

Ingeniería Energética

Mecánica de Fluidos

	Introducción a los Fluidos		Fundamentos de Hidrostática		Equilibrio y movimiento relativos
	Flujo incompresible no viscoso		Dinámica de los fluidos perfectos		Desarrollo teórico de la lubricación hidromecánica
	Semejanza hidrodinámica y análisis dimensional		Teoría elemental de la capa límite bidimensional		Flijo viscoso incompresible
	Cálculo de tuberías		Golpe de ariete		Flujo compresible
	Tablas de Fanno		Orificios y vertederos		Teorema del impulso
			Índice		

[Principal](#) - Mecánica de Fluidos

**DEPARTAMENTO DE INGENIERIA
ELECTRICA Y ENERGETICA**

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

MECANICA DE FLUIDOS

Pedro Fernández Díez

I.- INTRODUCCIÓN A LOS FLUIDOS

I.1.- PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS

Los fluidos son agregaciones de moléculas, muy separadas en los gases y próximas en los líquidos, siendo la distancia entre las moléculas mucho mayor que el diámetro molecular, no estando fijas en una red, sino que se mueven libremente.

Un fluido se denomina medio continuo, cuando la variación de sus propiedades es tan suave que se puede utilizar el cálculo diferencial para analizarlo.

En Mecánica de Fluidos solo hay cuatro dimensiones primarias, de las que se derivan todas las demás, a saber, masa, longitud, tiempo y temperatura.

Las propiedades de los fluidos más interesantes son,

a) La **isotropía**, por cuanto mantienen igualdad de propiedades en todas direcciones.

b) La **movilidad**, por cuanto carecen de forma propia, por lo que se amoldan a la del recipiente que los contiene; a un esfuerzo infinitamente pequeño le corresponde una deformación infinitamente grande.

c) La **viscosidad**, que constituye una resistencia a la deformación, la cual no sigue las leyes del rozamiento entre sólidos, siendo las tensiones proporcionales, en forma aproximada, a las velocidades de las deformaciones; esta Ley fue formulada por Newton, que decía que, cuando las capas de un líquido deslizan entre sí, la resistencia al movimiento depende del gradiente de la velocidad dv/dx , y de la superficie,

$$F = S \frac{dv}{dx}$$

siendo S la constante de proporcionalidad; ahora bien, la velocidad va variando progresivamente de capa en capa, y no bruscamente.

Si la velocidad relativa de desplazamiento es nula, la tensión también lo será.

d) La **compresibilidad**, según la cual, para cualquier esfuerzo a que se someta al fluido, su volumen prácticamente no varía. Así, para el caso del agua, por cada kg/cm^2 que aumente su presión, se comprime $1/20.000$ de su volumen. Para los fluidos compresibles, el volumen específico será función de la presión y de la temperatura, siendo complicadas las expresiones que ligan estas variables.

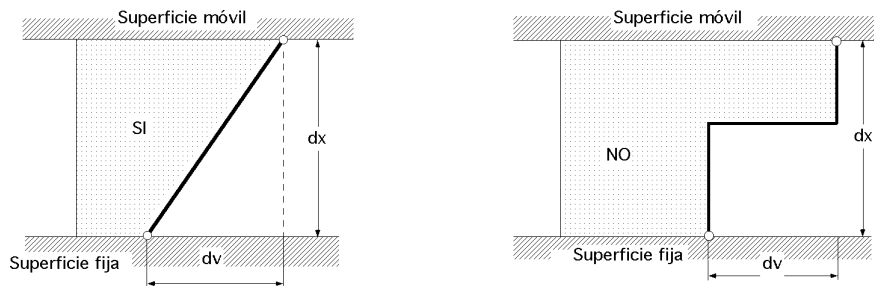


Fig I.1.- Isotaquias de velocidades

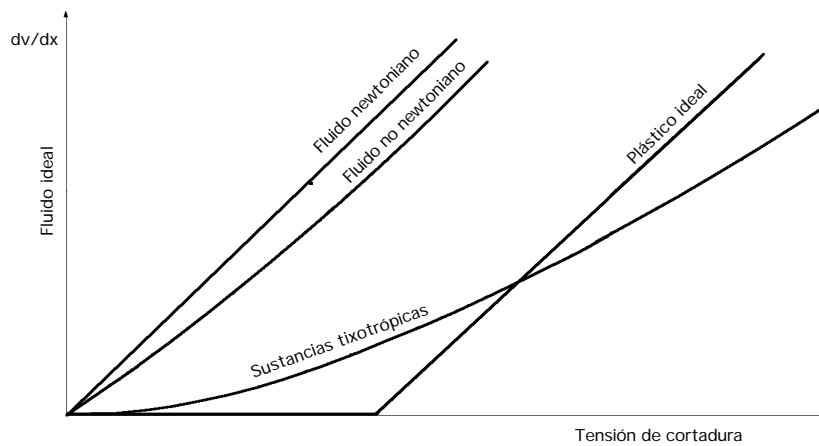


Fig I.2.- Comportamiento de algunos fluidos

La expresión general de la compresibilidad k es,

$$k = - \frac{1}{v} \left(\frac{v}{p} \right)_T$$

Los **fluidos perfectos** tienen,

- a) *Isotropía perfecta*
- b) *Movilidad perfecta*
- c) *Fluidez perfecta, es decir, ausencia de viscosidad*
- d) *Compresibilidad nula*

De la ausencia de rozamiento en un fluido perfecto, resulta que,

- a) *Toda deformación se efectuaría sin trabajo*
- b) *Todo elemento de un fluido, puede ejercer solamente esfuerzos normales sobre un elemento vecino, o sobre una pared próxima*

En la Fig I.2 se representan las gráficas cartesianas de algunos de los diferentes tipos de fluidos, tomando como eje de ordenadas, dv/da , y como eje de abscisas el esfuerzo cortante.

I.2.- VISCOSIDAD DINÁMICA Y CINEMÁTICA

En la Ley de Newton enunciada anteriormente, es la viscosidad absoluta o coeficiente de viscosidad dinámica; despejando este valor en dicha ecuación se tiene,

$$= \frac{F}{S} \frac{dx}{dv} = \frac{dx}{dv}$$

siendo la relación $\frac{F}{S}$, el rozamiento por unidad de superficie.

El rozamiento en los líquidos se corresponde con el esfuerzo cortante en los sólidos. Se sabe que, el esfuerzo cortante en los sólidos, origina a veces otros esfuerzos como los de tracción y compresión; lo equivalente en los líquidos es que originan variaciones de presión, de tal modo, que la presión media sobre un elemento considerado, puede verse afectada por una pequeña variación en más o en menos.

A la relación entre la viscosidad dinámica y la densidad del fluido se la conoce como viscosidad cinemática, = —

Unidades.- El Poise es la viscosidad absoluta o *dinámica* de un fluido en el cual, la fuerza de una dina actuando sobre una capa de 1 cm² de superficie, le imprime una velocidad de 1 cm/seg a otra capa paralela a la misma superficie, situada a 1 cm de distancia.

En consecuencia se tiene,

$$\text{Sistema cegesimal, 1 Poise} = \frac{\text{dinas. seg}}{\text{cm}^2}$$

$$\text{Sistema técnico, 1 U.T.M.} = 98 \text{ Poises} \quad 1 \text{ Poise} = \frac{1}{98} \frac{\text{kg seg}}{\text{m}^2}$$

La viscosidad *dinámica* del agua a 20°C es igual a 0,01 Poises, 1 Centipoise.

La viscosidad *cinemática* se define en la forma, = — , siendo la densidad.

El coeficiente de viscosidad *cinemática* del agua para 0°C y 760 mm de presión es,

$$\nu_a = 0,0178 \text{ Stokes} = 1,78 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}$$

mientras que a 20°C es de 0,01 Stokes o un Centistoke.

I.3.- MEDIDA DE LA VISCOSIDAD

VISCOSÍMETRO ABSOLUTO CALIBRADO.- Mediante un viscosímetro absoluto calibrado, se determina el tiempo de derrame del volumen constante de líquido cuya viscosidad se desea conocer.

Si el derrame es debido a la acción de su propio peso, se determina la viscosidad cinemática.

Si el derrame es debido a una diferencia de presión, se determina la viscosidad dinámica.

El fluido circula a temperatura constante, bajo una diferencia de presión también constante, a través de dos tubos capilares calibrados, Fig I.3.a.

El capilar A se mantiene a temperatura constante; el líquido fluye a través del capilar, desde la bureta graduada cilíndrica B al embudo E, por rebosamiento del tubo grueso C.

En el instante t , si la diferencia de nivel del líquido en los dos tubos comunicantes B y C es h , la

diferencia de presión que rige el flujo es, $h = \frac{\rho}{\gamma} h$.

El volumen de líquido dV que fluye durante el tiempo dt viene dado por la expresión,

$$dV = Q dt = \frac{(\rho_0 - \rho_1) R^4}{8 \gamma l} dt = \frac{h \gamma R^4}{8 \gamma l} dt$$

siendo R el radio del capilar, l la longitud del mismo y Q el caudal de fluido que circula.

Llamando V al volumen que ha fluido entre los instantes t_1 y t_2 correspondientes a los niveles h_1 y h_2 , y dado que la bureta graduada es cilíndrica, se tiene,

$$-\frac{dV}{dh} = \frac{V}{h_1 - h_2} \quad dV = -\frac{V}{h_1 - h_2} dh = \frac{h \gamma R^4}{8 \gamma l} dt$$

$$\frac{V}{h_1 - h_2} \frac{dh}{h} = \frac{\gamma R^4}{8 \gamma l} dt \quad \frac{V}{h_1 - h_2} \ln \frac{h_1}{h_2} = \frac{\gamma R^4}{8 \gamma l} (t_2 - t_1)$$

por lo que la viscosidad cinemática es,

$$\nu = \frac{\gamma R^4 (h_1 - h_2) (t_2 - t_1)}{8 \gamma l V \ln \frac{h_1}{h_2}}$$

que permite hacer una medida absoluta de la viscosidad cinemática, lo cual comporta la determinación de todas las magnitudes que intervienen en la expresión anterior.

También es fundamental definir la temperatura para determinar el estado del fluido.

VISCOSÍMETRO EMPÍRICO.- El viscosímetro empírico se basa en el derrame de líquidos por un pequeño orificio calibrado, Fig I.3.b. Aplicando la ecuación de Poiseuille se puede medir la viscosidad del líquido conociendo su densidad y el tiempo que tardaría en pasar entre dos graduaciones fijas del tubo graduado A y B, conociendo la viscosidad de un líquido patrón ν' con el que se le compara, su densidad y el tiempo que tardaría en pasar entre los mismos puntos.

Según la ecuación de Poiseuille,

$$Q = \frac{\rho R^4}{8 \gamma l} = 2 \frac{\rho}{\gamma} \left(\frac{R}{2}\right)^4 \frac{1}{l} = \frac{\text{Volumen}}{\text{Tiempo}} \left(\frac{m^3}{\text{seg}}\right)$$

El volumen del líquido a medir es,

$$V = 2 \frac{\rho}{\gamma} \left(\frac{R}{2}\right)^4 \frac{t}{l} = \left| \rho = \gamma h = (\rho'' - \rho') = \gamma h \right| = 2 \frac{\rho h}{\gamma} \left(\frac{R}{2}\right)^4 \frac{t}{l}$$

El volumen del líquido patrón, es,

$$V = 2 \frac{\rho'}{\gamma} \left(\frac{R}{2}\right)^4 \frac{t'}{l} = \left| \rho' = \gamma' h = \gamma' h \right| = 2 \frac{\gamma' h}{\gamma} \left(\frac{R}{2}\right)^4 \frac{t'}{l}$$

Dividiéndolas miembro a miembro resulta:

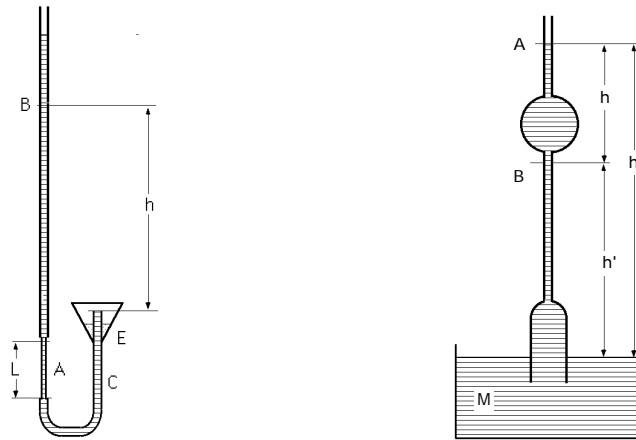


Fig I.3.- Viscosímetros

$$1 = \frac{t}{t'} \quad \frac{1}{\eta} = \frac{t}{t'} \quad \frac{1}{\eta} = \frac{t}{t'}$$

La cubeta M tiene que ser lo suficientemente grande como para que el aumento de nivel en la misma sea despreciable; además, acelera el paso del líquido por la pipeta, evitando la formación de gotas a la salida por tensión superficial. Para calcular la variación de la presión se toma un valor medio en alturas. Las viscosidades medidas con estos aparatos oscilan entre 0,01 y 15 Poises, oscilando el tiempo de paso entre 70 y 700 segundos.

VISCOSÍMETRO DE CILINDROS COAXIALES.- Para dar una primera definición de la viscosidad basta con medir la fuerza necesaria para desplazar, en su plano, una placa plana paralelamente a otra, pero las dificultades prácticas que comportaría la realización de dicha medida, hace que, en la práctica, se reemplacen las dos placas por dos cilindros coaxiales, de radios \$r_1\$ y \$r_2\$, dejando entre ellos un ligero espacio, \$r_1 - r_2 = e\$, que contiene el fluido a estudiar, Fig I.4.

Si se hace girar el cilindro exterior alrededor de su eje a velocidad constante, el cilindro interior tiende a girar en el mismo sentido, por lo que si se desea mantenerlo inmóvil, es necesario ejercer sobre él un par M en sentido inverso al del movimiento del cilindro exterior.

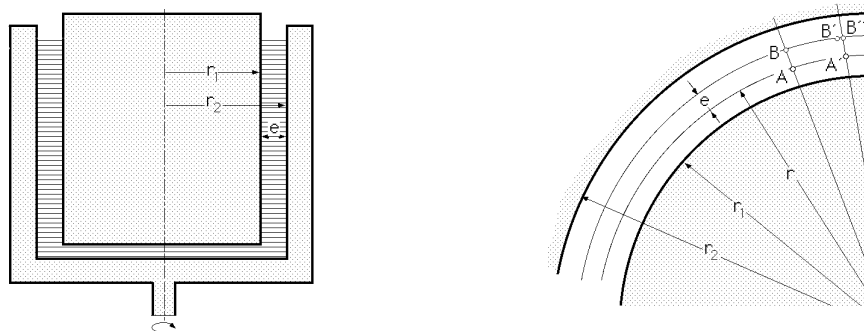


Fig I.4.- Viscosímetro de cilindros coaxiales

En régimen permanente, este par resistente C debe equilibrar el par motor que provoca la rotación del cilindro exterior, ya que no existe ninguna aceleración de la masa del fluido a la cual se apliquen los dos pares; la determinación del par C permite determinar la medida absoluta de la viscosidad del fluido.

