Métodos Operativos de Cálculo Integral

Fausto Cervantes Ortiz

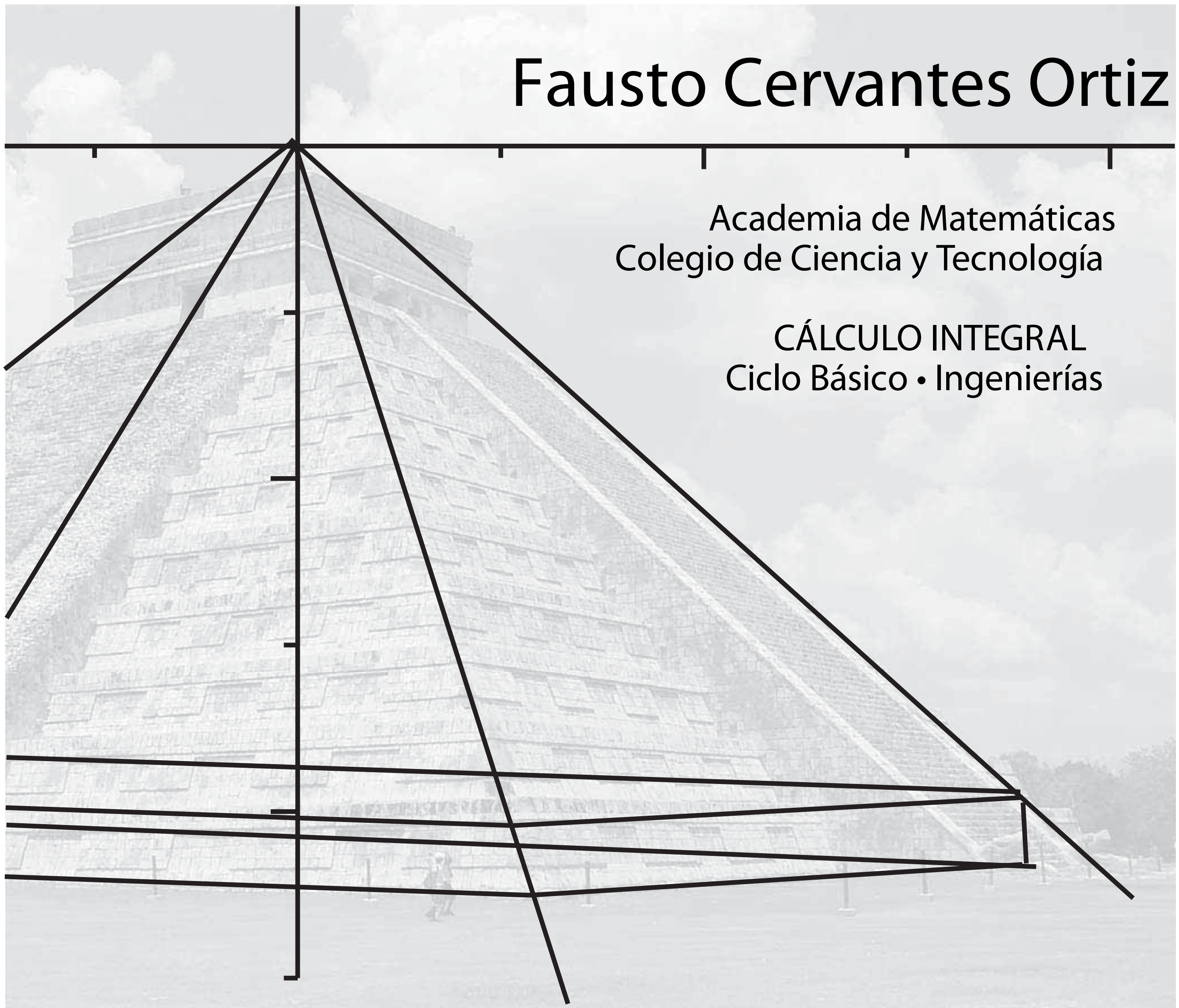
UACM
Universidad Autónoma de la Ciudad de México
Nada humano me es ajeno

Métodos operativos de cálculo integral

Fausto Cervantes Ortiz

Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Métodos Operativos de Cálculo Integral



Fausto Cervantes Ortiz

Academia de Matemáticas
Colegio de Ciencia y Tecnología

CÁLCULO INTEGRAL
Ciclo Básico • Ingenierías

UACM
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
Nada humano me es ajeno

D.R. Universidad Autónoma de la Ciudad de México
Av. División del Norte 906, Col. Narvarte Poniente,
Delegación Benito Juárez, C.P. 03020, México, D.F.

Academia de Matemáticas del Colegio de Ciencia y Tecnología de la UACM
Ciclo Básico para Ingenierías

ISBN:

Fotografía de la portada:

*La pirámide de Kukulcán,
en la zona arqueológica de Chichén Itzá,
en Yucatán, México.*

Tomada de en.wikipedia.org

Diseño de Portada: Aarón Aguilar
Diagramas del texto elaborados por el autor

matsedusuacm@gmail.com

Material educativo universitario de distribución gratuita. Prohibida su venta.
Hecho e impreso en México / *Printed in Mexico*

Introducción

La experiencia del autor como docente de Matemáticas en la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, lo llevó a detectar una queja constante entre sus alumnos: *entiendo la teoría, pero no sé cómo empezar a resolver los ejercicios.*

Pensando en ofrecer a los estudiantes una herramienta de enfoque práctico, surge la escritura de este libro, propuesta que, dentro de su metodología, omite las demostraciones de las fórmulas, mientras que ilustra el contenido de los teoremas en forma numérica o gráfica siempre que es posible. De esta forma, se prevé que resulte más útil al estudiante observar directamente en una gráfica que el teorema del valor medio establece que la integral es un área comprendida entre dos rectángulos, que tener en algún lugar del cuaderno la demostración rigurosa por medio de sumas de Riemann y límites. En cuanto a su abundancia en ejercicios y problemas prácticos se pretende que, cuando el universitario necesite aplicar la integral para calcular cantidades físicas en sus cursos correspondientes, tenga familiaridad con el tema y se sienta más seguro en su trabajo.

El primer capítulo presenta brevemente la definición y las propiedades de la integral. Estas propiedades no se demuestran, pero se ilustran en lo posible para que el alumno comprenda el contenido conceptual involucrado.

En el capítulo 2, se explican los métodos de integración más comúnmente encontrados en los tratados de Cálculo, métodos que se abordan de forma directa para que el estudiante proceda de inmediato a su aplicación. No se incluye en el mismo capítulo lo referente a los límites de sumas, ya distraería del tema principal; sin embargo, la información se encuentra en un apartado al final del libro.

El capítulo 3, sin embargo, presenta métodos que usualmente no se encuentran en la bibliografía tradicional, por lo cual tampoco es común que se expongan en los cursos habituales. Esto hizo que se les dedicara un capítulo especial, mismo puede considerarse optativo por aquellos estudiantes que así lo consideren.

El capítulo 4 relaciona los contenidos teóricos con la práctica profesional. En él se incluyen problemas reales y ejercicios de aplicación, con un enfoque interdisciplinario hacia otras asignaturas de la Ingeniería. Con esto se pretende que el estudiante encuentre un sentido práctico en la información y su aprendizaje le sea significativo.

Finalmente, el capítulo 5 expone una introducción a las series, las que serán útiles al estudiante en cursos posteriores para integrar ecuaciones diferenciales.

El autor desea agradecer a aquellos estudiantes y profesores que leyeron versiones anteriores, con lo que ayudaron a localizar inconsistencias en el texto y los ejercicios, además de haber hecho sugerencias interesantes y muy útiles. En particular se agradece a Fernando Martínez, Rafael Torres y Arturo Criollo (UAM-I). Sin embargo, las erratas que aún persistan, serán la absoluta responsabilidad del autor y se agradecerá a los lectores que se sirvan señalarlas, así como proporcionar sus sugerencias y aportaciones. Para ello pueden contactar al autor a través de la dirección electrónica `fausto.cervantes@uacm.edu.mx` , y/o en el cubículo E-256 del Plantel San Lorenzo Tezonco.

Muchas personas ayudaron a que este libro llegara a ser publicado después de un largo camino. En especial se agradece a Ana Beatriz Alonso por todo el apoyo editorial brindado.

Se espera que este material sea útil a todos los lectores; pero sobre todo a los estudiantes de Ingeniería de la UACM, ya que fue en ellos en quienes, en primer lugar, se pensó al escribirlo.

Nada humano me es ajeno

Fausto Cervantes Ortiz
San Lorenzo Tezonco, D. F.
Febrero de 2008

Índice

Capítulo 1

La integral

Cuando calculamos áreas de figuras cuyos lados no son rectos, no resulta tan fácil como simplemente dividir en triángulos o rectángulos y aplicar las fórmulas conocidas. Esto es lo que nos lleva a la definición de integral, por lo tanto, veremos la forma de calcular áreas por medio de rectángulos y después se definirá la integral, para posteriormente enfocarnos a las aplicaciones de la misma.

1.1. Aproximación de áreas por medio de rectángulos

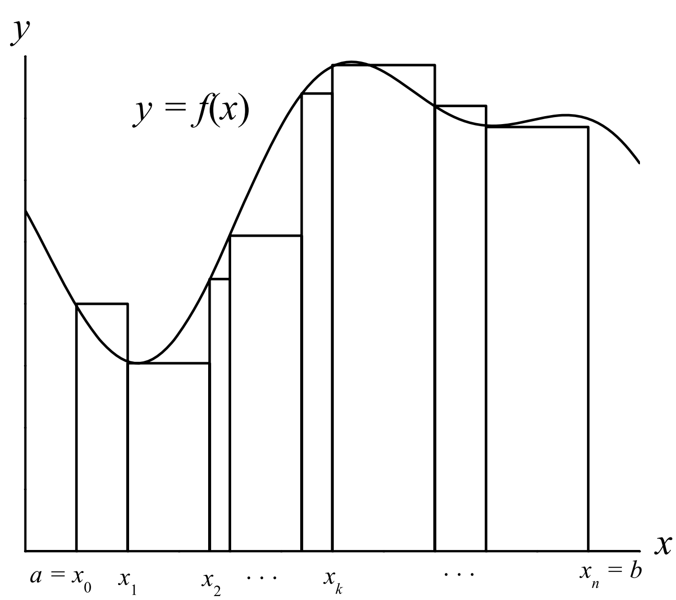


Figura 1.1: Área bajo una curva

Para aproximar el área bajo una curva por medio de rectángulos, primero se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos definidos por los valores $x_0 = a$, x_1, x_2, x_3, ... , $x_n = b$, los cuales nos darán las bases de los rectángulos, mientras que los valores de la función en los extremos nos darán las alturas. A esta subdivisión se le llama *partición*. En la figura 1.1 se muestra la partición efectuada para calcular el área bajo una curva. La partición no necesariamente debe ser con subintervalos iguales, aunque frecuentemente esto simplifica los cálculos.

Si calculamos el área para algún rectángulo, digamos el número k, tomando como altura el valor de la función en el extremo inferior del subintervalo obtendremos

$$A_k = (x_k - x_{k-1})f(x_{k-1}) = f(x_{k-1})\Delta x_k.$$

A la cantidad Δx_k se le llama a veces incremento de x_k. Con esto, el área total de los rectángulos será

$$A_i = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k.$$

También podemos calcular el área de cada rectángulo tomando como altura el valor de la función en el extremo superior del subintervalo. Con esto se tendría para el área de cada rectángulo

$$A_k = (x_k - x_{k-1})f(x_k) = f(x_k)\Delta x_k.$$

Y para el área total:

$$A_s = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k.$$

A estas áreas así obtenidas, A_i y A_s les llamaremos área inferior y área superior respectivamente. Cualquiera de estas dos áreas se aproximará cada vez más al área real A en la medida en que se haga más fina la partición, lo cual se logra al hacer cada vez más grande el número de subintervalos, dado por n. Entonces el área real será

$$\begin{aligned} A &= \lim_{|\Delta x_m|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k-1})\Delta x_k = \lim_{|\Delta x_m|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k-1})\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k, \end{aligned} \tag{1.1}$$

suponiendoque estos límites existan. En general, si la función es continua en el intervalo $[a, b]$, existirán los límites.

A la cantidad $|\Delta x_m|$ se le llama norma de la partición y es el subintervalo más grande en la misma. Por supuesto que, si los subintervalos son iguales, $\Delta x_m = \Delta x_k$, que es como se maneja a continuación.

Así pues, para calcular el área bajo una curva primero calculamos $\Delta x_k = (b - a)/n$ y evaluamos la función $f(x_k)$ sustituyendo x por $a + k\Delta x_k$. Después sustituimos en la fórmula (1.1) y calculamos el límite. Para esto usaremos los valores de los siguientes límites

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} &= 1,\\
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} &= \frac{1}{2},\\
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3} &= \frac{1}{3},\\
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4} &= \frac{1}{4},
\end{aligned} \tag{1.2}$$

y en general,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{i-1}}{n^i} = \frac{1}{i}.$$

Para más detalles sobre el cálculo de estos valores, véase el apéndice número 1.

Ejemplo

Hallar el área bajo la curva $y = x^2$ entre $a = -1$ y $b = 2$.

Solución

De la fórmula (1.1), encontramos que

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-1+\frac{3k}{n}\right)^2\left(\frac{3}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{6k}{n}+\frac{9k^2}{n^2}\right)\left(\frac{3}{n}\right) =$$

$$= 3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} - 18\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k\frac{1}{n^2} + 27\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3} =$$

$$= 3 - 18/2 + 27/3 = 3.$$

Entonces el área mide 3 unidades cuadradas.

Ejercicios

Encontrar las áreas de las funciones dadas, en el intervalo especificado.

1. $f(x) = 3x, \quad [0, 2]$ R: 6
2. $f(x) = 4x, \quad [0, 3]$ R: 18
3. $f(x) = mx, \quad [a, b]$ R: $\frac{m}{2}(b^2 - a^2)$
4. $f(x) = x^2 - 5x + 6, \quad [0, 6]$ R: 18
5. $f(x) = 1 + x^2, \quad [0, 6]$ R: 78
6. $f(x) = px^2 + qx + r, \quad [a, b]$ R: $\frac{p}{3}(b^3 - a^3) + \frac{q}{2}(b^2 - a^2) + r(b - a)$
7. $f(x) = x^3 + 1, \quad [0, 1]$ R: $5/4$
8. $f(x) = x^3 + qx^2 + rx + s, \quad [0, 6]$ R: $324 + 72q + 18r + 6s$
9. $f(x) = (2x - 1)^3, \quad [0, 1]$ R: 0
10. $f(x) = (ax + b)^3, \quad [0, 1]$ R: $\frac{1}{4a}[(a + b)^4 - b^4]$

1.2. Definición y propiedades de la integral

Se define la integral de la función $f(x)$ entre los límites a y b con la fórmula utilizada para calcular el área bajo la curva $f(x)$ y se representa como

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k.} \tag{1.3}$$

Aquí se da por hecho que los límites existen y son iguales. Si las funciones no son continuas en $[a, b]$, esto podría no ser cierto para algunos casos. En tal caso se dice que la función no es *integrable*.

Nótese que esto permite que la integral tenga valores negativos, ya que las coordenadas y sus diferencias, o los valores de la función pueden ser negativos. El símbolo $\int$ se llama *integral*, la función $f(x)$ se conoce como *integrando*, las constantes a y b se llaman *límites de integración*. El término dx es la *diferencial* de x, que nos indica cuál es la variable de integración y mostrará su importancia posteriormente, sobre todo al estudiar algunos métodos de integración.

Definida en esta forma, es fácil ver que la integral posee las siguientes propiedades:

1. Todo factor constante se puede sacar fuera del signo de la integral:

$$\int_a^b cf(x)\ dx = c\int_a^b f(x)\ dx$$

2. La integral de una suma (o resta) de funciones es la suma (o resta) de las integrales de cada función por separado:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$$

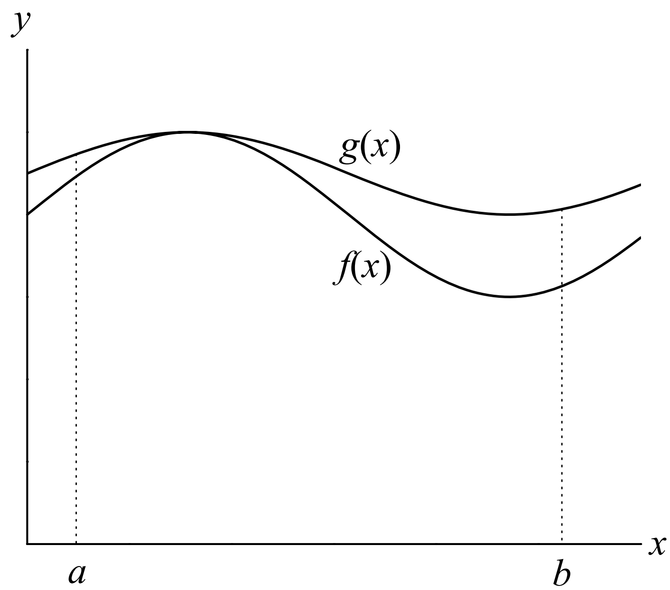


Figura 1.2: Comparación de integrales

3. Al cambiar de orden los límites de integración, cambiará el signo de la integral:

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$$

4. Dados tres números a, b y c, se cumple que:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

5. Si en el intervalo $[a, b]$ las funciones $f(x)$ y $g(x)$ cumplen que $f(x) \leq g(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$$

   Esto se ve claramente en la figura 1.2: el área bajo la curva $f(x)$ es menor que el área bajo la curva $g(x)$.

6. Si m y M son los valores mínimo y máximo absolutos de $f(x)$ en $[a, b]$, entonces:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq M(b-a)$$

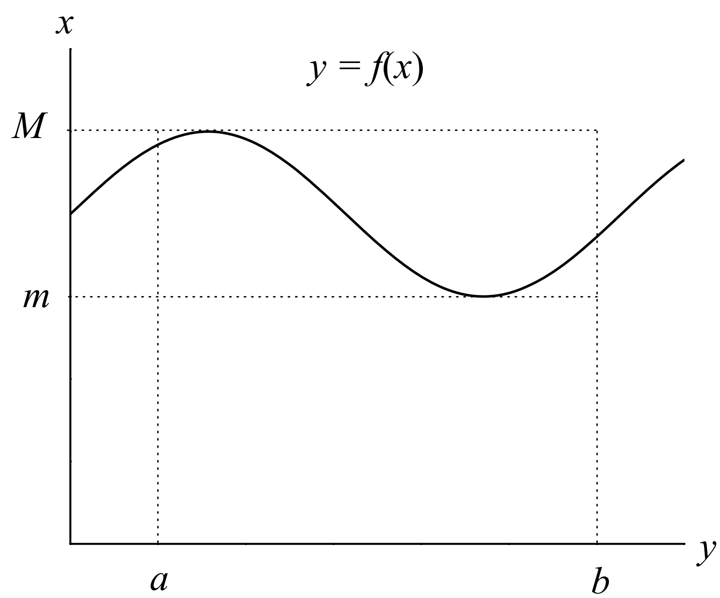


Figura 1.3: Comparación de áreas

Esto se ilustra en la figura 1.3, donde se ve que el valor del área bajo la curva $f(x)$ está entre los valores de las áreas de los rectángulos de alturas m y M, respectivamente.

7. (**Teorema del valor medio**) Si $a < b$, y m y M son los valores mínimo y máximo absolutos de $f(x)$ (siendo esta función continua), para algún número ξ entre a y b se cumple que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx = \mu = f(\xi), \tag{1.4}$$

con $m \leq \mu \leq M$ o más claramente:

$$\int_a^b f(\xi)\ dx = f(\xi)(b-a),$$

con $a \leq x \leq b$. Lo que este teorema establece es que el área bajo la curva es igual al área de un rectángulo con la misma base y que tiene como altura el valor $f(\xi)$, número comprendido forzosamente en el recorrido. Esto se ilustra en la figura 1.4.

Ejemplo

Calcular la integral

$$\int_{-2}^{3}(3x^2+2x+5)\ dx$$

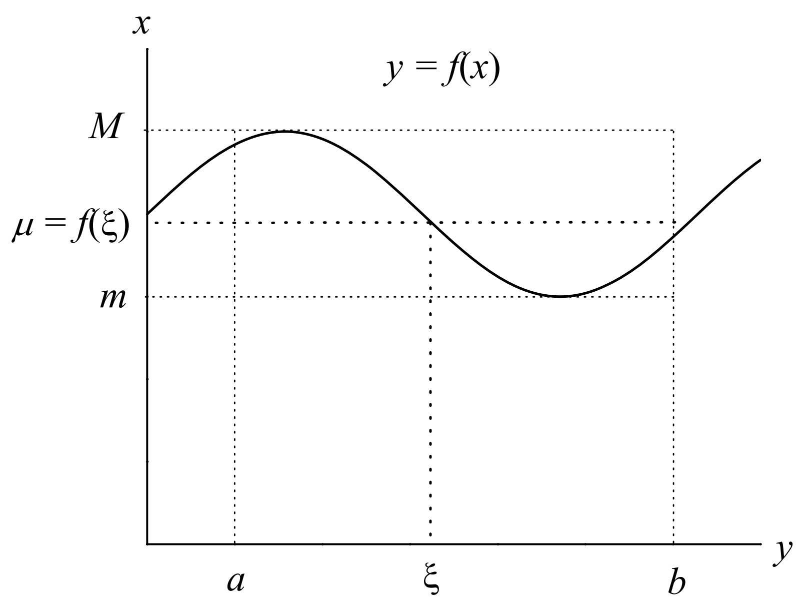


Figura 1.4: Ilustración del teorema del valor medio

Solución

De la fórmula 1.3, encontramos que:

$$\int_{-1}^{3} (3x^2 + 2x + 5)\ dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k,$$

donde $x_k = -1 + \frac{4k}{n}$ y $\Delta x_k = \frac{4}{n}$. Entonces se tiene que

$$\int_{-1}^{3} (3x^2 + 2x + 5)\ dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[3\left(-1 + \frac{4k}{n}\right)^2 + 2\left(-1 + \frac{4k}{n}\right) + 5 \right] \frac{4}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[6 - \frac{16k}{n} + \frac{48k^2}{n^2} \right] \frac{4}{n} =$$

$$= 24 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - 64 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} + 192 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} =$$

$$= 24 - \frac{64}{2} + \frac{192}{3} = 56.$$

La integral vale 56 unidades.

Ejercicios

Calcular las siguientes integrales usando la definición de integral (ecuación 1.3).

1. $\int_0^2 3x\ dx$ R: 6
2. $\int_0^3 4x\ dx$ R: 18
3. $\int_a^b mx\ dx$ R: $\frac{m}{2}(b^2 - a^2)$
4. $\int_0^6 (x^2 - 5x + 6)\ dx$ R: 18
5. $\int_0^6 (1 + x^2)\ dx$ R: 78
6. $\int_a^b (px^2 + qx + r)\ dx$ R: $\frac{p}{3}(b^3 - a^3) + \frac{q}{2}(b^2 - a^2) + r(b - a)$
7. $\int_0^1 (x^3 + 1)\ dx$ R: $5/4$
8. $\int_0^6 (x^3 + qx^2 + rx + s)\ dx$ R: $324 + 72q + 18r + 6s$
9. $\int_0^1 (2x - 1)^3\ dx$ R: 0
10. $\int_0^1 (ax + b)^3\ dx$ R: $\frac{1}{4a}[(a + b)^4 - b^4]$

1.3. La integral como una función

Si en una integral uno de los límites de integración (sin pérdida de generalidad podemos suponer que es el límite superior) no es constante, sino que varía, la integral se vuelve función de ese límite.

Derivación de una integral que es función de uno de los límites de integración

Sea:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt. \tag{1.5}$$

La función $F(x)$ es función de x dado que el límite superior varía. Para derivarla, podemos hacer lo siguiente (supongamos que $F(x)$ es continua en $[a, b]$)

$$F(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\ dt = \int_a^x f(t)\ dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\ dt, \tag{1.6}$$

entonces

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\ dt. \tag{1.7}$$

Por el teorema del valor medio se cumple que

$$\Delta F(x) = f(\xi)[(x + \Delta x) - x] = f(\xi)\Delta x, \quad \xi \in [x, x + \Delta x] \tag{1.8}$$

Entonces, dividiendo entre Δx

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(\xi)\frac{\Delta x}{\Delta x} = f(\xi), \tag{1.9}$$

y calculando el límite cuando $\Delta x \to 0$

$$\frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x). \tag{1.10}$$

Esto se puede generalizar al caso en que el límite superior es función de x, digamos $g(x)$, considerando ahora $G(x)$ como una composición de $F(x)$ con $g(x)$

$$G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\ dt. \tag{1.11}$$

Entonces, de la regla de la cadena tenemos que

$$\boxed{G'(x) = f[g(x)]\frac{dg(x)}{dx}.} \tag{1.12}$$

Ejemplo

Derivar la función

$$f(x) = \int_1^x \frac{1-t}{4+3t^2}\ dt$$

Solución

$$\frac{df}{dx} = \frac{1-x}{4+3x^2}.$$

Ejemplo

Derivar la función

$$f(x) = \int_{-2\operatorname{sen} x}^{1+\sqrt{x}} t^2\ dt$$

Solución

La integral dada se puede expresar como

$$\int_{-2\operatorname{sen} x}^{1+\sqrt{x}} t^2\ dt = \int_{-2\operatorname{sen} x}^{a} t^2\ dt + \int_a^{1+\sqrt{x}} t^2\ dt,$$

con a constante.

El segundo miembro de la anterior igualdad se puede reescribir como

$$-\int_a^{-2\operatorname{sen} x} t^2\ dt + \int_a^{1+\sqrt{x}} t^2\ dt,$$

lo que nos permite evaluar cada término usando la ecuación 1.12 como sigue

$$-\left((-2\operatorname{sen} x)^2\right)\left(\frac{d}{dx}(-2\operatorname{sen} x)\right) = 2\cos x(4\operatorname{sen}^2 x) = 8\operatorname{sen} x\cos^2 x,$$

y

$$\left((1+\sqrt{x})^2\right)\left(\frac{d}{dx}(1+\sqrt{x})\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(1+2\sqrt{x}+x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}+1+\frac{\sqrt{x}}{2}.$$

Finalmente tenemos que

$$\frac{df}{dx} = 8\operatorname{sen} x\cos^2 x + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 + \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

Ejercicios

Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones:

1. $F(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2}\ dt$ R: $\sqrt{1-x^2}$
2. $F(x) = \int_x^1 \sqrt{1-t^2}\ dt$ R: $-\sqrt{1-x^2}$
3. $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ R: $1/x$
4. $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\ dt$ R: $\frac{1}{1+x^2}$
5. $F(x) = \int_1^{2x} \sqrt{(1+t)^5}\ dt$ R: $2\sqrt{(1-x^2)^5}$
6. $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{1-t}}\ dt$ R: $\frac{2x}{1+\sqrt{1-x^2}}$
7. $F(x) = \int_{1/x}^x \frac{1}{t}\ dt$ R: $\frac{2}{x}$
8. $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^0 \frac{1}{2+t}\ dt$ R: $\frac{1}{4\sqrt{x}+2x}$
9. $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sqrt{1+t^2}\ dt$ R: $\sqrt{\frac{1+4x}{x} - \sqrt{\frac{1+x}{4x}}}$
10. $F(x) = \int_{1-x}^{1+x} \frac{dt}{1+t^2}$ R: $\frac{4+2x^2}{4+2x^2-x^4}$

1.4. Teorema fundamental del cálculo

Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$, y sea $F(x)$ tal que $dF(x)/dx = f(x)$. Entonces también se cumple que

$$F(x) + C = \int_a^x f(t)\ dt. \tag{1.13}$$

Haciendo $x = a$, vemos que

$$F(a) + C = \int_a^a f(t)\ dt = 0, \tag{1.14}$$

o sea que $C = -F(a)$, por lo tanto

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\ dt. \tag{1.15}$$

Si ahora hacemos $x = b$

$$\boxed{F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\ dt.} \tag{1.16}$$

Lo anterior nos permite calcular cualquier integral hallando una función cuya derivada sea el integrando, y después evaluamos en a y b. A la función $F(x)$ se le llama *antiderivada* o *primitiva* de $f(x)$. Con esto, el problema de hallar la integral de una función se reduce al de encontrar la antiderivada y evaluarla en los límites de integración.

