Unidad: Análisis dimensional y conversión de unidades.

El análisis dimensional se ocupa del estudio de las relaciones matemáticas de las dimensiones involucradas en las magnitudes físicas y constituye una herramienta útil para organizar y simplificar experiencias, así como del análisis de los resultados obtenidos en experimentos.
En este documento se hará uso del análisis dimensional para los siguientes fines:

1.- Determinar si una ecuación (fórmula) o expresión es correcta desde el punto de vista dimensional.
2.- Determinar las dimensiones de una determinada magnitud física que aparezca en una ecuación o expresión.
3.- Determinar condiciones que deben cumplir magnitudes que aparezcan en una expresión (ecuación, fórmula), para que éstas tengan sentido físico.
4.- Conversión de Unidades de un Sistema a otro o dentro de un mismo sistema.

NOTABENE : Esta guía por tanto no hace de ninguna manera un tratamiento exhaustivo del tema, el cual es en realidad bastante amplio. Para consultas remítase a la Bibliografía.

PRIMER PRINCIPIO: " Para que el resultado de **sumar o restar dos magnitudes físicas**, tenga sentido, todas ellas deben, poseer las mismas dimensiones. En otras palabras, una expresión tiene sentido cuando los términos que la componen son de la misma dimensión.

1.- Responda: ¿ Puede dar Ud. El resultado de la expresión que sigue?
4 lápices + 8 gomas - 5 hojas =

2.- Considere: 3 [m]+4 [s] +5 [kg] +10 [N] en donde:

L : longitud	M: masa	T : tiempo	F : fuerza
[m] : metro	[kg] :kilogramo	[s] : segundo	[N] : Newton.

Esta, es otra expresión que carece de sentido físico, con acuerdo al primer Principio expuesto.

3.- Considere 3 [m] +8[pie]- 70 [plg]+5 [yd] en donde:

[m] : metro	[plg] : pulgada	[yd] : yarda	[pie] : pie.

Todas las unidades de medida usadas en esta expresión corresponden a la dimensión LONGITUD. Por lo que esta expresión tiene sentido. Pero, para concretar la adición, se debe proceder a realizar una conversión de unidades, todas a una del mismo tipo. Sin considerar otras Unidades de medida de longitud, que las que aparecen en el ejercicio propuesto. ¿Cuántas posibilidades hay?

SEGUNDO PRINCIPIO:

" Para que una fórmula o ecuación tenga sentido dimensionalmente, se debe cumplir que el primer y segundo miembro de la igualdad deben tener la misma dimensión."

Así por ejemplo, en la ecuación: F= ma , se cumple que dim(F) = [F] y dim(ma) = [F]; luego ambos miembros tienen la misma dimensión.
Así, si tenemos la ecuación : A = B , para que sea dimensionalmente correcta, se debe cumplir que dim(A) = dim(B) "

SISTEMAS DE UNIDADES

Las magnitudes físicas estudiadas corrientemente en Mecánica pueden ser expresadas dimensionalmente en función de tres magnitudes fundamentales. Estas son: Longitud, tiempo y masa ó fuerza.

Debido a la relación F = m.a, las unidades de Fuerza y Masa no pueden ser arbitrarias... Una de ellas depende de la otra, y cualquiera puede elegirse como unidad fundamental, quedando la otra como dimensión secundaria o derivada.

Distinguimos en consecuencia dos sistemas de unidades:

El **Sistema Absoluto de Unidades** que considera como dimensiones fundamentales: la longitud, el tiempo y la masa, y la fuerza como dimensión secundaria.

Y el **Sistema Gravitacional**, que considera como dimensiones fundamentales: la longitud, el tiempo y la fuerza, siendo aquí la masa una dimensión secundaria.

Asimismo se distinguen los Sistemas Métricos Decimales y el Sistema Británico.

De este modo tendríamos:

DIMENSION FUNDAMENTAL			DIMENSION SECUNDARIA	NOMBRE DEL SISTEMA
LONGITUD	**MASA**	**TIEMPO**	**FUERZA**	
Metro	kilogramo	segundo	Newton	Sistema Métrico Decimal (MKS) o Sistema Internacional.(S.I.)
[m]	[kg]	[s]	[N]	Símbolos
Centímetro	gramo	segundo	dina	Sistema Gaussiano o CGS
[cm]	[g]	[s]	[dina]	Símbolos.
Pie	libra	segundo	poundal	Sistema absoluto Británico
[pie]	[lb]	[s]	[pdl] = [lb.pie/s]	Símbolos.