En el fluido, la velocidad angular varía progresivamente de 0 a, $2\pi n$, a lo largo de los radios de los cilindros, siendo n el número de revoluciones por minuto del cilindro exterior.

Si se consideran dos circunferencias concéntricas, de radios r y $r + dr$, en las que el fluido se mueve con velocidades angulares respectivas, w y $w + dw$, y si se toman dos partículas de fluido cuyos centros respectivos están sobre estas dos circunferencias, en el instante t , puntos A y B sobre el mismo radio; durante el tiempo dt , si la partícula que estaba en A pasa a A', la partícula que estaba en B pasará a B'.

La partícula cuya velocidad angular sea mayor, está mas lejos que el punto B'', situado sobre el radio que pasa por A; el deslizamiento durante el tiempo dt de la partícula exterior, en relación a la partícula interior, está representado por B''B' y la diferencia de velocidades en el deslizamiento del espesor de la lámina fluida que contiene las partículas es, $\frac{BB'}{dt} = (r + dr) dw$.

El gradiente de esta velocidad relativa siguiendo el radio es, despreciando los términos de segundo orden, $r \frac{dw}{dr}$.

La tensión tangencial en el líquido es,

$$= \frac{F_{roz}}{S} = \frac{dv}{dr} = r \frac{dw}{dr}$$

El par M es el mismo a lo largo del radio r , ya que debe también equilibrar, en régimen permanente, el par motor C, por lo que, $M = C$.

Si la longitud vertical de los dos cilindros en contacto con el líquido es L, el momento de las fuerzas de viscosidad respecto al eje es,

$$M = F r = (2\pi r L) r = 2\pi r^3 L \frac{dw}{dr} ; M = C ; dw = \frac{C dr}{2\pi r^3 L}$$

La integración de la ecuación anterior, permite obtener la velocidad angular, que queda en la forma,

$$w = -\frac{C}{4\pi r^2 L} + Cte = \left. \begin{array}{l} \text{Para, } r = r_1 ; w = 0 \\ Cte = \frac{C}{4\pi r_1^2 L} \end{array} \right| = -\frac{C}{4\pi r^2 L} + \frac{C}{4\pi r_1^2 L} = \frac{C}{4\pi L} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2} \right)$$

Para, $r = r_2$, $w = \frac{n}{30}$, siendo n el número de rpm del cilindro exterior por lo que despejando la viscosidad se obtiene,

$$= \frac{C}{4\pi L} \left\{ \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right\} = \frac{15 C}{2\pi^2 L n} \left\{ \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right\}$$

El cálculo precedente no tiene en cuenta la existencia de las secciones rectas inferiores de los cilindros, por lo que suele introducirse un término correctivo que introduce el fondo circular, de forma que, aproximadamente, se pueda considerar que el fondo se comporta como una altura suplementaria h , quedando la expresión de la viscosidad en la forma,

$$= \frac{15 C}{2^2 (L+h) n} \left\{ \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right\}$$

En este método, la determinación de τ se limita a realizar una serie de medidas geométricas (r_1, r_2, L), cinemáticas n y mecánicas C . Es evidente que además, la temperatura y la presión del fluido tienen que ser conocidas y medidas.

El aparato debe estar situado en un recinto a temperatura regulable, de forma que se pueda mantener fija en el transcurso de la medida.

Por convenio internacional, existen unidades basadas en el tiempo que tarda el líquido en pasar a través de un orificio perfectamente calibrado.

En Europa se utilizan los grados Engler.

En USA se utilizan los segundos Saybold.

En Inglaterra se utilizan los segundos Reedwood.

Los *grados Engler* se obtienen dividiendo el tiempo de vaciado del líquido problema a través del orificio calibrado y el tiempo que tardaría por el mismo orificio un líquido patrón, agua destilada, efectuando ambas mediciones a la misma temperatura; en consecuencia,

$$E_t^\circ = \frac{t}{t_{\text{agua}}}$$

siendo las temperaturas más usuales para realizar estas mediciones de 20°C, 50°C 100°C.

Los *segundos Saybold* se obtienen midiendo el tiempo que 60 cm³ de fluido tardaran en circular por un orificio calibrado siendo las temperaturas más usuales de 70°F, 100°F, 130°F y 210°F.

Los *segundos Reedwood* se obtienen midiendo el tiempo que 50 cm³ de líquido tardarían en circular por un orificio calibrado, siendo las temperaturas más usuales de 70°F, 100°F, 140°F y 200°F.

Los coeficientes de viscosidad de los aceites lubricantes se expresan en unidades arbitrarias; en USA se utiliza el número S.A.E., iniciales de Society of Automotive Engineers.

A 130°F, la viscosidad de algunos aceites es,

SAE 10, esta comprendida entre 160 y 220 centipoises

SAE 20, “ “ 230 y 330 “

SAE 30, “ “ 360 y 430 “

I.4.- INFLUENCIA DE LA PRESIÓN Y TEMPERATURA EN LA VISCOSIDAD

Para temperaturas elevadas, la viscosidad de los líquidos es muy pequeña; para un valor de temperatura tendiendo a infinito, se corresponde con un valor cero de la viscosidad. La ecuación que liga la temperatura con la viscosidad es de la forma, Fig I.5,

$$\log \frac{\tau}{\tau_0} = \frac{C}{T - T_0} ; \quad \tau = \tau_0 10^{\frac{C}{T - T_0}}$$

siendo τ_0, C y T_0 valores característicos para cada líquido.

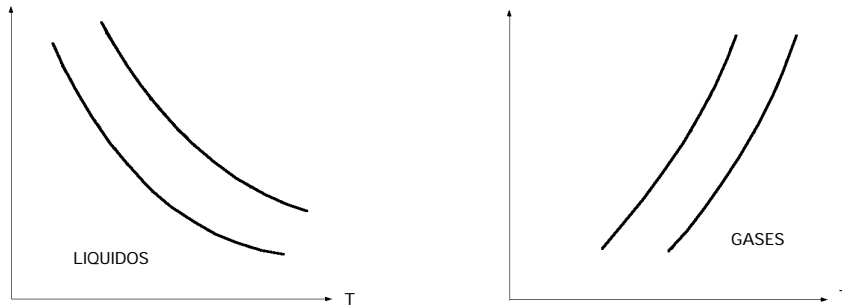


Fig I.5.- Influencia de la presión y la temperatura en la viscosidad

Para líquidos, la variación de la viscosidad con la presión viene dada por,

$$\mu_p = \mu_0 a^p$$

con μ_0 y a parámetros característicos para cada líquido.

Para los gases, la ley de dependencia entre la viscosidad y la temperatura, se puede expresar bastante bien por la fórmula de Sutherland, de la forma,

$$\mu_T = \mu_0 \frac{\left(1 + \frac{C}{273}\right) \sqrt{\frac{T}{273}}}{1 + \frac{C}{T}}$$

en la que los valores de μ_0 y C vienen dados en la Tabla I.1 y sirven para valores de T comprendidos entre 100°K y 1500°K.

Por lo que respecta a las presiones, la viscosidad depende de ellas según la expresión,

$$\mu_p = \mu_0 (1 + b p)$$

conociéndose pocas experiencias que permitan calcular b .

Algunos valores de μ_0 son, Para el CO₂ a 25°C. $\mu_0 = 7470 \cdot 10^{-6}$
 Para el benzol a 20°C $\mu_0 = 930 \cdot 10^{-6}$
 Para el agua..... $\mu_0 = 17 \cdot 10^{-6}$

Tabla I.1.- Valores de C y μ_0 de la fórmula de Sutherland

Fluido	C	μ_0 Kg.seg/m ²
Aire	114	0,166
Oxígeno	128	0,18
Hidrógeno	74	0,083
Nitrógeno	110	0,16
Anhidrido carbónico	260	0,137
Monóxido de Carbono	---	0,16
Vapor de agua	673	0,087

Se observa que cuando la temperatura del fluido aumenta, la influencia de la presión disminuye.

I.5.- INDICE DE VISCOSIDAD

Para definir el *índice de viscosidad* se parte de dos tipos de aceite patrón,

a) Un aceite parafínico al que se asigna el índice 100 (Pen-silvania)

b) Un aceite asfáltico al que se asigna índice 0 (Gulf Coast)

Mezclando estos aceites patrones en diferentes porcentajes, se obtienen otros índices comprendidos entre 0 y 100; el líquido problema se compara con el más próximo a uno de estos índices, obteniéndose de esta forma el índice del líquido problema.

$$\text{V.I. (Viscosity index)} = 100 \frac{AB}{AC} = 100 \frac{L - H}{L - C}, \text{ si,} \quad \begin{array}{l} L ; \text{V.I.} = 0 \\ H ; \text{V.I.} = 100 \end{array}$$

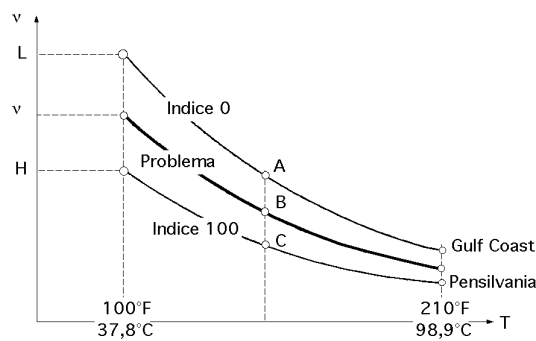


Fig I.6.- Índice de viscosidad

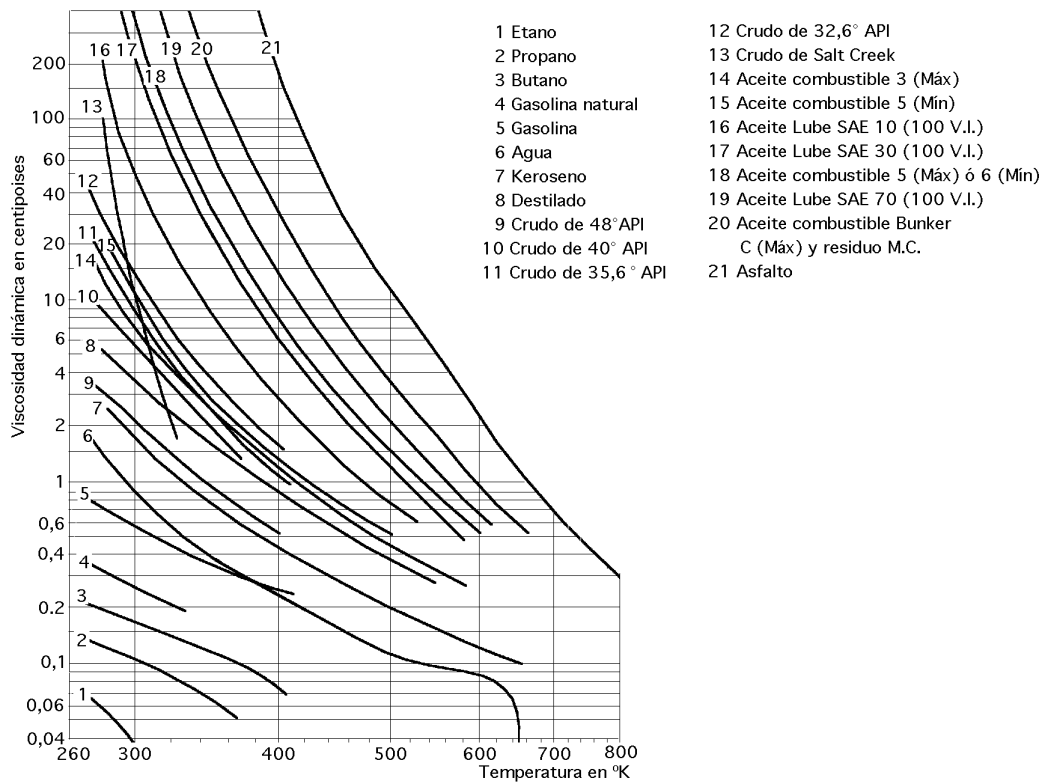


Fig I.7.- Viscosidad del agua y de algunos líquidos derivados del petróleo

Tabla I.2.- Valores de H y L para v a 210°F

VISCOSIDAD CINEMÁTICA A 210°F											
H		L		H		L					
8,00	63,72	108,86	9,00	76,35	135,17	10,00	89,18	162,49	11,00	102,54	191,85
8,10	64,97	111,42	9,10	77,61	137,84	10,10	90,46	165,36	11,10	103,91	194,90
8,20	66,25	114,06	9,20	78,88	140,51	10,20	91,81	168,30	11,20	105,30	197,96
8,30	67,50	116,65	9,30	80,18	143,28	10,30	93,13	171,19	11,30	106,72	201,15
8,40	68,75	119,30	9,40	81,45	145,99	10,40	94,46	174,07	11,40	108,10	204,24
8,50	70,04	121,92	9,50	82,71	148,69	10,50	95,82	177,07	11,50	109,49	207,34
8,60	71,29	124,53	9,60	83,98	151,41	10,60	97,15	179,98	11,60	110,89	210,47
8,70	72,54	127,15	9,70	85,26	154,15	10,70	98,49	182,90	11,70	112,27	213,60
8,80	73,79	129,78	9,80	86,57	156,98	10,80	99,82	185,85	11,80	113,71	216,83
8,90	75,09	132,51	9,90	87,85	159,72	10,90	101,20	188,87	11,90	115,11	219,98

I.6.- TENSIÓN SUPERFICIAL Y CAPILARIDAD

La diferencia entre las moléculas que están dentro de un líquido y las que están en la superficie es que, en las primeras, las fuerzas atractivas que actúan en el pequeño espacio en que se manifiestan, se contrarrestan, mientras que en las segundas no sucede lo mismo, por cuanto existirá una resultante R que se dirige hacia el seno del líquido, Fig I.8.

Por lo tanto, si se quiere aumentar la superficie libre del líquido, será a expensas de llevar moléculas del mismo, a dicha superficie, tomándolas del interior del líquido, lo cual requiere un consumo de energía. para poder evaluar el consumo de energía por unidad de superficie aumentada, que se conoce como *tensión superficial*, se forma una laminilla jabonosa que al aplicarla un esfuerzo F avanzará una cierta longitud l , Fig I.9, obteniéndose así un trabajo equivalente al necesario para llevar moléculas a la superficie; cualquiera que sea el grado de estiramiento la fuerza aplicada F sera siempre constante, en contra de lo que ocurre con una membrana, que sigue la ley de Hooke.

El trabajo realizado es proporcional a S , siendo la constante de proporcionalidad la tensión superficial σ ,

$$\text{Trabajo: } F l = \left| = \frac{F}{2 a} \right| \quad F = 2 a \left| = 2 a \quad l = S \right.$$

siendo σ la tensión superficial, que es una fuerza por unidad de longitud perpendicular a la fuerza \vec{F} , ó también, el trabajo realizado por unidad de superficie, al aumentar la superficie.