Ejemplo

Calcular la integral

$$\int_{-2}^{5} (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1)\ dx$$

Solución

Sabemos que la función $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ es derivada de la función $F(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x$, por lo cual, la integral buscada es

$$\int_{-2}^{5} (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1)\ dx = F(5) - F(-2) =$$

$$= [(5)^5 - (5)^4 + (5)^3 - (5)^2 + (5)] - [(-2)^5 - (-2)^4 + (-2)^3 - (-2)^2 + (-2)] = 2767.$$

Ejercicios

Calcular las siguientes integrales usando el teorema fundamental del cálculo

1. $\int_0^2 3x\ dx$ R: 6
2. $\int_0^3 4x\ dx$ R: 18
3. $\int_a^b mx\ dx$ R: $\frac{m}{2}(b^2 - a^2)$
4. $\int_0^6 (x^2 - 5x + 6)\ dx$ R: 18
5. $\int_0^6 (1 + x^2)\ dx$ R: 78
6. $\int_a^b (px^2 + qx + r)\ dx$ R: $\frac{p}{3}(b^3 - a^3) + \frac{q}{2}(b^2 - a^2) + r(b - a)$
7. $\int_0^1 (x^3 + 1)\ dx$ R: $5/4$
8. $\int_0^6 (x^3 + qx^2 + rx + s)\ dx$ R: $324 + 72q + 18r + 6s$
9. $\int_0^1 (2x - 1)^3\ dx$ R: 0
10. $\int_0^1 (ax + b)^3\ dx$ R: $\frac{1}{4a}[(a + b)^4 - b^4]$

1.5. Integración de funciones pares e impares

Cuando tenemos una función par, debido a la simetría de la curva en su representación geométrica, encontramos que el área encerrada entre puntos separados simétricamente respecto al origen, es el doble del área de cero al punto positivo. Esto es, si tenemos la integral

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx, \quad a > 0, \tag{1.17}$$

podemos sustituirla por

$$2\int_{0}^{a} f(x)\, dx. \tag{1.18}$$

Esto puede resultar ventajoso al calcular integrales de funciones para las cuales $F(0) = 0$, siendo $F(x)$ la primitiva de $f(x)$.

Para una función impar sucede algo diferente. Notemos que si $f(x) < 0$, la integral tiene valores negativos. Entonces si tenemos

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx, \quad a > 0, \tag{1.19}$$

la integral nos da cero, puesto que la parte negativa anula a la parte positiva. Por otra parte, esto nos garantiza que la integral

$$\int_{-a}^{b} f(x)\, dx, \quad a > 0, \quad b > 0, \tag{1.20}$$

se puede reemplazar por la integral

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx, \tag{1.21}$$

ya que la otra parte se anula.

Ejemplo

Calcular la integral

$$\int_{-2}^{3} x^3\, dx$$

Solución

Observemos que esta función es impar, por lo que se puede sustituir por la integral

$$\int_{2}^{3} x^3\, dx,$$

cuyo valor es

$$\left.\frac{x^4}{4}\right|_2^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{73}{4}.$$

Ejemplo

Calcular la integral

$$\int_{-3}^{3} (x^4 - x^2)\ dx$$

Solución

Observemos que esta función es par, por lo que se puede sustituir por

$$2\int_{0}^{3} (x^4 - x^2)\ dx,$$

cuyo valor es

$$\int_{2}^{3} (x^4 - x^2)\ dx \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_3^3 = \frac{3^5}{5} - \frac{3^3}{3} = \frac{396}{5}.$$

Ejercicios

Encontrar las siguientes integrales

1. $\int_{-3}^{6}(1 + x^2)\ dx$ — R: 90
2. $\int_{-1}^{5}(x^3 - 3x)\ dx$ — R: 120
3. $\int_{-3}^{3}(4x^2 - 2x^4)\ dx$ — R: $-\frac{612}{5}$
4. $\int_{-1}^{4}(2x^3 + x^5)\ dx$ — R: 810
5. $\int_{-3}^{3}(37x^{99} - 115x^{45})\ dx$ — R: 0
6. $\int_{-6}^{6}(x^4 + x^2 + 5)\ dx$ — R: $\frac{16572}{5}$
7. $\int_{-4}^{7}(11x + 15x^3)\ dx$ — R: $\frac{32901}{4}$
8. $\int_{-2}^{2}(6x^7 + 4x^3)\ dx$ — R: 0
9. $\int_{-7}^{1}(3x^{11} - 8x^5)\ dx$ — R: -3460164936
10. $\int_{-8}^{4}(4x^8 + 3x^{20})\ dx$ — R: $\frac{9223376435319668736}{7}$

1.6. Integrales impropias

Cuando en una integral alguno de los límites (o ambos) es $\pm\infty$, se le llama integral *impropia*. Para calcular esta clase de integrales se hace

$$\int_a^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\ dx, \tag{1.22}$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\ dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\ dx, \tag{1.23}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \int_a^b f(x)\ dx. \tag{1.24}$$

Si no existe el límite, se dice que la integral *diverge*.

Ejemplo

Calcular la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\ dx$$

Solución

Sabemos que la función $f(x) = e^{-x}$ es derivada de la función $F(x) = -e^{-x}$, por lo cual, la integral buscada es

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\ dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\ dx = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} (-e^{-b} + 1) = 1.$$

Existen integrales que son impropias debido a la presencia de alguna discontinuidad esencial en el intervalo de integración. Estas integrales se calculan dependiendo de cada caso.

Si la función es discontinua en el límite superior

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\ dx. \tag{1.25}$$

Si es discontinua en el límite inferior

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^a f(x)\ dx. \tag{1.26}$$

Si es discontinua en algún punto $a < x_0 < b$, se hace

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^{x_0} f(x)\ dx + \int_{x_0}^b f(x)\ dx, \tag{1.27}$$

y a estas dos integrales se les aplican las fórmulas anteriores.

Ejemplo

Calcular la integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

Solución

El integrando tiene una discontinuidad esencial en $x = 0$, por lo cual debemos reescribirla como

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

por la propiedad de paridad, y entonces tenemos que evaluar la integral impropia obtenida.

Sabemos que la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es derivada de la función $F(x) = \frac{-1}{x}$, por lo cual tenemos que

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = 2\lim_{b\to 0}\left(\int_{b}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx\right) = \left[\lim_{b\to 1} \frac{-1}{x}\right]_b^1 = -\lim_{b\to 1}\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{1}\right] = \infty,$$

esto es, la integral diverge.

Obsérvese que si no se hubiera separado en dos la integral, sino que se hubieran sustituido directamente los límites de integración en la función $F(x) = -\frac{1}{x}$, se hubiera obtenido 0, resultado erróneo. Por eso es fundamental examinar el dominio de integración antes de aplicar la fórmula del teorema fundamental del cálculo.

Ejercicios

Calcular las integrales impropias dadas

1. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{4/3}}$ R: 3
2. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x-1)^3}$ R: $-\frac{1}{2}$
3. $\int_0^\infty \frac{x\ dx}{1+x^2}$ R: diverge
4. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$ R: diverge
5. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x-8)^{2/3}}$ R: diverge
6. $\int_1^\infty \frac{x\ dx}{(1+x^2)^2}$ R: $\frac{1}{4}$
7. $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ R: 6
8. $\int_{-1}^1 x^{-4/3}\ dx$ R: diverge
9. $\int_{-\infty}^\infty (2x^3 - x + 3)\ dx$ R: diverge
10. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ R: diverge

Capítulo 2

Métodos de integración básicos

Anteriormente aprendimos que para hallar el valor de una integral es suficiente con hallar la antiderivada y evaluarla en los límites de integración. Para esto es necesario saber métodos que nos permitan encontrar la antiderivada de cualquier función. No todas las funciones a integrar tienen antiderivadas, y aun en el caso de que la tengan, puede ser extremadamente difícil hallar su antiderivada. A continuación se estudian los métodos más comunes para encontrar antiderivadas, llamados *métodos de integración*.

En general, puesto que la evaluación de la primitiva en los límites de integración no ofrece dificultades, se excluyen los límites de integración y se usa la integral en forma indefinida. En este caso, la integración se reduce a expresar la antiderivada como función de x, esto es

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C. \tag{2.1}$$

Esto es útil porque de este modo si cambian los límites de integración sólo se debe reevaluar la primitiva. Por otro lado, cuando se hace algún cambio de variable, es necesario retornar a la variable original

$$\int f[g(x)]\frac{dg(x)}{dx}\ dx = \int f(u)\ du = G(u) = G[g(x)] = F(x) + C. \tag{2.2}$$

2.1. Cambio de variable

Uno de los métodos más usuales para integrar una función es el de cambio de variable, que consiste en encontrar alguna variable nueva que nos permita simplificar la integral a otra más sencilla. Recordemos la regla para derivar una función compuesta (*regla de la cadena*)

$$\frac{d}{dx}\left[f(g(x))\right] = f'[g(x)]g'(x), \tag{2.3}$$

por lo que la integral de la función $f'[g(x)]g'(x)$ es

$$\int f'[g(x)]g'(x)\ dx = f[g(x)] + C. \tag{2.4}$$

La fórmula 2.4 nos sirve para integrar funciones en las que aparece el producto de alguna función por la derivada de alguna subfunción de la variable independiente. De este modo, si identificamos en el integrando alguna subfunción $g(x)$ cuya derivada $g'(x)$ aparezca como factor, hacemos el cambio de variable $u = g(x)$, con lo que $du = g'(x)dx$ y la integral se convierte en

$$\int f'(u)\ du = f(u) + C = f[g(x)] + C. \tag{2.5}$$

Ejemplo

Encontrar la integral

$$\int 2x(x^2+1)^2\ dx$$

Solución

Si hacemos $u = x^2 + 1$, tenemos que $du = 2x\ dx$, que es el factor que tenemos fuera del paréntesis. Entonces la integral se convierte en

$$\int u^2\ du,$$

que calculamos fácilmente como

$$\frac{u^3}{3} + C.$$

Regresando a la variable original obtenemos

$$\int 2x(x^2+1)^2\ dx = \frac{(x^2+1)^3}{3} + C.$$

Ejemplo

Hallar la integral

$$\int \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x\ dx.$$

Solución

Si hacemos $u = \operatorname{sen} 3x$, tendremos que $du = 3\cos 3x\ dx$, con lo cual la integral se convierte en

$$\int \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x\ dx = \frac{1}{3}\int u^2\ du,$$

la cual se calcula muy fácilmente con la regla de la potencia

$$\frac{1}{3}\int u^2\ du = \frac{u^3}{9} + C.$$

Regresando a la variable original tenemos que

$$\int \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x\ dx = \frac{1}{9}\operatorname{sen}^3 3x + C.$$

Ejemplo

Encontrar la integral

$$\int \sec x \; dx$$

Solución

La primitiva de esta integral no es obvia, pero para motivarla, recordemos que la secante aparece en las derivadas de la tangente y de la propia secante. Entonces, multiplicando y dividiendo por $\sec x + \operatorname{tg} x$ obtenemos

$$\int \sec x \; dx = \int \sec x \left(\frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} \right) \; dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}.$$

Sea $u = \sec x + \operatorname{tg} x$, entonces $du = (\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x) \; dx$. Con esto la integral será

$$\int \frac{du}{u} = \ln u = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$$

Ejercicios

Hallar las integrales siguientes usando un cambio de variable adecuado

1. $\int \cos 3x \; dx$ — R: $\frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + C$
2. $\int x^2 \sqrt{x^3+1} \; dx$ — R: $\frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2} + C$
3. $\int \frac{4}{(1+2x)^3} \; dx$ — R: $-\frac{1}{(1+2x)^2} + C$
4. $\int 2x(x^2+3)^4 \; dx$ — R: $\frac{1}{5}(x^2+3)^5 + C$
5. $\int \sqrt{x-1} \; dx$ — R: $\frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C$
6. $\int \frac{1}{5-3x} \; dx$ — R: $-\frac{1}{3} \ln |5-3x| + C$
7. $\int \frac{1+4x}{\sqrt{1+x+2x^2}} \; dx$ — R: $2\sqrt{1+x+2x^2} + C$
8. $\int \frac{2}{(x+1)^6} \; dx$ — R: $-\frac{2}{5(x+1)^5} + C$
9. $\int (1-2x)^{1.3} \; dx$ — R: $-\frac{(1-2x)^{2.3}}{4.6} + C$
10. $\int \cos 2x \; dx$ — R: $\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + C$
11. $\int \frac{(\ln x)^2}{x} \; dx$ — R: $\frac{(\ln x)^3}{3} + C$
12. $\int x \operatorname{sen}(x^2) \; dx$ — R: $-\frac{1}{2} \cos x^2 + C$
13. $\int \sec x \operatorname{tg} x \sqrt{1+\sec x} \; dx$ — R: $\frac{2}{3}(1+\sec x)^{3/2} + C$
14. $\int e^x \sqrt{1+e^x} \; dx$ — R: $\frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2} + C$
15. $\int \cos^4 x \operatorname{sen} x \; dx$ — R: $-\frac{1}{5} \cos^5 x + C$
16. $\int \frac{dx}{x \ln x}$ — R: $\ln(\ln x) + C$
17. $\int \sqrt{\operatorname{ctg} \, x} \csc^2 x \; dx$ — R: $-\frac{2}{3}(\operatorname{ctg} \, x)^{3/2} + C$

18. $\int \frac{\cos(\pi/x)}{x^2}\ dx$ R: $-\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}+C$
19. $\int \frac{x+1}{x^2+2x}\ dx$ R: $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x|+C$
20. $\int \sec^3 x \operatorname{tg} x\ dx$ R: $\frac{\sec^3 x}{3}+C$
21. $\int x^a\sqrt{b+cx^{a+1}}\ dx$ R: $\frac{2(b+cx^{a+1})^{3/2}}{3c(a+1)}+C$
22. $\int \cos x\cos(\operatorname{sen} x)\ dx$ R: $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)+C$
23. $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x+2}}\ dx$ R: $\frac{4}{7}(x+2)^{7/4}-\frac{8}{3}(x+2)^{3/4}+C$
24. $\int \frac{3x-1}{(3x^2-2x+1)^4}\ dx$ R: $-\frac{1}{6(3x^2-2x+1)^3}+C$
25. $\int \operatorname{sen}^3 x\cos x\ dx$ R: $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x+C$
26. $\int \operatorname{tg}^2 x\sec^2 x\ dx$ R: $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$
27. $\int \frac{e^x}{e^x+1}\ dx$ R: $\ln|1+e^x|+C$

2.2. Cambio de variable en la integral definida

Cuando se hace el cambio de variable $u=g(x)$, tendremos que hacer también un cambio en los límites de integración: en lugar del valor de x en a, tomaremos el valor de u cuando $x=a$, esto es

$$\int_a^b f(x)\ dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du=F(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)}=F[u(b)]-F[u(a)], \tag{2.6}$$

donde $u(a)$ y $u(b)$ son los valores de u en a y b de la nueva variable.

Ejemplo

Calcular la integral

$$\int_0^1 2x(x^2+4)^2\ dx$$

Solución

Sabemos que la función $f_1(x)=2x$ es derivada de la función $f_2(x)=x^2+4$, por lo cual podemos hacer el cambio de variable $u=x^2+4$, con lo que $du=2x\ dx$. De estamanera, si $x=0$, $u=0^2+4=4$; y si $x=1$, $u=1^2+4=5$. Con todo esto, la integral se transforma en

$$\int_0^1 2x(x^2+4)^2\ dx=\int_4^5 u^2\ du=\left[\frac{u^3}{3}\right]_4^5=\left[\frac{5^3}{3}-\frac{4^3}{3}\right]=\frac{61}{3}.$$

Al buscar integrales de funciones pares o impares, es muy importante tener en cuenta las propiedades mencionadas para este tipo de funciones en el capítulo 1, ya que en ocasiones al hacer algún cambio de variable para calcular la integral, puede cambiar la paridad y llevar a resultados erróneos.

Ejemplo

Calcular la integral

$$\int_{-1}^{1} e^{x^2}\, dx$$

Solución

Si hacemos, por ejemplo, $u = x^2$, tenemos que $du/2\sqrt{u} = dx$, con lo que la integral se convierte en

$$\int_{1}^{1} \frac{e^u}{2\sqrt{u}}\, du = 0.$$

Evidentemente este resultado es erróneo, puesto que el área bajo la curva dada no es cero, como se ve en la figura 2.1.

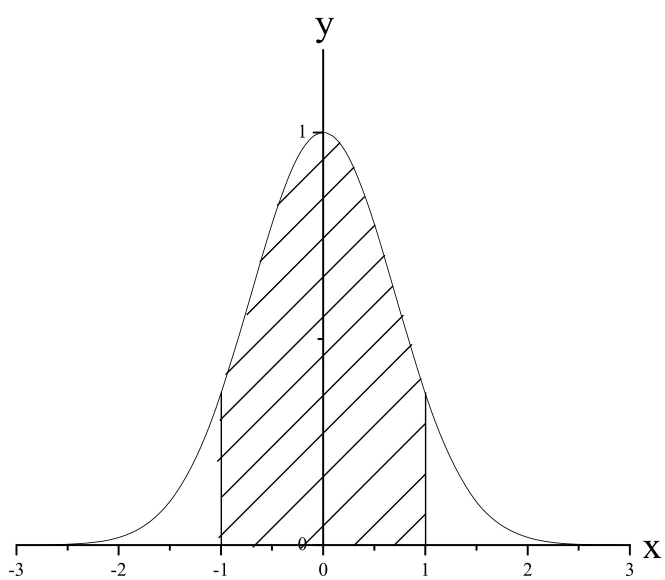


Figura 2.1: Área bajo la curva $f(x) = e^{-x^2}$.

Ejercicios

Encontrar las siguientes integrales usando cambios de variable.

1. $\int_0^1 (2x-1)^{100}\ dx$ R: $\frac{1}{101}$
2. $\int_0^1 x(x^2-1)^{99}\ dx$ R: $-\frac{1}{200}$
3. $\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}}\ dx$ R: $\frac{2}{3}[\sqrt{29}-\sqrt{3}]$
4. $\int_1^3 \frac{dx}{(2x+1)^2}$ R: $\frac{2}{21}$
5. $\int_3^2 \frac{x+3}{(x^2+6x)^2}\ dx$ R: $-\frac{11}{864}$
6. $\int_1^5 \sqrt{x-1}\ dx$ R: $\frac{16}{3}$
7. $\int_1^2 x^3\sqrt{2+x^4}\ dx$ R: $\frac{1}{2}[18\sqrt{2}-\sqrt{3}]$
8. $\int_2^{5/2} x(x^2+1)^{3/2}\ dx$ R: $\frac{841\sqrt{29}-800\sqrt{5}}{160}$
9. $\int_0^3 \frac{2\ dx}{(x+1)^6}$ R: $\frac{1023}{2560}$
10. $\int_{-1}^{-3} \sqrt[5]{3-5x}\ dx$ R: $\frac{1}{3}[4\sqrt[5]{8}-9\sqrt[5]{18}]$

2.3. Integración por partes

Este método se utiliza cuando en el integrando hay productos de funciones que no pueden reducirse a un cambio de variable. Recordemos que para derivar un producto de funciones se usa la regla

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}, \tag{2.7}$$

que al integrar nos da

$$u\ v = \int u\ v'\ dx + \int v\ u'\ dx, \tag{2.8}$$

y como $v'\ dx = dv$ y $u'\ dx = du$, tenemos que

$$u\ v = \int u\ dv + \int v\ du, \tag{2.9}$$

o, reordenando

$$\int u\ dv = u\ v - \int v\ du. \tag{2.10}$$

La fórmula 2.10 nos permite cambiar integrales de productos por otras integrales más fáciles de obtener. Es importante tener cuidado al elegir cuál es la función u y cuál es la función v, ya que si elegimos mal, en lugar de simplificar la integral se puede complicar cada vez más.

Ejemplo

Encontrar la integral

$$\int xe^x\ dx.$$

Solución

Hagamos $u = x$ y $dv = e^x\ dx$. Con esto tenemos que $du = dx$ y $v = e^x$. Esto convierte la integral en la forma siguiente

$$\int xe^x\ dx = xe^x - \int e^x\ dx.$$

La segunda integral nos da e^x, con lo cual concluimos que

$$\int xe^x\ dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

Ejemplo

Calcular la integral

$$\int \ln x\ dx.$$

Solución

En este caso nos conviene más hacer $u = \ln x$ y $dv = dx$. Con esto $du = \frac{dx}{x}$ y $v = x$, y la integral se convierte en

$$\int \ln x\ dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

Ejemplo

Encontrar la integral

$$\int \operatorname{arc\,sen} x\ dx.$$

Solución

Aquí hacemos $u = \operatorname{arc\,sen} x$ y $dv = dx$. Con esto se tiene que $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ y $v = x$. Esto hace que la integral se convierta en

$$\int \operatorname{arc\,sen} x\ dx = x \operatorname{arc\,sen} x - \int x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La segunda integral se calcula con el cambio de variable $u = 1 - x^2$, lo cual nos da

$$\int \operatorname{arc\,sen} x\ dx = x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Cuando se tiene que calcular por partes una integral definida, la fórmula a usar es

$$\int_a^b u\ dv = [u\ v]\Big|_a^b - \int_a^b v\ du. \tag{2.11}$$

Ejemplo

Evaluar la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen} x\ dx.$$

Solución

Aquí hacemos $u = x$ y $dv = \operatorname{sen} x dx$. Con esto se tiene que $du = dx$ y $v = -\cos x$. Esto hace que la integral se convierta en

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\ dx = -x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx.$$

El primer término de la expresión del segundo miembro nos da cero, mientras que la otra integral es inmediata y da 1,por lo tanto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\ dx = 1.$$

Ejercicios

Evaluar las integrales siguientes

1. $\int x \ln x\ dx$ R: $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$
2. $\int xe^{2x}\ dx$ R: $e^{2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) + C$
3. $\int x \operatorname{sen}\ 4x dx$ R: $-\frac{1}{4}x\cos 4x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 4x + C$
4. $\int x^2 \cos 3x\ dx$ R: $\frac{1}{3}x^2 \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x - \frac{2}{27}\operatorname{sen} 3x + C$
5. $\int (\ln x)^2\ dx$ R: $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$
6. $\int e^{2x} \operatorname{sen} 3x\ dx$ R: $\frac{e^{2x}}{13}(2\operatorname{sen} 3x - 3\cos 3x) + C$
7. $\int x \operatorname{senh} x\ dx$ R: $x\cosh x - \operatorname{senh} x + C$
8. $\int_0^1 xe^{-x}\ dx$ R: $1 - \frac{2}{e}$
9. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\ dx$ R: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$
10. $\int_1^4 \ln\sqrt{x}\ dx$ R: $4\ln 2 - \frac{3}{2}$
11. $\int_0^{1/2} \arccos x\ dx$ R: $\frac{1}{6}(\pi + 6 - 3\sqrt{3})$
12. $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\ dx$ R: $\operatorname{sen} x(\ln \operatorname{sen} x - 1) + C$

13. $\int \cos(\ln x)\ dx$ R: $\frac{1}{2}x(\cos\ln x + \operatorname{sen}\ln x) + C$
14. $\int_1^2 x^4(\ln x)^2\ dx$ R: $\frac{32}{5}(\ln 2)^2 - \frac{64}{25}\ln 2 + \frac{62}{15}$
15. $\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\ dx$ R: $2(\operatorname{sen}\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}) + C$
16. $\int_{\sqrt{\pi/4}}^{\sqrt{\pi}} x^3\cos(x^2)\ dx$ R: $-\frac{2+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}\pi}{16}$

2.4. Fracciones parciales

Cuando en una integral hay funciones racionales (o sea, cocientes entre polinomios) y no hay posibilidad de hacer algún cambio de variable, se puede usar el método de fracciones parciales, que consiste en descomponer una fracción en varias más simples. Esto es como revertir una suma de fracciones.

Para usar este método, primero hay que asegurarse de que la fracción involucrada es propia (esto es, que el grado del numerador sea menor que el del denominador). Si no lo es, se debe hacer la división correspondiente. Después se debe factorizar totalmente el denominador. Hecho lo anterior, se distinguirán varios casos.

Factores lineales diferentes El integrando se descompondrá en la forma

$$\frac{P(x)}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)...(a_nx+b_n)} = \frac{C_1}{a_1x+b_1} + \frac{C_2}{a_2x+b_2} + ... + \frac{C_n}{a_nx+b_n}. \tag{2.12}$$

Factores lineales repetidos El integrando se descompondrá en forma similar a la anterior, pero el factor lineal repetido se expresará como

$$\frac{P(x)}{(a_1x+b_1)^m} = \frac{C_1}{a_1x+b_1} + \frac{C_2}{(a_1x+b_1)^2} + ... + \frac{C_m}{(a_1x+b_1)^m}. \tag{2.13}$$

Factores cuadráticos irreducibles diferentes El integrando se descompondrá en la forma

$$\frac{P(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)...(a_nx^2+b_nx+c_n)} = \frac{C_1x+D_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \frac{C_2x+D_2}{a_2x^2+b_2x+c_2} + ... + \frac{C_nx+D_n}{a_nx^2+b_nx+c_n}. \tag{2.14}$$

Factores cuadráticos irreducibles repetidos El integrando se descompondrá en forma similar a la anterior, pero el factor repetido se expresará como

$$\frac{P(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^m} = \frac{C_1x+D_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \frac{C_2x+D_2}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2} + ... + \frac{C_mx+D_m}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^m}. \tag{2.15}$$

Para encontrar los valores de los coeficientes C_i, D_i, se resuelve el sistema lineal que resulta de igualar los numeradores al efectuar las sumas correspondientes.