DIMENSIÓN FUNDAMENTAL			DIMENSIÓN SECUNDARIA	NOMBRE DEL SISTEMA
LONGITUD	**FUERZA**	**TIEMPO**	**MASA**	
Metro	kilogramo fuerza	segundo	Unidad Técnica de Masa	Sistema Métrico Decimal Gravitatorio. o Sistema Técnico
[m]	[kgf]	[s]	[Utm]	Símbolo.
pie	libra fuerza	segundo	slug	Sistema Gravitacional Británico
[pie]	[lbf]	[s]	$lbf \bullet s^2/pie$	Símbolo.

GUÍA DE EJERCICIOS: ANÁLISIS DIMENSIONAL Y SISTEMAS DE UNIDADES

OBJETIVOS:

1.- Servir de material de apoyo a la asignatura de Física
2.- Analizar si una ecuación es dimensionalmente correcta.
3.- Practicar conversión de unidades de un sistema a otro o dentro de un mismo sistema.

1.- En la ecuación $s = (\frac{1}{2})(u+v).t$, "s " es una longitud, y " u " y "v" son longitudes por unidad de tiempo. ¿ Es correcta la ecuación desde el punto de vista dimensional ?

2.- La ecuación $s = M.c / I$ es dimensionalmente correcta.
¿Cuáles son las dimensiones de M, si " s" es una fuerza por unidad de superficie, "c " es una longitud e " I" es una longitud elevada a la cuarta potencia ? (solución : FL)

3.- ¿ Cuáles son las dimensiones de A y B en la ecuación dimensionalmente homogénea :

$$d^4 = Ad^2 + Bd$$, si se sabe que "d" es una longitud ?

4.- ¿ Cuáles son las unidades en que está expresada Q en la ecuación dada por :
$Q = 0{,}622.(2g)^{(1/2)}.(b-0{,}2\,h))h^{(3/2)}$, en donde b es una anchura, h es una altura y g la aceleración de gravedad; con b y h expresadas en metros.

5.- La ecuación $\theta = \omega.t$ es dimensionalmente correcta; ω es un ángulo(expresado en radianes) por unidad de tiempo y t es tiempo. ¿Cuáles son las dimensiones de θ ?
(Recuerde que $s = R\theta$, relaciona al arco s, al radio R y al ángulo θ)

6.- Si x, a y b representan cantidades físicas.

¿ Es dimensionalmente correcta la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + ab/x = 0$?

Magnitud física	Símbolo / fórmula asociada	Dimensiones
distancia	x, y, z, s, d	L
tiempo	T, t, Δt	T
masa	M, m, m_1	M
fuerza	F, f, F = ma	F
área	A	L^2
volumen	V	L^3
densidad	$\rho = m / V$	$M.L^{-3}$
velocidad lineal	v = d / t	$L.T^{-1}$
cantidad de movimiento	p = m.v	$M.L.T^{-1}$; F.T
impulso	F.t	F.T ; $M.L.T^{-1}$
aceleración lineal	$a = \Delta v / \Delta t$	$L.T^{-2}$
presión	P = F / A	$F.L^{-2}$
rapidez angular	$\omega = \vartheta / t$	T^{-1}
trabajo o energía	W = F. D	F.L
energía potencial gravitatoria	$E_p = m. g. h$	F.L
energía cinética	$E_c = ½ mv^2$	F. L
potencia	P = W / t	$F.L.T^{-1}$
momento de una fuerza	M = F. D	F. L
Torque o torca	$\tau = I. \alpha$	F . L
momento de inercia de una masa puntual	$I = mR^2$	$M. L^2$
momento de inercia de una superficie	Se debe consultar tabla de momentos.	L^4

7.- Siendo $P = \rho gh$ una fórmula física, y sabiendo que en el S.I. ρ se mide en [kg / m^3] , y que g se mide en [m/s^2] y que h se mide en [m] Hallar la dimensión de P en términos de las unidades S.I. dadas, y especificar a qué concepto físico corresponde.

8.- Siendo Q = A.v una fórmula física, y sabiendo que en el S.I. A se mide en [m^2] , y que v se mide en [m/s] Hallar la dimensión de Q en términos de las unidades S.I. dadas, y especificar a qué concepto físico corresponde. Demuestre que Q = V/t siendo V : volumen.