El aumento de superficie se consigue al aplicar la fuerza \vec{F} , ya que la lámina al estar formada por un volumen de líquido limitado por dos capas superficiales cuyo espesor es de algunas moléculas, al aplicar la fuerza \vec{F} habrá moléculas de este volumen de líquido que se desplazaran hacia las capas superficiales.

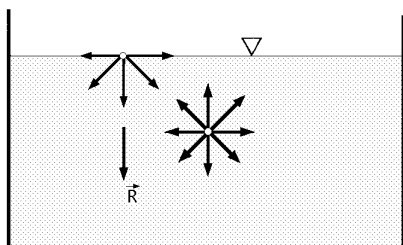


Fig I.8.- Fuerzas de tensión superficial

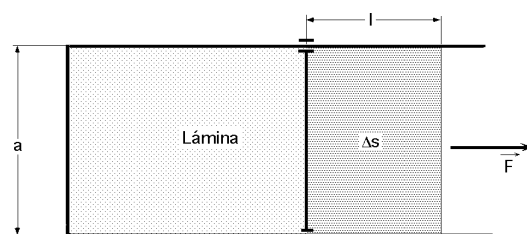


Fig I.9.- Esquema para la determinación del trabajo

El conjunto de fenómenos que vienen ligados a la tensión superficial se conocen como efectos de superficie. Ampliando los efectos de superficie a láminas que separan una pared sólida y un líquido, o una pared sólida y un gas, tendremos los fenómenos de capilaridad.

Si llamamos,

1, tensión superficial entre sólido y líquido

2, tensión superficial entre líquido y vapor

3, tensión superficial entre vapor y sólido

, el ángulo de contacto o ángulo de capilaridad

f_a , la fuerza adherente o fuerza de atracción entre la porción aislada y la pared

resulta: Fig I.10,

$$f_a = 2 \text{ sen } \alpha ; 3 - 1 = 2 \text{ cos } \alpha ; \text{tg } \alpha = \frac{f_a}{3 - 1}$$

A su vez,

$$\text{sen } \alpha = \frac{f_a}{2} ; \text{cos } \alpha = \frac{3 - 1}{2} ; \frac{f_a^2}{2^2} + \frac{(3 - 1)^2}{2^2} = 1$$

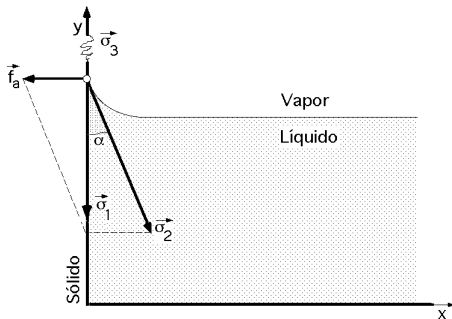


Fig I.10.- Parámetros de capilaridad

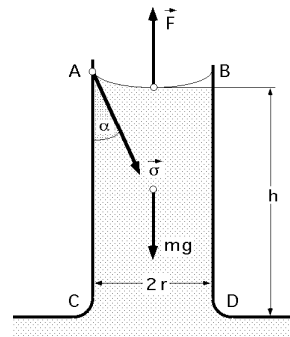


Fig I.11.- Altura alcanzada en un capilar por tensión superficial

por lo que,

$$\frac{2}{2} = f_a^2 + (3 - 1)^2 = f_a^2 + \left(\frac{f_a}{\text{tg } \alpha}\right)^2 = f_a^2 \left(1 + \frac{1}{\text{tg}^2 \alpha}\right) = \frac{f_a^2}{\text{sen}^2 \alpha}$$

Como conclusión se puede decir que, cuando,

$(3 - 1) > 0$, $3 > 1$ $\text{tg } \alpha$ es (+), el líquido moja

$(3 - 1) < 0$, $3 < 1$ $\text{tg } \alpha$ es (-), el líquido no moja

I.7.- ALTURA ALCANZADA POR UN LIQUIDO EN EL INTERIOR DE UN TUBO DE PEQUEÑO DIÁMETRO

La columna líquida (ABCD) estará en equilibrio bajo la acción de su propio peso y de la componente vertical de la fuerza de tensión superficial, que actúa sobre la circunferencia de intersección

de la columna líquida con el tubo, Fig I.11.

A partir de la componente vertical \vec{F} se obtiene el de h ,

$$F = 2 r \cos = r^2 h \quad h = \frac{2 \cos}{r}$$

siendo el coeficiente de tensión superficial, h la altura alcanzada por el líquido en el interior del capilar, que es directamente proporcional al coeficiente de tensión superficial, y está en razón inversa de la densidad del líquido y del radio del tubo r .

Si está muy próximo a 0, Fig I.11, la expresión anterior permite medir el coeficiente de tensión superficial ,

$$= \frac{h r g}{2}$$

Si admitimos que el menisco tiene forma esférica de radio R , el valor de la presión interior será,

$$h = p = \frac{2 \cos}{r} = \frac{2}{R}$$

que es una depresión, para cuando el menisco tenga forma cóncava, y una sobrepresión para cuando tenga forma convexa.

Tabla I.3.- Valores del coeficiente de tensión superficial , dinas/cm

Líquido	Tensión superficial dinas/cm	Líquido	Tensión superficial dinas/cm
Mercurio en aire	523	Aceite lubricante	35,7-38,7
Mercurio en agua	401	Aceite crudo	23,8-38,7
Mercurio en vacío	495	Benzol	29,4
Agua	72,5	Petróleo	26
Glicerina	30	Alcohol etílico	22
Aceite de ricino	36,4	Tetracloruro de carbono	27,2

II.- FUNDAMENTOS DE HIDROSTÁTICA

II.1.- TEOREMAS HIDROSTÁTICOS

Dentro de los líquidos en reposo, solamente es posible una forma de tensión, la de compresión, es decir, la presión hidrostática, de la que se derivan las siguientes propiedades,

a) *En un fluido en reposo, la presión en un punto cualquiera es normal a la superficie sobre la cual se ejerce.* En efecto, si se supone que no es normal, deberá tener una dirección cualquiera; si la fuerza

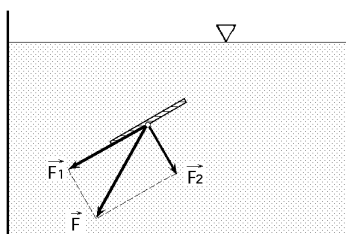


Fig II.1.- Presión en un fluido en reposo

no perpendicular a la superficie es \vec{F} , se puede descomponer en dos, una paralela a la superficie, y otra normal. La fuerza paralela hace que las capas de fluido deslicen unas sobre otras, (fuerzas de viscosidad), en contra del principio de que en Hidrostática la viscosidad es nula, Fig II.1.

Por lo tanto,

$$- \vec{F}_1 = 0, \text{ (Fuerza de viscosidad)} ; \vec{F}_1 = 0 ; \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 ; \vec{F} = \vec{F}_2$$

luego tiene que ser perpendicular.

b) *En un fluido en reposo, la presión en un punto cualquiera es la misma sobre todo elemento de superficie,* cualquiera sea la dirección de aquella, es decir, la presión no depende del ángulo de inclinación de la superficie sobre la que actúa.

Si por un punto A del fluido se hacen pasar tres planos que formen un sistema ortogonal S_1 , S_2 y S_3 , Fig II.2, y un cuarto plano infinitamente próximo al punto A, y perpendicular a la dirección de la presión escogida en A, y se aplican las ecuaciones mecánicas de equilibrio, $\vec{F} = 0$, sobre los tres ejes elegidos, y teniendo en cuenta las siguientes observaciones,

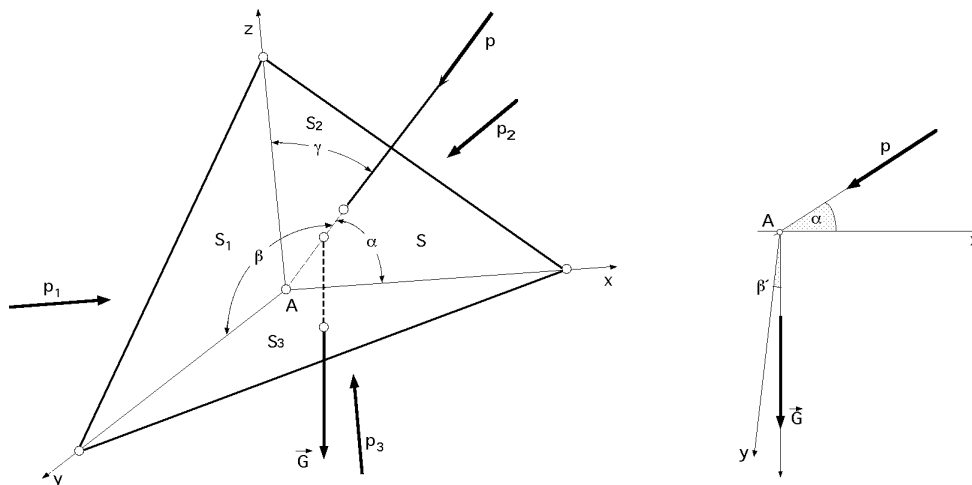


Fig II.2.- Presión en un punto

- La presión p forma ángulos α , β , γ , con los ejes cartesianos elegidos.
- Sobre cada cara S_1 , S_2 y S_3 se ejercen las presiones p_1 , p_2 , p_3
- El peso de la masa líquida G contenida en el tetraedro formado por los cuatro planos, pasa por el c.d.g. del tetraedro

se obtienen los siguientes resultados:

$$\text{Proyección sobre Ax, } p_1 S_1 + 0 + 0 - p S \cos \alpha - G \cos \alpha = 0$$

$$\text{Proyección sobre Ay, } p_2 S_2 + 0 + 0 - p S \cos \beta - G \cos \beta = 0$$

$$\text{Proyección sobre Az, } p_3 S_3 + 0 + 0 - p S \cos \gamma - G \cos \gamma = 0$$

y como el cuarto plano S está muy próximo al punto A , al tomar límites el valor de G tiende a cero, por lo que se tiene,

$$\begin{aligned} p_1 S_1 &= p S \cos \alpha & S_1 &= S \cos \alpha \\ p_2 S_2 &= p S \cos \beta & S_2 &= S \cos \beta & p_1 &= p_2 = p_3 = p \\ p_3 S_3 &= p S \cos \gamma & S_3 &= S \cos \gamma \end{aligned}$$

por lo que la presión no es una función vectorial, por cuanto es la misma para cualquier dirección, pero diferente en cada punto. Por lo tanto,

$$p = f(x, y, z) \quad ; \quad dp = \frac{p}{x} dx + \frac{p}{y} dy + \frac{p}{z} dz$$

Esta propiedad de la presión hidrostática para líquidos en reposo, se cumple también para líquidos no viscosos en movimiento. Sin embargo, para líquidos viscosos en movimiento, surgen tensiones tangenciales, por lo que la presión hidromecánica, en rigor, no posee la propiedad indicada.

II.2.- ECUACIONES DIFERENCIALES DE EQUILIBRIO DE UNA MASA LIQUIDA

Vamos a obtener las ecuaciones diferenciales del equilibrio de un líquido en el caso más general, cuando sobre el mismo actúa no solo la fuerza de gravedad, sino también otras fuerzas de masa.

Consideraremos en un líquido en reposo, un punto cualquiera M de coordenadas x, y, z, y presión p; en el líquido de densidad ρ , tomamos un volumen elemental en forma de paralelepípedo con sus aristas paralelas a los ejes de coordenadas, e iguales respectivamente a dx, dy y dz, en el que el punto M es uno de sus vértices, Fig II.3.

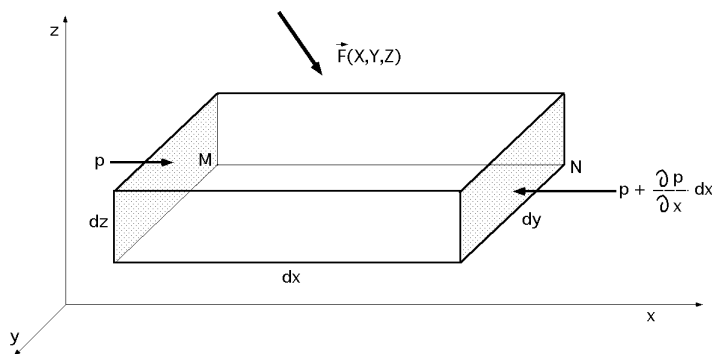


Fig II.3

Al examinar las condiciones de equilibrio del volumen elegido, representamos por $\vec{F}(X, Y, Z)$ a la resultante de las fuerzas exteriores por unidad de masa, por lo que las fuerzas que actúan sobre el volumen escogido según las direcciones de los ejes de coordenadas serán iguales a estas componentes multiplicadas por la masa del volumen elegido.

La presión p es función de las coordenadas (x, y, z) del punto M; al pasar del punto M, por ejemplo, al punto N, cambia sólo la coordenada x , en una magnitud infinitesimal dx, por lo que teniendo en cuenta el Teorema de la Media, la presión en el punto N es,

$$p_N = p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

Aplicando la ecuación de equilibrio al paralelepípedo en los tres ejes de coordenadas $F_i = 0$, y teniendo en cuenta una masa unidad, $dx dy dz = 1$, y que no existe rozamiento entre los filetes del líquido, por lo que no hay viscosidad, $\tau = 0$, se obtiene:

$$p dz dy - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dz dy + X dx dy dz = 0$$

$$p dx dz - (p + \frac{\partial p}{\partial y} dy) dx dz + Y dx dy dz = 0$$

$$p dx dy - (p + \frac{\partial p}{\partial z} dz) dx dy + Z dx dy dz = 0$$

Dividiendo estas ecuaciones por la masa del paralelepípedo y reduciendo el paralelepípedo al punto de partida M, es decir, pasando al límite haciendo tender dx, dy, dz a cero, se obtienen las

ecuaciones de equilibrio del líquido, referidas al punto M,

$$X = \frac{p}{x} \quad ; \quad Y = \frac{p}{y} \quad ; \quad Z = \frac{p}{z}$$

que se conocen como ecuaciones diferenciales de la Hidrostática.

Para el uso práctico, resulta cómodo utilizar una ecuación equivalente a estas, que no contenga derivadas parciales; para ello, si las multiplicamos respectivamente por dx, dy y dz, y las sumamos, se obtiene,

$$(X dx + Y dy + Z dz) = \frac{p}{x} dx + \frac{p}{y} dy + \frac{p}{z} dz = dp$$

es decir,

$$\underline{dp} = (X dx + Y dy + Z dz)$$

que expresa la variación de la presión en función de las coordenadas (x, y, z) para el caso mas general de equilibrio del líquido.

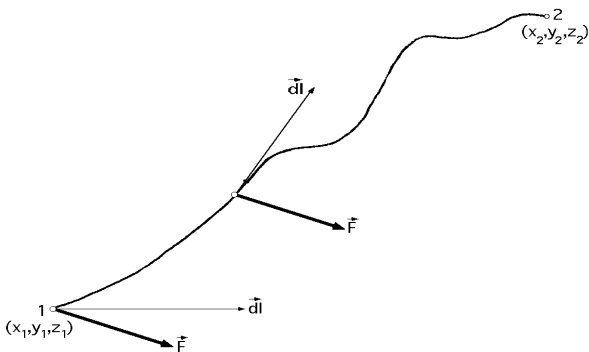


Fig II.4

El segundo miembro de la ecuación representa el trabajo por unidad de masa realizado por las fuerzas exteriores, al trasladar a la unidad de masa del líquido, de un punto a otro.