Ejemplo

Encontrar la integral

$$\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx$$

Solución

Factorizando el denominador tenemos que

$$\frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x+1} + \frac{c_1}{(x+1)^2}.$$

Sumando las fracciones tenemos que

$$\frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x+1} + \frac{c_1}{(x+1)^2} = \frac{c_1(x+1)^2 + c_2x(x+1) + c_3x}{x(x+1)^2},$$

igualando los numeradores tendremos la ecuación

$$c_1(x^2+2x+1) + c_2(x^2+x) + c_3x = 5x^2+20x+6,$$

lo que al igualar los coeficientes de cada potencia de x nos da el sistema de ecuaciones

$$c_1 + c_2 = 5, \quad 2c_1 + c_2 + c_3 = 20, \quad c_1 = 6,$$

cuya solución es

$$c_1 = 6, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = 9,$$

por lo que se tiene que

$$\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} = \frac{6}{x} + \frac{-1}{x+1} + \frac{9}{(x+1)^2}.$$

Así pues, el problema se convierte en

$$\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx = \int \frac{6}{x}\,dx + \int \frac{-1}{x+1}\,dx + \int \frac{9}{(x+1)^2}\,dx.$$

Con los métodos estudiados antes encontramos que

$$\int \frac{6}{x}\,dx = 6\ln x, \quad \int \frac{-1}{x+1}\,dx = -\ln(x+1), \quad \int \frac{9}{(x+1)^2}\,dx = -\frac{9}{x+1}.$$

Así que finalmente obtenemos

$$\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx = 6\ln x - \ln(x+1) - \frac{9}{x+1} + C.$$

Ejemplo

Hallar la integral

$$\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)}\, dx$$

Solución

Factorizando, podemos reescribir la función como

$$\frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x-1)(x^2+4)} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_3 x + c_4}{x^2+4}.$$

Sumando las fracciones involucradas tenemos que

$$\frac{c_1(x-1)(x^2+4) + c_2 x(x^2+4) + (c_3 x + c_4)x(x-1)}{x(x-1)(x^2+4)} = \frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x-1)(x^2+4)}.$$

Igualando los coeficientes de potencias iguales en los numeradores tenemos que

$$c_1 + c_2 + c_3 = 2$$

$$-c_1 - c_3 + c_4 = 0$$

$$4c_1 + 4c_2 - c_4 = -4$$

de donde obtenemos $c_1 = 2$, $c_2 = -5$, $c_3 = 5$, $c_4 = 7$. Con esto tenemos que la integral se convierte en las integrales

$$\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x-1)(x^2+4)}\, dx = \int \frac{2}{x}\, dx + \int \frac{-5}{x-1}\, dx + \int \frac{5x+7}{x^2+4}\, dx,$$

lo cual nos da, después de integrar cada una de ellas

$$\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x-1)(x^2+4)}\, dx = 2\ln x - 5\ln(x-1) + \frac{5}{2}\ln(x^2+4) + 14 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Ejemplo

Determinar la integral

$$\int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2+2)^2}\, dx$$

Solución

La descomposición en este caso es de la forma

$$\frac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}.$$

Desarrollando en forma análoga a los ejemplos anteriores tenemos que

$$Ax^3 + Bx^2 + (2A+C)x + (2B+D) = 8x^3 + 13x,$$

lo cual nos conducirá a los valores

$$A = 8, \quad B = 0, \quad C = -3, \quad D = 0.$$

Con esto, y calculando las integrales, tendremos

$$\int \frac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2}\,dx = 4\ln(x^2+2) + \frac{3}{2(x^2+2)} + C.$$

Ejercicios

Encontrar las integrales siguientes

1. $\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$ R: $\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1| + C$
2. $\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}\,dx$ R: $2\ln|x+5| - \ln|x-2| + C$
3. $\int \frac{x^2+1}{x^2-x}\,dx$ R: $x - \ln|x| + 2\ln|x-1| + C$
4. $\int_0^1 \frac{2x+3}{(x+1)^2}\,dx$ R: $2\ln 2 + \frac{1}{2} + C$
5. $\int_1^2 \frac{4x^2-7x-12}{x(x+2)(x-3)}\,dx$ R: $\frac{9}{5}\ln\frac{8}{3}$
6. $\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)}\,dx$ R: $\frac{1}{6}\frac{1}{x+5} + \frac{1}{36}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right| + C$
7. $\int \frac{5x^2+3x-2}{x^3+2x^2}\,dx$ R: $2\ln|x| + 3\ln|x+2| + \frac{1}{x} + C$
8. $\int \frac{x^2}{(x+1)^2}\,dx$ R: $\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+2)^2} + C$
9. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$ R: $\frac{1-\ln 2}{2}$
10. $\int \frac{3x^2-4x+5}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$ R: $\ln(x-1)^2 + \ln\sqrt{x^2+1} - 3\operatorname{arc\,tg} x + C$
11. $\int \frac{2x^3-x^2+3x-1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$ R: $\frac{1}{2}\ln|x^2+1 + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$
12. $\int \frac{1}{x^3+1}\,dx$ R: $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$
13. $\int_2^5 \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+4}\,dx$ R: $\frac{1}{3}\ln\frac{17}{2}$
14. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$ R: $\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$
15. $\int \frac{x-3}{(x^2+2x+4)^2}\,dx$ R: $-\frac{1}{2(x^2+2x+4)} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2(x+1)}{3(x^2+2x+4)} + C$

2.5. Funciones irracionales

Si en una integral intervienen raíces de polinomios, puede no ser fácil encontrar la integral. Sin embargo, en muchas ocasiones es posible hacer algún cambio de variable que transforme la integral dada en una integral racional. Veremos algunos de estos casos enseguida.

Cuando en una integral intervienen potencias fraccionarias de x, se utiliza una sustitución del tipo

$$x = t^k,$$

siendo k el común denominador de las fracciones involucradas. Esto nos lleva a una integral racional de las que ya estudiamos anteriormente.

Ejemplo

Evaluar la integral

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\, dx.$$

Solución

Como los exponentes son las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$, cuyo común denominador es 4, usamos la sustitución

$$x = t^4, \quad \Rightarrow \quad dx = 4t^3\, dt,$$

con lo cual la integral se transforma en

$$4\int \frac{t^2}{t^3+1} t^3\, dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}\, dt =$$

$$4\int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right) dt = 4\int t^2\, dt - 4\int \frac{t^2}{t^3+1}\, dt =$$

$$= \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\ln|t^3+1| = \frac{4}{3}[x^{3/4} - \ln|x^{3/4}+1|] + C.$$

Para integrales de la forma

$$\int R\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\, dx,$$

donde R es una función racional de las funciones indicadas, esto es, de x y de una raíz de la forma dada; además m es un entero ≥ 2 y las constantes a, b, c, y d cumplen que $ad - bc \neq 0$, se hace el cambio de variable

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

con lo cual la integral se convierte en una racional.

Ejemplo

Encontrar la integral

$$\int \sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}\frac{dx}{(2x+3)^2}.$$

Solución

Hagamos el cambio de variable

$$t=\sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}, \quad \Rightarrow \quad t^4=\frac{2x-3}{2x+3}.$$

De esta ecuación despejamos x, lo cual nos da

$$x=\frac{3}{2}\left(\frac{1+t^4}{1-t^4}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{1-t^4}-1\right),$$

de donde resulta

$$dx=\frac{12t^3}{(1-t^4)^2}\ dt, \quad 2x+3=\frac{6}{1-t^4}.$$

Usando esto, nuestra integral se transforma en

$$\int t\frac{(1-t^4)^2}{36}\frac{12t^3}{(1-t^4)}dt=\frac{1}{3}\int t^4\ dt=$$

$$=\frac{1}{15}t^5=\frac{1}{15}\left(\sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}\right)^5+C.$$

Ejemplo

Hallar la integral

$$\int \frac{1}{x-\sqrt{x+2}}\ dx$$

Solución

Sea $u=\sqrt{x+2}$, así que $x=u^2-2$, con lo cual $dx=2u\ du$. Con esto la integral dada se transforma en

$$\int \frac{2u\ du}{u^2-u-2}=\int \frac{2u\ du}{(u-2)(u+1)}.$$

Para calcular esta integral, descompondremos en fracciones parciales de la forma

$$\frac{2u}{(u-2)(u+1)} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+1}.$$

De lo anterior obtenemos el sistema de ecuaciones

$$A + B = 2, \quad A - 2B = 0,$$

cuya solución es

$$A = \frac{4}{3}, \quad B = \frac{2}{3}.$$

Entonces la integral anterior se puede sustituir por las integrales

$$\frac{4}{3}\int \frac{du}{u-2} + \frac{2}{3}\int \frac{du}{u+1} = \frac{4}{3}\ln|u-2| + \frac{2}{3}\ln|u+1|,$$

que al regresar a la variable original nos da

$$\int \frac{1}{x-\sqrt{x+2}}\,dx = \frac{4}{3}\ln|\sqrt{x+2}-2| + \frac{2}{3}\ln|\sqrt{x+2}+1| + C.$$

Existen otras integrales irracionales que se calculan transformándolas en integrales trigonométricas. Esto se estudiará más adelante.

Ejercicios

Hallar las integrales siguientes

1. $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$ R: $\frac{3}{10}(x^2+1)^{5/3} - \frac{3}{4}(x^2+1)^{2/3} + C$
2. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx$ R: $\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3} - \ln|\sqrt[4]{x^3}+1|\right] + C$
3. $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}\,dx$ R: $\frac{2}{27}\sqrt[4]{x^9} - \frac{2}{13}\sqrt[12]{x^{13}} + C$
4. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}\,dx$ R: $-\frac{6}{\sqrt[6]{x}} + \frac{12}{\sqrt[12]{x}} + 2\ln x - 24\ln(\sqrt[12]{x}+1) + C$
5. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x^2}$ R: $\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} - \sqrt{1+x}\right| - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$
6. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$ R: $2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + C$
7. $\int \frac{\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^8}+\sqrt[14]{x^{15}}}\,dx$ R: $14\left[\sqrt[14]{x} - \frac{1}{2}\sqrt[7]{x} + \frac{1}{3}\sqrt[14]{x^3} - \frac{1}{4}\sqrt[7]{x^2} + \frac{1}{5}\sqrt[14]{x^5}\right] + C$
8. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{(1-x)^2}$ R: $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$
9. $\int \sqrt{\frac{3x+2}{x-3}}\,dx$ R: $\sqrt{3x^2-7x-6} + \frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left(x - \frac{7}{6} + \sqrt{x^2 - \frac{7}{3}x - 2}\right) + C$
10. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$ R: $2\sqrt{x+1} + \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C$
11. $\int \frac{1}{(1-x)(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$ R: $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$
12. $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{(1+x)^2}$ R: $-\frac{3}{8}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{4/3} + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})}$ R: $4\sqrt[3]{x} - 12\sqrt[12]{x} + 12\operatorname{arc\,tg}\sqrt[12]{x} + C$

14. $\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}\ dx$ R: $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 4\ln(\sqrt[6]{x}+1) + \frac{3}{2}\ln(\sqrt[3]{x}+1) + 3\operatorname{arc\,tg}\sqrt[6]{x} + C$

2.6. Integrales trigonométricas

Cuando hay productos de las funciones trigonométricas, generalmente es posible calcularlas si las clasificamos en productos de senos y cosenos, y productos de tangentes y secantes. En caso de que intervengan otras funciones, se deberá hacer uso de las identidades trigonométricas pertinentes.

Potencias de senos y cosenos

Si la integral es de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\ dx, \tag{2.16}$$

observamos el grado de m y n y procedemos según los siguientes casos

1. m impar y positiva: Transformamos todas las potencias de senos a cosenos (usando la identidad $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$), excepto un seno y hacemos el cambio de variable $u = \cos x$.

2. n impar y positiva: Transformamos todas las potencias de cosenos a senos (usando la misma identidad), excepto un coseno y hacemos el cambio de variable $u = \operatorname{sen} x$.

3. n y m pares y positivas: Transformamos usando las identidades

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Ejemplo

Calcular la integral

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\ dx.$$

Solución

Como ambas potencias de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son pares, usamos las identidades del ángulo doble, con lo cual tendremos

$$\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2\ dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\ dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 x - \cos 2x - 2\cos^2 2x - \cos^3 2x)\ dx =$$

$$= \frac{1}{8} \left[\int dx + \int \cos 2x\ dx - \int \cos^2 2x\ dx - \int \cos^3 2x\ dx \right].$$

Resolvamos cada una de estas integrales

$$\int dx = x$$

$$\int \cos 2x\ dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

$$\int \cos^2 2x\ dx = \int \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right)\ dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{8}$$

$$\int \cos^3 2x\ dx = \int \cos 2x (1 - \operatorname{sen}^2 2x)\ dx$$

haciendo $u = \operatorname{sen} 2x$, tenemos que $du = 2\cos 2x\ dx$, con lo que se convierte en

$$\frac{1}{2} \int (1 - u^2)\ du = \frac{1}{2} \left(u - \frac{u^3}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{sen} 2x - \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{3} \right).$$

Finalmente, sumando todo lo anterior tenemos que

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\ dx =$$

$$= \frac{1}{8} \left[x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x - \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{8} - \frac{1}{2} \left(\operatorname{sen} 2x - \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{3} \right) \right] + C.$$

Ejemplo

Encontrar la integral

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\ dx.$$

Solución

Como tenemos una potencia impar en el término con $\cos x$, transformamos la integral original en

$$\int \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\ dx,$$

y con el cambio de variable $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x\ dx$ se transforma en

$$\int \frac{1 - u^2}{\sqrt{u}}\ du = \int \frac{du}{\sqrt{u}} - \int u^{3/2}\ du = 2u^{1/2} - \frac{2}{5} u^{5/2},$$

lo que equivale a

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\ dx = \sqrt{\operatorname{sen} x} - \frac{2}{5} \sqrt{\operatorname{sen}^5 x} + C.$$

Potencias de tangentes y secantes

Si la integral es de la forma

$$\int \sec^m x \operatorname{tg}^n x \; dx, \tag{2.17}$$

procedemos de acuerdo al grado de m y n, según los siguientes casos

1. m par y positiva: Transformamos todas las potencias de secantes a tangentes (usando la identidad $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$), conservando sólo un factor de $\sec^2 x$, y hacemos el cambio de variable $u = \operatorname{tg} x$.

2. n impar y positiva: Transformamos todas las potencias de tangentes a secantes (usando la misma identidad), conservando un factor $\sec x \operatorname{tg} x$, y hacemos el cambio de variable $u = \sec x$.

3. Si sólo hay potencias de $\operatorname{tg} x$ y la potencia es par, convertir a $\sec^2 x - 1$ una $\operatorname{tg}^2 x$ y hacer $u = \operatorname{tg} x$.

4. Si sólo hay secantes y la potencia es impar y positiva, integrar por partes.

5. Si no se puede hallar con las cuatro anteriores, convertir a senos y cosenos.

Ejemplo

Hallar la integral

$$\int \sec^4 3x \operatorname{tg}^3 3x \; dx.$$

Solución

Cambiando un término de $\sec^2 3x$ por $1 + \operatorname{tg}^2 3x$, tendremos la integral

$$\int \sec^2 x(1 + \operatorname{tg}^2 3x) \operatorname{tg}^3 3x \; dx = \int \sec^2 3x \operatorname{tg}^3 3x \; dx + \int \sec^2 3x \operatorname{tg}^5 3x \; dx,$$

que, con el cambio de variable $u = \operatorname{tg} 3x$, $du = 3\sec^2 3x \; dx$ se transforma en

$$\int u^3 \; \frac{du}{3} + \int u^5 \; \frac{du}{5} = \frac{u^4}{12} + \frac{u^6}{18} = \frac{1}{12} \operatorname{tg}^4 3x + \frac{1}{18} \operatorname{tg}^6 3x + C.$$

Ejemplo

Encontrar la integral

$$\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\sqrt{\sec x}}\ dx.$$

Solución

Usando la identidad sugerida, transformamos la integral en la siguiente

$$\int \frac{(\sec^2 x - 1)\operatorname{tg} x}{\sqrt{\sec x}}\ dx =$$

$$= \int \sec^{1/2} x \sec x \operatorname{tg} x\ dx - \int \sec^{-3/2} x \sec x \operatorname{tg} x\ dx =$$

$$\int \sec^{3/2} x \operatorname{tg} x\ dx - \int \sec^{-1/2} x \operatorname{tg} x\ dx =$$

$$= \int u^{1/2}\ du - \int u^{-3/2}\ du = \frac{2}{3}u^{3/2} + 2u^{-1/2} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\sec^3 x} + \frac{2}{\sqrt{\sec x}} + C.$$

Ejemplo

Calcular la integral

$$\int \operatorname{tg}^6 x\ dx$$

Solución

Como sólo hay potencia par de tangente, transformamos en

$$\int \operatorname{tg}^4 x(\sec^2 x - 1)\ dx = \int \operatorname{tg}^4 x \sec^2 x\ dx - \int \operatorname{tg}^4 x\ dx.$$

La primera de estas integrales se resuelve haciendo $u = \operatorname{tg} x$, $du = \sec^2 x\ dx$, lo que da

$$\int \operatorname{tg}^4 x \sec^2 x\ dx = \int u^4\ du = \frac{u^5}{5} = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}.$$

La otra integral se reescribe como

$$\int \operatorname{tg}^2 x(\sec^2 x - 1)\ dx = \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\ dx - \int \operatorname{tg}^2 x\ dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x \; dx - \int \sec^2 x \; dx - \int \; dx.$$

Calculando estas integrales con los métodos dados, finalmente obtenemos

$$\int \operatorname{tg}^6 x \; dx = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x - x + C.$$

Ejemplo

Hallar la integral

$$\int \sec^3 x \; dx$$

Solución

Como aquí sólo se tiene potencia impar de $\sec x$, integramos por partes. Como la potencia de secantes cuya integral conocemos es $\sec^2 x$, elegimos $u = \sec x$ y $dv = \sec^2 x \; dx$, con lo que $du = \sec x \operatorname{tg} x \; dx$ y $v = \operatorname{tg} x$. Entonces tendremos que

$$\int \sec^3 x \; dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^2 x \sec x \; dx.$$

La última integral es de un tipo ya estudiado anteriormente, así que la resolvemos como sabemos

$$\int \operatorname{tg}^2 x \sec x \; dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec x \; dx = \int \sec^3 x \; dx - \int \sec x \; dx.$$

Obsérvese que hemos recuperado la integral inicial, a la que designaremos con I. Entonces, juntando las integrales obtenidas a la primer integración por partes tenemos que

$$I = \sec x \operatorname{tg} x - I + \int \sec x \; dx,$$

que al despejar I, y recordando la integral de la secante (ejemplos de la sección 2.1) nos da el resultado

$$I = \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$$

Ejemplo

Encontrar la integral

$$\int \frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x} \; dx.$$

Solución

Esta integral no se puede hallar por los métodos anteriores, por lo cual la tenemos que transformar en senos y cosenos

$$\int \frac{1}{\cos x} \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\ dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\ dx.$$

Si ahora hacemos $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x\ dx$, así tendremos que

$$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} = -\csc x + C.$$

Productos de $\operatorname{sen} mx$ y $\cos nx$

Si la integral es de la forma

$$\int \operatorname{sen} mx \cos nx\ dx, \tag{2.18}$$

se utilizan las identidades

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}(\alpha+\beta)] \tag{2.19}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)] \tag{2.20}$$

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \tag{2.21}$$

a fin de igualar los coeficientes del argumento de las funciones involucradas.

Ejemplo

Encontrar la integral

$$\int \operatorname{sen} 5x \cos 4x\ dx$$

Solución

Con la identidad indicada tenemos que

$$\int \operatorname{sen} 5x \cos 4x\ dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x\ dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 9x\ dx.$$

Estas integrales se resuelven de inmediato, dando

$$\int \operatorname{sen} 5x \cos 4x\ dx = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{18}\cos 9x + C.$$

Ejercicios

Hallar las integrales siguientes

1. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x dx$ R: $\frac{1}{2}\cos^5 x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$
2. $\int_{3\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x dx$ R: $-\frac{11}{384}$
3. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^5 x dx$ R: $\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x - \frac{2}{7}\operatorname{sen}^7 x + \frac{1}{9}\operatorname{sen}^9 x + C$
4. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 3x dx$ R: $\frac{\pi}{4}$
5. $\int \cos^4 x dx$ R: $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C$
6. $\int (1 - \operatorname{sen} 2x)^2 dx$ R: $\frac{3x}{2} + \cos 2x - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + C$
7. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x dx$ R: $\frac{3\pi-4}{192}$
8. $\int \operatorname{sen}^3 x \sqrt{\cos x} dx$ R: $\left[\frac{2}{7}\cos^3 x - \frac{2}{3}\cos x\right]\sqrt{\cos x} + C$
9. $\int \cos^2 x \operatorname{tg}^3 x dx$ R: $\frac{1}{2}\cos^2 x - \ln|\cos x| + C$
10. $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$ R: $\ln(1 + \operatorname{sen} x) + C$
11. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ R: $\operatorname{tg} x - x + C$
12. $\int \sec^4 x dx$ R: $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$
13. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^4 x \sec^2 x dx$ R: $\frac{1}{5}$
14. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec x dx$ R: $\frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$
15. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^5 x \sec x dx$ R: $\frac{38}{15}$
16. $\int \operatorname{tg}^5 x dx$ R: $\frac{1}{4}\sec^4 x - \operatorname{tg}^2 x + \ln|\sec x| + C$
17. $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{ctg} x} dx$ R: $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + C$
18. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^2 x dx$ R: $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$
19. $\int \operatorname{ctg}^2 x \csc^4 x dx$ R: $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x + C$
20. $\int \csc x dx$ R: $\ln|\csc x - \operatorname{ctg} x| + C$
21. $\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 2x dx$ R: $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{7}\operatorname{sen} 7x\right] + C$
22. $\int \cos 7x \cos 5x dx$ R: $\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{24}\operatorname{sen} 12x + C$
23. $\int \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sec^2 x} dx$ R: $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C$

2.7. Sustitución trigonométrica

Esta técnica se usa cuando en el integrando hay radicales de la forma $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ y/o $\sqrt{a^2-x^2}$. Aquí lo importante es encontrar una relación entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo, haciendo uso del teorema de Pitágoras. La figura 2.2 muestra la configuración de los catetos y la hipotenusa con relación al ángulo de referencia. Con esto se encuentra cuál es la función trigonométrica que sustituye a la raíz, así como a las otras variables que aparezcan y a la diferencial de la variable de integración. El triángulo en particular que hay que usar para cada integral se elige en base a los signos que aparezcan dentro de la raíz.

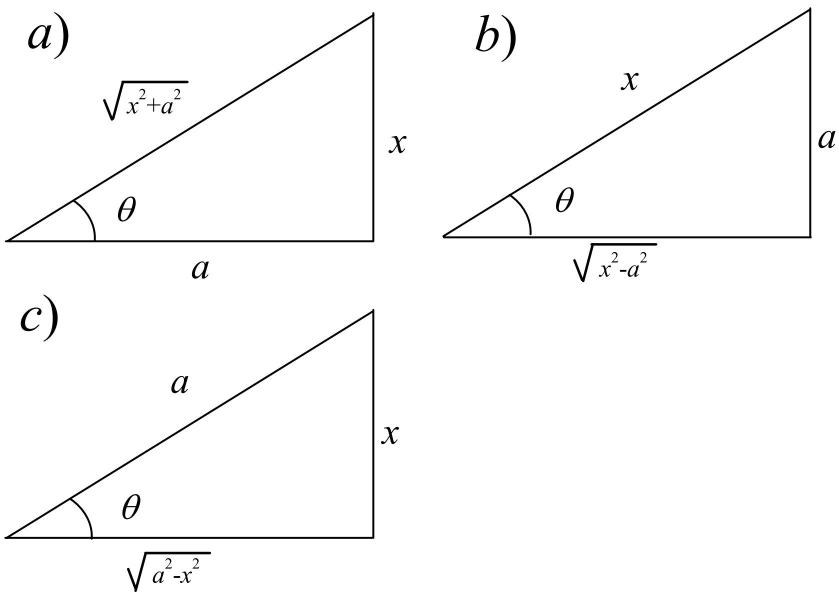


Figura 2.2: Configuración de los triángulos para la sustitución trigonométrica

Ejemplo

Hallar la integral

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}.$$

Solución

Como aquí se está restando el término que contiene a x^2, usamos un triángulo como el de la figura 2.2 c), así que tendremos que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3}, \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}, \quad dx = 3\cos\theta\ d\theta,$$

con lo cual la integral se sustituye por

$$\int \frac{3\cos\theta\ d\theta}{3^2\operatorname{sen}^2\theta\cdot 3\cos\theta} = \frac{1}{9}\int \csc^2\theta\ d\theta = -\frac{1}{9}\operatorname{ctg}\theta = -\frac{1}{9}\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C.$$

Ejemplo

Calcular la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}.$$

Solución

Como aquí ambos términos que en la raíz están sumando, usamos un triángulo de la forma dada en la figura 2.2 a), con lo cual tenemos que

$$\operatorname{tg}\theta = 2x, \quad \sec\theta = \sqrt{4x^2+1}, \quad dx = \frac{1}{2}\sec^2\theta\; d\theta.$$

entonces la integral se convierte en

$$\int \frac{\frac{1}{2}\sec^2\theta\; d\theta}{\sec\theta} = \frac{1}{2}\int \sec\theta\; d\theta.$$

La estrategia de integración en este caso es multiplicar y dividir por $\sec\theta + \operatorname{tg}\theta$, obteniendo

$$\frac{1}{2}\int \sec\theta\left(\frac{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta}\right)\; d\theta.$$

Para hallar esta última integral usamos el cambio de variable $u = \sec\theta + \operatorname{tg}\theta$, así que $du = (\sec^2\theta + \sec\theta\operatorname{tg}\theta)\; d\theta$, con lo que la integral se convierte en

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{\sec^2\theta+\sec\theta\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta}\right)\; d\theta = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u = \frac{1}{2}\ln(\sec\theta+\operatorname{tg}\theta).$$

Regresando a la variable original tendremos que

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{4x^2+1}+2x)+C.$$

Ejemplo

Hallar la integral

$$\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\; dx.$$

Solución

En este caso usamos un triángulo como el de la figura 2.2 b). Entonces tendremos que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{x}, \quad \Rightarrow x = 2\csc\theta, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}, \quad dx = -\csc\theta\operatorname{ctg}\,\theta\; d\theta.$$

Con lo anterior, la integral se sustituye por

$$\int\frac{3\operatorname{ctg}\,\theta}{3\csc\theta}(-3\csc\theta\operatorname{ctg}\,\theta\; d\theta) = -3\int \operatorname{ctg}\,^2\theta\; d\theta.$$

Sustituyendo $\operatorname{ctg}\,^2\theta$ por $\csc^2\theta - 1$, la integral se transforma en

$$-3\int\csc^2\theta\; d\theta + 3\int d\theta = 3\operatorname{ctg}\,\theta + 3\theta.$$

Regresando a la variable original x tenemos que

$$\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\; dx = \sqrt{x^2-9}+3\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{3}{x}\right)+C.$$

Ejercicios

Calcular las integrales siguientes

1. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx$ R: $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C$
2. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$ R: $\frac{1}{3}(x^2-18)\sqrt{x^2-9}+C$
3. $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx$ R: $\frac{\pi}{24}+\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{4}$
4. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{25-x^2}}\,dx$ R: $-\frac{\sqrt{25-x^2}}{25x}+C$
5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3}}$ R: $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3}}{x}\right|+C$
6. $\int \sqrt{1-4x^2}\,dx$ R: $\frac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2}+\frac{1}{4}\operatorname{arc\,sen}(2x)+C$
7. $\int \frac{\sqrt{9x^2-4}}{x}\,dx$ R: $\sqrt{9x^2-4}-2\operatorname{arcsec}\left(\frac{3x}{2}\right)+C$
8. $\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}\,dx$ R: $\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{a}\right)+C$
9. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-7}}\,dx$ R: $\sqrt{x^2-7}+C$
10. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$ R: $\ln(1+\sqrt{2})+C$
11. $\int_0^{2/3} x^3\sqrt{4-9x^2}\,dx$ R: $\frac{64}{1215}$
12. $\int \sqrt{2x-x^2}\,dx$ R: $\frac{1}{2}[\operatorname{arc\,sen}(x-1)+(x+1)\sqrt{2x-x^2}]+C$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+6x-8}}\,dx$ R: $\frac{1}{2}\ln|3x+1+\sqrt{9x^2+6x-8}|+C$
14. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$ R: $\frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,tg}(x+1)+\frac{x+1}{x^2+2x+2}\right]+C$
15. $\int e^x\sqrt{9-e^{2x}}\,dx$ R: $\frac{1}{2}\left[e^t\sqrt{9-e^{2t}}+9\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{e^t}{3}\right)\right]+C$
16. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$ R: $-\operatorname{arc\,tg}(\cos x)+C$
17. $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ R: $\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+C$
18. $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$ R: $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x^2+C$

Capítulo 3

Métodos de integración avanzados e integración numérica

En este capítulo se exponen algunos métodos para integrar funciones en los cuales los métodos del capítulo anterior pueden llevar a cálculos demasiado largos. Estos métodos en realidad son simplemente sustituciones especiales o extensiones de otros métodos, pero pueden hacer que la integración sea mucho más accesible.