9.- Siendo $H = P / \gamma$ una ecuación física, y sabiendo que P es presión, y H es una altura (distancia); hallar la dimensión de γ (gamma)

10.- Demuestre que las expresiones : P / γ y $v^2 /(2g)$ son dimensionalmente equivalentes.
siendo P : presión ; γ peso específico ; v : rapidez media; g: aceleración de gravedad.

11.- Siendo F = P.A ; sabiendo que F se mide en [N] y que P se mide en [Pa] Hallar la unidad de medida de A.

12.- Demuestre que las expresiones F.d y $½ mv^2$, son dimensionalmente equivalentes.

13.- Demuestre que la expresión ρVg ; siendo ρ densidad media, V:volumen y g : aceleración de gravedad, tiene dimensiones de Fuerza.

TABLA DE CONVERSIONES:

....

Longitud : 1 [m] = 10 [dm] = 100 [cm] =1000 [mm] = 3,281 [pie]
1 [pie] = 0,3048 [m] =12 [plg]
1 [plg] = 2,54 [cm]

....

Masa : 1 [kg] = 2,2046 [lb] =0,10197 [kgf s^2 / m] = 0,06852 [slug]
1 [kgf s^2/m] = 9,807 [kg] = 0,6720 [slug]
1 [slug] = 14,594 [kg]
1 [slug] = 32,174 [lb]

....

Fuerza : 1 [N] = 10^5 [dina] = 0,10197 [kgf] = 7,233 [poundals]= 0,2248 [lbf]
1 [kgf] = 9,807 [N] = 2,2046 [lbf]
1 [poundal] = 0,1383 [N] = 0,03108 [lbf]
1 [lbf] = 4,4482 [N] = 32,174 [poundals]= 0,4536 [kgf]

....

Conversión de Unidades

Generalidades: Principios que debemos tener en cuenta:

Conversión de Unidades simples:

1.- ***Las unidades de medida se tratan como entidades algebraicas,*** vale decir, se opera con ellas siguiendo las reglas de la operatoria algebraica elemental.

Así por ejemplo :

20 [kgf] esconde una multiplicación 20 (adimensional) multiplicado por [kgf]

2.- **Principio de sustitución :** Si en una expresión aparece un término A , éste puede ser sustituido por cualquier otro término B que sea equivalente con él. Ejemplo:

õ **escribir 32 [kgf] en términos de [N]**

desarrollo : ya que 1 [kgf] = 9,8[N] , se puede reemplazar en la expresión anterior :de este modo : 32 [kgf] = = 32 x 9,8[N] = 313,6 [N] , ejemplifica el empleo de este Principio.

Ejercicios :

1.- Sabiendo que 1 [cal] = 4,184 [J] Completar el siguiente cuadro:

[cal]	[J]
50	
0,67	
	80

Información pertinente : 1 [cal] = 4,184 [J] establece el equivalente mecánico del calor, ambas tienen las mismas dimensiones, y corresponden a Energía. (caloría y Joule, respectivamente.)

2.- Hallar el resultado de sumar : 20 [cal] + 120 [J] + 50[Nm]

3.- Sabiendo que 1 Km = 1000m y que 1m = 3,281 [pie] hallar las sumas siguientes :
a) 0,2 Km + 23 m +34 [pie] b) 0,12 km – 20 m +213 [pie]

3.- **Principio de transposición:** Siendo A = kB una equivalencia entre unidades de medida, se puede expresar B en términos de A, aplicando la propiedad multiplicativa de la igualdad, vale decir :
B = (1/k)A. Veamos algunos ejemplos:

¿ A cuántos metros equivale un pié?
A partir de la igualdad : 1 [m] = 3,281 [pie] se obtiene (1/ 3,281) [m]= 1 [pie]
de donde : 1 [pie] $\approx$ 0,305 [m]

4.- Principio multiplicativo de la igualdad : Siendo A = kB una equivalencia entre unidades de medida, la igualdad se puede multiplicar por un mismo número (distinto de cero):
es decir : mA = mkB; veamos una aplicación de este Principio:

¿ A cuántos [J] equivale 50 [cal]? A partir de 1 [cal] = 4,184 [J] multiplicamos por 50 en ambos miembros de la igualdad:

50x 1 [cal] = 50x4,184 [J] obteniendo : 50 [cal] $\approx$ 209,2 [J]

5.- De la siguiente propiedad : $A = kB \rightarrow A^n = k^n \cdot B^n$ (una extensión del principio multiplicativo) podemos resolver la siguiente situación:

¿ A cuántos [pie^2] equivalen 40[m^2]?