El trabajo elemental realizado será de la forma,

$$dT = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F dl \cos$$

Como la expresión algebraica de dicho producto escalar es el producto de las componentes \vec{F}

(X, Y, Z) y $d\vec{l}$ (dx, dy, dz), se puede poner,

$$dT = \vec{F} \cdot d\vec{l} = X dx + Y dy + Z dz \quad ; \quad T = \int_1^2 X dx + Y dy + Z dz$$

que confirma lo dicho anteriormente.

Superficies de nivel.- Una superficie de nivel es el conjunto de puntos en los que se tiene el mismo trabajo por unidad de masa, es decir, el mismo potencial.

Las superficies potenciales tienen la siguiente ecuación,

$$T = T(x, y, z) = \text{Cte} \quad ; \quad dT = X dx + Y dy + Z dz = 0$$

y como,

$$\frac{dp}{\rho} = (X dx + Y dy + Z dz) = 0 \quad dp = 0 ; p = \text{Cte}$$

las superficies de nivel son superficies de igual presión, pero se desconoce si serán planas o no, mientras no se apliquen las condiciones del problema a la expresión,

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

Equilibrio de líquidos.- Si se supone que las fuerzas exteriores quedan reducidas únicamente a la gravedad, es decir,

$$\vec{F}(X, Y, Z) = \vec{F}(0, 0, -g)$$

el valor de la presión es,

$$\frac{dp}{\rho} = X dx + Y dy + Z dz = -g dz \quad dp = -\rho g dz ; p = p_0 - \rho g dz$$

ya que ρ puede ser variable, siendo p_0 la presión existente sobre el plano, $z = z_0$

Si el fluido es incompresible, $\rho = \text{Cte}$, por lo que,

$$p = p_0 - \rho g (z - z_0) = p_0 - \rho g (z - z_0) \quad z + \frac{p}{\rho g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g} = \text{Cte}$$

siendo, $\rho g = \gamma$, el peso específico del mismo.

Como, $z - z_0$, es el volumen de un cilindro de base unidad, y altura, $z - z_0$, se puede enunciar que *la diferencia de presiones existente entre dos puntos de una masa líquida (o fluido en general), en equilibrio, es igual al peso de una columna líquida (o fluida), cuya altura sea igual al desnivel existente entre dichos puntos, y base la unidad de superficie.* Para este caso, la ecuación diferencial de las superficies de nivel es,

$$\rho g dz = 0 ; dz = 0 ; z = \text{Cte}$$

que son planos horizontales, siendo la superficie libre una de las superficies de nivel.

Si, $z = 0$, y , $p_0 = p_{\text{atm}}$, se puede poner,

$$p = p_{\text{atm}} + \rho g z_0$$

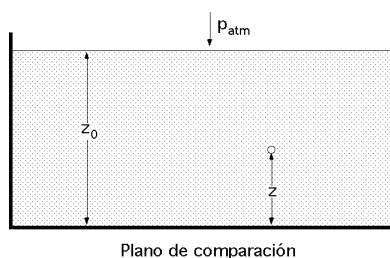


Fig II.5

es decir, la presión en un punto cualquiera de una masa líquida es proporcional a su distancia a la superficie libre y a su densidad, verificándose esta ecuación independientemente del área del fondo del recipiente y de la forma del mismo.

A la expresión,

$$z + \frac{p}{\rho} = \text{Cte}$$

se la conoce como ecuación fundamental de la estática de líquidos.

Ecuación de estado.- La ecuación de estado es función de las variables, ρ , p , T , y caracteriza la compresibilidad del líquido, siendo su ecuación de la forma,

$$f(\rho, p, T) = 0$$

y para el caso de una transformación isotérmica, muy corriente en Mecánica de Fluidos,

$$f(\rho, p) = 0$$

Los líquidos oponen una gran resistencia a la reducción de su volumen, por lo que son poco compresibles; como el factor de compresibilidad k es de la forma,

$$k = - \frac{1}{v} \left(\frac{dv}{dp} \right)_T$$

$$\text{y para, } T = \text{Cte, } k = - \frac{1}{v} \frac{dv}{dp} = \frac{1}{E} ; \quad \frac{dv}{v} = - k dp = - \frac{1}{E} dp$$

siendo E el módulo de elasticidad del líquido, observándose que un incremento infinitesimal de volumen dv , se corresponde con una disminución infinitesimal de la presión dp .

Como la masa considerada es constante, $v \rho = \text{Cte}$, resulta,

$$dv + v d\rho = 0 ; \quad \frac{dv}{v} = - \frac{d\rho}{\rho} = - \frac{1}{E} dp ; \quad - \frac{1}{E} dp = - \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\ln \rho = \frac{1}{E} p + \text{Cte} ; \quad \rho = C e^{\frac{p}{E}} = C e^{p k}$$

y como para un líquido incompresible, $k = 0$, resulta, $\rho = \text{Cte}$, como ecuación de estado.

Altura piezométrica, plano de carga y carga en un punto.- La ecuación,

$$z + \frac{p}{\rho} = z_0 + \frac{p_0}{\rho} = H = \text{Cte}$$

determina un plano llamado *Plano hidrostático de carga*, situado a la altura, p_0/ρ , sobre la superficie libre del líquido z_0 , pudiendo ser p_0 la presión atmosférica o no, pero siempre la existente en z_0 .

Dicha ecuación puede leerse como que, **en todo punto de una masa líquida en equilibrio isotérmico, la suma de la altura sobre un plano de comparación y de la representativa de la presión, es constante**, siendo la constante el plano de carga.

Para cada punto de dicha masa líquida, p/ρ , varía y se conoce como **altura piezométrica**, o altura representativa de la presión, mientras que a la expresión,

$$z + \frac{p}{\gamma} = H$$

se la conoce como *nivel piezométrico*, que puede ponerse también en la forma,

$$p = \gamma (H - z)$$

que dice que en un punto cualquiera de un líquido, la presión es la que existiría si se suprimiese la atmosfera, ó la correspondiente a z_0 , y el nivel del líquido fuese el plano de carga.

Se define la *carga en un punto* de un fluido, como la distancia existente entre este punto y el plano de carga.

El plano de carga absoluto tiene en cuenta la presión correspondiente a z_0 , mientras que el plano de carga relativo no; así se tiene, Fig II.6,

$$\text{Presión absoluta} - 1 \text{ atm} = \text{Presión relativa} ; p - p_1 = p_r$$

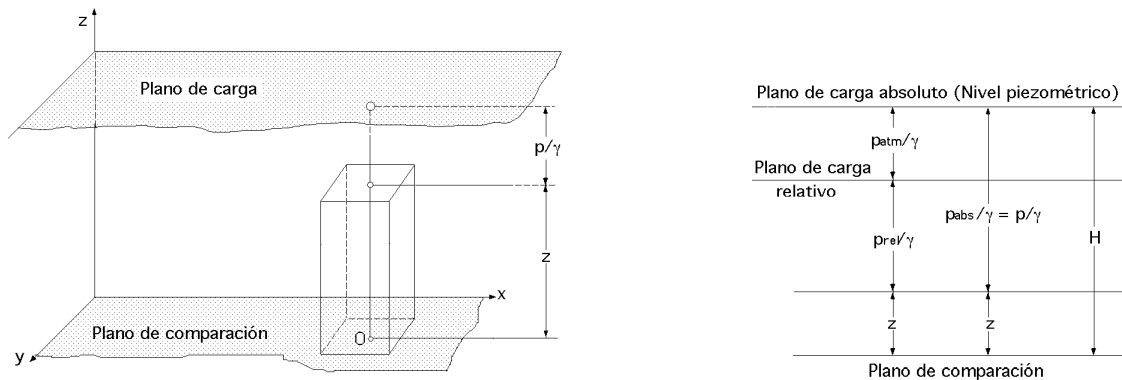


Fig II.6.- Representación gráfica de la ecuación de la Estática de Fluidos

En general,

$$p - p_r = p_{atm}$$

Resulta evidente que, si sobre la superficie libre de un fluido en reposo actúa la presión atmosférica, el valor de la altura piezométrica para cualquier punto del volumen estudiado del líquido, será igual a la profundidad a que esté situado ese punto.

La altura de ascenso de un fluido en un piezómetro, tal como se muestra en la Fig II.7, es,

$$h_p = \frac{p - p_{atm}}{\gamma} = \frac{p_{manométrica}}{\gamma}$$

mediante la cual se puede medir la presión en líquidos y gases.

A 1 atmosfera técnica le corresponden,

$$h = \frac{p}{\gamma_{agua}} = \frac{10000}{1000} = 10 \text{ m.c.a.} ; h = \frac{p}{\gamma_{Hg}} = \frac{10000}{13600} = 0,735 \text{ m.c.Hg.}$$

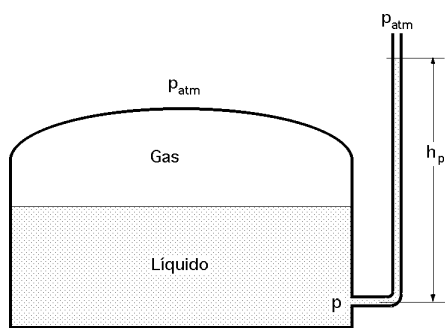


Fig II.7.- Tubo piezométrico

Si la presión absoluta en el fluido es menor que la atmosférica, se dice entonces que tiene lugar una depresión, de valor igual a la diferencia de presiones entre la atmosférica y la absoluta, es decir,

$$P_{\text{vacío}} = P_{\text{atm}} - p \quad ; \quad h_{\text{vacío}} = \frac{P_{\text{atm}} - p}{\rho g}$$

Para medir la presión de un fluido en condiciones de Laboratorio se utilizan, además de los piezómetros, distintos tipos de manómetros, como veremos más adelante.

APLICACIÓN A LÍQUIDOS PESADOS EN SUPERFICIE LIBRE.- Sea un líquido pesado sobre cuya superficie libre actúa la presión atmosférica. Según ésta venga dada en valores relativos o absolutos, el plano de carga coincidirá con la superficie libre, o no, Fig II.8.

En efecto, como la ecuación que liga las profundidades con la altura piezométrica viene dada por la ecuación,

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{Cte}$$

y la ecuación de las superficies de nivel, o superficies de igual presión, $z = K$

Al determinar las constantes, que van a depender de las condiciones del problema, se tiene,

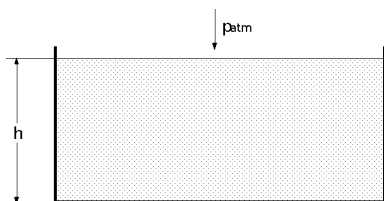


Fig II.8

$$\text{Para: } z = h \quad ; \quad p = P_{\text{atm}} \quad ; \quad h + \frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} = \text{Cte} \quad ; \quad h = K$$

obteniéndose,

$$z + \frac{p}{\rho g} = h + \frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} \quad ; \quad z = h$$

que da a entender que, el plano de carga relativo coincide con la superficie libre; además, sobre cualquier punto de esta superficie, la presión valdrá siempre lo mismo, cero, si es presión relativa, y p_{atm} si se trata de presión absoluta.

CASOS PARTICULARES

a) *La diferencia de presiones entre dos puntos cualesquiera de un líquido en reposo*, es igual al peso de una columna líquida de altura h' y sección unidad, Fig II.9.

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \quad ; \quad p_2 - p_1 = (z_1 - z_2) = h'$$

Es lo mismo considerar presiones absolutas que relativas; en efecto,

$$P_2 - P_1 = (P_{r_2} + P_{\text{atm}}) - (P_{r_1} + P_{\text{atm}}) = P_{r_2} - P_{r_1} = (z_1 - z_2) = h'$$

b) Diferencia de presiones entre un punto y la superficie libre.- En este caso, $p_1 = p_{atm}$; $p_2 = p$, por lo que, $p - p_{atm} = p_r = \rho h'$, es decir, la presión relativa en un punto cualquiera del líquido será igual al peso de la columna líquida de altura h' y sección unidad que gravita sobre él, Fig II.10.

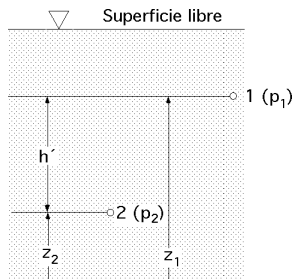


Fig II.9.- Diferencia de presiones entre dos puntos

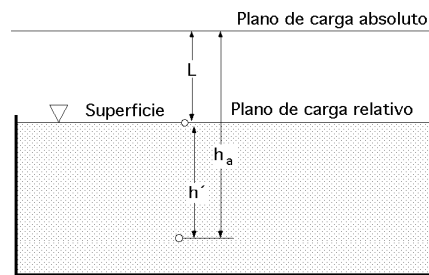


Fig II.10.- Diferencia de presiones entre un punto y el plano de carga

Como

$$p = p_{atm} + \rho h' = \left(\frac{p_{atm}}{\rho} + h' \right) \rho = (L + h') \rho = h_a \rho$$

la presión absoluta en un punto del líquido será igual al peso de una columna líquida de altura h_a y sección unidad, contada desde el punto al plano de carga absoluto, pudiendo imaginar que se ha llenado de líquido la parte comprendida entre los dos planos de carga.

II.3.- LÍQUIDOS SUPERPUESTOS

Para el caso de diversos líquidos inmiscibles y superpuestos, tal como se indica en la Fig II.11, para una misma vertical se tiene,

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{atm} + \rho_1 h_1 \\ p_2 &= p_1 + \rho_2 h_2 \\ &\dots\dots\dots \\ p_n &= p_{n-1} + \rho_n h_n \end{aligned}$$

Sumándolas, se encuentra,

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = p_{atm} + p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} + \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \dots + \rho_n h_n$$

$$p_n = p_{atm} + \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \dots + \rho_n h_n$$

que dice que la presión en un punto es igual a la atmosférica más la suma de los productos de los pesos específicos respectivos, en columnas líquidas, correspondientes a cada uno de ellos.