3.1. Integración tabular

En algunos casos las integrales de productos de polinomios con funciones trascendentes involucran polinomios de grados altos, que conllevan cálculos demasiado laboriosos al aplicar la fórmula de la integral por partes. En tales casos se utiliza una técnica conocida como *integración tabular*, que consiste en derivar las funciones polinómicas hasta llegar a cero, y a su vez integrar las funciones trascendentes tantas veces como se derivó la otra función. Colocando las derivadas e integrales correspondientes lado a lado en una tabla, realizamos los productos de cada derivada con la integral del siguiente renglón, cambiando alternativamente el signo de cada producto. La suma de estos productos es el resultado de la integral correspondiente. Este método funciona bien con funciones exponenciales, hiperbólicas, senos y cosenos.

Ejemplo

Hallar la integral

$$\int (x^3 + x^2 + x + 1)e^x \ dx.$$

Solución

Elegimos $u = x^3 + x^2 + x + 1$ y $v = e^x$, y realizamos las derivaciones e integraciones indicadas. En la tabla de la figura 3.1 se muestran los resultados de esto. De lo obtenido en la tabla mencionada y haciendo los productos de $u(x)$ y sus derivadas con $v(x)$ y sus integrales, encontramos que

$$\int (x^3 + x^2 + x + 1)e^x \ dx = (x^3 - 2x^2 + x)e^x + C.$$

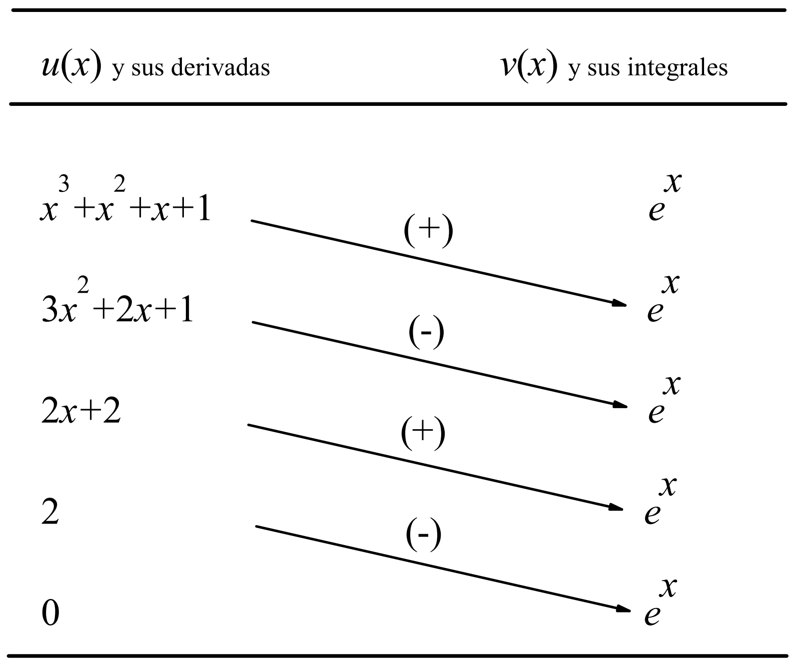


Figura 3.1: Ejemplo de integración tabular

3.2. Coeficientes indeterminados

Una forma alterna de calcular integrales de productos de polinomios con funciones exponenciales o de senos y cosenos es por coeficientes indeterminados. Este método consiste en suponer una solución consistente en uno o dos polinomios del mismo grado que el que vamos a integrar multiplicado por la exponencial (un polinomio) o por seno uno y coseno el otro. Para esto dejaremos los coeficientes de dichos polinomios en forma indeterminada. Después tomamos la función resultante y la derivamos. Como esta función y el integrando deben ser iguales, igualamos los coeficientes de cada potencia, lo que nos dará un sistema de ecuaciones en el mismo número de incógnitas que los coeficientes de los polinomios propuestos. Resolviendo este sistema obtendremos los valores de los coeficientes del polinomio supuesto inicialmente.

Ejemplo

Hallar la integral

$$\int (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)e^x \; dx.$$

Solución

Supondremos que

$$\int (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)e^x \; dx = (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)e^x.$$

Al derivar la función supuesta encontramos que:

$$(3a_3x^2 + 2a_2x + a_1)e^x + (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)e^x = (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)e^x =$$

$$= a_3x^3 + (3a_3 + a_2)x^2 + (2a_2 + a_1)x + (a_1 + a_0).$$

Igualando los coeficientes tenemos que

$$a_3 = 1, \quad a_2 + 3a_3 = -3, \quad a_1 + 2a_2 = 2, \quad a_0 + a_1 = 1,$$

y al resolver encontramos que los coeficientes son

$$a_3 = 1, \quad a_2 = -6, \quad a_1 = 14, \quad a_0 = -13,$$

con lo que la integral es finalmente

$$\int (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)e^x \, dx = \left(x^3 - 6x^2 + 14x - 13\right) e^x + C.$$

Ejemplo

Hallar la integral

$$\int (4x^3 - 3x^2 + 2x - 1) \operatorname{sen} x \, dx.$$

Solución

Suponemos que

$$\int (4x^3 - 3x^2 + 2x - 1) \operatorname{sen} x \, dx =$$
$$= (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) \operatorname{sen} x + (b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) \cos x.$$

Derivando en ambos miembros

$$(4x^3 - 3x^2 + 2x - 1) \operatorname{sen} x =$$
$$= (3a_3x^2 + 2a_2x + a_1) \operatorname{sen} x + (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) \cos x +$$

$$+ (3b_3x^2 + 2b_2x + b_1) \cos x - (b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) \operatorname{sen} x =$$

$$= [-b_3x^3 + (3a_3 - b_2)x^2 + (2a_2 - b_1)x + (a_1 - b_0)] \operatorname{sen} x +$$
$$+ [a_3x^3 + (3a_3 + a_2)x^2 + (2b_2 + a_1)x + (b_1 + a_0)] \cos x.$$

Al igualar los coeficientes y calcular encontramos que

$$a_3 = 0, \quad a_2 = 12, \quad a_1 = -6, \quad a_0 = -22,$$

$$b_3 = -4, \quad b_2 = 3, \quad b_1 = 22, \quad b_0 = -5,$$

con lo que la integral es finalmente

$$\int (4x^3 - 3x^2 + 2x - 1) \operatorname{sen} x \, dx = \left(4x^3 - 3x^2 - 22x + 5\right) \cos x + \left(12x^2 - 6x - 22\right) \operatorname{sen} x + C.$$

Ejercicios

Encontrar las integrales siguientes

1. $\int x^2 \cos 3x \; dx$ R: $\frac{1}{3}x^2 \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{9}x \cos 3x - \frac{2}{27} \operatorname{sen} 3x + C$
2. $\int (x^3 - 2x) \cos x dx$ R: $(x^3 - 8x) \operatorname{sen} x - (3x^2 + 4) \cos x + C$
3. $\int x^4 e^{2x} \; dx$ R: $\frac{3}{4}e^{2x} \left(\frac{1}{2} - x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4\right) + C$
4. $\int x^3 e^x dx$ R: $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$
5. $\int 2x^4 \; \operatorname{sen} 4x \; dx$ R: $\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{16}\right) \operatorname{sen} 4x + \left(-\frac{x^4}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{64}\right) \cos 4x + C$
6. $\int x^4 \operatorname{sen} ax dx$ R: $-\cos ax \left(\frac{x^4}{a} - 12\frac{x^2}{a^3} + \frac{24}{a^5}\right) + C$
7. $\int_0^\pi x^5 \cos x dx$ R: $-5\pi^4 + 60\pi^2 - 240$
8. $\int_0^1 x^5 \cosh x dx$ R: $120 - 185 \cosh 1 + 141 \operatorname{senh} 1$
9. $\int_0^1 x^6 \operatorname{senh} x \; dx$ R: $1111 \cosh 1 - 846 \operatorname{senh} 1 - 720$
10. $\int_0^1 x^8 e^{-x} \; dx$ R: $40320 - \frac{109601}{e}$

3.3. Método de Ostrogradski

Si en una integral racional el denominador del integrando tiene raíces múltiples, es posible hallar la integral mediante un método desarrollado por matemático ruso M. V. Ostrogradski, en lugar de descomponer en varias fracciones parciales.

El método consiste en los siguiente. Notemos que para un integrando de la forma

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \tag{3.1}$$

la integral es de la forma

$$\frac{A^*}{(x-a)^{n-1}}; \tag{3.2}$$

y para un integrando de la forma

$$\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m}, \tag{3.3}$$

la integral es de la forma

$$\frac{M^*x + N^*}{(x^2 + px + q)^{m-1}} + \int \frac{P}{x^2 + px + q}. \tag{3.4}$$

Entonces, si queremos encontrar la integral

$$\int \frac{Q(x)}{R(x)} \; dx, \tag{3.5}$$

donde $Q(x)$ es un polinomio de grado menor que $R(x)$, otro polinomio, podemos suponer que la integral es de la forma

$$\begin{aligned} &\int \frac{P_1(x)}{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \cdots (x^2 + p_1 x + q_1)^\mu \cdots (x^2 + p_2 x + q_2)^\nu} \; dx = \\ &= \frac{P_2(x)}{(x-a)^{\alpha-1} (x-b)^{\beta-1} \cdots (x^2 + p_1 x + q_1)^{\mu-1} \cdots (x^2 + p_2 x + q_2)^{\nu-1}} + \\ &+ \int \frac{P_3(x)}{(x-a)(x-b) \cdots (x^2 + p_1 x + q_1) \cdots (x^2 + p_2 x + q_2)} \; dx, \end{aligned} \tag{3.6}$$

siendo $P_i(x)$ polinomios de un grado menor que los del denominador. Entonces tenemos que encontrar los coeficientes de tales polinomios, así como calcular una integral con raíces simples en el denominador que se resuelve fácilmente con los métodos estudiados en el capítulo anterior.

Ejemplo

Encontrar la integral

$$\int \frac{1}{(x^3-1)^2}\, dx.$$

Solución

Podemos suponer que la integral es de la forma

$$\int \frac{1}{(x^3-1)^2}\, dx = \frac{a_2x^2+a_1x+a_0}{x^3-1} + \int \frac{b_2x^2+b_1x+b_0}{x^3-1}\, dx.$$

Derivando ambos miembros de esta igualdad encontramos que

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{(x^3-1)(2a_2x+a_1)-(a_2x^2+a_1x+a_0)(3x^2)}{(x^3-1)^2} +$$

$$+\frac{b_2x^2+b_1x+b_0}{x^3-1}.$$

Eliminando los denominadores obtenemos la igualdad

$$(x^3-1)(a_2x+a_1)-(a_2x^2+a_1x+a_0)(3x^2)+(x^3-1)(b_2x^2+b_1x+b_0)=1.$$

Igualando los coeficientes de potencias de x iguales obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones para los coeficientes

$$\begin{aligned} b_2 &= 0,\\ -a_2+b_1 &= 0,\\ -2a_1+b_0 &= 0,\\ 3a_0-b_2 &= 0,\\ -2a_2-b_1 &= 0,\\ -a_1-a_0 &= 1, \end{aligned}$$

cuya solución es $a_2=0$, $a_1=-\frac{1}{3}$, $a_0=0$, $b_2=0$, $b_1=0$ y $b_0=-\frac{2}{3}$.
Sustituyendo los valores encontrados obtenemos

$$\int \frac{1}{(x^3-1)^2}\, dx = -\frac{x}{3(x^3-1)} - \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^3-1}\, dx.$$

La última integral sólo tiene raíces simples en el denominador, y se calcula con el método de fracciones parciales, obteniéndose finalmente

$$\int \frac{1}{(x^3-1)^2}\, dx =$$

$$= -\frac{x}{3(x^3-1)} - \frac{2}{9}\ln|x-1| + \frac{1}{9}\ln(x^2+x+1) + \frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Ejercicios

Calcular las integrales siguientes

1. $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}\,dx$ R: $\frac{4x+3}{2(x+1)^2} + \ln\left(\frac{x^2}{(x+1)^2}\right) + C$

2. $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}\,dx$ R: $\frac{-5x+12}{x^2+6x+8} + \ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2 + C$

3. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$ R: $\frac{2-x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$

4. $\int \frac{1}{(x^4-1)^2}\,dx$ R: $-\frac{x}{4(x^4-1)} + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

5. $\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$ R: $\frac{3x^2-1}{(x-1)(x^2+1)} + \ln\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\right) + \operatorname{arc\,tg} x + C$

6. $\int \frac{1}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}\,dx$ R: $\frac{15x^5+40x^3+33x}{2(x+1)^2} + \ln\left(\frac{x^2}{(x+1)^2}\right) + C$

7. $\int \frac{1}{(x^2+1)^4}\,dx$ R: $-\frac{2x-1}{48(x^2+1)^3} + \frac{15}{48}\operatorname{arc\,tg} x + C$

8. $\int \frac{1}{x^4(x^3+1)^2}\,dx$ R: $\frac{1}{3}\left(2\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right| - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^3+1}\right) + C$

9. $\int \frac{x^2}{(x-1)^{10}}\,dx$ R: $-\frac{1}{9(x-1)^9} - \frac{1}{4(x-1)^8} - \frac{1}{7(x-1)^7} + C$

10. $\int \frac{1}{x^8+x^6}\,dx$ R: $-\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \operatorname{arc\,tg} x + C$

3.4. Sustituciones de Euler

Las sustituciones introducidas por el matemático suizo L. Euler se utilizan para integrales irracionales de la forma

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx, \tag{3.7}$$

donde R es una función que contiene sólo operaciones racionales de la variable dependiente y la raíz dada, que hagan difícil o no permitan usar sustituciones trigonométricas. Las sustituciones de Euler transforman tal integral irracional en una integral racional de la nueva variable.

Primera sustitución de Euler

Cuando en la integral 3.7 se tiene $a > 0$, se usa la sustitución

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t, \tag{3.8}$$

que elevando al cuadrado y simplificando nos da

$$bx + c = 2\sqrt{a}xt + t^2, \tag{3.9}$$

de donde al despejar x en términos de t se obtiene

$$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}. \tag{3.10}$$

Con esto se obtiene también dx como función de t, con lo que la integral irracional se convierte en una racional.

Ejemplo

Hallar la integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+4}}\, dx.$$

Solución

Hagamos

$$x+t=\sqrt{x^2+x+4},$$

con lo cual, al elevar al cuadrado y simplificar obtenemos

$$2tx+t^2=x+4,$$

y despejando x tenemos que

$$x=\frac{4-t^2}{2t-1}, \quad dx=\frac{-2t^2+2t-8}{(2t-1)^2}\, dt.$$

Las anteriores transformaciones nos permiten sustituir en la integral original como

$$\int \frac{1}{t+\frac{4-t^2}{2t-1}} \left(\frac{-2(t^2-t+4)}{(2t-1)^2}\right)\, dt = -2\int \frac{(2t-1)(t^2-t+4)}{(t^2-t+4)(2t-1)^2}\, dt =$$

$$= -\int \frac{2}{2t-1}\, dt = -\int \frac{1}{t-\frac{1}{2}}\, dt =$$

$$= -\ln\left|t-\frac{1}{2}\right| = -\ln\left|\sqrt{x^2+x+4}-x-\frac{1}{2}\right| + C.$$

Segunda sustitución de Euler

Si en la integral 3.7 $c>0$, usamos la sustitución

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}, \tag{3.11}$$

lo que al elevar al cuadrado y reducir nos da

$$ax^2+bx=x^2t^2+2xt\sqrt{c}, \tag{3.12}$$

y despejando x obtenemos

$$x=\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}. \tag{3.13}$$

De las expresiones anteriores se puede convertir la integral en x en una integral en t que es racional.

Ejemplo

Encontrar la integral

$$\int \frac{\left(1-\sqrt{1+x+x^2}\right)^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\, dx.$$

Solución

Hacemos la sustitución

$$\sqrt{1+x+x^2} = xt + 1,$$

que elevando al cuadrado y reduciendo nos da

$$x + x^2 = x^2t^2 + 2xt,$$

y despejando x obtenemos

$$x = \frac{2t-1}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2(t^2-t+1)}{(1-t^2)^2}\, dt.$$

Sustituyendo las expresiones encontradas en la integral inicial obtenemos

$$\int \frac{\left\{1 - \left[\left(\frac{2t-1}{1-t^2}\right)t + 1\right]\right\}}{\left(\frac{2t-1}{1-t^2}\right)^2 \left[t\left(\frac{2t-1}{1-t^2}+1\right)\right]} \left[\frac{2(t^2-t+1)}{(1-t^2)^2}\right]\, dt,$$

o reordenando

$$\int \frac{(-2t^2+t)^2(1-t^2)^2(1-t^2)2(t^2-t+1)}{(1-t^2)^2(2t-1)^2(t^2-t+1)(1-t^2)^2}\, dt =$$

$$= 2\int \frac{t^2}{1-t^2}\, dt = -2t + \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$

$$-2\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} + \ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{x-\sqrt{1+x+x^2}+1}}\right| + C.$$

Tercera sustitución de Euler

Si en la integral 3.7 el trinomio tiene como raíces *reales* a α y β (es decir, $ax^2+bx+c = a[x-\alpha][x-\beta]$), hacemos la sustitución

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t, \tag{3.14}$$

que al elevar al cuadrado y reducir nos da

$$a(x-\beta) = (x-\alpha)t^2, \tag{3.15}$$

y al despejar x como función de t nos da

$$x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}.$$

De las expresiones anteriores se obtiene una integral racional en t.

Ejemplo

Hallar la integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x-4}}\, dx$$

Solución

Observemos que $x^2+3x-4 = (x+4)(x-1)$. Hagamos entonces

$$\sqrt{(x+4)(x-1)} = (x+4)t,$$

que al elevar al cuadrado y simplificar nos da

$$x - 1 = (x+4)t^2,$$

donde despejando x obtenemos

$$x = \frac{1+4t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{10t}{(1-t^2)}\ dt.$$

Al sustituir en la integral original obtenemos

$$\int \frac{\frac{10t}{(1-t^2)^2}}{\left[\frac{1+4t^2}{1-t^2}+4\right]t}\ dt = \int \frac{10t(1-t^2)}{(1-t^2)^2 \cdot 5t}\ dt = \int \frac{2}{1-t^2}\ dt =$$

$$= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right| + C.$$

Ejercicios

Hallar las integrales siguientes

1. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-x+3}}\ dx$ R: $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{3}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right| + C$
2. $\int \frac{1}{x\sqrt{2+x-x^2}}\ dx$ R: $-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right| + C$
3. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4x-4}}\ dx$ R: $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}x}\right) + C$
4. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\ dx$ R: $\sqrt{x^2+2x} + \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right| + C$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}\ dx$ R: $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} + C$
6. $\int \sqrt{2x-x^2}\ dx$ R: $\frac{1}{2}\left[(x-1)\sqrt{2x-x^2} + \operatorname{arc\,sen}(x-1)\right] + C$
7. $\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\ dx$ R: $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$
8. $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}\ dx$ R: $\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}}\right| + C$
9. $\int \frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}\ dx$ R: $-\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}} + C$
10. $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\ dx$ R: $\ln\left|\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x^2}\right| + C$
11. $\int \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}\ dx$ R: $-\frac{8}{x+\sqrt{x^2+4x}} + \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x}\right| + C$

3.5. Binomios diferenciales

Cuando tenemos una integral de la forma

$$\int x^m(ax^n+b)^p\ dx, \tag{3.16}$$

donde al integrando le llamamos *binomio diferencial*, generalmente no hay antiderivada; se exceptúan los siguientes casos

1. p es un número entero,
2. $\frac{m+1}{n}$ es un número entero,
3. $\frac{m+1}{n}+p$ es un número entero.

Para calcular la integral en estos casos, hacemos la sustitución

$$z=x^n,\ \text{esto es},\ x=z^{\frac{1}{n}},\ dx=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}\ dz, \tag{3.17}$$

la cual convierte la integral en una irracional. La nueva integral se puede convertir en racional con los métodos descritos en el capítulo 2.

Ejemplo

Hallar la integral

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})}\ dx.$$

Solución

La integral dada se puede reescribir como

$$\int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{2}{3}})^{-1}\ dx.$$

Aquí tenemos el caso en que $p=-1$. Si usamos la sustitución

$$z=x^{\frac{2}{3}},\ \text{o bien},\ x=z^{\frac{3}{2}}\ \text{tenemos que}\ dx=\frac{3}{2}z^{\frac{1}{2}}\ dz,$$

con lo que la integral se transforma en

$$\int z^{-1}(1+z)^{-1}\frac{3}{2}z^{1/2}\ dz=\frac{3}{2}\int\frac{1}{z^{1/2}(1+z)}\ dz.$$

Aquí podemos hacer

$$t=z^{1/2},\ dt=\frac{1}{2}z^{-1/2}\ dz.$$

De la última integral obtenemos

$$\frac{3}{2}\int\frac{2}{1+t^2}\ dt=3\operatorname{arc\,tg} t=3\operatorname{arc\,tg} z^{1/2}=3\operatorname{arc\,tg}\sqrt[3]{x}+C.$$

Ejercicios

Hallar las integrales siguientes

1. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\ dx$ R: $2(1+x^{1/3})^{3/2}+C$
2. $\int x^3(1+2x^2)^{-3/2}\ dx$ R: $\frac{1}{2}\frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}}+C$
3. $\int x^{1/3}(2+x^{2/3})^{1/4}\ dx$ R: $\frac{10x^{2/3}-16}{15}(2+x^{2/3})^{5/4}+C$
4. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}\ dx$ R: $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt[4]{1+x^{-4}}+1}{\sqrt[4]{1+x^{-4}}-1}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\sqrt[4]{1+x^{-4}}+C$
5. $\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\ dx$ R: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$
6. $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\ dx$ R: $\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C$
7. $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)^{3/2}}\ dx$ R: $-\frac{2x+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+x^2}}+C$
8. $\int \frac{1}{x^3\sqrt{1+x^5}}\ dx$ R: $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}\right|+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)+C\ (z=\sqrt[3]{1+x^5})$
9. $\int \sqrt[4]{(1+x^{1/2})^3}\ dx$ R: $\frac{8}{77}(7\sqrt{x}-4)(1+\sqrt{x})^{7/4}+C$
10. $\int \frac{1}{x^2(2+x^3)^{5/3}}\ dx$ R: $-\frac{1}{8}\frac{4+3x^3}{x(2+x^3)^{2/3}}+C$
11. $\int \frac{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}\ dx$ R: $\frac{2(4+3\sqrt[3]{x})(2-\sqrt[3]{x})^{3/2}}{5}+C$
12. $\int x^{1/3}(2+x^{2/3})^{1/4}\ dx$ R: $\frac{10x^{2/3}-16}{15}(2+x^{2/3})^{5/4}+C$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}\ dx$ R: $-2\sqrt[3]{(x^{-3/4}+1)^2}+C$

3.6. Sustitución universal para integrales trigonométricas

Algunas integrales que involucran funciones trigonométricas no se pueden determinar con los métodos estudiados antes, y sólo pueden calcularse mediante conversión en una función racional. Esto se logra empleando la sustitución

$$t=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right). \tag{3.18}$$

Con esto, haremos las transformaciones algebraicas necesarias para expresar las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ en términos de t. Primero tenemos que

$$\operatorname{sen} x=\frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}, \tag{3.19}$$

por otro lado

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{1}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \tag{3.20}$$

además

$$x=2\operatorname{arc\,tg} t,\quad dx=\frac{2}{1+t^2}\ dt. \tag{3.21}$$

Con todas las transformaciones anteriores, el problema de encontrar la integral dada se reduce al cálculo de una función racional. Esta sustitución suele llevar a integrales bastante laboriosas, por lo que sólo debe utilizarse después de haber agotado todas las otras posibilidades.

Ejemplo

Hallar la integral

$$\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}.$$

Solución

Haciendo $u = \operatorname{tg}(x/2)$, y de acuerdo con las equivalencias dadas en las ecuaciones 3.19 - 3.21, tenemos que la integral dada se transforma en

$$\int \frac{\frac{2\ du}{1+u^2}}{5 - 3\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{\frac{2\ du}{1+u^2}}{\frac{5+5u^2-3+3u^2}{1+u^2}} = \int \frac{2\ du}{8u^2+2} =$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} 2u,$$

que al regresar a la variable original se transforma en

$$\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}[2\operatorname{tg}\frac{x}{2}] + C.$$

Ejercicios

Encontrar las integrales siguientes

1. $\int \frac{dx}{4-5\operatorname{sen} x}$ R: $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right| + C$
2. $\int \frac{dx}{7-2\cos x}$ R: $\frac{2}{3\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\left|\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$
3. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\ dx$ R: $\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1} + x + C$
4. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\ dx$ R: $x - \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$
5. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos^4 x+\operatorname{sen}^4 x}\ dx$ R: $\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{sen}^2 x - 1) + C$
6. $\int \frac{1}{(1+\cos x)^2}\ dx$ R: $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{6}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2} + C$
7. $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{tg}^2 x}\ dx$ R: $-\frac{1}{2}\left[\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)\right] + C$
8. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}\ dx$ R: $\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) - x + C$
9. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}$ R: $\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$
10. $\int \frac{dx}{2\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x}$ R: $\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) + C$

3.7. Integración numérica

Existen muchas funciones cuya integral no existe en la forma de una antiderivada. Esto lleva a tener que usar aproximaciones para los casos en que es necesario obtener un valor numérico de la integral en cuestión. Veremos tres técnicas para aproximar las integrales definidas. En los siguientes ejemplos se calculará una integral que sí existe en forma de antiderivada, a fin de poder comparar la precisión de los métodos dados, pero en los ejercicios de repaso se propondrán algunos en los que la integral no existe como antiderivada.

