximaciones lineales.

i) Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \operatorname{sen} \theta = 0,$$

que rige el movimiento de un péndulo simple, se aproxima por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \theta = 0.$$

Resuelve el problema lineal con $\theta(0) = \pi/12$, $\theta'(0) = 0$. Esta solución es una aproximación a la solución del problema no lineal

ii) Da una linealización del PVI

$$x''(t) + 0.1\left(1 - x^2(t)\right)x'(t) + x(t) = 0, \quad x(0) = 0.5,\ x`(0) = 0.$$

Resuelve el problema lineal planteado.

33. (**Limpieza de los grandes lagos**). Supongamos que cada uno de los 5 grandes lagos de Estados Unidos se considera como un depósito que contiene un líquido en el que se encuentra disuelto un contaminante (DDT, fósforo, mercurio). Suponemos que el volumen de cada lago es constante, las velocidades de flujo de agua son constantes durante todo el año, cuando un líquido entra en un lago se produce una mezcla perfecta y que los contaminantes están disueltos en el agua y entran o salen de los lagos por medio de afluencias o corrientes.

i) Usa las velocidades de las corrientes salientes dadas en la figura 7 para calcular el tiempo que llevaría "vaciar" cada lago. Esto proporciona una cota inferior para el tiempo que llevaría eliminar todos los contaminantes.

b) Para mejorar el resultado, suponemos que cada lago es un depósito separado al que fluye solamente agua limpia. Con este planteamiento calcula el tiempo necesario para que el nivel de contaminación en cada lago se reduzca a la mitad y al 5 por ciento del nivel original.

c) Par tener en cuenta que la contaminación fluye de un lago al siguiente, usa el modelo compartimental de la figura 7 para calcular cuando el nivel de contaminación en cada lago se reduce a la mitad suponiendo que la contaminación ha cesado, es decir, las afluencias que no provienen de ninguno de los lagos son de agua limpia. Suponiendo que todos los lagos tienen la misma concentración original de contaminación p, ¿cuánto tardará en reducirse la contaminación al 5 por ciento del nivel original?.

Problemas asociados a EDP

34. La conducción de calor a lo largo de una tubería completamente aislada de longitud 1 metro, por la que circula agua a una velocidad de 1 m/s y cuyos extremos izquierdo y derecho se mantiene a temperatura constante de 0^0C y 1^0C respectivamente, está modelada por el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < 1,\, t > 0, \\ u(0,t) = 0,\, t \geq 0, \\ u(1,t) = 1,\, t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x),\, 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{1}$$

donde $u(x,t)$ es la temperatura en el instante t, x es la posición, k es la constante de transmisividad calorífica del agua y $f(x)$ es la distribución de temperaturas en $t = 0$.

i) Calcula $\phi(x)$ tal que $v(x,t) = u(x,t) - \phi(x)$ sea solución de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - k\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < 1,\, t > 0, \\ v(0,t) = 0,\, t \geq 0, \\ v(1,t) = 0,\, t \geq 0, \\ v(x,0) = g(x),\, 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{2}$$

donde $g(x) = f(x) - \phi(x)$ y $u(x,t)$ es la solución de (1)

ii) Resuelve el problema (2) cuando $k = 1, g(x) = (1-x)e^{x/2}$.

35. Se desea estudiar el movimiento vibratorio de una cuerda de longitud 1 fijada por sus extremos, amortiguado por la acción del rozamiento del aire. Llamando $u(x,t)$ al desplazamiento de la cuerda de cada punto x en el instante t respecto de su posición de equilibrio, el fenómeno está modelado por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2c\dfrac{\partial u}{\partial t} = k^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1,\, t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\, t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x),\, 0 \leq x \leq 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\, 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{3}$$

donde c es una constante que depende del rozamiento y k es una constante que depende de la elasticidad y tensión de la cuerda.

i) Resuelve (3) cuando $c < k$ y $f(x) = \operatorname{sen} \pi x + \operatorname{sen} 3\pi x \cos \pi x$.

ii) Si $c = 1/2$, $k = 1$ calcula T tal que

$$\|u(x,t)\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{2}\|f(x)\|_{L^2(0,1)}, \quad \forall\, t \geq T.$$

36. La transmisión de impulsos eléctricos en un cable largo con una distribución de capacitancia, inductancia y resistencia, viene modelada por la **ecuación de los telegrafistas**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial u}{\partial t} + bu - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\, a, b, c \in \mathbf{R}, c > 0, 0 < x < \pi,\, t > 0.$$

Calcula la solución formal del problema anterior cuando las condiciones iniciales y de contorno son

$$\begin{aligned}
&u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \geq 0,\\
&u(x,0) = 0,\ 0 \leq x \leq \pi,\\
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 \leq x \leq \pi.
\end{aligned}$$