De lo anterior se deduce el siguiente Teorema, **La superficie de separación entre dos líquidos de densidades diferentes es horizontal.**

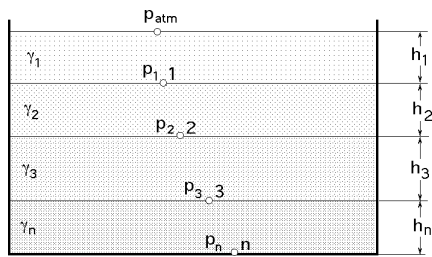


Fig II.11.- Líquidos superpuestos

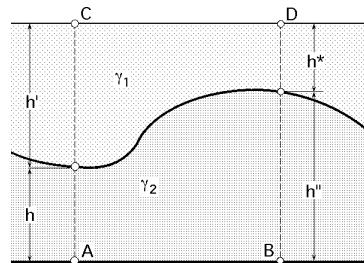


Fig II.12

En efecto, si se supone de entrada que no es horizontal, tal como se muestra en la Fig II.12:

Como las presiones p_A y p_B han de ser iguales, resulta,

$$p_A = p_B \quad ; \quad \begin{aligned} p_A &= p_C + \gamma_1 h' + \gamma_2 h \\ p_B &= p_C + \gamma_1 h^* + \gamma_2 h'' \end{aligned}$$

$$\gamma_1 h' + \gamma_2 h = \gamma_1 h^* + \gamma_2 h'' \quad \gamma_1 (h' - h^*) = \gamma_2 (h'' - h)$$

Dado que,

$$h + h' = h'' + h^* \quad ; \quad h' - h^* = h'' - h \quad (h'' - h)(\gamma_1 - \gamma_2) = 0$$

y como

$$\gamma_1 = \gamma_2 \quad h'' = h$$

la superficie de separación entre dos líquidos de pesos específicos diferentes, es horizontal.

PRINCIPIO DE PASCAL.- Si sobre la porción plana de la superficie libre de un líquido, se ejerce una cierta presión, esta se transmite íntegra y por igual en todas direcciones. En efecto, supongamos los puntos de la masa de un líquido A y B, Fig II.13, para los que se cumple,

$$p_B - p_A = \rho h$$

A su vez, los puntos A y B habrán experimentado cambios en su presión, de forma que ésta se incrementa en Δp_B y Δp_A ; así se tiene,

$$(\rho_B + \Delta p_B) - (\rho_A + \Delta p_A) = \rho h$$

$$\rho_B - \rho_A + \Delta p_B - \Delta p_A = \rho h \quad \rho h + \Delta p_B - \Delta p_A = \rho h \quad \Delta p_B = \Delta p_A$$

y por lo tanto, si la presión de un punto A se incrementa en un cierto valor, la presión de otro punto B quedará asimismo incrementada en el mismo valor.

En una prensa hidráulica, Fig II.14, se cumple,

$$p_1 = \frac{F_1}{S_1} \quad ; \quad p_2 = \frac{F_2}{S_2} \quad , \text{ y como, } p_1 = p_2, \text{ resulta, } \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

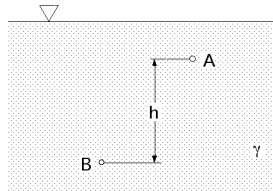


Fig II.13

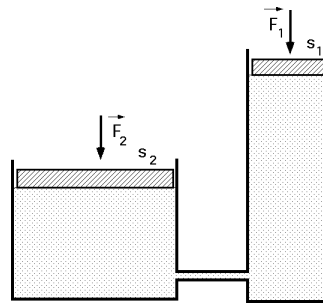


Fig II.14.- Prensa hidráulica

que es la relación existente entre las fuerzas aplicadas y las secciones de los émbolos correspondientes.

MEDIDA DE PRESIONES.- A continuación exponemos algunos dispositivos utilizados en Laboratorio para la medida de presiones, como los tubos piezométricos y los manómetros de líquido y mecánicos.

Tubo piezométrico.- El tubo piezométrico es un tubo transparente de cristal o plástico, recto, o con un codo, cuyo diámetro no debe ser superior a 5 mm, para evitar las correcciones por menisco (capilaridad). Este tubo se conecta al punto en que se quiere medir la presión, practicando cuidadosamente en la pared del recipiente o tubería un orificio, llamado orificio piezométrico.

Este orificio, para líquidos en reposo, no requiere un cuidado especial, pero para fluidos en movimiento hay que tomar una serie de precauciones para evitar se produzcan perturbaciones que transformarían parte de la energía de presión, en energía dinámica, falseándose así la medida; el tubo ha de terminar perpendicular a la corriente.

Si la toma manométrica se practica en una tubería grande, es preferible una forma anular que permita la obtención de la altura piezométrica media con mayor precisión, Fig II.16.

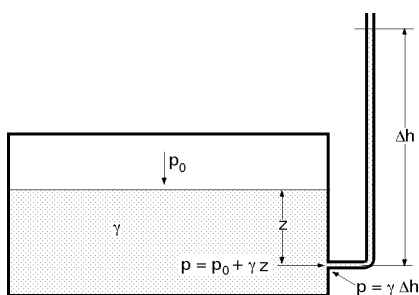


Fig II.15.- Tubo piezométrico

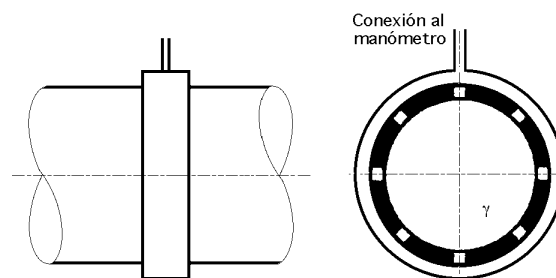


Fig II.16.- Conexión al tubo piezométrico

Los tubos piezométricos deben reunir una serie de condiciones y limitaciones,

- a) *Tienen que ser de gran precisión*
- b) *Deben ser cómodos, ya que no necesitan líquido manométrico dando la presión en mm. de columna del líquido que se quiere medir*
- c) *Solo sirven para medir presiones pequeñas, ya que, por ejemplo, una presión de 0,2 Atm, utilizando agua, requeriría un tubo piezométrico de 2 m.*

Manómetros de líquido.- En estos manómetros se emplean gran variedad de líquidos, como, a) agua, b) alcohol, c) mercurio, etc. El agua y el alcohol, a veces, se colorean para facilitar la lectura y la fotografía de los ensayos.

Barómetro de cubeta.- Encima del mercurio se hace un vacío, $p=0$. Una escala graduada, cuyo cero se hace coincidir antes de hacer la lectura con el nivel del mercurio en la cubeta, permite leer la altura h , que es la presión atmosférica p_{atm} en mm de mercurio.

En efecto, aplicando la ecuación de la Estática de Fluidos a los puntos 1 y 2, se obtiene,

$$\frac{p_1}{\gamma_{Hg}} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma_{Hg}} + z_2$$

siendo,

$$p_1 = 0 ; z_1 = h ; p_2 = p_{atm} ; z_2 = 0 \quad h = \frac{p_{atm}}{\gamma_{Hg}} ; p_{atm} = \gamma_{Hg} h$$

en la que, p_{atm} viene en kg/m^2 , $\gamma_{Hg} = 13.600, kg/m^3$, y h en metros

Para, $1 atm = 10^4 kg/m^2 = 13.600 kg/m^3$, $h = 735,1 mm$ de mercurio para el aire seco

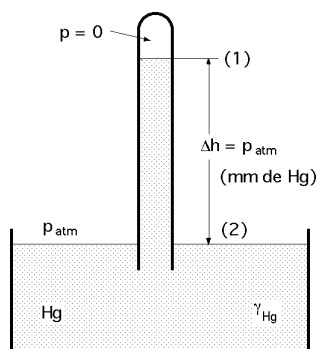


Fig II.17.- Barómetro de cubeta

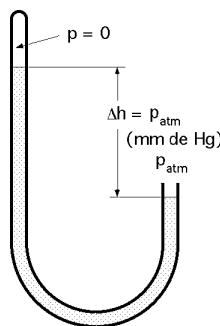


Fig II.18.- Barómetro en U

Barómetro en U.- La presión barométrica calculada por el método anterior, $p_{atm} = \gamma_{Hg} h$, requiere, en medidas de precisión, algunas correcciones, como,

a) En la parte superior, aunque se haya eliminado el aire, no existe el vacío, por cuanto el mercurio se evapora y la presión p no es igual a 0, sino igual a p_s que es la presión de saturación del vapor de mercurio, la cual depende de la temperatura.

b) La densidad γ depende de la temperatura del mercurio.

c) Como la fuerza de la gravedad varía de un lugar a otro, hay que emplear rigurosamente la expresión,

$$p_{atm} = \frac{\gamma}{\gamma_s} \gamma_{Hg} h = \gamma_{Hg} g_s h$$

en la que se ha considerado, $\gamma_{Hg} = \gamma_{Hg} g_s$, siendo g_s la aceleración standard, y g la aceleración local de la gravedad, que varía con la latitud y con la altitud.

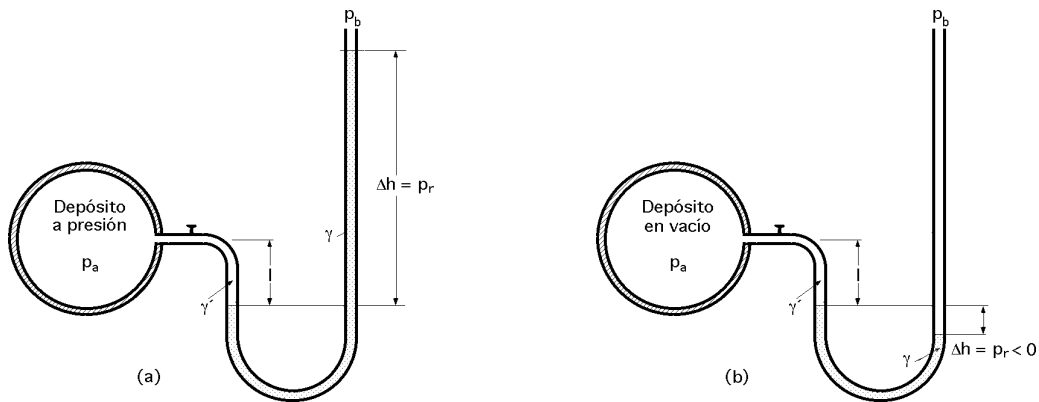


Fig II.19.- Manómetros de líquidos para presiones relativas

Manómetro de líquido para presiones relativas.- Mide presiones relativas, positivas o negativas, Fig II.19.a.b; se elige como líquido manométrico uno de adecuada a las presiones, para cuya medición se destina el manómetro, pudiéndose poner,

Figura (a), $p_a = p_b + \gamma h$

Figura (b), $p_a = p_b - \gamma h$

Vacuómetro de líquido para presiones absolutas.- Sirve para medir presiones de líquidos, empleando un líquido manométrico no miscible, o de gases, Fig II.20. El desnivel creado en la columna del manómetro es h .

La lectura de los manómetros se basa en la ecuación

$$z + \frac{P}{\gamma} = Cte ; \quad z_2 + \frac{P_2}{\gamma} = z_1 + \frac{P_1}{\gamma}$$

Si el punto 2 está más bajo que el 1, su presión será igual a la del punto 1, más el peso de la columna líquida (1-2).

Si el punto 2 está más alto que el 1, su presión será la del punto 1, menos la columna de líquido.

En éste vacuómetro, en 1 reina el vacío, luego, $p_1 = 0$; las demás presiones son,

$$p_2 = p_1 + \gamma h = \gamma h ; \quad p_3 = p_2 = \gamma h$$

$$p_4 = p_3 - \gamma l = \gamma h - \gamma l ; \quad p_5 = p_4 = \gamma h - \gamma l$$

Hemos dividido el fluido en una serie de secciones correspondientes a los cambios de densidad; prácticamente se escribe una sola ecuación, partiendo del punto 1 y sumándole o restándole los términos, γh , con signo (+) ó (-), hasta llegar, en nuestro caso, al punto 5, es decir,

$$p_5 = 0 + \gamma h - \gamma l = \gamma h - \gamma l$$

Si el fluido es un gas, en la mayoría de los casos se desprecian los sumandos, γl , quedando como ecuación, $p_5 = \gamma h = p_a$

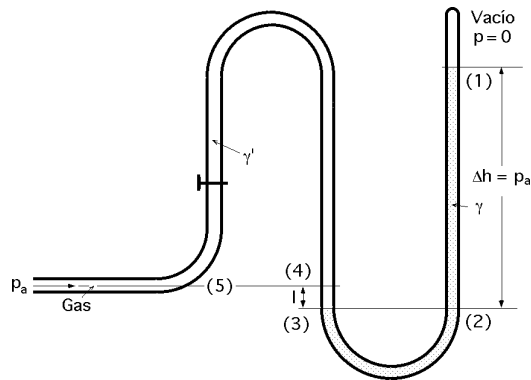


Fig II.20.- Vacuómetro de líquido para presiones absolutas

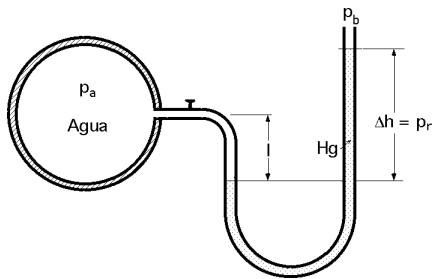


Fig II.21.- Manómetro de mercurio

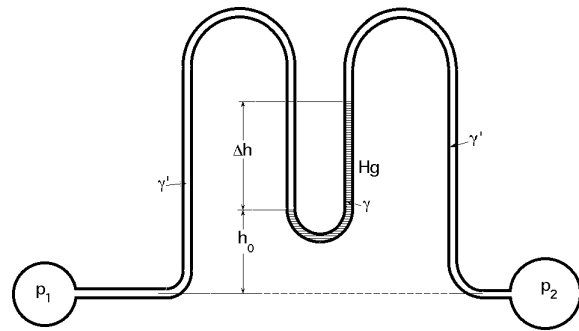


Fig II.22.- Manómetro diferencial

Manómetro de mercurio instalado en tubería de agua.- El valor de la presión p_a viene dado por la expresión, Fig II.21,

$$p_a = p_b + \gamma_{Hg} h - \gamma_{agua} l \quad \text{ó} \quad p_a = p_{atm} + \gamma_{Hg} h - \gamma_{agua} l$$

Manómetro diferencial.- Mide la diferencia de presiones entre dos puntos; de acuerdo con la Fig II.22 se puede poner,

$$p_1 = p_2 - \gamma (h_0 + h) + \gamma_{Hg} h + \gamma h_0 = p_2 + \gamma_{Hg} h - \gamma h = p_2 + h (\gamma_{Hg} - \gamma)$$

$$p_1 - p_2 = h (\gamma_{Hg} - \gamma) ; \quad \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = h \left(\frac{\gamma_{Hg}}{\gamma} - 1 \right)$$

Para el caso en que el fluido cuya presión se desea medir fuese un gas, se puede despreciar el valor de γ frente al de γ_{Hg} en las ecuaciones anteriores.

Micromanómetro de tubo inclinado.- El líquido manométrico suele ser alcohol; se utiliza para medir con precisión pequeñas presiones en gases, y aunque el fluido manométrico sea alcohol, suele estar graduado en mm de columna de agua.

La ventaja de este manómetro es la amplificación que se obtiene de la lectura l , al dividir h por, $\text{sen } \theta$.