Método de los rectángulos

Como vimos en la sección 1.1, el área bajo una curva se aproxima mediante rectángulos de base Δx_i y altura $y_i = f(x_i)$

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}), \tag{3.22}$$

o bien

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + ... + y_n), \tag{3.23}$$

así que, si no calculamos el límite cuando $n \to \infty$ pero usamos un número suficiente de rectángulos, podemos hallar una aproximación de la precisión necesaria.

Ejemplo

Calcular la integral

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\ dx.$$

Solución

Tomemos 10 subintervalos iguales de longitud 0.1, con lo cual tendremos para la suma inferior

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}\ dx \approx$$

$$\approx \frac{2-1}{10}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.4} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.6} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.8} + \frac{1}{1.9}\right).$$

Aproximando a 4 cifras decimales tendremos

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\ dx \approx 0.7188.$$

Si ahora tomamos la suma superior tendremos

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}\ dx \approx$$

$$\approx \frac{2-1}{10}\left(\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.4} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.6} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.8} + \frac{1}{1.9} + \frac{1}{2}\right).$$

En este caso tendremos

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\ dx \approx 0.6688.$$

La integral dada es

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\ dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0.6931.$$

Como vemos, la aproximación usada es muy burda, por lo que sería recomendable tomar más subintervalos, a fin de hacerla más precisa.

Método de los trapecios

Si en lugar de usar como figura de aproximación un rectángulo usamos un trapecio, tendremos una mejor aproximación a la integral buscada. En este caso en lugar de las alturas se usarán los valores medios de las alturas en los puntos extremos de los subintervalos usados, esto es $y_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$, con lo cual la integral es aproximadamente

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+...+y_{n-1}\right). \tag{3.24}$$

Ejemplo

Calcular la integral

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\ dx.$$

Solución

Nuevamente tomemos 10 subintervalos iguales de longitud 0.1, así que la integral será aproximadamente

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\ dx \approx$$

$$\approx \frac{1}{10}\left(\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}}{2}+\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.4}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.6}+\frac{1}{1.7}+\frac{1}{1.8}+\frac{1}{1.9}\right).$$

Aproximando a 4 cifras decimales tendremos

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\ dx \approx 0.6938.$$

Recordando el valor hallado antes, observamos que este método nos da una aproximación mucho más precisa, ya que coinciden los tres primeros decimales.

Método de las parábolas

El área bajo una parábola que pasa por los puntos (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i) y (x_{i+1}, y_{i+1}) es

$$A_i = \frac{\Delta x}{3}(y_{i-1}+4y_i+y_{i+1}), \tag{3.25}$$

así que si sumamos sobre un número PAR (o sea, $n = 2m$) de subintervalos obtendremos

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \frac{b-a}{6m}[y_0+y_{2m}+2(y_2+y_4+...+y_{2m})+4(y_1+y_3+...+y_{2m-1})]. \tag{3.26}$$

Este método de debe al matemático inglés Thomas Simpson, por lo que la fórmula 3.26 también es conocida como *fórmula de Simpson.*

Ejemplo

Calcular la integral

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx.$$

Solución

Nuevamente tomemos 10 subintervalos iguales de longitud 0.1, así que la integral será aproximadamente

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx \approx \frac{1}{30}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.4}+\frac{1}{1.6}+\frac{1}{1.8}\right)+\right.$$

$$\left.+4\left(\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.7}+\frac{1}{1.9}\right)\right].$$

Aproximando a 4 cifras decimales tendremos

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx \approx 0.6931.$$

Aquí observamos que este método nos da una aproximación aun más precisa, ya que coinciden los cuatro decimales.

Ejercicios

Aproximar numéricamente las integrales siguientes, tomando el número de subintervalos indicado

1. $\int_1^5 \frac{1}{x}\, dx, n = 12$ R: 1.6098 (Simp)
2. $\int_1^{11} x^3\, dx, n = 10$ R: 3660 (Simp)
3. $\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\, dx, n = 6$ R: 0.7796 (Simp)
4. $\int_1^3 \frac{1}{2x-1}\, dx, n = 4$ R: 0.8416 (Simp)
5. $\int_1^{10} \log_{10} x\, dx, n = 10$ R: 6.0896 (Simp)
6. $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\, dx, n = 10$ R: 3.1415 (Simp)
7. $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx, n = 8$ R: 1.8519 (Simp)
8. $\int_1^2 \frac{\cos x}{x}\, dx, n = 10$ R: 0.0856 (Simp)
9. $\int_{-1}^1 e^{-x^2}\, dx, n = 12$ R: 1.4936 (Simp)
10. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x^2\, dx, n = 10$ R: 0.8281 (Simp)

Capítulo 4

Aplicaciones de la integral

4.1. Áreas entre curvas

Como vimos en el capítulo 1, el área encerrada por una curva dada por $f(x)$ y el eje x se calcula integrando esta función. Claro está que si en alguna región del intervalo de integración la función está por debajo del eje x, el área encontrada será negativa, por lo que habrá que tomar el valor absoluto del área hallada para esas regiones. Si tenemos dos curvas, el área encerrada entre estas curvas se calcula con la integral de la resta de las funciones, tomando como el minuendo a la función mayor y a la menor como el sustraendo. A menudo sucederá que una función en ciertos intervalos sea minuendo mientras que en otros sea sustraendo; en tales casos será necesario encontrar los puntos de intersección, lo cual se logra igualando las ecuaciones de las curvas involucradas.

Ejemplo

Calcular el área encerrada entre la curva $y = x^3 - x$ y la recta $y = x/2$.

Solución

Como se ve en la figura 4.1 (región rayada), el área buscada está dada por las integrales siguientes

$$\int_a^0 [(x^3 - x) - x/2]\ dx + \int_0^b [x/2 - (x^3 - x)]\ dx,$$

donde a y b son los otros puntos de intersección además del cero, los cuales se calculan igualando ambas ecuaciones

$$x^3 - x = x/2, \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Entonces tendremos

$$A = \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^0 [(x^3 - x) - x/2]\ dx + \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} [x/2 - (x^3 - x)]\ dx = \frac{9}{8}.$$

Si se tiene una región encerrada entre curvas cuya ecuación está dada en coordenadas polares, necesitamos aplicar la fórmula siguiente para hallar el área encerrada entre las curvas dadas

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} [f(\theta)]^2\ d\theta,} \tag{4.1}$$

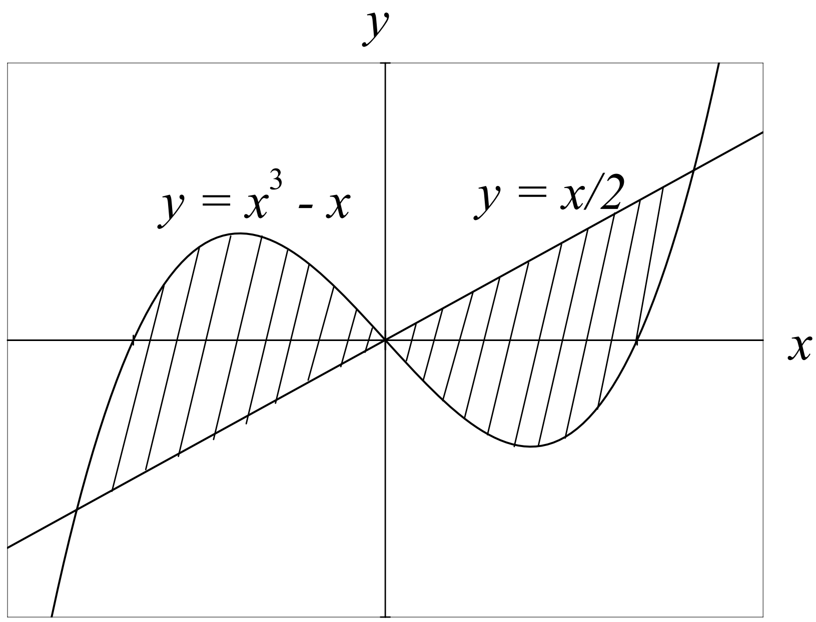


Figura 4.1: Área entre dos curvas

donde $r = f(\theta)$ es la ecuación que define a la curva en coordenadas polares, mientras que θ_1 y θ_2 son los ángulos inicial y final, respectivamente.

En la práctica, es muy importante encontrar correctamente los límites de integración, ya que las curvas en coordenadas polares suelen presentar características distintas a las curvas dadas en coordenadas cartesianas, lo cual da lugar a muchas confusiones. Por ello se recomienda siempre graficar la curva a integrar[1].

Ejemplo

Encontrar el área encerrada en un pétalo de la flor dada por la ecuación

$$r = 3\cos 3\theta.$$

Solución

El área está dada por la integral

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} (3\cos 3\theta)^2 \; d\theta.$$

Para encontrar los límites de integración, observamos (ver figura 4.2) que al graficar desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{\pi}{6}$ se dibuja la mitad del primer pétalo de la flor. Entonces si encontramos el área de esta región y la multiplicamos por dos tendremos el área buscada.

[1] Para facilitar la graficación se recomienda usar el programa *Graph*, que se puede obtener gratuitamente en `www.padowan.dk`

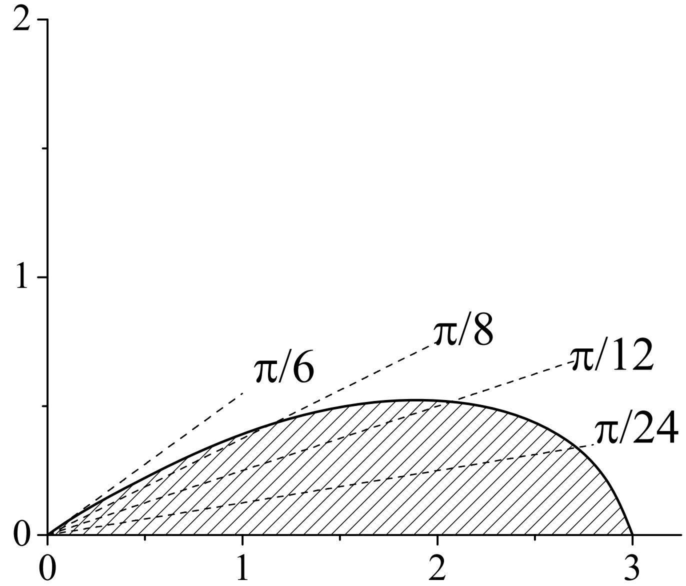


Figura 4.2: Área en coordenadas polares

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (3\cos 3\theta)^2 \; d\theta = 9 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta \; d\theta =$$

$$= 9 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 6\theta}{2} \; d\theta =$$

$$= \frac{9}{2}\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 6\theta}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{6}+0\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Por lo tanto, el área total es de $\frac{3\pi}{4}$ unidades cuadradas.

Ejemplo

Hallar el área de la región común a las dos regiones limitadas por las curvas

$$r(\theta) = -6\cos\theta \text{ y } r(\theta) = 2 - 2\cos\theta.$$

Solución

Las intersecciones se encuentran en los puntos en que las funciones tienen el mismo valor, esto es, aquellos puntos que cumplen

$$-6\cos\theta = 2 - 2\cos\theta,$$

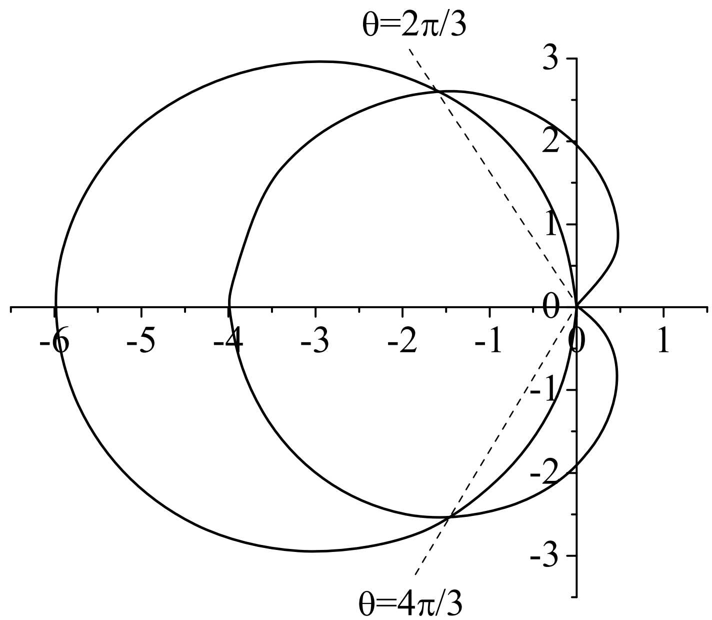


Figura 4.3: Área entre dos curvas en coordenadas polares

que al resolver nos da los ángulos $\frac{2n\pi}{3}$, con n cualquier número entero.

De la gráfica (figura 4.3) podemos ver que la región que se pide está limitada por la circunferencia entre $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{2\pi}{3}$, por la cardioide entre $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$, y nuevamente por la circunferencia de $\frac{4\pi}{3}$ a $\frac{3\pi}{2}$. Por la simetría de la figura, será suficiente con calcular la mitad del área y luego multiplicar por 2, esto es

$$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} (-6\cos\theta)^2 \; d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (2-2\cos\theta)^2 \; d\theta\right]$$

que al integrar (dejamos los detalles al lector) nos da 5π.

Ejercicios

Hallar las áreas acotadas por las curvas y rectas dadas

1. El eje y, la curva $x = 8 + 2y - y^2$ y las rectas $y = -1$ y $y = 3$. R: $\frac{92}{3}$
2. El eje y y la curva $x = y^2 - y^3$. R: 1/12
3. Las curvas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$, y las rectas $x = 0$ y $x = \pi/4$. R: $\sqrt{2} - 1$
4. La curva $y = 2x - x^2$ y la recta $y = -3$. R: 32/3
5. Las curvas $y = 6x - x^2$ y $y = x^2 - 2x$. R: $\frac{64}{3}$
6. La curva $x = 3y - y^2$ y la recta $x + y = 3$. R: 4/3
7. Las curvas $y^2 = 4x$ y $y = 2x - 4$. R: 9
8. La curva $x = y^2$ y la recta $x = y + 2$. R: 9/2

9. La curva $y^2 = x^2 - x^4$. R: $\frac{4}{3}$
10. Las curvas $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje x. R: 8
11. La curva $y^3 = x$ y la recta $y = x$. R: 1/12
12. La curva $y = \operatorname{sen}(\pi x/2)$ y la recta $y = x$. R: $\frac{4}{\pi} - 1$
13. Las curvas $y = \sec^2$, $y = \operatorname{tg}^2 x$ y las rectas $x = -\pi/4$, $x = \pi/4$. R: $\frac{4}{\pi} - 1$
14. La curva $y = 4x - x^2$ y el eje x. R: $\frac{32}{3}$
15. La curva $x = 10 - y^2$ y la recta $x = 1$. R: 9/2
16. La curva $y = x^2 - 7x + 6$, el eje x y las rectas $x = 2$ y $x = 6$. R: $\frac{56}{3}$
17. Las curvas $y = x^2$ y $y = -x^2 + 4x$. R: 4
18. Las curvas $y = x^2 - 4$ y $y = 8 - 2x^2$. R: 32
19. Las curvas $y = \cos(\pi x/2)$ y $y = 1 - x^2$. R: 1/6
20. Las curvas $y = e^x$ y $y = e^{-x}$, y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. R: $\frac{e^2+1}{e^2-2}$
21. La cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$. R: $\frac{3\pi}{2}a^2$
22. El círculo $r = 2a \operatorname{sen}\theta$. R: a^2
23. La lemniscata $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$. R: $2a^2$
24. La curva $r = a(2 + \cos\theta)$. R: $\frac{9\pi}{2}a^2$
25. El interior del círculo $r = 3a\cos\theta$, pero exterior de la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$. R: πa^2
26. Compartida por los círculos $r = a$ y $r = 2a \operatorname{sen}\theta$. R: $\left[\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] a^2$
27. El interior de una hoja del trebol $r = \cos 2\theta$. R: $\frac{\pi}{8}$
28. El interior de la curva $r = 4 + 2\cos\theta$. R: 18π

4.2. Volúmenes de sólidos

Si para un sólido conocemos el área de cualquier sección transversal al cortar con un plano perpendicular al eje x, su volumen se puede calcular aproximando con prismas que tengan como base el área perpendicular que pasa por el plano de corte. Para cada uno de estos prismas (ver figura 4.4) el volumen es $V_i = A(x_i)\Delta x_i$.

El volumen total del sólido será aproximadamente

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x_i \tag{4.2}$$

y cuando $n \to \infty$ se tendrá el volumen exacto

$$\boxed{V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x_i = \int_a^b A(x)\, dx.} \tag{4.3}$$

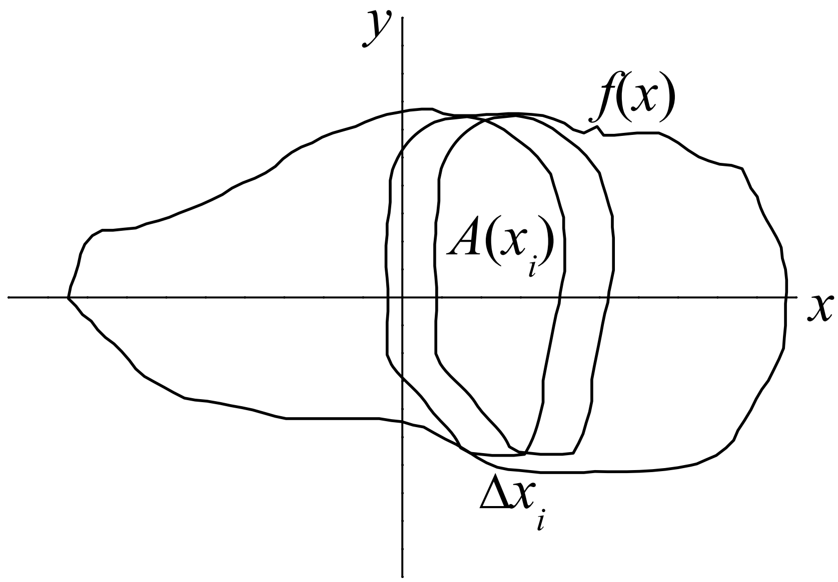


Figura 4.4: Volumen de un sólido

Ejemplo

Hallar el volumen de la pirámide cuadrangular cuya base tiene a unidades de lado, y cuya altura mide h.

Solución

Para encontrar este volumen, situamos la pirámide en un plano cartesiano, de tal forma que la punta coincida con el origen, y el eje x sea perpendicular a la base (ver figura 4.5). Si tomamos una sección transversal de la pirámide en una x cualquiera entre 0 y h, obtenemos un área cuadrada, cuyos lados miden $2f(x)$, siendo $f(x)$ la recta $y = \frac{a}{2h}x$, con lo que el área es $4[f(x)]^2 = \frac{a^2}{h^2}x^2$, entonces el volumen está dado por

$$V = \int_0^h \frac{a^2}{h^2}x^2\, dx = \frac{a^2}{h^2}\left[\frac{x^2}{3}\right]_0^h = \frac{a^2h}{3}.$$

El volumen hallado coincide con la fórmula conocida de la geometría elemental.

Ejercicios

1. Calcular el volumen del sólido cuya base está acotada por las gráficas de $y = x + 1$ y $y = x^2 - 1$, con las secciones transversales indicadas, perpendiculares al eje x: *a*) Cuadrados, *b*) Rectángulos de altura 1. R: *a*) $\frac{81}{10}$, *b*) $\frac{9}{2}$
2. Encontrar el volumen del sólido cuya base está acotada por el círculo $x^2 + y^2 = 4$, con las secciones transversales indicadas perpendiculares al eje x. *a*) Cuadrados, *b*) Triángulos equiláteros, *c*) Semicírculos, *d*) Triángulos equiláteros rectángulos. R: *a*) $\frac{128}{3}$, *b*) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$, *c*) $\frac{16}{3}\pi$, *d*) $\frac{32}{3}$

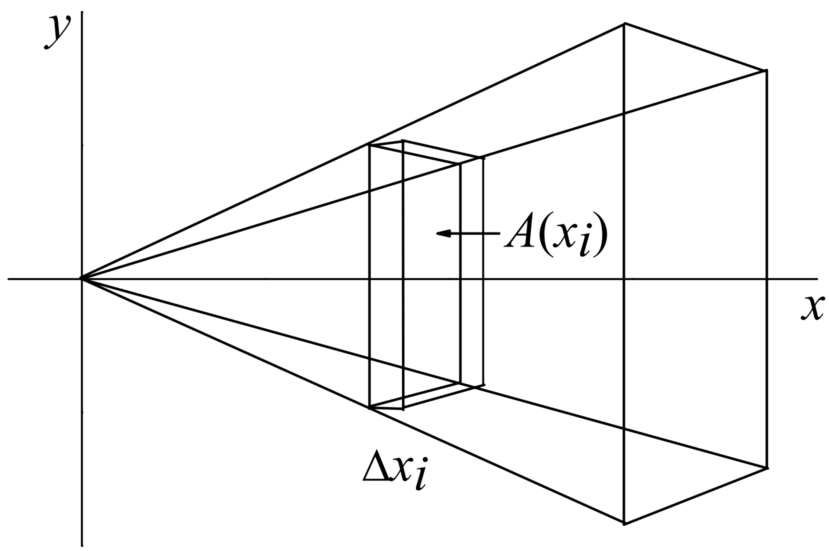


Figura 4.5: Volumen de una pirámide

3. La base de un sólido está acotada por $y = x^3$, $y = 0$ y $x = 1$. Hallar el volúmen para cada una de las secciones con las secciones transversales indicadas (perpendiculares al eje y). a) Cuadrados, b) Semicírculos, c) Triángulos equiláteros, d) Semielipses cuyas alturas son dos veces las longitudes de sus bases. R: a) $\frac{1}{10}$, b) $\frac{\pi}{80}$, c) $\frac{\sqrt{3}}{40}$, d) $\frac{\pi}{20}$.

Para el caso particular en que el sólido tiene como sección transversal una circunferencia (sólido de revolución), se divide al sólido en discos (ver figura 4.6), para los que el área $A(x)$ está dada por $A(x) = \pi[f(x)]^2$, por lo cual el volumen es:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.} \tag{4.4}$$

Cuando el sólido es *hueco*, obviamente que calculamos el volumen externo y a éste le restamos el volumen interno.

Ejemplo

Encontrar el volumen que resulta al girar la región encerrada entre las curvas $x = 0$, $y = 1$ y $y = \sqrt{x}$ alrededor del eje x.

Solución

El volumen de revolución es la resta de un cilindro menos un paraboloide de revolución, desde el origen hasta el punto de intersección. Para hallar tal punto, igualamos los valores de la ordenada

$$1 = \sqrt{x}, \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

Así que está dado por

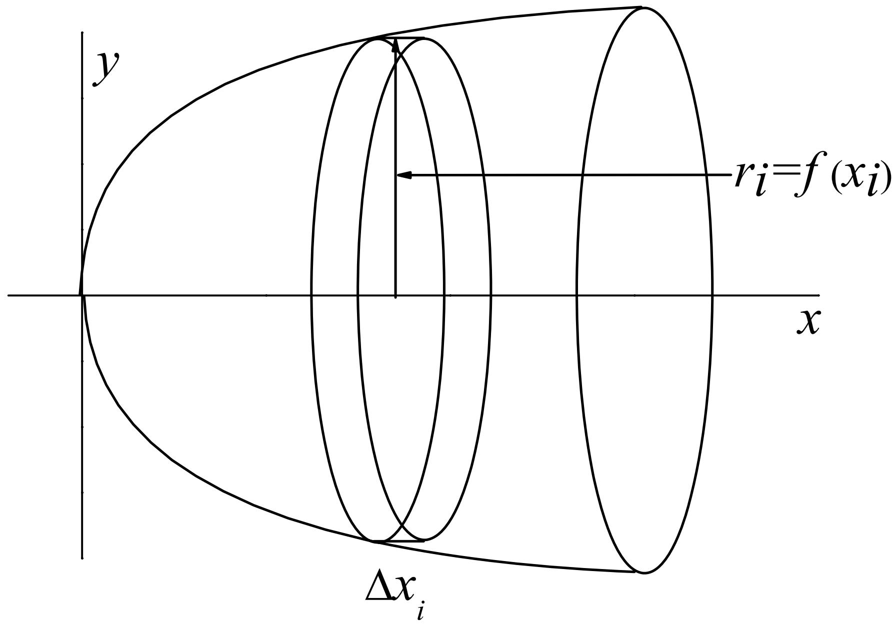


Figura 4.6: Volumen de un sólido de revolución

$$V = \pi \int_0^1 (1)^2 \, dx - \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 \, dx =$$

$$= \pi \; x|_0^1 - \pi \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Ejercicios

Calcular los volúmenes generados cuando las regiones dadas giran alrededor del eje x.

1. $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$. R: $8\pi/3$
2. $y = \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$. R: $\pi^2/2$
3. $y = x - x^2$, $y = 0$. R: $\pi/30$
4. $y = -3x - x^2$, $y = 0$. R: $\frac{81}{10}\pi$
5. $y = x^2 - 2x$, $y = 0$. R: $16\pi/15$
6. $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$. R: $\frac{128}{7}\pi$
7. $y = x^4$, $x = 1$, $y = 0$. R: $\pi/9$
8. $y = \sqrt{\cos x}$, $0 \leq x \leq \pi/2$, $x = 0$, $y = 0$. R: π
9. $y = \sec x$, $x = -\pi/4$, $x = \pi/3$, $y = 0$. R: $\pi(1 + \sqrt{3}$
10. $y = x^3 + 1$, $x = 2$, $y = 0$. R: $\frac{405}{14}\pi$

11. $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$. R: $8\pi/3$
12. $y = x^3$, $x = 2$. R: $128\pi/7$
13. $y = x$, $y = 1$, $x = 0$. R: $56\pi/15$
14. $y = -x^2 - 3x + 6$, $x + y = 3$. R: $1792\pi/15$
15. $y = 3 + x^2$, $y = 4$. R: $256\pi/5$
16. $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 5$. R: 2500π
17. $y = 4 - x^2$, $y = 2 - x$. R: $117\pi/5$
18. $x = y - y^3$, $x = 1$, $y = 1$. R: $11\pi/15$
19. $y = x^3$, $y = 4x$. R: $512\pi/21$
20. $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi/4$. R: $\pi/2$

Si el sólido de revolución se generó al girar una función con respecto al eje y, puede ser más cómodo calcular el volumen usando capas en lugar de rebanadas, por lo que para encontrar el volumen se divide en anillos cilindricos (ver figura 4.7). El volumen de cada anillo es $2\pi x_i h_i \Delta x_i$, o sea $2\pi x_i f(x_i)\Delta x_i$, y el volumen total será aproximadamente

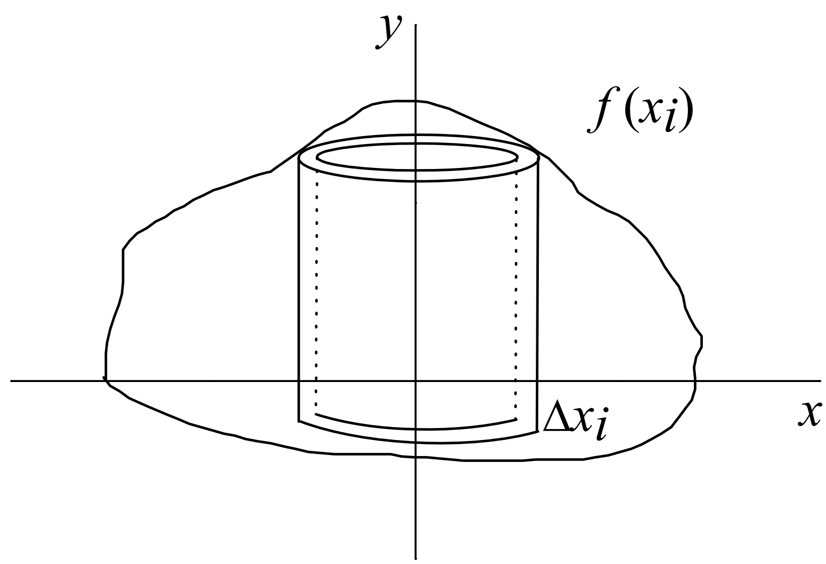


Figura 4.7: Volumen de un sólido de revolución

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i f(x_i)\Delta x_i, \tag{4.5}$$

con lo cual, al hacer que $n \to \infty$ obtenemos

$$\boxed{V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.} \tag{4.6}$$

Ahora bien, esto no quiere decir que siempre se deba usar esta fórmula, ya que la anterior también funciona si se cambia x por y, quedando

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \ dx.}$$

Ejemplo

Hallar el volumen generado al girar alrededor del eje y la región encerrada entre las curvas $x = 0$, $y = 1$ y $y = x$.