A partir de la igualdad : 1 [m] = 3,281 [pie] y elevando al cuadrado, se obtiene:

$1\ [m^2] = 3{,}281^2\ [pie^2] \leftrightarrow 1\ [m^2] \approx 10{,}76[pie^2]$

6.- Dadas dos equivalencias entre unidades, por ejemplo : $A = k_1B$
y $B= k_2C$; siendo A, B, C unidades de medida y k_1 y k_2 los factores de conversión

es válida la siguiente sustitución : (se puede observar que corresponde al principio de sustitución)

$$A = k_1k_2C$$

Ejemplo :
Sabiendo que 1[m] = 3,281 [pie] y que 1 [pie] = 12 [plg] Hallar la equivalencia de 30 [m] en términos de [plg]

resolución : 30 [m] = 30x 3,281 [pie] = 30x 3,281x 12 [plg] = 1181,16 [plg]

7.- Dadas dos equivalencias entre unidades, por ejemplo : $A = k_1B$
y $A= k_2C$; siendo A, B, C unidades de medida y k_1 y k_2 los factores de conversión
es válida la siguiente igualdad para la equivalencia entre B y C:

$$A = k_1B \wedge A= k_2C \Rightarrow B = (k_2 / k_1)C \quad \vee \ C = (k_1 / k_2)B$$

Ejemplo : Dadas las equivalencias : 1 [pie] = 30,48 [cm] y 1 [pie] =12 [plg]
Hallar la equivalencia entre [cm] y [plg]

igualando las expresiones que contienen : 1 [pie] se obtiene : 30,48 [cm] = 12 [plg]
de donde : 1[cm] = (12 / 30,48) [plg] o bien: (30,48 / 12) [cm] = 1 [plg]

es decir : 1[cm] = 0,394[plg] o bien 1 [plg] = 2,54 [cm]
Conversión de Unidades compuestas:

- Son válidos todos los principios anteriores:

- Multiplicación por la Unidad : son válidas los siguientes proposiciones:

$$Ax1 = A \text{ y además } B/B = 1$$

Primer ejemplo :

Convertir 10 [rev] /[min] en rad /s sabiendo que :1 [rev] = 2π rad y que 1[min] = 60 [s]

10 [rev] /[min] = 10x2π rad / 60[s] $\approx$ 1,05 rad / s ; aquí se hizo uso del Principio de sustitución.

Segundo ejemplo : convertir 20 [rad/s] en [rpm] ([rpm] es [rev]/ min)

Notabene: Estas unidades de medida corresponden al movimiento circular.
Se utilizará el procedimiento de la multiplicación por la unidad :

20 [rad/s] = 20 [rad/s]x(60s /1min)x(1 [rev] / 2π rad) ; después de simplificar las unidades como si fueran términos algebraicos se obtiene :

$$20x60 / 2\pi \text{ [rev /min]} \leftrightarrow 191,1 \text{ [rev /min] app}$$

Miscelánea de ejercicios:

1.- Sabiendo que : 1 [N] = 10^5 [dina] = 0,10197 [kgf] Hallar el factor de conversión para cambiar de [dina] a [kgf] y de [dina] a [N].
2.- Convertir 10 [pie] /[min] en [m/s] (velocidad)
3.- Convertir 12000 m^2 en acres, sabiendo que un acre = 4047 m^2
4.- Convertir 21 Btu en [cal] sabiendo que 1 cal = 4,184 [J] y que 1 Btu = 1054 [J]
(Btu : unidad térmica británica en castellano, corresponde a energía.)
5.- sabiendo que 1 lbf = 4,448 [N] y que 1 [dina] = 10^{-5} [N] hallar 200 lbf en [N]
6.- Sabiendo que 1 [W] = 1 [J/s] hallar la equivalencia [W] con Btu /s. (esta unidad corresponde a potencia: es decir (Trabajo o energía) / tiempo
7.- Hallar la equivalencia de 120 [Pa] en lbf / pie^2 y en lbf /plg^2; sabiendo que 1[Pa] = 1 N/m^2
Buscar equivalencia lbf $\leftrightarrow$ [N] en la Tabla de conversiones.

Bibliografía recomendada:

Título	Autor	Editorial
" Mecánica Analítica para Ingenieros"	Seely y Ensign	
Mecánica de Fluidos		Mc Graww Hill / Schaum