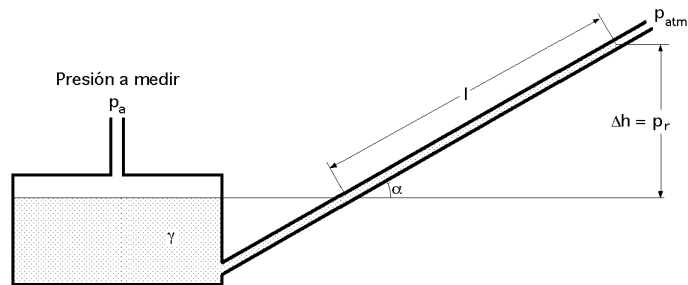


Fig II.23.- Micromanómetro de tubo inclinado

$$l \operatorname{sen} \alpha = h ; l = \frac{h}{\operatorname{sen} \alpha} ; p_a = p_{atm} + \gamma h ; p_r = \gamma h = l \operatorname{sen} \alpha$$

siendo la sensibilidad del instrumento tanto mayor, cuanto menor sea el valor del ángulo α .

Micromanómetro que utiliza dos líquidos inmiscibles.- La inmiscibilidad corresponde a uno en otro, y en el líquido cuya diferencia de presiones se va a medir. En uno de estos líquidos se produce una gran diferencia de altura R para pequeñas diferencias de presiones.

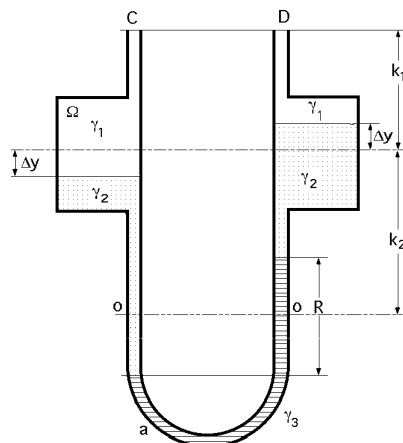


Fig II.24.- Micromanómetro de líquidos inmiscibles

El líquido más denso, inicialmente ocupa la parte inferior del tubo en U, hasta la línea (o-o); entonces se añade el líquido menos denso en las dos ramas de la U llenándose los depósitos hasta la línea (1-1). El líquido cuyas diferencias de presiones se van a medir ocupa el espacio situado encima de (1-1).

Cuando la presión en C sea ligeramente superior a la presión en D el menisco se moverá, tal como se indica en la Fig II.24; el volumen de líquido desplazado en cada depósito, igualará al desplazamiento en el tubo en U, por lo que,

$$y = \frac{R}{2} a$$

siendo Ω la sección transversal del depósito y a la sección transversal del tubo en U.

A partir de C se puede escribir la ecuación manométrica en la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
 p_D &= p_C + (k_1 + \gamma) h_1 + (k_2 - \gamma + \frac{R}{2}) h_2 - R h_3 - (k_2 + \gamma - \frac{R}{2}) h_2 - (k_1 - \gamma) h_1 = \\
 &= p_C + 2 \gamma h_1 + (-\gamma + \frac{R}{2} + \frac{R}{2} - \gamma) h_2 - R h_3 = p_C + 2 \gamma h_1 + (R - 2 \gamma) h_2 - R h_3
 \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{R a}{2} \quad ; \quad p_D = p_C + R \left\{ \frac{a}{2} h_1 + h_2 \left(1 - \frac{a}{2}\right) - h_3 \right\} \quad p_C - p_D = R \left\{ h_3 - h_2 \left(1 - \frac{a}{2}\right) - \frac{a}{2} h_1 \right\}$$

que es la diferencia de presiones entre los puntos C y D.

III.- EQUILIBRIO Y MOVIMIENTO RELATIVOS

III.1.- EQUILIBRIO RELATIVO DE LÍQUIDOS QUE SE TRASLADAN

Hasta ahora se ha considerado, para el cálculo de superficies de nivel y de presión en un punto interior de un fluido, que éste se encontraba en reposo, o bien, que podía estar en movimiento uniforme, sin ninguna aceleración.

Sin embargo, cuando el fluido se encuentra en el interior de un recipiente, sin ocuparlo en su totalidad, y por lo tanto, con completa libertad de movimiento para desplazarse por el interior del mismo, y se hace mover a este recipiente con un movimiento acelerado o retardado, se observa que el líquido va tomando una cierta inclinación que depende de la aceleración a que se halla sometido el sistema.

Para su estudio supondremos un depósito prismático con una cierta cantidad de líquido; una partícula del mismo estará sometida a dos tipos de fuerzas, tal como se indica en la Fig III.1, es decir, la fuerza debida a la aceleración del movimiento y la fuerza debida a la aceleración de la gravedad. Ambas fuerzas se pueden proyectar sobre los ejes, obteniéndose,

$$\begin{aligned}
 X &= X_i = 0 - a = -a \\
 Y &= Y_i = 0 - 0 = 0 \\
 Z &= Z_i = -g + 0 = -g
 \end{aligned}$$

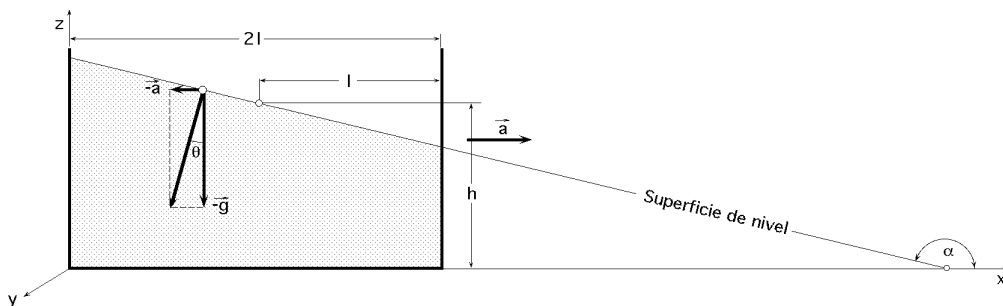


Fig III.1.- Equilibrio relativo de un líquido que se traslada

en las que se ha supuesto masa unidad.

Sustituyendo estos valores en las dos ecuaciones fundamentales, se tiene,

$$\frac{dp}{\rho} = -a dx - g dz \quad ; \quad \boxed{\frac{p}{\rho} = -a dx - g dz + K}$$

que es la presión existente en un punto de coordenadas (x,y,z), y,

$$-a dx - g dz = 0 \quad ; \quad \boxed{a x + g z = K'}$$

que es la ecuación de las superficies de nivel,

Para su resolución se tienen que determinar los valores de K y K'.

La expresión,

$$-a x - g z = K'$$

es la ecuación algebraica de un plano, oblicuo respecto el anterior, que determina una nueva forma de distribución del fluido dentro del recipiente; para fluidos perfectos, se llega a la conclusión de que el volumen primitivo y el final, son iguales, por cuanto la parte de fluido que ha sido desplazada *hacia arriba*, es igual a la que ha sido desplazada *hacia abajo*, respecto a la superficie libre inicial horizontal del líquido, correspondiéndose el punto de intersección de ambas superficies con la mitad de la superficie libre del fluido.

Para calcular las constantes K y K' se tendrá en cuenta que para,

$$x = l \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = h$$

resulta, $p = p_{atm}$, y sustituyendo estos valores en las dos ecuaciones anteriores, resulta,

$$\frac{p_{atm}}{\rho} = -a l - g h + K \quad ; \quad K = \frac{p_{atm}}{\rho} + a l + g h \quad ; \quad K' = -a l - g h$$

por lo que,

$$\frac{p}{\rho} = -a x - g z + \frac{p_{atm}}{\rho} + a l + g h = a(l - x) + g(h - z) + \frac{p_{atm}}{\rho}$$

$$-a x - g z = -a l - g h \quad ; \quad a(l - x) + g(h - z) = 0$$

quedando así determinadas la presión en cualquier punto y las superficies de nivel.

Cálculo del ángulo que forma la nueva superficie libre con la inicial, paralela al eje Ox.- La ecuación del plano que forma ángulos, α , β , γ , con los coordenados es,

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = Cte$$

$$\frac{\cos}{A} = \frac{\cos}{B} = \frac{\cos}{C} = -\frac{Cte}{D} = L = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} ; \cos = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} ; \cos = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

que son los cosenos directores de dicho plano, que es la superficie de nivel final.

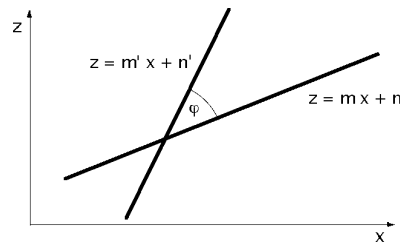


Fig III.2

La ecuación del plano de la superficie de nivel es,

$$a(1-x) + g(h-z) = 0 ; ax + gz - a1 - gh = 0$$

$$a = A$$

e identificándola con, $Ax + By + Cz + D = 0$, resulta, $0 = B$, por lo que, $-a1 - gh = D$

$$g = C$$

$$\cos = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2 + g^2}} ; \text{sen} = \sqrt{1 - \cos^2} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2 + g^2}} = \frac{g}{\sqrt{a^2 + g^2}}$$

$$\text{tg} = \frac{g}{\pm a} ; \text{tg} = 0 ; \text{tg} = \frac{\pm a}{g}$$

Teniendo en cuenta la Fig III.2,

$$\text{tg} = \frac{m - m'}{1 + m m'} ; \quad = 90^\circ \quad 1 + m m' = 0$$

$$\frac{a}{g} = \text{tg} ; \quad \text{tg} \text{ tg} = \pm 1 ; \quad \text{tg} = \frac{1}{\pm \text{tg}}$$

por lo que la resultante de las componentes de las fuerzas que actúan sobre el líquido, es perpendicular a la superficie de nivel final.

III.2.- EQUILIBRIO RELATIVO DE LÍQUIDOS QUE GIRAN ALREDEDOR DE UN EJE VERTICAL

Supongamos un recipiente cilíndrico, vertical, que está lleno de un determinado líquido hasta una cierta altura h ; si se hace girar dicho cilindro alrededor de un eje vertical, la superficie libre del fluido cambiará de forma.

El problema consiste en determinar la forma que adoptará la superficie libre, y la presión en

cada punto del líquido, cuando el cilindro que lo contiene gire alrededor de su propio eje.

Para los cálculos supondremos un sistema cartesiano de forma que el eje de giro coincida con el eje z , y la base del cilindro esté contenida en el plano (x,y) . Al girar el recipiente con una cierta velocidad angular w , cada uno de los puntos del líquido estará sometido a la acción de dos fuerzas, la centrífuga, $r w^2$, y la gravedad, $-g$, como se indica en la Fig III.3.

Las componentes de la resultante de estas fuerzas son,

$$\begin{aligned} X &= X_i = x w^2 \\ Y &= Y_i = y w^2 \\ Z &= Z_i = -g \end{aligned}$$

que sustituidas en las ecuaciones fundamentales, teniendo en cuenta que, $m = 1$,

$$\underline{dp} = x w^2 dx + y w^2 dy - g dz \quad ; \quad x w^2 dx + y w^2 dy - g dz = 0$$

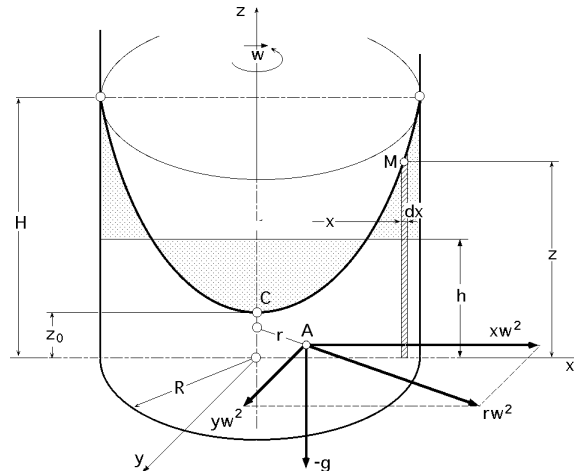


Fig III.3.- Equilibrio relativo de líquidos que giran alrededor de un eje vertical

e integradas, permiten calcular la presión en cada punto del líquido, y la forma de la superficie de nivel,

$$\underline{p} = w^2 \frac{x^2}{2} + w^2 \frac{y^2}{2} - g z + K \quad ; \quad w^2 \frac{x^2}{2} + w^2 \frac{y^2}{2} - g z = K'$$

La ecuación de la superficie de nivel es una parábola, ya que su discriminante, $A_{33} = 0$, cuando se la corta, por ejemplo, por el plano, $y = 0$; en general es un paraboloides de revolución de eje vertical, que coincide con el eje del cilindro.

Para calcular las constantes de integración K y K' tomamos un punto de la superficie de nivel, por ejemplo, el $(0, 0, z_0)$ que soporta exactamente la presión atmosférica.

Para el punto C, se tiene,

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = z_0, \quad p = p_{atm}$$

$$\frac{P_{atm}}{\rho} = -g z_0 + K \quad K = \frac{P_{atm}}{\rho} + g z_0 \quad ; \quad K' = -g z_0$$

luego,

$$\frac{P}{\rho} = w^2 \frac{x^2}{2} + w^2 \frac{y^2}{2} - g z + \frac{P_{atm}}{\rho} + g z_0$$

que permite calcular la presión en cualquier punto del líquido.

La ecuación de las superficies de nivel es,

$$w^2 \frac{x^2}{2} + w^2 \frac{y^2}{2} - g z + g z_0 = 0$$

Para determinar el valor de z_0 , se considera que el volumen del fluido es el mismo si está en movimiento, como si está en reposo, es decir,

$$V_{inicial} = V_{final} \quad ; \quad V_{inicial} = R^2 h \quad ; \quad V_{final} = 2 \int_0^R x z dx$$

$$V_{final} = 2 \int_0^R x z dx = \left[\text{Para, } y = 0 \right] \int_{z = z_0 + \frac{w^2 x^2}{2g}}^R x (z_0 + \frac{w^2 x^2}{2g}) dx = \\ = (2 z_0 \frac{x^2}{2} + \frac{2 w^2}{2g} \frac{x^4}{2}) \Big|_0^R = z_0 R^2 + \frac{w^2 R^4}{4g}$$

$$R^2 h = 2 \int_0^R x z dx = z_0 R^2 + \frac{w^2 R^4}{4g} \quad z_0 = h - \frac{w^2 R^2}{4g}$$

y sustituida en las ecuaciones de presión y superficie de nivel, permite obtener,

$$P = P_{atm} + \frac{w^2}{2} x^2 + \frac{w^2}{2} y^2 - g (z - h + \frac{w^2 R^2}{4g})$$

$$\frac{w^2}{2} x^2 + \frac{w^2}{2} y^2 - g (z - h + \frac{w^2 R^2}{4g}) = 0$$

La altura máxima H que alcanza el líquido dentro del recipiente es,

Punto H, $x = R$, $y = 0$, $z = H$, $p = P_{atm}$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de la superficie de nivel, se obtiene,

$$\frac{w^2}{2} R^2 + 0 - g (H - h + \frac{w^2 R^2}{4g}) = 0 \quad ; \quad \frac{w^2 R^2}{4} - g (H - h) = 0 \quad ; \quad H = h + \frac{w^2 R^2}{4g}$$

que es la altura máxima H alcanzada por el líquido y que, teniendo presente el valor deducido para z_0 , permite afirmar que el líquido asciende tanto como desciende, a partir del nivel inicial.