Solución

El volumen en cuestión es un cono, que encontramos restando de un cilindro la parte de abajo

$$V = 2\pi \int_0^1 x(1) \ dx - 2\pi \int_0^1 x(x) \ dx =$$

$$= 2\pi \ x \Big|_0^1 - 2\pi \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Ejercicios

Hallar los volúmenes generados cuando las regiones dadas giran alrededor del eje y.

1. $y = x^4$, $x = 1$, $y = 0$. R: $\pi/3$
2. $y = x^3$, $x = 2$. R: $64\pi/5$
3. $x^2 + y^2 = 4$, $y = 1$, $y = 2$. R: $\pi/6$
4. $y = 2x - x^2$, $y = x$. R: $\pi/6$
5. $y^2 = 8x$, $x = 2$. R: $128\pi/5$
6. $y = 2x^2$, $y = x^4 - 2x^2$. R: $32\pi/3$
7. $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$. R: 625π
8. $4x^2 + 9y^2 = 36$. R: 24π
9. $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. R: $\pi\left(1 - \frac{1}{e}\right)$
10. $y = x^2 - 5x + 6$, $y = 0$. R: $5\pi/6$
11. $y = x/2$, $x = 0$, $y = 2$. R: $32\pi/3$
12. $x = \sqrt{4 - y}$, $x = 0$, $y = 0$. R: 8π
13. $x = 1 - y^2$, $x = 0$. R: $16\pi/15$
14. $x = y^{3/2}$, $x = 0$, $y = 3$. R: $\frac{403}{8}\pi$
15. $xy = 1$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$. R: $\pi/15$

4.3. Longitud de arco

Para calcular la longitud de una curva $f(x)$, definida en el intervalo $[a,b]$ podemos aproximarla por secantes (ver figura 4.8) en ciertos puntos $f_i = f(x_i)$. La longitud de cada secante será: $\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i$, con lo que la longitud total será

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i. \tag{4.7}$$

Como de costumbre, hacemos $n \to \infty$, con lo cual se obtiene

$$\boxed{S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx.} \tag{4.8}$$

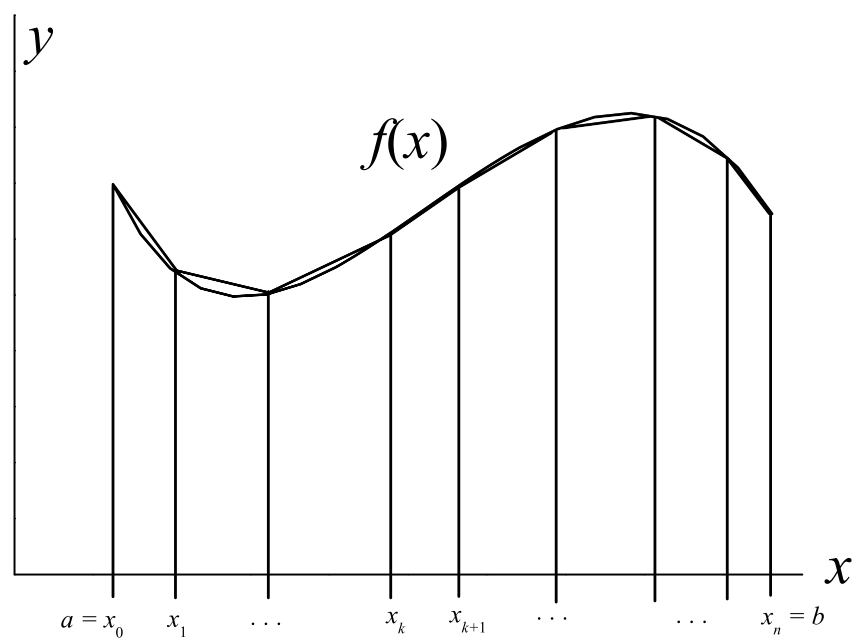


Figura 4.8: Longitud de una curva

Ejemplo

Calcular la longitud de arco de la curva $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$, entre x =0 y x=1.

Solución

De la fórmula 4.8 tenemos que

$$S = \int_0^1 \sqrt{1 + (x^{1/2})^2}\ dx = \int_0^1 \sqrt{1+x}\ dx.$$

Para encontrar esta integral podemos hacer $u = 1 + x$, con lo cual $du = dx$. Cuando x=0, u=1; y cuando $x = 1$, $u = 2$. Con esto la integral se transforma en

$$\int_1^2 u^{1/2}\, du = \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}.$$

Si la curva está dada en coordenadas polares, con una ecuación $r = f(\theta)$ definida entre θ_1 y θ_2, la fórmula a usar es

$$\boxed{L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta.} \tag{4.9}$$

Ejemplo

Encontrar la longitud del arco que va de 0 a 2π en la cardioide

$$r = 2 - 2\cos\theta.$$

Solución

Tenemos que

$$[f(\theta)]^2 = 4 - 8\cos\theta + 4\cos^2\theta,$$

mientras que

$$f'(\theta) = 2\,\text{sen}(\theta), \quad \Rightarrow \quad [f'(\theta)]^2 = 4\,\text{sen}^2\,\theta.$$

Lo anterior nos da

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 - 8\cos\theta + 4\cos^\theta + 4\,\text{sen}^2\,\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{8 - 8\cos\theta}\, d\theta =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos\theta}\, d\theta = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\,\text{sen}^2\,\frac{\theta}{2}}\, d\theta =$$

$$4\int_0^{2\pi} \text{sen}\,\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8\left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 8(1+1) = 16.$$

Ejercicios

Hallar las longitudes de las curvas siguientes

1. $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$ de $x = 0$ a $x = 3$. R: 12
2. $y = x^{3/2}$ de $x = 0$ a $x = 5$. R: $\frac{335}{27}$
3. $9x^2 = 4y^3$ de $x = 0$ a $x = 2\sqrt{3}$. R: 14/3
4. $24xy = x^4 + 48$ de $x = 2$ a $x = 4$. R: $\frac{17}{6}$
5. $y^3 = 8x^2$ de $x = 1$ a $x = 8$. R: $\frac{104\sqrt{13}-125}{27}$

6. $x = y^4/4 + 1/8y^2$ de $y = 1$ a $y = 2$. R: $123/32$
7. $6xy = x^4 + 3$ de $x = 1$ a $x = 2$. R: $17/2$
8. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ de $x = 1$ a $x = e$. R: $\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}$
9. $y = \ln(\cos x)$ de $x = \frac{\pi}{6}$ a $x = \frac{\pi}{4}$. R: $\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$
10. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ de $x = 1$ a $x = 8$. R: 9
11. $r = \theta^2$ (espiral) de $\theta = 0$ a $\theta = \sqrt{5}$. R: $\frac{19}{3}$
12. $r = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\theta}$ (espiral) de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$. R: $e^{\pi} - 1$
13. $r = 1 + \cos\theta$ (cardioide). R: 8
14. $r = a\,\text{sen}^2\,\frac{\theta}{2}$ de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$, con $a > 0$. R: $2a$
15. $r = \frac{6}{1+\cos\theta}$ de $\theta = 0$ a $\theta = \frac{\pi}{2}$. R: $3[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$
16. $r = \cos^3\frac{\theta}{3}$ de $\theta = 0$ a $\theta = \frac{\pi}{4}$. R: $\frac{\pi}{8} + \frac{3}{8}$
17. $r = \sqrt{1 + \cos 2\theta}$ de $\theta = 0$ a $\theta = \sqrt{2}\pi$. R: 2π

4.4. Áreas de superficies de revolución

El área de una superficie de revolución generada al rotar la función $f(x)$ alrededor del eje x se puede aproximar en el intervalo $[a, b]$ usando secciones cónicas de la forma mostrada en la figura 4.9. El área de una de estas tiras es

$$A_i = 2\pi\left(\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\right)\sqrt{1 + f'(x_i)^2}\;\Delta x_i. \tag{4.10}$$

Obsérvese que en esta área interviene la longitud de la cuerda que se examinó para la longitud de una curva. Si sumamos un número suficiente de estas tiras obtendremos la aproximación al área

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi\left(\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\right)\sqrt{1 + f'(x_i)^2}\;\Delta x_i, \tag{4.11}$$

y el área exacta se encuentra al pasar al límite

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi\left(\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\right)\sqrt{1 + f'(x_i)^2}\;\Delta x_i =$$

$$\boxed{A = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x_i)^2}\;dx.} \tag{4.12}$$

Si la función gira alrededor del eje y, simplemente cambiamos x por y en la fórmula anterior.

Ejemplo

Calcular el área de la superficie que resulta al girar la parábola $y^2 = x$ alrededor del eje y, desde (1,1) hasta (4,2).

Solución

Sabemos que si $f(x) = x^{1/2}$, entonces $f'(x) = x^{-1/2}/2$, con lo cual se tendrá que

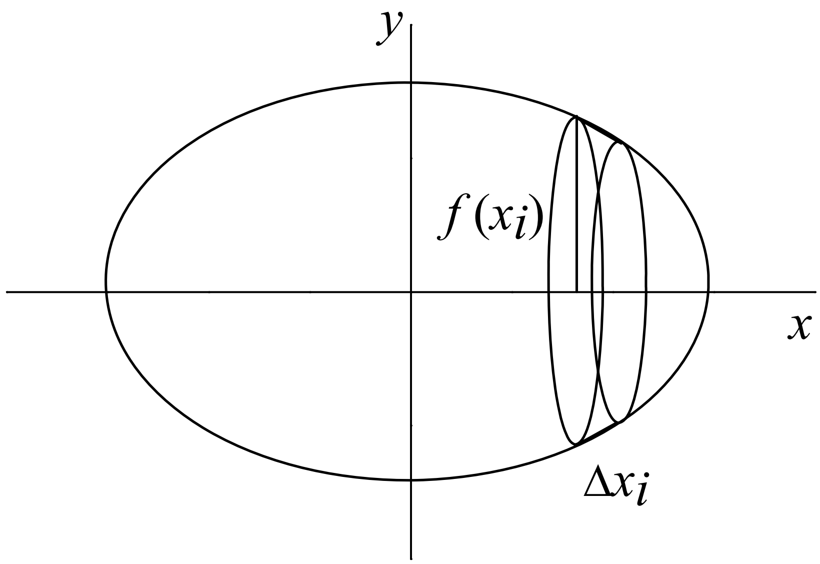


Figura 4.9: Área de una superficie de revolución

$$A = \int_1^4 2\pi x^{1/2} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2x^{1/2}}\right)} \, dx =$$

$$= \int_1^4 2\pi x^{1/2} \sqrt{\frac{4x+1}{4x}} \, dx = \pi \int_1^4 \sqrt{4x+1} \, dx =$$

$$\frac{\pi}{6}(4x+1)^{3/2}\Big|_1^4 = \frac{\pi}{6}(17^{3/2} - 5^{3/2}) \approx 30.85.$$

Si la superficie de revolución en cuestión está dada por medio de una ecuación en coordenadas polares $r = f(\theta)$, definida entre θ_1 y θ_2, las fórmulas para calcular las áreas son

$$\boxed{A = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta) \operatorname{sen}\theta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} \, d\theta} \tag{4.13}$$

cuando la curva gira alrededor del eje x y

$$\boxed{A = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta) \cos\theta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} \, d\theta} \tag{4.14}$$

cuando la curva gira alrededor del eje y.

Ejemplo

Hallar el área de la superficie obtenida por revolución de la circunferencia $f(\theta) = \cos\theta$ alrededor del eje y.

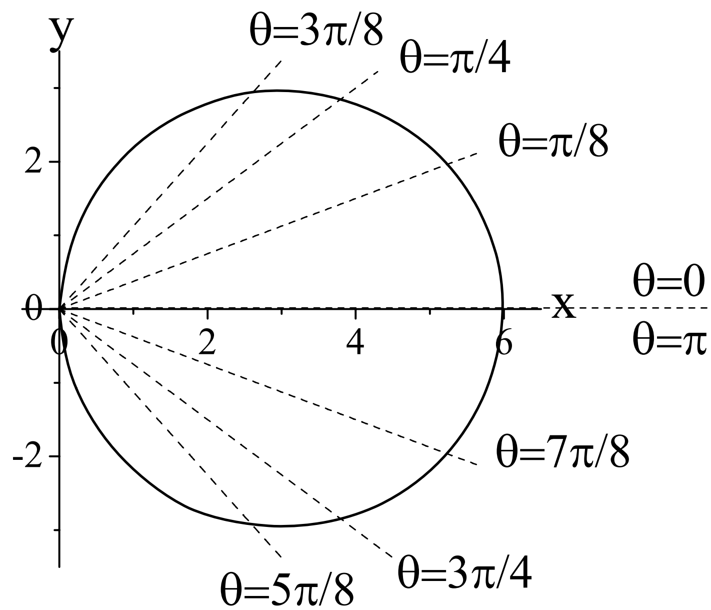


Figura 4.10: Circunferencia $f(\theta) = \cos\theta$

Solución

Aquí es importante ver en la gráfica (ver figura 4.10) que la circunferencia en cuestión se dibuja por completo al variar a θ desde 0 hasta π. Estos serán entonces los límites de integración.

$$A = 2\pi \int_0^\pi \cos\theta \cos\theta \sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}\; d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^\pi \cos^2\theta\; d\theta = \pi \int_0^\pi (1 + \cos\theta)\; d\theta =$$

$$= \pi \left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^\pi = \pi^2.$$

Ejercicios

Calcular las áreas de las siguientes superficies de revolución, cuando la función dada sobre el intervalo indicado gira alrededor del eje especificado

1. $y^2 = 12x$, $x = 0$, $x = 3$, eje x R: $24\pi(2\sqrt{2} - 1)$
2. $x = y^3$, $y = 0$, $y = 1$, eje y R: $24\pi(10\sqrt{10} - 1)$
3. $y^2 + 4x = 2\ln y$, $y = 1$, $y = 3$, eje x R: $\frac{32}{3}\pi$
4. $y = \sqrt{2x - x^2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, eje x R: 2π
5. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, eje x R: $8\pi(\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi + 1)$

6. $y = x^3$, $x = 0$, $x = 2$, eje x R: $\pi\frac{145\sqrt{145}-1}{27}$
7. $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $x = 9$, eje x R: $\pi\frac{37\sqrt{37}-17\sqrt{17}}{6}$
8. $y = 2x$, $x = 0$, $x = 2$, eje x R: $8\pi\sqrt{5}$
9. $y = \operatorname{sen} x$, $[0,\pi]$, eje x R: $2\pi[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$
10. $y = \frac{1}{3}x^3$, $x = 0$, $x = 3$, eje x R: $\frac{\pi(82\sqrt{82}-1}{9}$
11. $y = \cosh x$, $[0,1]$, eje x R: $\pi[1 + \frac{\operatorname{senh} 2}{2}$
12. $y = \frac{1}{3}x^3$, $x = 0$, $x = 3$, eje y R: $\frac{\pi}{2}(9\sqrt{82} + \ln(9 + \sqrt{82})$
13. $x = \frac{(y^2+2)^{3/2}}{3}$, $[1,2]$, eje x R: $\frac{21\pi}{2}$
14. $8y^2 = x^2(1 - x^2)$, eje x R: $\pi/4$
15. $y = \sqrt[3]{x}$, $[1,2]$, eje y R: $\pi\frac{145\sqrt{145}-10\sqrt{10}}{27}$
16. $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, $x = 1$, $x = 2$, eje y R: $\pi\left(\frac{15}{4} + \ln 2\right)$
17. $x = e^{2y}$, $[0,\frac{1}{2}]$, eje y R: $\frac{\pi}{4}\left[2e\sqrt{1 + 4e^2} - 2\sqrt{5} + \ln\left(\frac{2e+\sqrt{1+4e^2}}{2+\sqrt{5}}\right)\right]$
18. $y = \ln x$, $x = 1$, $x = 7$, eje y R: $\pi[34\sqrt{2} + \ln(3 + 2\sqrt{2})]$
19. $r = \sqrt{\cos 2\theta}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, eje y. R: $\sqrt{2}\pi$
20. $r^2 = \cos 2\theta$, eje x. R: $2\pi(2 - \sqrt{2})$

4.5. Movimiento

Cuando una partícula se mueve sobre una recta con velocidad positiva

$$v(t) = \frac{dx}{dt}, \tag{4.15}$$

la posición de la partícula en un instante dado t está dada por la integral

$$\boxed{x(t) = \int v(t)\ dt + x_0,} \tag{4.16}$$

siendo x_0 la constante de integración, que físicamente es la posición inicial de la partícula. Si convenimos en colocar el origen en el punto de partida, tendremos $x_0 = 0$, con lo que la posición de la partícula será sólo la integral, sin constantes de integración.

Ejemplo

Encontrar la posición como función del tiempo de una partícula que se mueve con velocidad

$$v(t) = 2t - 3$$

Solución

Suponiento que el origen está en el punto de partida, la posición será

$$x(t) = \int (2t + 3)\ dt = t^2 + 3t.$$

Al calcular la integral definida

$$\boxed{x(t) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\ dt} \tag{4.17}$$

tendremos la distancia recorrida por la partícula entre los instantes t_1 y t_2.

Anteriormente supusimos que la velocidad es positiva, pero frecuentemente se tendrá la situación en que la velocidad cambia de signo en diferentes puntos del intervalo de tiempo que se está analizando. En tal caso, la integral anterior sólo nos dará la diferencia entre la posición inicial y la posición final Δx, a lo que se le llama *desplazamiento*. Si queremos la distancia total recorrida d, necesitamos calcular separadamente las integrales de las regiones donde la velocidad es positiva y donde es negativa (y cambiarle de signo en este último caso) y sumar todas ellas.

En resumen, el desplazamiento es

$$\boxed{\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\ dt,} \tag{4.18}$$

mientras que la distancia total recorrida es

$$\boxed{d = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\ dt.} \tag{4.19}$$

Ejemplo

Una partícula se mueve con velocidad

$$v(t) = 5\cos \pi t \text{ m/s}.$$

Encontrar el desplazamiento y la distancia total recorrida desde $t_1 = 0$ hasta $t = 1.5$ s.

Solución

Usando la fórmula 4.18 encontramos para el desplazamiento

$$\Delta x = \int_0^{1.5} 5\cos \pi t\ dt = \left[\frac{5}{\pi}\operatorname{sen}\pi t\right]_0^{1.5} =$$

$$= \frac{5}{\pi}\left[\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi - \operatorname{sen} 0\right] = -\frac{5}{\pi} \text{ m}.$$

De la fórmula 4.19, la distancia total recorrida es

$$d = \int_0^{1.5} |5\cos \pi t|\ dt =$$

$$= \int_0^{0.5} 5\cos \pi t\ dt - \int_{0.5}^{1.5} 5\cos \pi t\ dt =$$

$$= \left[\frac{5}{\pi}\operatorname{sen}\pi t\right]_0^{0.5} - \left[\frac{5}{\pi}\operatorname{sen}\pi t\right]_{0.5}^{1.5} =$$

$$\frac{5}{\pi}(1-0) - \frac{5}{\pi}(-1-1) = \frac{15}{\pi} \text{ m}.$$

Cuando se da la aceleración (en lugar de la velocidad), además hay que agregar una condición extra (llamada condición inicial). Con esto, para hallar desplazamiento y distancia primero se encuentra $v(t)$ con la relación

$$\boxed{v(t) = \int a(t)\ dt + v_0,} \tag{4.20}$$

donde v_0 es la velocidad en $t = 0$ o velocidad inicial.

Ejemplo

Se arroja una piedra desde un puente con una velocidad inicial de 8 m/s, después de lo cual cae con la aceleración de la gravedad (9.8 m/s^2). Encontrar la distancia que recorre en los primeros 3 segundos.

Solución

De la ecuación 4.20, la velocidad es

$$v(t) = \int 9.8\ dt + 8 = 9.8t + 8.$$

Entonces la distancia es

$$d = \int_0^3 (9.8t + 8)\ dt = \left[4.9t^2 + 8t\right]_0^3 = 68.1 \text{ m}.$$

Ejercicios

En los siguientes ejercicios, dada la velocidad, hallar el desplazamiento y la distancia totales recorridas por el cuerpo entre $t = a$ y $t = b$.

1. $v = 2t + 1,\ 0 \le t \le 2.$ R: 6 m, 6 m.
2. $v = t^2 - t - 2,\ 0 \le t \le 3.$ R: -1.5 m, $\frac{31}{6}$ m.
3. $v = t - \frac{8}{t^2},\ 1 \le t \le 3.$ R: $-\frac{8}{3}$ m, $\frac{11}{3}$ m.
4. $v = |t - 1|,\ 0 \le t \le 2.$ R: 1 m, 1 m.
5. $v = 6 \operatorname{sen} 3t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$ R: 2 m, 6 m.
6. $v = 4 \cos 2t,\ 0 \le t \le \pi.$ R: 0 m, 16 m.
7. $v = \operatorname{sen} t + \cos t,\ 0 \le t \le \pi.$ R: -2, $2\sqrt{2}$.
8. $v = \operatorname{sen} t\sqrt{2 + 2\cos t},\ 0 \le t \le \pi.$ R: $\frac{8}{3}$ m, $\frac{8}{3}$ m.

En los siguientes problemas, dadas la aceleración y la valocidad inicial, hallar el desplazamiento recorrido por el cuerpo entre $t = 0$ y $t = 2$.

1. $a = \operatorname{sen} t,\ v_0 = 2.$ R: $6 - \operatorname{sen} 2$.
2. $a = 1 - \cos t,\ v_0 = 0.$ R: $1 + \cos 2$.
3. $a = g$ (constante), $v_0 = 0.2g.$ R: 2.4 g.
4. $a = \sqrt{4t + 1},\ v_0 = -\frac{13}{3}.$ R: 0.

5. $a = \frac{1}{\sqrt{4t+1}}$, $v_0 = 1$. R: $\frac{19}{6}$.

En los siguientes problemas, dadas la velocidad y la posición inicial, hallar la posición del cuerpo $x(t)$ como función del tiempo.

1. $v = -\operatorname{sen} t$, $[0, 2\pi]$, $x(0) = 1$. R: $x(t) = \cos t$.
2. $v = 5\cos \pi t$, $[0, \frac{3}{2}]$, $x(0) = -1$. R: $x(t) = \frac{\operatorname{sen} \pi t}{\pi} - \frac{3}{2}$.

4.6. Trabajo

El trabajo T desarrollado por una fuerza constante F al desplazar un objeto una distancia d, se calcula realizando el producto entre estas cantidades. Si la fuerza no es constante en cierto intervalo, sino que cambia conforme se desplaza, se puede aproximar el trabajo dividiendo en subintervalos Δx_i, donde la fuerza tenga un valor $F(x_i)$ casi constante. Multiplicando el valor de la fuerza por cada subintervalo recorrido, tendremos una buena aproximación del trabajo. El valor exacto se obtiene al pasar al límite

$$\boxed{T = \lim_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(x_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)\ dx.} \tag{4.21}$$

Las diferentes interacciones entre los objetos tendrán distintas variaciones, que se darán por una ley de la fuerza para cada caso particular.

Si la fuerza se debe a la acción de un resorte de constante k, que se desplaza una distancia x, la ley de la fuerza es

$$F(x) = -kx, \tag{4.22}$$

llamada *ley de Hooke*.

Cuando hay interacciones gravitacionales entre dos partículas, la ley de la fuerza es la *ley de la gravitación universal* de Newton, dada por

$$F(x) = G\frac{m_1 m_2}{x^2}, \tag{4.23}$$

donde $G = 6.97 \times 10^{-11}\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$, m_1 y m_2 son las masas de las partículas y x es la distancia que las separa.

Si hay fuerzas electrostáticas entre dos cuerpos cargados, la ley de la fuerza está dada por la *ley de Coulomb*

$$F(x) = -k\frac{q_1 q_2}{x^2}, \tag{4.24}$$

con $k = 9 \times 10^9\mathrm{Nm}^2/\mathrm{C}^2$, q_1 y q_2 son los valores de las cargas en coulomb, y x es la distancia que las separa.

Ejemplo

Calcular el trabajo de la fuerza F al comprimir un muelle 5 cm, si sabemos que es necesario aplicar una fuerza de 10 N para comprimirlo 0.1 m.

Solución

Para un resorte vale la ley de Hooke

$$F = -kx,$$

con lo que si $F = 10$ N cuando $x = -0.1$ m, tenemos que

$$k = \frac{10\mathrm{N}}{0.1\mathrm{m}} = 100\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

El trabajo será entonces

$$T = \int_0^{0.5} 100x\ dx = 50x^2\Big|_0^{0.5} =$$
$$= 50(0.25) = 12.5\text{J}.$$

Ejemplo

Determinar el trabajo requerido para desplazar una carga $q_2 = 10\mu$C, desde el punto P_1 que se encuentra a la distancia $x_1 = 0.5$ m de la carga $q_1 = 50\mu$C (suponiendo que la carga q_1 está en el origen) hasta el punto P_2 que se halla en $x_2 = 0.2$ m.

Solución

El trabajo está dado por la integral

$$T = \int_{0.5}^{0.2} k\frac{q_1 q_2}{x^2}\ dx = -\frac{4.5}{x}\Big|_{0.5}^{0.2} =$$
$$= 4.5\left(\frac{1}{0.2} - \frac{1}{0.5}\right) = 20.7 \text{ J}.$$

Ejemplo

Se tiene un módulo espacial de masa m_1 =15 000 kg. ¿Cuál es el trabajo necesario para llevarlo a una altura de 1200 km sobre la Tierra? El radio medio de la Tierra es 6.37 $\times 10^6$ m y su masa es m_2 =5.98 $\times 10^{24}$ kg.