III.3.- MOVIMIENTO RELATIVO DE LÍQUIDOS QUE GIRAN ALREDEDOR DE UN EJE HORIZONTAL

Supongamos un recipiente cilíndrico con el eje horizontal, que le haremos coincidir con el eje Oy , Fig III.4, que está lleno de líquido hasta una cierta altura; se hace girar dicho cilindro alrededor del eje Oy , y se observa que la superficie libre del líquido cambia de posición y de forma.

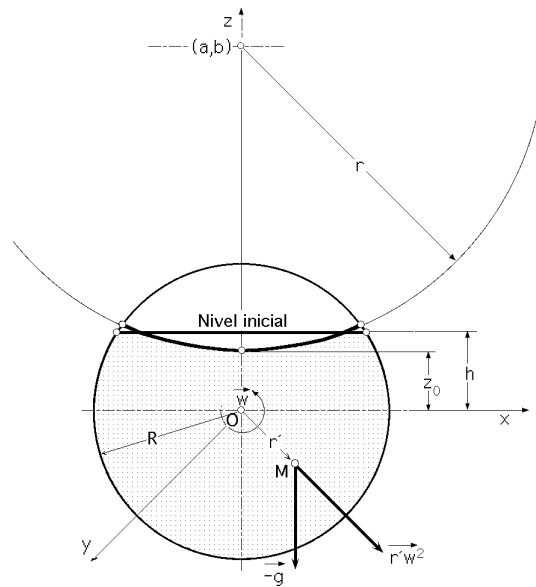


Fig III.4.- Superficie de nivel de líquidos que giran alrededor de un eje horizontal

En primer lugar vamos a analizar la forma y presión en cada punto, en el supuesto de masa unidad; las componentes de las fuerzas resultantes son,

$$\begin{aligned} X &= X_i = x w^2 \\ Y &= Y_i = 0 \\ Z &= Z_i = -g + z w^2 \end{aligned}$$

valores que sustituidos en las ecuaciones generales permiten obtener,

$$\frac{dp}{\rho} = x w^2 dx + (-g + z w^2) dz \quad ; \quad x w^2 dx + (-g + z w^2) dz = 0$$

$$\frac{p}{\rho} = w^2 \frac{x^2}{2} + (-g z + w^2 \frac{z^2}{2}) + K \quad ; \quad w^2 \frac{x^2}{2} + (-g z + w^2 \frac{z^2}{2}) = K'$$

$$x^2 + z^2 - \frac{2g}{w^2} z = \frac{2K'}{w^2}$$

que es la ecuación de una circunferencia, Fig III.4.

Las coordenadas del centro se obtienen comparándola con la ecuación,

$$(x - a)^2 + (z - b)^2 = r^2 \quad x^2 + z^2 - 2ax + a^2 - 2bz + b^2 = r^2$$

en la forma,

$$a = 0 ; b = \frac{g}{w^2}$$

El valor del radio es,

$$r^2 = b^2 + \frac{2k'}{w^2} = \frac{g^2}{w^4} + \frac{2k'}{w^2} ; r = \frac{\sqrt{\frac{g^2}{w^2} + 2k'}}{w}$$

Para hallar su punto inferior z_0 tendremos en cuenta que,

$$b - r = \frac{g}{w^2} - r = z_0$$

y, para determinar los puntos de corte de las dos circunferencias, la del depósito y la de la superficie de nivel,

$$x^2 + z^2 = R^2 ; x^2 + z^2 = \frac{2g}{w^2} z + \frac{2K'}{w^2}$$

$$x^2 + z^2 = R^2 = \frac{2g}{w^2} z + \frac{2K'}{w^2} \quad R^2 = \frac{2}{w^2} (gz + K') ; z = \frac{R^2 w^2}{2g} - \frac{K'}{g}$$

Como resultado de lo anteriormente visto, se demuestra que,

a) Para, $w = 0$, el radio de la superficie de nivel es ()

b) Para, $w =$, las superficies de nivel toman la forma de circunferencias concéntricas con el centro de la sección transversal del recipiente.

III.4.- MOVIMIENTO RELATIVO DE LÍQUIDOS CON VELOCIDAD TANGENCIAL CONSTANTE SOBRE UN EJE VERTICAL

Cuando se estudia la forma que adoptará la superficie libre de un río o un canal, al circular por una curva, se observa que deja de ser horizontal, para convertirse en una superficie curva, Fig III.5, por cuanto en el momento en que el agua pasa por dicha curva, estará sometida a un giro alrededor de un eje vertical, por lo que aparecerán unas fuerzas centrífugas que, al actuar sobre cada uno de los puntos de la masa fluida, harán variar la presión en cada punto del mismo, modificándose, como consecuencia directa de ello, la superficie libre del líquido.

Asimismo habrá que tener en cuenta que, la velocidad de cada una de las partículas del líquido será diferente según se encuentre situada en la parte interior de la curva o en su parte exterior.

Las componentes de las fuerzas que actúan en un instante determinado son,

$$\begin{aligned}
 X &= X_i = \frac{u^2}{x} \\
 Y &= Y_i = 0 \\
 Z &= Z_i = -g
 \end{aligned}$$

por lo que la ecuación de las superficies de nivel es,

$$\frac{u^2}{x} dx - g dz = 0 \quad ; \quad u^2 \ln x - g z = K$$

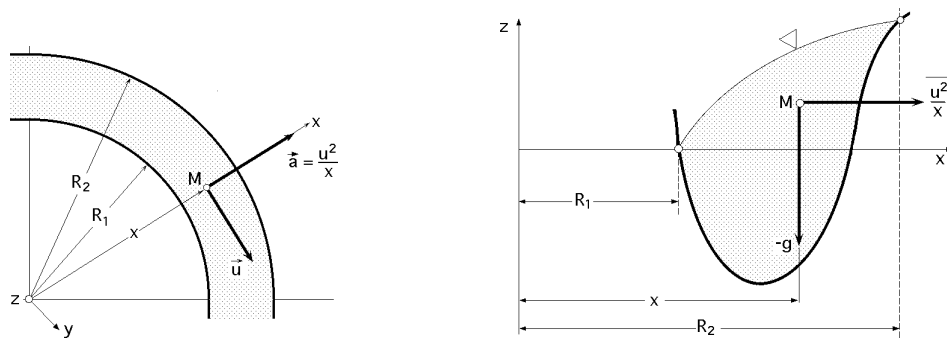


Fig III.5.- Equilibrio relativo de líquidos con velocidad tangencial constante alrededor de un eje vertical

Para calcular K, lo haremos en el punto, $z = 0$, $x = R_1$, obteniéndose,

$$K = u^2 \ln R_1$$

Sustituyendo en la anterior,

$$u^2 \ln x - g z = u^2 \ln R_1 \quad ; \quad u^2 \ln \frac{x}{R_1} = g z$$

El punto más elevado de la misma se obtiene para, $x = R_2$,

$$z_{\text{máx}} = \frac{u^2}{g} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

APLICACIÓN.- Sea un canal de sección rectangular, Fig III.6, por el que circula agua, inicialmente hasta una altura h . El problema que se plantea es el de determinar la elevación del nivel del agua en la curva, sobre la pared exterior del canal.

Aplicando las expresiones deducidas anteriormente, y tomando unos ejes coordenados de forma que el radio que anteriormente se consideraba como incógnita, coincida ahora sobre el eje Ox, y trasladando dicho eje Ox para que pase por el fondo del canal, la ecuación de la superficie libre del fluido viene dada por,

$$z = z_0 + \frac{u^2}{g} \ln \frac{x}{R_1}$$

e igualando la sección del tramo recto, con la que determina el fluido al circular, teniendo como perfil el dado por la curva anterior, se podrá poner,

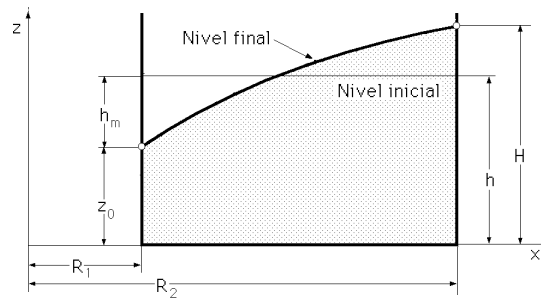


Fig III.6.- Equilibrio relativo del giro del agua en un canal rectangular

$$(R_2 - R_1) h = \int_{R_1}^{R_2} (z_0 + \frac{u^2}{g} \ln \frac{x}{R_1}) dx = \left| \int \ln x dx = x \ln x - x \right| =$$

$$= z_0 (R_2 - R_1) + \frac{u^2}{g} (R_2 \ln \frac{R_2}{R_1} - R_2 + R_1)$$

Despejando h se obtiene,

$$h = z_0 + \frac{u^2}{(R_2 - R_1) g} (R_2 \ln \frac{R_2}{R_1} - R_2 + R_1) = z_0 + h_m$$

El punto más alto de la curva se obtiene para, $x = R_2$, $z = H$, en la forma,

$$H = z_0 + \frac{u^2}{g} \ln \frac{R_2}{R_1} = \left| z_0 = h - h_m = h - \frac{u^2}{g} \left(\frac{R_2}{R_2 - R_1} \ln \frac{R_2}{R_1} - 1 \right) \right| =$$

$$= h - h_m + \frac{u^2}{g} \ln \frac{R_2}{R_1} = h - \frac{u^2}{g} \left(\frac{R_1}{R_2 - R_1} \ln \frac{R_2}{R_1} - 1 \right)$$

III.5.- ESFUERZO EJERCIDO POR UN LIQUIDO SOBRE UNA PARED PLANA SUMERGIDA

Sea una superficie plana sumergida en un fluido S, Fig III.7, que forma un cierto ángulo con la superficie libre del mismo, que para el caso de un fluido en reposo es horizontal.

Considerando un elemento muy pequeño de dicha superficie plana, dw ; la presión que soporta este punto es,

$$p = h = x \text{ sen } \theta \quad \frac{p}{\rho} = x \text{ sen } \theta$$

que es la ecuación de una recta, deduciéndose de ello que la presión p varía proporcionalmente con la distancia.

En dw actúa una fuerza diferencial debida a las presiones, \vec{dF} , de valor,

$$dF = p dw = x \text{ sen } \theta dw \quad ; \quad F = \text{sen } \theta \int x dw$$

en la que, $\int x \, dw = S x_G$, es la expresión correspondiente al momento estático, por lo que,

$$F = \int S x_G \sin \alpha = S h_G = p_G S, \text{ con } h_G = x_G \sin \alpha, \text{ y } p_G = \rho h_G$$

siendo p_G la presión en el centro de gravedad de la sección.

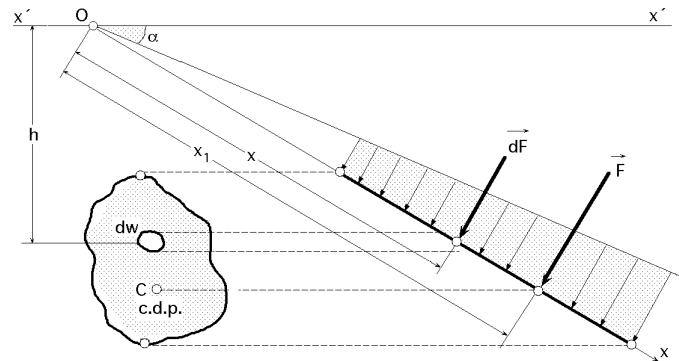


Fig III.7.- Pared plana sumergida

Al punto de aplicación de esta fuerza se le denomina centro de presión, c.d.p.; para su determinación haremos la siguiente consideración,

El esfuerzo total ejercido sobre la superficie S estará aplicado sobre un punto x_1 de la misma superficie plana, llamado centro de presión

Para encontrar su situación, tomamos momentos respecto el punto O, y se obtiene,

$$F x_1 = \int x \, dF = \int x (x \sin \alpha \, dw) = \sin \alpha \int x^2 \, dw = \sin \alpha \left| \int x^2 \, dw = I_{YY'} \right| = \sin \alpha I_{YY'}$$

y como, $F = \sin \alpha S x_G$, resulta,

$$\sin \alpha S x_G x_1 = \sin \alpha I_{YY'} ; I_{YY'} = S x_G x_1$$

Aplicando el Teorema de Steiner,

$$I_{YY'} = I_{G_{YY'}} + S x_G^2 = S x_G x_1$$

y despejando x_1 que determina el punto de aplicación de la resultante de las presiones sobre la superficie plana, resulta,

$$x_1 = \frac{I_{G_{YY'}}}{S x_G} + x_G$$

en la que I_G es el m.d.i. de la superficie plana respecto al eje horizontal que pasa por su c.d.g.

La magnitud definida por $\frac{I_{G_{YY'}}}{S x_G}$ es siempre positiva, lo que supone que el centro de presión estará siempre por debajo del centro de gravedad de la superficie.

Para determinar gráficamente el c.d.p. se construye un cilindro cuya sección recta es la propia superficie S, Fig III.8, con sus generatrices normales a esta sección, cilindro que es cortado por la superficie libre. Se determina el c.d.g. de este cilindro de líquido y su proyección sobre la superficie plana S será el c.d.p. de la misma.

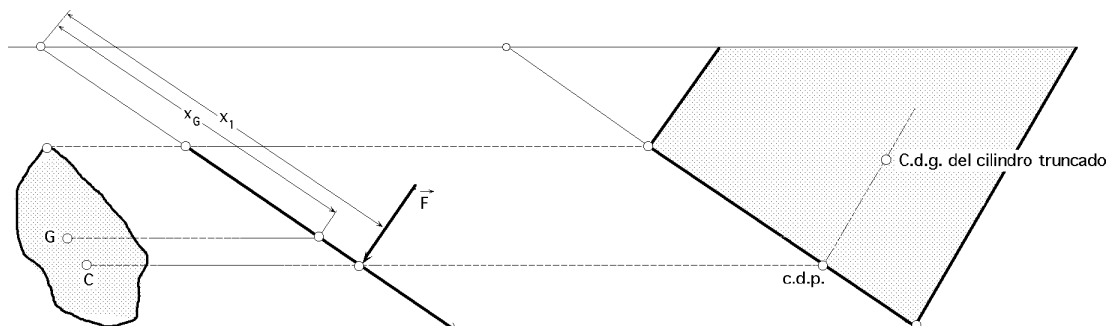


Fig III.8.- Centro de presión

III.6.- ESFUERZO EJERCIDO POR UN LIQUIDO SOBRE UNA SUPERFICIE ALABEADA SUMERGIDA

Supongamos una superficie alabeada sumergida en un líquido, a la que para mayor comodidad vamos a intersectar por un plano cualquiera (x,z) como se muestra en la Fig III.9.