Solución

El trabajo es

$$T = -\int_{6.37\times10^6}^{7.57\times10^6} G\frac{m_1 m_2}{x^2}\ dx = -\frac{5.5\times10^{18}}{x}\Big|_{6.37\times10^6}^{7.57\times10^6} =$$
$$= -\frac{5.5\times10^{18}}{7.6\times10^6} + \frac{5.5\times10^{18}}{6.4\times10^6} = 1.36\times10^{11} \text{ J}.$$

Ejemplo

Un tanque esférico de radio 2.5 m está medio lleno de aceite de densidad $\rho = 900$ kg/m^3. Encontrar el trabajo requerido para extraer el aceite a través de un orificio en la parte superior del tanque.

Solución

Supongamos que el aceite está dividido en discos de radio x y espesor Δy (ver figura 4.11). La fuerza ΔF necesaria para levantar cada disco es igual a su peso

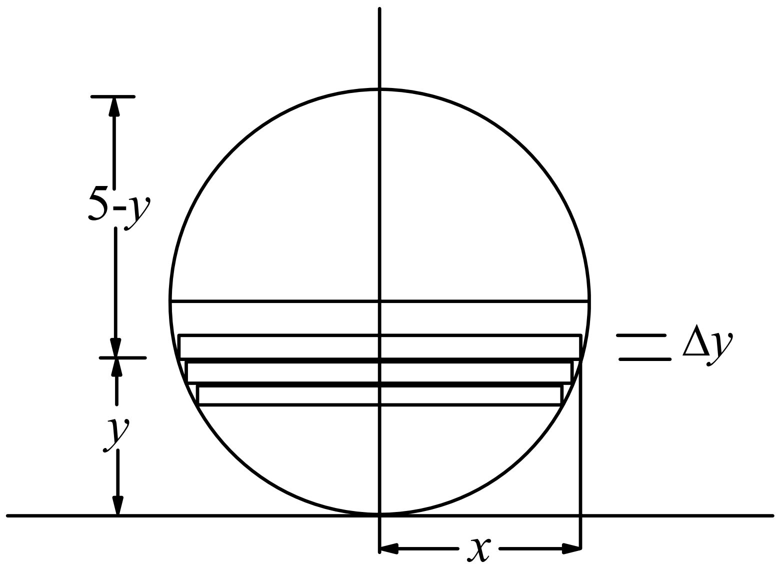


Figura 4.11: Extracción de agua de un tanque esférico

$$\Delta F = \rho \Delta V = \rho \pi x^2 \Delta y,$$

siendo ΔV el volumen del disco.

Como a cierta altura y el círculo correspondiente tiene radio x. La ecuación que relaciona x con y (suponiendo que el origen del sistema de coordenadas está en el fondo) es

$$x^2 + (y - 2.5)^2 = 2.5^2.$$

Sustituyendo x^2 en la ecuación para la fuerza tenemos que

$$\Delta F = \rho \pi (5y - y^2) \Delta y.$$

Para sacar el disco, hay que desplazarlo una distancia $(5 - y)$, entonces

$$\Delta T = \Delta F(5 - y) =$$
$$= \rho \pi (5y - y^2)(5 - y) \Delta y = \rho \pi (25y - 10y^2 + y^3) \Delta y.$$

Como el tanque está medio lleno, y varía de 0 a 2.5 m, así que

$$T = \int_0^{2.5} \rho \pi (25y - 10y^2 + y^3)\ dy =$$
$$\rho \pi \left[\frac{25}{2} y^2 - \frac{10}{3} y^3 + \frac{y^4}{4} \right]_0^{2.5} = 101243 \text{ J}.$$

Ejercicios

1. Una fuerza mueve una partícula a lo largo del eje x; la fuerza es de $\frac{10}{(1+x)^2}$ libras en el punto a x pies del origen. Calcular el trabajo realizado al moverla del origen hasta 9 m de distancia. R: 9 J.
2. Cuando una partícula se encuentra a x metros de distancia del origen, una fuerza igual a $\cos(\pi x/3)$ actúa sobre ella. ¿Cuánto trabajo se efectúa al mover la partícula desde $x=1$ hasta $x=2$? Interpretar la respuesta considerando el trabajo realizado desde $x=1$ hasta $x=1.5$; y después desde $x=1.5$ hasta $x=2$. R: 0.
3. Se necesita una fuerza de 10 libras para mantener estirado un resorte a 4 pulgadas más que su longitud original. ¿Cuánto trabajo se realiza al estirarlo desde su longitu natural hasta 6 pulgadas más?
4. Un resorte tiene una longitud natural de 19 pulgadas. Para comprimirlo hasta 16 pulgadas se usa una fuerza de 10 lb. ¿Cuánto trabajo se realiza al comprimirlo desde 16 pulgadas hasta 12 pulgadas? R: $\frac{560}{3}$ pulg - lb.
5. Dos electrones se repelen con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Supongamos que en el punto (1,0) del eje x se mantiene fijo un electrón. Hallar el trabajo requerido para mover el segundo electrón a lo largo del eje x desde el punto (-1,9) hasta el origen. R: $\frac{1}{2}k$.
6. Si se pudiera excavar un túnel que pasara por el centro de la Tierra, una partícula de masa m que cayera por el túnel sería atraída hacia abajo por una fuerza mgr/R cuando estuviera a una distancia r del centro. (R es el radio de la Tierra y g es la aceleración de la gravedad). ¿Qué trabajo se realizaría sobre la partícula en esa caída? R: $\frac{1}{2}mgR$.
7. El gas que contiene un cilindro de sección transversal constante A se expande o comprime mediante el movimiento de un pistón. Si p es la presión del gas en libras por pulgada cuadrada y V es su volumen en pulgadas cúbicas, demostrar que el trabajo realizado por el gas cuando pasa del estado inicial (p_1, V_1) a un segundo estado (p_2, V_2) es
$$W = \int_{(p_1,V_1)}^{(p_2,V_2)} p\, dV.$$
8. Calcular el trabajo realizado al bombear toda el agua de un tanque cónico de 10 pies de radio en la parte superior y de 8 pies de altura, elevándola hasta una altura de 6 pies sobre el borde superior del tanque. R$\frac{200}{3}\pi$ pie - ton.
9. Un tanque tiene forma de cilindro de 20 pies de largo y 8 pies de diámetro. Si el tanque está semilleno de aceite de peso específico 16 libras/pie cúbico, hallar el trabajo necesario para vaciarlo por medio de una tubería que va del fondo del tanque hasta una salida situada 6 pies por encima de la parte superior del tanque. R: $\frac{320(15pi+8)}{3}\rho g$ pie - lb.

4.7. Fuerza hidrostática

Cuando se sumerge un cuerpo en un líquido, éste ejerce una fuerza sobre tal cuerpo. Dicha fuerza depende de la profundidad a que está sumergido el cuerpo, del área expuesta y de la masa del fluido mismo. Para un cuerpo extendido, como una placa plana, dividimos en franjas de anchura pequeña (ver figura 4.12). La fuerza que el líquido ejerce sobre esa franja está dada por el producto del área $L(y_i)\Delta y_i$ de esa franja por la profundidad $h(y_i)$ a que está sumergida, así como por el peso específico $\gamma(y) = \rho(y)g$ del líquido. Esto se puede escribir como

$$F_i = \rho(y)gh(y_i)L(y_i)\Delta y_i. \tag{4.25}$$

Para hallar la fuerza total ejercida se suman las fuerzas sobre todas las franjas, obteniendo la aproximación

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(y)gh(y_i)L(y_i)\Delta y_i, \tag{4.26}$$

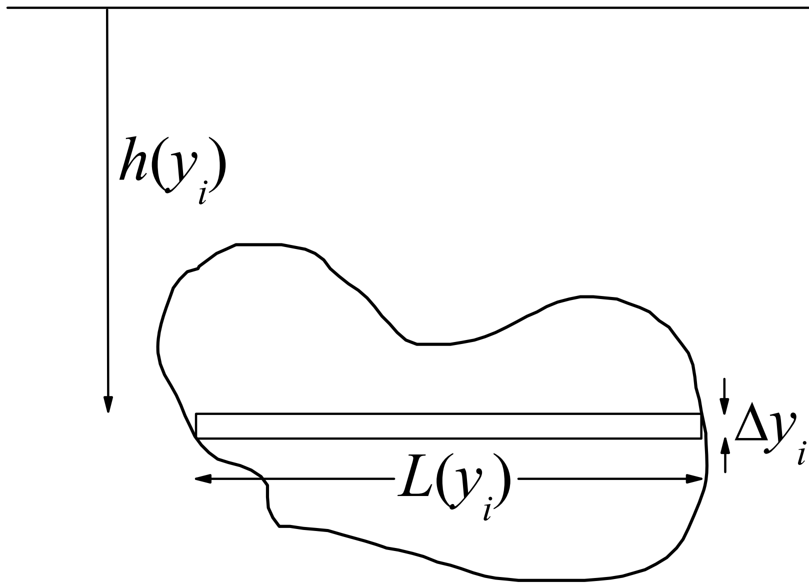


Figura 4.12: Cálculo de la fuerza hidrostática

que al tomar el límite cuando n tiende a infinito nos da la exacta

$$\boxed{F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(y) g h(y_i) L(y_i) \Delta y_i = \int_a^b \rho(y) g h(y) L(y)\, dy,} \tag{4.27}$$

siendo a y b las alturas de los bordes inferior y superior, respectivamente.

Ejemplo

Una placa plana en forma de triángulo rectángulo isósceles, con base de 6m y altura de 3 m se sumerge verticalmente, con la base hacia arriba, 2 m por debajo de la superficie de una alberca. Determinar la fuerza ejercida por el agua contra un lado de la placa.

Solución

Colocando un sistema de coordenadas con origen en el vértice inferior de la placa, y el eje y hacia arriba sobre el eje de simetría (ver figura 4.13), vemos que la superficie de la alberca está en la recta $y = 5$, mientras que la hipotenusa está en $y = 3$; un cateto está en la recta $y = x$ y el otro en $y = -x$. A la altura y, la longitud de la franja es

$$L(y) = 2x = 2y,$$

mientras que la profundidad de la misma es

$$(5 - y).$$

Entonces la fuerza es

$$F = \int_0^3 (1000)(9.8)(5 - y)(2y)\, dy =$$

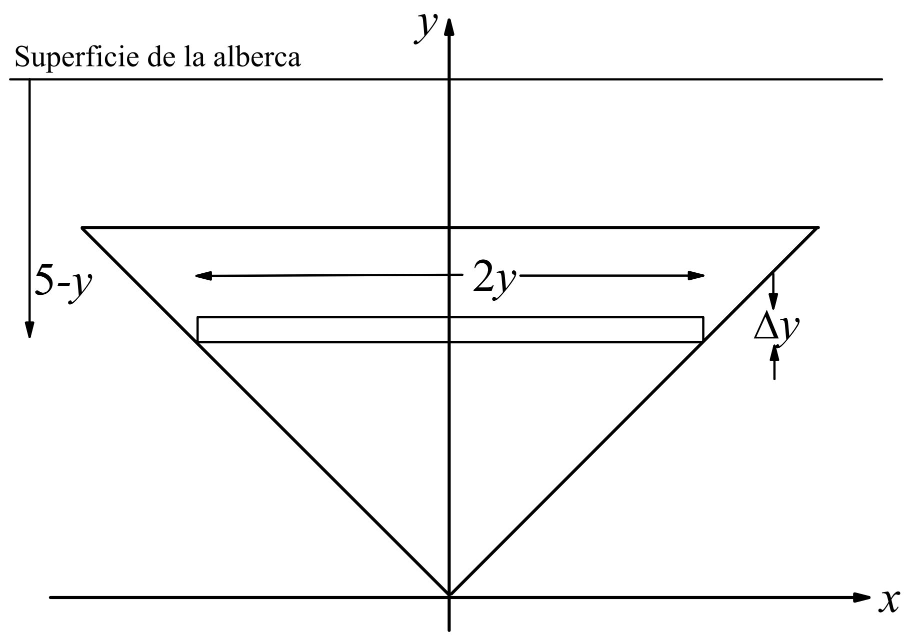


Figura 4.13: Fuerza hidrostática en una placa triangular

$$9800 \int_0^3 (10y - 2y^2)\ dy =$$
$$= 9800 \left[5y^2 - \frac{2}{3}y[3\right]_0^3 = 264600 \text{ Pa.}$$

Ejercicios

1. Hallar la fuerza que se ejerce sobre un rectángulo sumergido verticalmente en agua, si se conoce que su base es 8 m, altura 12 m. La base superior es paralela a la superficie libre del agua y se encuentra a una profundidad de 5 m. R: 1056 ton.
2. Los lados verticales de un recipiente son triángulos isósceles de 4 pies de base y 3 pies de altura. Hallar la fuerza que se ejerce sobre uno de estos lados si el recipiente contiene una cantidad de agua que pesa 62.5 libras/pie cúbico. R: 375 lb.
3. Una placa triangular ABC se sumerge verticalmente en el agua. El lado AB, de 4 pies de longitud, está 1 pie por debajo de la superficie, mientras que C se encuentra a 5 pies por debajo de AB. Hallar la fuerza total ejercida sobre una cara de la placa. R: $1666\frac{2}{3}$ lb.
4. El borde superior de una esclusa que tiene forma de cuadrado, de lado igual a 8 m, se halla en la superficie del agua. Determinar la fuerza que se ejerce sobre cada uno de los triángulos de la esclusa. Los triángulos se obtienen mediante la división del cuadrado por cada una de sus diagonales. R: 85 333.33 g N, 170 666.67 g N.
5. Una placa circular de radio r pies se sumerge verticalmente en un tanque que contiene un fluido de densidad ρ. El centro del círculo está en k (con $k > r$) pies debajo de la superficie del fluido. Mostrar que la fuerza del fluido en la superficie de la placa es

$$F = \pi\rho g r^2 k.$$

Ayuda: Evaluar una integral usando una fórmula geométrica y la otra observando que el integrando es una función par.

4.8. Valor medio de una función

El valor medio (o promedio) de varios números es la suma de esos números entre la cantidad de tales números

$$\langle x\rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \tag{4.28}$$

Si se requiere calcular el valor medio de una función y (continua) en cierto intervalo (continuo) $[a, b]$, necesitamos pasar a cantidades continuas: la suma continua será una integral, mientras que la cantidad de números será la longitud del intervalo en cuestión, dándonos

$$\boxed{\langle y\rangle = \langle f(x)\rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.} \tag{4.29}$$

El valor medio de y en $[a, b]$ es la altura del rectángulo cuya área es igual a la que está bajo la curva.

Ejemplo

Hallar el valor medio de la función $y = f(x) = \sqrt{x}$, de $x = 0$ a $x = 4$.
Solución

$$\langle f(x)\rangle =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^4 \sqrt{x}\; dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}x^{2/3}\Big|_0^4 = \frac{4}{3}.$$

Si y se puede expresar como función de más de una variable, se puede calcular el valor medio con respecto a cada una de ellas y no necesariamente deben coincidir.

Ejemplo

Un cuerpo que cae al vacío desde el reposo sigue la ley de movimiento

$$y = \frac{1}{2}gt^2,$$

por lo que su velocidad como función del tiempo es

$$v = gt,$$

y como función de su posición es

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Hallar la velocidad media como función de t y como función de y.

Solución

Tomemos para promediar el intervalo $0 \leq t \leq t_0$ y $0 \leq y \leq y_0 = \frac{1}{2}gt_0^2$. Entonces tendremos

$$\langle v \rangle_t = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} gt\ dt = \frac{1}{2}gt_0 = \frac{1}{2}v_0.$$

$$\langle v \rangle_y = \frac{1}{y_0}\int_0^{y_0} \sqrt{2gy}\ dy = \frac{2}{3}\sqrt{2gy_0} = \frac{2}{3}v_0.$$

Ejercicios

Obtener el promedio de cada función en el intervalo indicado

1. $f(x) = x^2$, [-1,1] R: $\frac{1}{3}$
2. $f(x) = \frac{1}{x}$, [1,4] R: $\frac{\ln 4}{3}$
3. $f(x) = \cos x$, $[0, \frac{\pi}{2}]$ R: $\frac{2}{\pi}$
4. $f(x) = \sqrt{x}$, [1,4] R: $\frac{14}{9}$
5. $f(x) = xe^{-x^2}$, [0,5] R: $\frac{1-e^{-25}}{10}$
6. $f(x) = \sec x \operatorname{tg} x$, $[0, \frac{\pi}{4}]$ R: $\frac{4(\sqrt{2}-1)}{\pi}$
7. $f(x) = \cos^4 x \operatorname{sen} x$, $[0, \pi]$ R: $\frac{2}{5\pi}$
8. $f(x) = \frac{3}{(1+x)^4}$, [1,61] R: $\frac{993}{476656}$

4.9. Momentos y centros de masa

En ciertos problemas de física es fundamental ubicar el centro de masa de un objeto. Este nos da las coordenadas en que se ubicaría la masa total del objeto si estuviera concentrada en un solo punto.

Para una distribución de masa lineal con densidad variable, el centro de masa está ubicado en

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int x\rho(x)\ dx}{\int \rho\ dx}.} \tag{4.30}$$

A la integral $\int x\rho(x)\ dx$ se le llama momento de masa (o de inercia) del cuerpo. Este nos dice cómo se distribuye la masa en un cuerpo. La distribución de la masa en un cuerpo interviene en el efecto rotacional causado por la acción de una fuerza.

Si un cuerpo extendido (como una placa plana) tiene una densidad $\rho(x, y)$, para ubicar el centro de masa es necesario dividir en franjas el cuerpo y ubicar la coordenada del centro de masa correspondiente a cada franja. Hecho lo anterior, se procede como si se tuviera una distribución lineal de masa.

Para el caso particular de que la densidad es constante, los momentos de masa con respecto al eje x y con respecto a y de una figura encerrada entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$ ($f(x) \geq g(x)$) están dados por las integrales

$$M_x = \frac{1}{2}\rho\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\ dx, \tag{4.31}$$

$$M_y = \rho(x)\int_a^b x[f(x) - g(x)]\ dx. \tag{4.32}$$

Para calcular las coordenadas del centro de masa de un cuerpo extendido de densidad constante, se hace

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \tag{4.33}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M}. \tag{4.34}$$

En ambas fórmulas el denominador es la masa total del cuerpo, mientras que los numeradores son los momentos de masa con respecto a las coordenadas opuestas. En un cuerpo simétrico, el centro de masa coincide con el centro de simetría, si la densidad es constante.

Ejemplo

Una varilla de 2 m de longitud aumenta su densidad lineal en la forma $\rho(x) = 1 + \frac{x}{10}$ kg/m. Encontrar el centro de masa de la varilla.

Solución

El momento de la varilla con respecto al eje y es

$$M_y = \int_0^{10} x\left(1 + \frac{x}{10}\right)\, dx = \int_0^{10} \left(x + \frac{x^2}{10}\right)\, dx =$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{30}\right]_0^{10} = \frac{250}{3}.$$

La masa es

$$\int_0^{10} \left(1 + \frac{x}{10}\right)\, dx = \left[x + \frac{x^2}{20}\right]_0^{10} = 15.$$

Por lo tanto, el centro de masa está en

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{250}{3}}{15} = \frac{50}{9} \approx 5.56 \text{ m}.$$

Ejemplo

Encontrar el centro de masa de la placa de la figura 4.14. La densidad es constante e igual a 3 g/cm^2.

Solución

La masa total será

$$M = 3\int_0^1 2x\, dx = 3x^2\Big|_0^1 = 3 \text{ gr}.$$

El momento M_y es

$$M_y = 3\int_0^1 x \cdot 2x\, dx = 2x^3\Big|_0^1 = 2\text{g cm}.$$

El momento M_x es

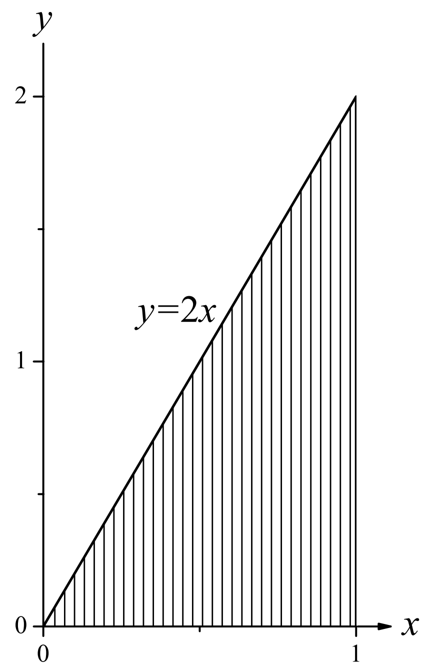


Figura 4.14: Centro de masa de una placa triangular

$$M_x = \frac{1}{2} \cdot 3 \int_0^1 4x^2 \, dx = 2x^3 \Big|_0^1 = 2\text{g cm}.$$

Entonces el centro de masa está ubicado en

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (2/3, 2/3),$$

dado en centímetros.

Ejercicios

Representar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones y encontrar el centro de masa de cada región

1. $y = x^3$, $y = x^2$. R: $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{3}{5}, \frac{12}{35}\right)$
2. $y = -x^2 + 4x + 2$, $y = x + 2$. R: $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{3}{2}, \frac{22}{5}\right)$
3. $y = x^{2/3}$, $y = 0$, $x = 8$. R: $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(5, \frac{10}{7}\right)$
4. $y = 4 - x^2$, $x = 0$. R: $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{8}{5}, 0\right)$
5. $x = -y$, $x = 2y - y^2$. R: $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{3}{2}\right)$

Capítulo 5

Sucesiones y series

5.1. Sucesiones

Una sucesión es una función $s_n = s(n)$ cuyo dominio son los números naturales. Se considera dada la sucesión si se da la regla de correspondencia, o en el peor de los casos, si se dan los primeros términos de la misma (ya que esto no es totalmente correcto, pero en ciertos casos puede ser muy difícil encontrar la regla de correspondencia).

Ejemplos

$$s_n = \frac{1}{n} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$$

$$s_n = \frac{1}{2^n} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...\right\}$$

$$s_n = n^2 = \{1, 4, 9, 16, 25, ...\}$$

$$s_n = (-1)^n = \{-1, 1, -1, 1, -1, ...\}$$

5.2. Límite de sucesiones

Se dice que una sucesión es *convergente* si el límite

$$L = \lim_{n\to\infty} s_n, \tag{5.1}$$

existe. En caso contrario, se dice que la sucesión es *divergente*.

Ejemplos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \;\Rightarrow\; L = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}, \Rightarrow L = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty, \Rightarrow \text{ la sucesion es divergente}$$

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \text{ no existe, } \Rightarrow \text{ la sucesion es divergente}$$

Una sucesión está acotada superiormente si existe un número c_1 tal que $s_n \leq c_1$, para todo ($\forall$) n, y está acotada inferiormente si existe un número c_2 tal que $s_n \geq c_2 \; \forall \; n$.

Ejemplos

La sucesión $s_n = \frac{1}{n}$ está acotada superiormente, ya que $s_n \leq 1 \; \forall \; n$. También lo está inferiormente, ya que $s_n \geq 0 \; \forall \; n$.

La sucesión $s_n = n^2$ NO está acotada superiormente, ya que $s_n \to \infty$ para $n \to \infty$; pero sí lo está inferiormente, ya que $s_n \geq 0 \; \forall \; n$.

Una sucesión es creciente si $s_n < s_{n+1} \; \forall \; n$, y es decreciente si $s_n > s_{n+1} \; \forall \; n$.

5.3. Series numéricas

Una serie numérica es la suma de una sucesión. Si tenemos la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

podemos definir la suma parcial s_n como

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Entonces, si obtenemos una expresión para s_n como función de n, podemos calcular

$$\lim_{n\to\infty} s_n = L,$$

y L es el valor de la suma de la serie dada. Obviamente, puede ser que el límite L no exista. En tal caso decimos que la serie es divergente.

Ejemplo

Hallar el valor de la suma de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}.$$

Solución

Las sumas parciales son

$$s_1 = \frac{3}{10}$$

$$s_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2}$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$s_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + ... + \frac{3}{10^{n-1}} + \frac{3}{10^n}.$$

Ahora, multiplicando s_n por $\frac{1}{10}$ obtenemos

$$\frac{1}{10}s_n = \frac{3}{10^2} + + \frac{3}{10^3} + ... + \frac{3}{10^n} + \frac{3}{10^{n+1}}.$$

Restando las cantidades anteriores obtenemos

$$s_n - \frac{1}{10}s_n = \frac{3}{10} - \frac{3}{10^{n+1}}$$

$$s_n \left(\frac{9}{10}\right) = \frac{3}{10}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

$$\Rightarrow s_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

Calculando el límite

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{1}{3}.$$

Ejemplo

Hallar el valor de la suma de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}.$$

Solución

El término k-ésimo de la serie es

$$s_k = \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)},$$

que se puede descomponer en fracciones parciales, quedando

$$s_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right),$$

o sea que la suma parcial n-ésima de la serie es

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) + ... +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Calculando el límite

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

5.4. Suma y producto de series numéricas

Al realizar las operaciones de suma y multiplicación por una constante entre series numéricas convergentes, son válidas las reglas siguientes

1. La suma (o resta) de dos (o más) series es igual a la serie que consta de los sumandos de cada una de ellas, esto es

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$$

2. Multiplicar una serie por una constante c equivale a multiplicar por esta misma constante cada término de la serie, esto es

$$c\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

Ejercicios

Encontrar el valor de la suma de las siguientes series

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3^k}$ R: 3
2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{9}{100^k}$ R: $\frac{100}{11}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-(k-1)}$ R: $\frac{e}{e-1}$
4. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2^k}$ R: $\frac{2}{3}$
5. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}2^{k-1}$ R: Diverge
6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ R: $\frac{1}{2}$
7. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{k}{k+1}$ R: Diverge
8. $\sum_{k=1}^{\infty} k$ R: Diverge
9. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k}$ R: $\frac{4}{3}$
10. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{5}{4^k}$ R: 4
11. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^k} - \frac{1}{3^k}\right)$ R: $\frac{17}{2}$
12. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^{k+1}}{5^k}\right)$ R: $\frac{10}{3}$

5.5. Criterios de convergencia de series numéricas

No siempre es fácil calcular el límite para decidir si una serie es convergente, por lo cual es útil tener los siguientes criterios para probar la convergencia de una serie.

Criterio del cociente Si en la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se cumple que $a_n > 0 \ \forall \ n$ y existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

entonces

a) Si $0 \leq L < 1$, la serie converge

b) Si $L > 1$, la serie diverge.

El caso (bastante frecuente) en que $L = 1$ no nos da información sobre convergencia.

Ejemplo

Probar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Solución

Tomamos $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ y $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$ y hacemos el cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2.$$

Así que el límite a considerar es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1,$$

de donde deducimos que la serie es convergente.

Ejemplo

Probar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

Solución

Tomamos $a_n = \frac{n^n}{n!}$ y $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n\cdot(n+1)}{(n+1)\cdot n!} = \frac{(n+1)^n}{n!}$ y hacemos el cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^n \cdot n!}{n! \cdot n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

y el límite es

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1,$$

de donde concluimos que la serie es divergente.

Criterio de la raíz Si para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se cumple que $a_n > 0 \ \forall\ n$ y existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

entonces

a) Si $L < 1$, la serie converge

b) Si $L > 1$, la serie diverge.

El caso $L = 1$ no nos da información sobre convergencia.

Ejemplo

Probar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{[\ln(n+1)]^n}$$

Solución

Tomamos $a_n = \frac{2^n}{[\ln(n+1)]^n}$ y extraemos la raíz n-ésima

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{[\ln(n+1)]^n}} = \frac{2}{\ln(n+1)}.$$

Calculando el límite obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\ln(n+1)} = 0 < 1,$$

así que la serie es convergente.

Ejemplo

Probar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{e}{2} > 1,$$

de donde concluimos que la serie diverge.

Criterio de la integral Si $f(x)$ es una función definida, continua, positiva y no creciente en el intervalo $[1,\infty)$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge o diverge sinmultáneamente con la integral impropia

$$\int_1^{\infty} f(x)\ dx.$$

Ejemplo

Probar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Solución

Evaluemos la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\ dx = -\frac{1}{x}\bigg|_1^{\infty} = 1.$$

Como la integral es convergente, la serie también lo es.

Ejemplo

Probar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Solución

Evaluemos la integral

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \ln x|_{1}^{\infty} = \infty.$$

Como la integral es divergente, la serie también lo es.

Criterio de comparación Si se tienen las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, y $a_n \leq b_n \quad \forall \quad n$, entonces se deduce que

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, también converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, también diverge $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

c) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, con $0 < L < \infty$, ambas series convergen o divergen simultáneamente.

Ejemplo

Probar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + \sqrt{n}}.$$

Solución

Sabemos que

$$\frac{1}{2^n + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2^n}.$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

tiene la suma parcial n-ésima

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n},$$

que multiplicada por $\frac{1}{2}$ nos da

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Al restar ambas series obtenemos

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}},$$

o sea

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n},$$

y

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}[1 - \frac{1}{2^n}] = 1.$$

Esto muestra que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente, por lo cual también la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+\sqrt{n}}$ es convergente.

Ejemplo

Probar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}.$$

Solución

Como $\ln n < n \quad \forall \quad n$, entonces $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \quad \forall \quad n$. Anteriormente (criterio de la integral) vimos que la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

es divergente. Entonces, por el criterio de comparación, la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

también diverge.

Ejercicios

Examinar la convergencia de las series siguientes

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ R: Converge
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{\sqrt{2}^n}$ R: Converge
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$ R: Diverge
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$ R: Converge
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ R: Diverge
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$ R: Converge
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+1}$ R: Diverge
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ R: Converge
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ R: Diverge
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$ R: Converge

5.6. Estimación de residuos

Si en una serie convergente $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se quitan los primeros n términos, queda la serie (convergente)

$$a_{n+1} + a_{n+2} + ... = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = R_n$$

llamada *residuo n-ésimo* de la serie S.
El criterio de la integral nos permite hacer una estimación del residuo R_n de una serie como

$$0 \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(x)\ dx.$$

5.7. Series alternadas

Todos los criterios anteriores funcionan sólo para series en las que todos los términos son positivos. Cuando en una serie todos los términos cambian de signo alternadamente, la serie se llama *alternada* (o alternante) y se usan otros criterios para la convergencia. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie alternante, y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ la serie que resulta al tomar los valores absolutos.

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. En este caso se habla de *convergencia absoluta*. Puede suceder que la serie original sea convergente, pero no aquella con los valores absolutos; en tal caso se habla de *convergencia condicional*.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

c) Si en la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $|a_n| > |a_{n+1}|\ \forall\ n$, y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la serie converge y su suma S cumple $0 < S \leq |a_1|$.

Ejemplo

Determinar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Solución

El valor absoluto del término n-ésimo de la serie es

$$\frac{1}{n},$$

mientras que el del término $n+1$-ésimo es

$$\frac{1}{n+1}.$$

Claramente se cumple que

$$|a_n| > |a_{n+1}|.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

por lo cual concluimos que la serie converge.

En una serie alternante podemos estimar el residuo con

$$R_n = \pm(a_{n+1} - a_{n+2} + ...) \leq a_{n+1}.$$

Ejemplo

Estimar el residuo de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

para $n = 4$.

Solución

Cuando $n = 4$, el residuo es

$$R_4 = \frac{1}{120} - \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} - ... < \frac{1}{120},$$

esto es, $R_4 < \frac{1}{120}$.

5.8. Series de potencias

Una serie de potencias es una serie cuyos términos son múltiplos de potencias de x, o en general de $(x - x_0)$, esto es

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + ... + c_n(x - x_0)^n + ... \qquad . \tag{5.2}$$

La serie anterior se reduce a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_c n x^n + ... \tag{5.3}$$

cuando $x_0 = 0$.

5.9. Convergencia de una serie de potencias

Si una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ converge en $x = x_1 \neq 0$, converge absolutamente para toda x que cumpla $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$. Si la serie diverge para $x = x_2$, también diverge para toda x que cumpla $|x - x_0| > |x_2 - x_0|$.

Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergente en algún punto $x \neq 0$ converge $\forall\, x \,\epsilon\, \mathbb{R}$, o bien, existe un número $R > 0$ tal que la serie converge absolutamente para $|x| < R$ y diverge para $|x| > R$. Al intervalo $(-R, R)$ en el cual la serie converge absolutamente se le llama intervalo de convergencia, y al número R radio de convergencia. Cuando se tiene $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ el radio de convergencia es el mismo, mientras que el intervalo de convergencia es $(x_0 - R, x_0 + R)$. El intervalo se toma abierto porque en los extremos puede o no convergir. Para determinar la convergencia en los extremos se examina por separado en cada uno de ellos. Para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, se puede calcular R por medio de las fórmulas

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}, \tag{5.4}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{5.5}$$

Ejemplo

Encontrar los valores de x para los cuales converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n (x-2)^n.$$

Solución

Usando la prueba de la razón tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2}(n+1)(x-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1} n (x-2)^n} \right| = |x-2| \lim_{n\to\infty} \left| (-1)\frac{n+1}{n} \right| = |x-2|.$$

Examinemos los valores de x para los cuales el límite hallado es menor que uno

$$|x-2| < 1,$$

$$\Rightarrow -1 < x-2 < 1,$$

$$\Rightarrow 1 < x < 3.$$

La serie converge en $(1,3)$, por lo que el radio de convergencia es 1.

En los extremos del intervalo tenemos otra situación. Para $x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n (-1)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} n \ \to \ \infty.$$

Por otra parte, para $x = 3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n (1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n,$$

cuyo límite no existe.

En suma, el intervalo de convergencia es sólo $(1,3)$.

Ejemplo

Encontrar el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n\ 2^n}.$$

Solución

Aplicando la prueba de la razón encontramos que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}(n)(2)^n}{(n+1)(2)^{n+1}(x+1)^n} \right| = |x+1| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{2(n+1)} \right| = \frac{1}{2}|x+1|.$$

Hallemos los valores de x para los cuales el límite hallado converge

$$\frac{1}{2}|x+1| < 1,$$

$$\Rightarrow -1 < \frac{1}{2}(x+1) < 1,$$

$$\Rightarrow -2 < x+1 < 2,$$

$$\Rightarrow -3 < x < 1.$$

La serie converge en $(-3,1)$, por lo que el radio de convergencia es 2. Ahora analizemos los extremos.

Para $x=-3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n\ 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

que está indefinido.

Para $x=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)^n}{n\ 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ \rightarrow\ \infty,$$

por lo cual concluimos que el intervalo de convergencia es $(-3,1)$.

Ejercicios

Encontrar el radio de convergencia de las siguientes series

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ R: (-1,1)
2. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4x+1)^n$ R: $(\frac{-1}{2}, 0)$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$ R: (-8,12)
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$ R: (-1,1)
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}3^n}$ R: [-3,3]
6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ R: $\mathbb{R}$
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$ R: $\mathbb{R}$
8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$ R: [-1,1)
9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n}$ R: (-8,2)
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}x^n}{3^n}$ R: (-3,3)

5.10. Derivación e integración de series de potencias

Si se tiene una serie de potencias convergente, podemos derivar e integrar término a término para obtener su derivada e integral, respectivamente. Esto es

$$\boxed{\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},} \tag{5.6}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.} \tag{5.7}$$

Ambas fórmulas son válidas en todo el intervalo de convergencia.

5.11. Series de Taylor y de Maclaurin

Decimos que una función $f(x)$ se puede desarrollar en una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ en el intervalo (x_0-R, x_0+R) si tal serie es convergente en este intervalo y su suma es igual a $f(x)$, esto es

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \cdots . \tag{5.8}$$

La serie resultante se conoce como *Serie de Taylor* de $f(x)$ alrededor de x_0. En el caso particular de que $x_0 = 0$, se le llama *Serie de Maclaurin*.

Ejemplo

Encontrar la serie de Maclaurin de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Solución

Hallemos las derivadas de $F(x) = \operatorname{sen} x$ y evaluemos tal función y sus derivadas en $x = 0$

$f(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad f(0) = 0,$

$f'(x) = \cos x$ $\quad f'(0) = 1,$

$f(x) = -\operatorname{sen} x$ $\quad f(0) = 0,$

$f'(x) = -\cos x$ $\quad f'(0) = -1,$

$f(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad f(0) = 0,$

$\vdots$ $\quad \vdots$

así que la serie de Maclaurin es

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

En la figura 5.1 se muestra cómo tomando cada uno de los términos de la serie vamos aproximando la función.

Ejercicios

Encontrar los desarrollos en series de Maclaurin de las funciones siguientes

1. e^x R: $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
2. $\cos x$ R: $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
3. $\ln(1+x)$ R: $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1}$

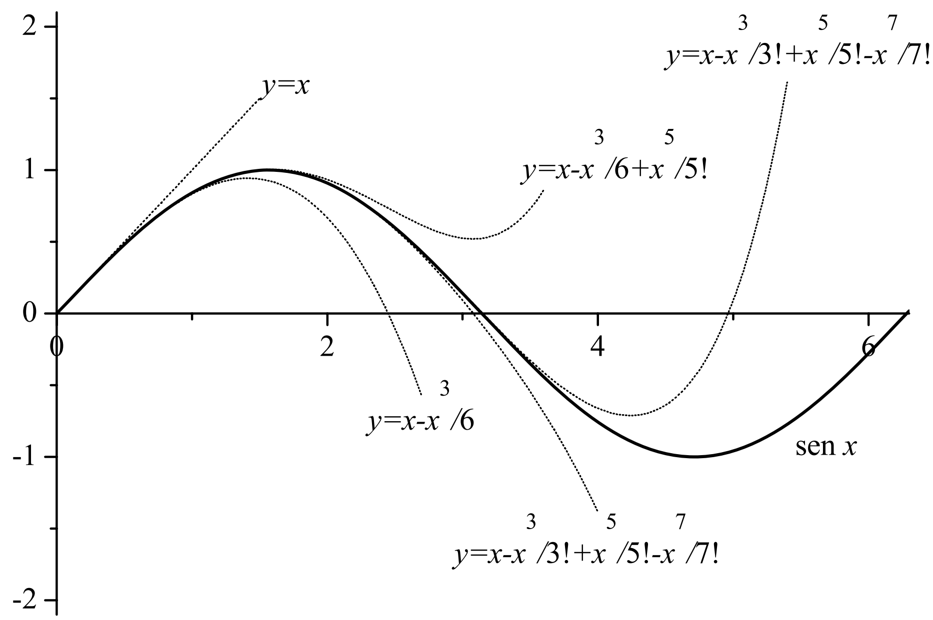


Figura 5.1: Desarrollo de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.

4. xe^x R: $x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$
5. $\frac{1}{x+1}$ R: $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$
6. $\sqrt{1+x^4}$ R: $1 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{12}}{16} - \frac{5x^{16}}{128} + \frac{7x^{20}}{256} + ...$
7. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ R: $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{5x^6}{16} + \frac{35x^8}{128} + \frac{63x^{10}}{256} + ...$
8. $\cos\sqrt{x+1}$ R: $1 - \frac{x+1}{2} + \frac{(x+1)^2}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{(2n)!}$
9. $\cos^2 x$ R: $1 - \frac{4x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{16x^4}{2 \cdot 4!} - ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{2 \cdot (2n)!}$
10. $(1+x)^\alpha$ R: $1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}$

5.12. Aproximación de funciones con polinomios de Taylor y estimación de residuos

Una función definida en (a, b) se puede aproximar cerca de c con un polinomio de grado n en la forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + R_n(x), \tag{5.9}$$

con

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \tag{5.10}$$

el residuo. Aquí x^* está entre x y c, elementos del intervalo (a, b).

Esta última fórmula nos permite estimar el error en la aproximación, de tal modo que podemos elegir el valor de n que se aproxime más al grado de precisión requerido. En la práctica, para obtener una aproximación lo que se hace es evaluar cada término y sumar, terminando los cálculos cuando la cantidad a sumar sea menor que el error máximo permitido.

Ejemplo

Aproximar e con cuatro cifras significativas correctas.

Solución

Tenemos que

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

con lo que

$$e = e^1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$$

El residuo de esta aproximación (que queremos que sea menor que 0.00005) es

$$|R_n(1)| = \left| \frac{f^{n+1)}(x^*)}{(n+1)!} \right|, \text{ con } 0 < x^* < 1.$$

En la práctica, si evaluamos la suma para cada valor de n comenzando desde 1, será suficiente con detenernos en aquel valor donde ya no cambien las cuatro primeras cifras. A continuación tenemos los resultados de estos cálculos

$n = 1$, $e \approx 1$

$n = 2$, $e \approx 2$

$n = 3$, $e \approx 2.5$

$n = 4$, $e \approx 2.666...$

$n = 5$, $e \approx 2.708333...$

$n = 6$, $e \approx 2.71666...$

$n = 7$, $e \approx 2.7180555...$

$n = 8$, $e \approx 2.7182539...$

La última cantidad calculada nos da la aproximación buscada, ya que en ella ya no cambiaron las cuatro primeras cifras. Así pues, tenemos que

$$e \approx 2.718.$$

Ejercicios

1. Aproximar $\operatorname{sen} 62°$ con cuatro cifras significativas usando una serie de Taylor para $\operatorname{sen} x$ alrededor de $\frac{\pi}{3}$. R: 0.8829
2. Aproximar $\operatorname{sen} 32°$ con cuatro cifras significativas usando una serie de Taylor para $\operatorname{sen} x$ alrededor de $\frac{\pi}{6}$. R: 0.5299
3. Aproximar $\cos 36°$ con cuatro cifras significativas usando una serie de Taylor para $\operatorname{sen} x$ alrededor de $\frac{\pi}{6}$. R: 0.8090
4. Aproximar e^{-2} con cuatro cifras significativas. R: 0.1353
5. Si se aproxima $\operatorname{sen} x$ por $x - \frac{x^3}{3}$ para $|x| < 0.5$, ¿cuál es el error máximo en la aproximación? R: 0.00026.
6. ¿Cuál es el error máximo al aproximar $\ln(1+x)$ con x para $|x| \leq 0.05$?

   En los siguientes ejercicios, verificar la suma dada y usarla para aproximar con un error menor que 0.0001.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ R: 0.6931
8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!} = \operatorname{sen} 1$ R: 0.8415
9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$ R: 7.3891
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = \frac{e-1}{e}$ R: 0.6321

Apéndice 1: Límites de sumas

Inducción matemática

Cuando hay alguna propiedad concerniente a los números naturales que muestra cierta regularidad para los primeros enteros, a veces podemos generalizarla y decir que es válida para todos los enteros dando una fórmula de correspondencia. Sin embargo, puede ocurrir que la fórmula en cuestión sólo sea cierta para los primeros enteros, pero no para todos. Lo anterior nos obliga a verificar que esta fórmula en efecto es válida para todos los enteros; pero como no podemos tomar el conjunto infinito de los enteros y verificar para cada uno de ellos, es necesario usar un método de demostración que nos garantice la validez para todos. A este método se le llama *método de inducción matemática.*

El método consiste en tres pasos sencillos

1. Probar que la fórmula es válida para $n = 1$.
2. Suponer que la fórmula es válida para n (Hipótesis de Inducción).
3. Probar que la fórmula es válida para $n + 1$.

Notemos que aunque el paso 2 no nos pide hacer nada, en realidad sí es un paso importante, pues en él está implícito que ya conocemos la fórmula. Este método no nos dice cómo encontrar las fórmulas de recurrencia, sino solamente cómo comprobar si son o no válidas.

Ejemplo

Demostrar que para $q \neq 1$ es válida la fórmula:

$$1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Solución

Primero probemos que la fórmula es válida para $n = 1$, es decir

$$1 = \frac{1 - q^1}{1 - q},$$

lo cual es cierto. Supongamos que la fórmula es válida para cualquier n y probemos que es válida para $n + 1$, es decir

$$1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

El lado derecho de la igualdad anterior se puede manipular de la siguiente forma

$$\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^n + q^n - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^n}{1 - q} + \frac{q^n(1 - q)}{1 - q} = q^n + \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Ahora bien, puesto que estamos suponiendo que la fórmula es válida para n, tenemos que el término final en la última ecuación vale $1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}$, así que, finalmente tenemos la ecuación

$$1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Como la fórmula es válida para 1, para n (por Hipótesis de Inducción) y para $n + 1$, es válida siempre.

Sumas

La notación $\sum_{k=1}^{n}$ para las sumas nos permite abreviar la escritura de una suma muy larga, pero no nos da un método para evaluarlas. Por lo tanto, para cada caso es necesario obtener una fórmula de correspondencia que nos permita evaluar la suma, además de verificar que tal fórmula siempre es válida. Para obtener cada fórmula se usan métodos diferentes, pero no se expondrán aquí. Sólo se mencionan las fórmulas y se prueba su validez con el método de inducción.

Ejemplo

Demostrar la validez de la fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

Solución

Para $n = 1$ tenemos que

$$\sum_{k=1}^{1} 1 = 1$$

o sea que sí se cumple.
La suma

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

por hipótesis de inducción.
Para $n + 1$ tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n+1} 1 = 1 + \sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + n,$$

de donde concluimos que la fórmula siempre es válida.

Ejemplo

Demostrar que:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solución

Para $n = 1$ tenemos que

$$\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

Como la fórmula es válida, ahora la aplicamos a $n+1$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \sum_{k=1}^{n} k + n + 1 = \sum_{k=1}^{n+1} k,$$

de donde vemos que la fórmula dada sí se cumple.

Ejemplo

Probar la validez de la fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solución

Para $n = 1$ tenemos que

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = 1.$$

Para $n+1$ tenemos que

$$\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+3)}{6} + \frac{n(n+1)(2n+3)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)+2(n+1)(2n+3)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2(n+1)(3n+3)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \sum_{k=1}^{n+} k^2 + (n+1)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^2,$$

que es la suma correcta.

Límites de las sumas

Como necesitamos calcular los límites de las sumas anteriores, cuando n tiende a infinito, utilizaremos la fórmula conocida del cálculo diferencial que establece que: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^m} = 0$, donde x es cualquier número real diferente de cero (en particular puede ser cualquier entero n) y m es un número mayor que cero. Con esto tendremos que los límites de las sumas, calculados con las fórmulas demostradas anteriormente, se reducen fácilmente a expresiones donde se obtienen ceros y sólo quedan los números que nos darán los valores buscados.

Ejemplo

Demostrar la validez de la fórmula

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

Solución

Como en la suma n no cambia al cambiar k, podemos sacarla de la sumatoria (lo cual equivale a factorizarla), pero NO del límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} n = 1.$$

Ejemplo

Demostrar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Solución

Análogamente al ejemplo anterior, sacamos n^2 de la suma:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo

Demostrar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

Solución

También aquí sacamos a n^3, obteniendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} = \frac{1}{3}.$$

De los casos anteriores podemos deducir la generalización

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{i-1}}{n^i} = \frac{1}{i}$$

que es válida, pero que su desarrollo por inducción se complica debido a la presencia de más de un índice de corrimiento, razón por la cual no se hará aquí[1].

[1]El lector interesado puede consultar el libro *Calculus*, de M. Spivak citado en la bibliografía.

Apéndice 2: Tablas

Identidades trigonométricas

1. $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$
2. $\sec^2\theta = 1 + \operatorname{tg}^2\theta$
3. $1 + \operatorname{ctg}\,^2 x = \csc^2 x$
4. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
5. $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$
6. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$
7. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$
8. $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

Identidades hiperbólicas

1. $\cosh^2\theta - \operatorname{senh}^2\theta = 1$
2. $\operatorname{sech}\,^2\theta = 1 - \operatorname{tgh}^2\theta$
3. $\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh\alpha\cosh\beta \pm \operatorname{senh}\alpha\operatorname{senh}\beta$
4. $\operatorname{senh}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{senh}\alpha\cosh\beta \pm \cosh\alpha\operatorname{senh}\beta$
5. $\operatorname{tgh}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tgh}\alpha \pm \operatorname{tgh}\beta}{1 \mp \operatorname{tgh}\alpha\operatorname{tgh}\beta}$
6. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$
7. $\operatorname{tgh}^2 x + \operatorname{sech}\,^2 x = 1$
8. $\operatorname{ctgh}\,^2 x - \operatorname{csch}\,^2 x = 1$
9. $\operatorname{senh}^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$
10. $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$

Identidades logarítmicas

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
2. $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$
3. $\ln(x^n) = n\ln x$
4. $\ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\ln x$
5. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Identidades exponenciales

1. $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$
2. $(e^x)^y = e^{xy}$
3. $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
4. $\sqrt[n]{e^x} = e^{\frac{x}{n}}$
5. $a^x = e^{x \ln a}$

Derivadas

1. $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
2. $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
3. $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
4. $\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x$
5. $\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x$
6. $\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \sec^2 x$
7. $\frac{d}{dx} \text{ctg } x = -\csc^2 x$
8. $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \operatorname{tg} x$
9. $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \text{ctg } x$
10. $\frac{d}{dx} \operatorname{senh} x = \cosh x$
11. $\frac{d}{dx} \cosh x = \operatorname{senh} x$
12. $\frac{d}{dx} \operatorname{tgh} x = \text{sech }^2 x$
13. $\frac{d}{dx} \text{ctgh } x = -\text{csch }^2 x$
14. $\frac{d}{dx} \text{sech } x = -\text{sech } x \operatorname{tg} x$
15. $\frac{d}{dx} \text{csch } x = -\text{csch } x \text{ctg } x$
16. $\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{sen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
17. $\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \cos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
18. $\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{1}{1+x^2}$
19. $\frac{d}{dx} \text{arcctg } x = -\frac{1}{1+x^2}$
20. $\frac{d}{dx} \text{arcsec } x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
21. $\frac{d}{dx} \text{arccsc } x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Integrales

1. $\int x^n \ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $(n \neq -1)$
2. $\int \frac{1}{x} \ dx = \ln x + C$
3. $\int e^x \ dx = e^x + C$
4. $\int \operatorname{sen} x \ dx = -\cos x + C$
5. $\int \cos x \ dx = \operatorname{sen} x + C$
6. $\int \sec^2 x \ dx = \operatorname{tg} x + C$
7. $\int \csc^2 x \ dx = \operatorname{ctg}\ x + C$
8. $\int \sec x \operatorname{tg} x \ dx = -\sec x + C$
9. $\int \csc x \operatorname{ctg}\ x \ dx = -\csc x + C$
10. $\int \operatorname{tg} x \ dx = -\ln(\cos x) + C$
11. $\int \operatorname{ctg}\ x \ dx = \ln(\operatorname{sen} x) + C$
12. $\int \sec x \ dx = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) + C$
13. $\int \csc x \ dx = \ln(\csc x - \operatorname{ctg}\ x) + C$
14. $\int \operatorname{senh} x \ dx = \cosh x + C$
15. $\int \cosh x \ dx = \operatorname{senh} x + C$
16. $\int \operatorname{sech}\ ^2 x \ dx = \operatorname{tgh} x + C$
17. $\int \operatorname{csch}\ ^2 x \ dx = -\operatorname{ctgh}\ x + C$
18. $\int \operatorname{sech}\ x \operatorname{tgh} x \ dx = -\operatorname{sech}\ x + C$
19. $\int \operatorname{csch}\ x \operatorname{ctgh}\ x \ dx = -\operatorname{csch}\ x + C$
20. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ dx = \operatorname{arc}\operatorname{sen} x + C$
21. $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ dx = \operatorname{arc}\cos x + C$
22. $\int \frac{1}{1+x^2} \ dx = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x + C$
23. $\int -\frac{1}{1+x^2} \ dx = \operatorname{arcctg}\ x + C$
24. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \ dx = \operatorname{arcsec}\ x + C$
25. $\int -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \ dx = \operatorname{arccsc}\ x + C$

Desarrollos en serie de algunas funciones

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
2. $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$
4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}$
5. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + ... =$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}$

Bibliografía

1. Ayres, F. y Elliot Mendelson. *Cálculo*. 4a ed. Mc Graw Hill. México, 2001.
2. Demidovich, B. *Problemas y ejercicios de análisis matemático*. Mir. Moscú, 1973.
3. Krasnov, M. et al. *Curso de matemáticas superiores*. 2a ed. URSS. Moscú, 2003.
4. Larson, R. et al. *Cálculo*. 8a ed. Mc Graw Hill. México, 2006.
5. Piskunov, N. *Cálculo diferencial e integral*. Mir. Moscú, 1977.
6. Spivak, M. *Calculus*. 2a ed. Reverté. Barcelona, 1992.
7. Stewart, J. *Cálculo de una variable*. 4a ed. Thompson. México, 2002.
8. Swokowski, E. W. *Cálculo con geometría analítica*. 2a ed. Grupo Editorial Iberoamericana. México, 1989.
9. Thomas, G. B. *Cálculo de una variable*. 11a ed. Pearson. México, 2006.

Esta obra se terminó de imprimir
en el mes de mayo de 2008
en el taller de impresión de la
Universidad Autónoma de la Ciudad de México
con un tiraje de 2000 ejemplares.

Métodos Operativos de Cálculo Integral

El estudiante que inicia la licenciatura en Ingeniería encontrará en *Métodos Operativos de Cálculo Integral* un libro con información clara y ordenada para apoyar su aprendizaje. El texto complacerá también a todo aquel amante de las Matemáticas que desee revisar los principios del Cálculo Integral.

Mediante la introducción de contenidos a través de problemas con diferentes estrategias de solución, se busca que los estudiantes logren la comprensión de definiciones, conceptos y enunciados de teoremas para ir construyendo su propio conocimiento de la materia.

El texto abarca los conceptos de integral, métodos básicos y avanzados de integración (poco comunes en libros tradicionales) y aplicaciones de la integral para casos prácticos en Geometría, Física y Matemáticas. Los contenidos se ilustran con problemas cotidianos de la Ingeniería, apoyados por diagramas que permiten visualizar su solución gráfica. Se ha incluido también un buen número de ejercicios con sus respectivas soluciones, a fin de que el estudiante mida su avance por sí mismo.

Las distintas materias que requieren del Cálculo Integral para atacar los problemas incluidos favorecen un ambiente interdisciplinario para el lector; aunque --como el autor señala-- “ha de aceptarse que cuando se avanza a mayores niveles de abstracción en la Matemática, resulta cada vez más difícil hallar conexión con situaciones de la vida diaria: el futuro ingeniero deberá comprender que su vida diaria, si bien será apasionante, también será muy diferente a la de otros profesionistas”.

Fausto Cervantes Ortiz es Matemático, Físico y Maestro en Astronomía por la UNAM. Ha publicado diversos textos para la enseñanza de la Matemática e impartido cátedra a ingenieros y científicos de distintas especialidades. Actualmente se desempeña como profesor-investigador de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.