Sobre cada elemento de esta superficie dw actúa una fuerza normal, de la forma,

$$dF = p \, dw = \rho \, z \, dw$$

que se puede descomponer en dos, una vertical dV y otra horizontal dH , de forma que,

$$\vec{dF} = \vec{dV} + \vec{dH}$$

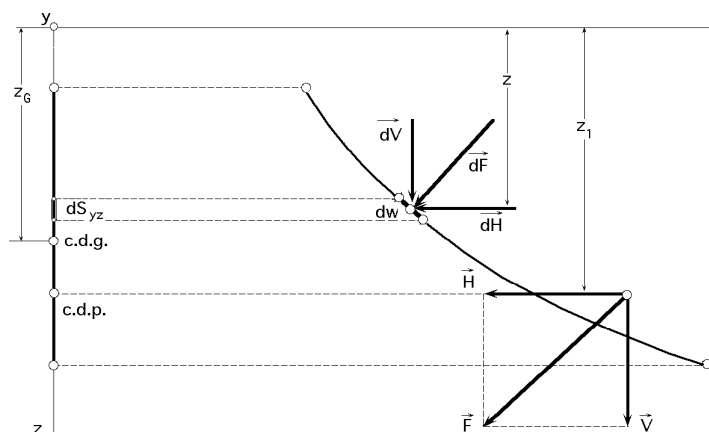


Fig III.9.- Pared alabeada sumergida

El esfuerzo horizontal \vec{H} es,

$$dH = dF \cos \theta = \rho \, z \, dw \cos \theta = \rho \, z \, dS_{yz} \quad H = \int \rho \, z \, dS_{yz}$$

siendo dS_{yz} la proyección de la superficie alabeada elemental, sobre un plano vertical.

Como, $z dS_{yz} = S_{yz} z_G$, es la expresión del momento estático con, $p_G = z_G$, resulta:

$$H = z_G S_{yz} = p_G S_{yz}$$

siendo p_G la presión en el centro de gravedad, se puede poner,

Para determinar el punto de aplicación de la fuerza \vec{H} , consideramos que sobre la curva intersección actúa dicha fuerza, que es la misma que actuaría sobre una superficie vertical que fuese la proyección de dicha superficie o curva intersección equivalente, sobre el plano (y,z).

Tomando momentos respecto al eje (x-x), se tiene,

$$H z_1 = \int z dH z = \int z dS_{yz} = \int z^2 dS_{yz} = I_{yy'}$$

Mediante el Teorema de Steiner,

$$I_{yy'} = I_{G_{yy'}} + S_{yz} z_G^2 = \frac{H z_1}{z_G} = \frac{(z_G S_{yz}) z_1}{z_G} = S_{yz} z_1 z_G$$

por lo que,

$$z_1 = \frac{I_{G_{yy'}} + S_{yz} z_G^2}{z_G S_{yz}} = \frac{I_{G_{yy'}}}{z_G S_{yz}} + z_G$$

que está por debajo del centro de gravedad de la superficie.

Para calcular el esfuerzo vertical \vec{V} se tiene,

$$dV = dF \sin \alpha = z dw \sin \alpha = |dS_{xy} = dw \sin \alpha| = z dS_{xy} = dw$$

siendo dw el volumen de líquido que hay sobre el elemento de superficie considerado.

Integrándola, resulta,

$$dV = dw ; V = W$$

siendo W el volumen de líquido comprendido por la superficie curva y las verticales que pasan por sus extremos.

El punto de aplicación del esfuerzo vertical \vec{V} se determina tomando momentos, de acuerdo con la Fig III.9,

$$V x_1 = \int x dV ; x_1 = \frac{\int x dV}{V} = \frac{\int x dW}{V}$$

que es la expresión que se corresponde con la coordenada x del centro de gravedad del volumen abarcado por la pared curva y las verticales en sus extremos.

Corolario.- Si se supone una superficie cerrada sumergida en un fluido en general, el esfuerzo horizontal sobre (ABC) vale, Fig III.10,

$$H_{ABC} = \rho_G S_{ABC}$$

El esfuerzo horizontal sobre (ADC) es, $H_{ADC} = \rho_G S_{ADC}$

Como, $S_{ABC} = S_{ADC}$, por cuanto las proyecciones del mismo cuerpo sobre un mismo plano son iguales, resulta que, $H_{ABC} = H_{ADC}$, en valor absoluto, y de signo contrario, por lo que la resultante \vec{H} horizontal será nula.

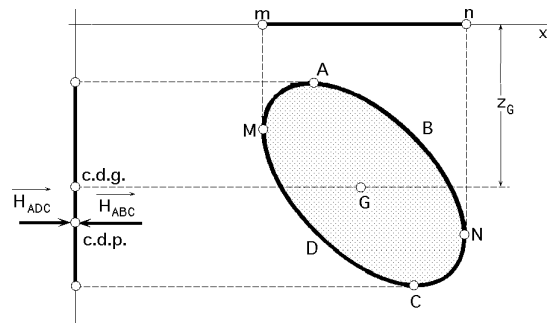


Fig III.10.- Esfuerzos sobre una superficie cerrada sumergida en un fluido

El esfuerzo vertical sobre (MDN) vale,

$$V_{MDN} = - W_{MDN}$$

en donde W_{MDN} es el volumen abarcado por la curva (MDN) y las ordenadas verticales de sus extremos; en la misma forma, el esfuerzo vertical sobre (MBN), es,

$$V_{MBN} = W_{MBN}$$

En consecuencia, la resultante vertical \vec{V} es,

$$V = - V_{MDN} + V_{MBN} = - W_{MDN} + W_{MBN} = (W_{MBN} - W_{MDN}) = - W$$

siendo W el volumen limitado por la superficie cerrada.

En resumen, sobre la superficie cerrada sumergida actúa, solamente, una fuerza tal como la, $-\vec{V}$, igual y opuesta al peso del fluido desalojado por ésta.

Principio de Arquímedes.- El peso de un cuerpo en el seno de un fluido no es el real, sino el aparente, ya que experimenta un empuje hacia arriba igual al peso del fluido que desaloja, y que queda perfectamente expresado de acuerdo con el Corolario anterior.

III.7.- FUERZAS HIDROSTÁTICAS EN LÍQUIDOS ESTRATIFICADOS

Las fórmulas anteriormente descritas para superficies sumergidas planas y curvas, son válidas, únicamente, para fluidos de densidad uniforme.

Si el fluido esta estratificado con diferentes densidades, no se puede obtener la solución general mediante una única formula, ya que la pendiente de la distribución lineal de presiones cambia de capa en capa. Sin embargo, las fórmulas conocidas se pueden aplicar por separado a cada capa, de modo que el procedimiento adecuado será el de calcular las fuerzas y momentos de cada una, y sumarlas posteriormente.

Si se considera la superficie plana de la Fig III.11, sumergida en una región fluida de dos capas, la distribución de presiones se hace más acusada al pasar de la primera capa a la segunda, que es de fluido mas denso.

La fuerza total sobre la placa no será igual a la presión en el c.d.g. por la superficie de la placa, sino que cada parte de ésta lo tiene que cumplir por separado, de forma que, sumando las dos contribuciones se obtenga el total, es decir,

$$F = F_1 + F_2 = p_{G1} S_1 + p_{G2} S_2$$

Por lo que respecta a la determinación del c.d.p. o centroide de la placa, hay que determinar en primer lugar el centro de presiones de cada F_i respecto al centroide de la parte respectiva, no respecto al de la placa completa.

El centro de presiones correspondiente a la fuerza total,

$$F = F_1 + F_2$$

se obtiene sumando los momentos correspondientes respecto a un punto convenientemente elegido, que bien pudiera ser la superficie libre.

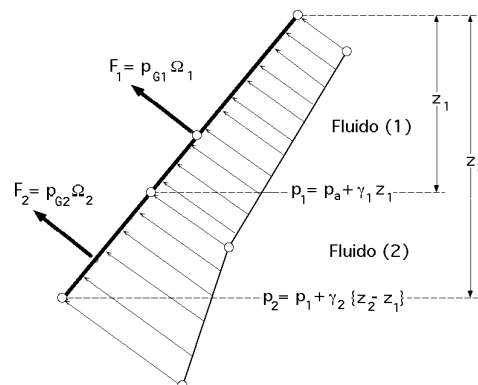


Fig III.11.- Superficie inmersa en una región fluida con dos capas

III.8.- ESTABILIDAD Y FLOTACIÓN

Los mismos Principios que hemos utilizado para calcular las fuerzas hidrostáticas sobre superficies, se pueden aplicar para el cálculo de la resultante sobre un cuerpo sumergido o sobre un

cuerpo que flota.

De todo ello se deducen las dos leyes de flotación que fueron enunciadas por Arquímedes,

a) Un cuerpo sumergido en un fluido experimenta una fuerza de flotación igual al peso del fluido que desaloja.

b) Un cuerpo que flota desaloja un volumen de fluido cuyo peso es el del cuerpo flotante

Supongamos un cuerpo sumergido; estará sometido a dos fuerzas de sentidos contrarios, una de ellas, el empuje, debido al Principio de Arquímedes; la otra, su propio peso.

En consecuencia, podrán suceder tres casos, según que el peso P sea mayor, igual o menor que el empuje E .

$P > E$, el cuerpo se hunde

Si, $P < E$, el cuerpo flota

$P = E$, el cuerpo queda entre dos aguas, indiferente

Las condiciones de equilibrio en el seno del fluido son,

a) Si el c.d.p. está encima del c.d.g., el equilibrio es estable

b) Si el c.d.p. coincide con el c.d.g., el equilibrio es indiferente

c) Si el c.d.p. está por debajo del c.d.g., el equilibrio es inestable, y espontáneamente se engendrará un par de fuerzas que le llevan a una posición aun más inestable

Para que un cuerpo flote es necesario que el peso del fluido que desaloja sea mayor que su propio peso.

Veamos algunas definiciones, Fig III.12, que permiten comprender mejor este estudio,

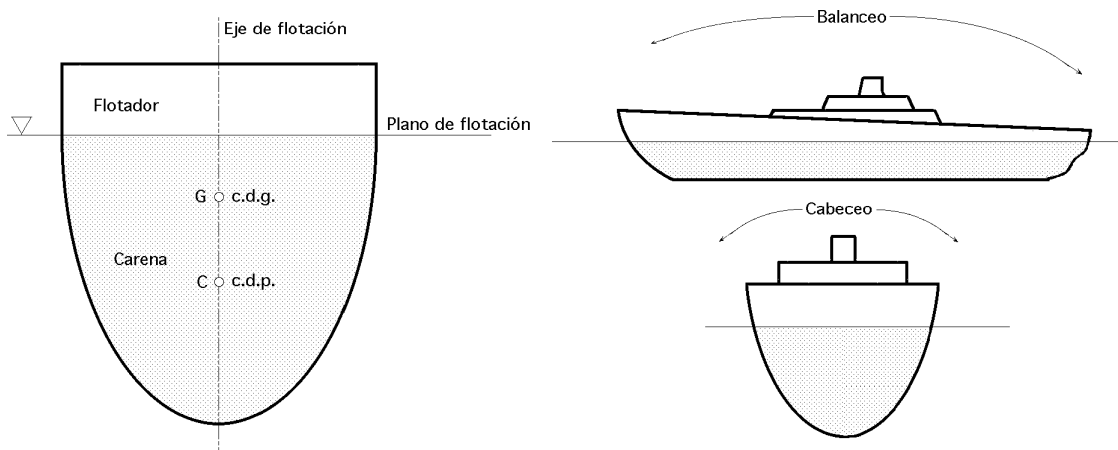


Fig III.12.- Definiciones para el flotador

- Flotador, es el nombre que se da al cuerpo que flota

- Flotación, es el nombre que se da a la parte sumergida

- El plano de flotación viene determinado por la intersección de la superficie del fluido con el flotador

- Carena, es el volumen de fluido desalojado por la flotación o parte sumergida.

- Centro de carena, es el c.d.g. de la parte de fluido que desaloja el flotador.
- Eje de flotación, es la línea que une el c.d.g. del flotador con el centro de carena c.d.c.
- Cabeceo, es el movimiento del flotador alrededor de su eje longitudinal
- Balanceo, es el movimiento del flotador alrededor de su eje transversal

CONDICIONES DE ESTABILIDAD DE UN FLOTADOR.- Un cuerpo que flota puede encontrarse en una situación estáticamente inestable; los ingenieros deben cuidar los diseños para impedir esta inestabilidad en la flotación, de forma que, para asegurar que una posición de equilibrio sea estable, se aplica una pequeña perturbación al flotador, y se observa si aparece un momento restaurador que lo lleve a la posición de equilibrio original.

Si esto sucede, el equilibrio será estable y en caso contrario, inestable.

Este tipo de cálculos para cuerpos flotantes arbitrarios, constituye una especialidad propia de los ingenieros navales, por lo que aquí nos limitamos a exponer unos principios básicos del cálculo de la estabilidad estática.

Para una mejor comprensión del fenómeno, definimos el concepto de *metacentro*, como aquel punto que se halla en la intersección de la vertical que pasa por el centro de carena, y el plano de simetría del flotador.

Las condiciones de equilibrio de los cuerpos flotantes vienen definidas por la posición del metacentro respecto al c.d.g. del flotador, Fig III.13.

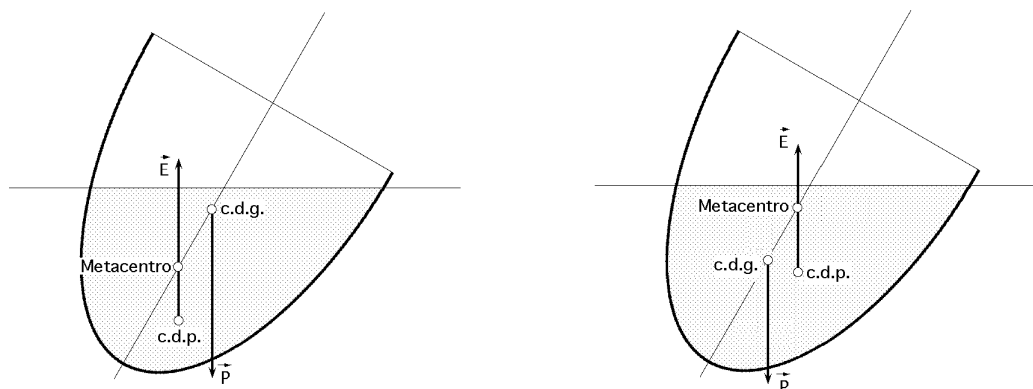


Fig III.13.- Condiciones de equilibrio de los cuerpos flotantes

En efecto,

- Si el metacentro está por encima del c.d.g. el equilibrio es estable.
- Si el metacentro está por debajo del c.d.g. el equilibrio es inestable, apareciendo un par de fuerzas sobre el flotador, que le llevan a una posición aun más inestable.
- Si el metacentro coincide con el c.d.g. el equilibrio es indiferente, no apareciendo ningún par de fuerzas sobre el flotador.

CALCULO DE LA DISTANCIA ENTRE EL METACENTRO Y EL c.d.g. DE UN FLOTADOR.- Si se supone un flotador, sobre un líquido, al que se hace girar un cierto ángulo infinitesimal, al producirse el giro, el centro de carena se desplaza de forma que el empuje E puede tender a desequilibrar aún mas al flotador.

En consecuencia, aparecerán unos pares de fuerzas estabilizadoras, f_{est} , que tienden a llevar al flotador a su posición de equilibrio inicial.

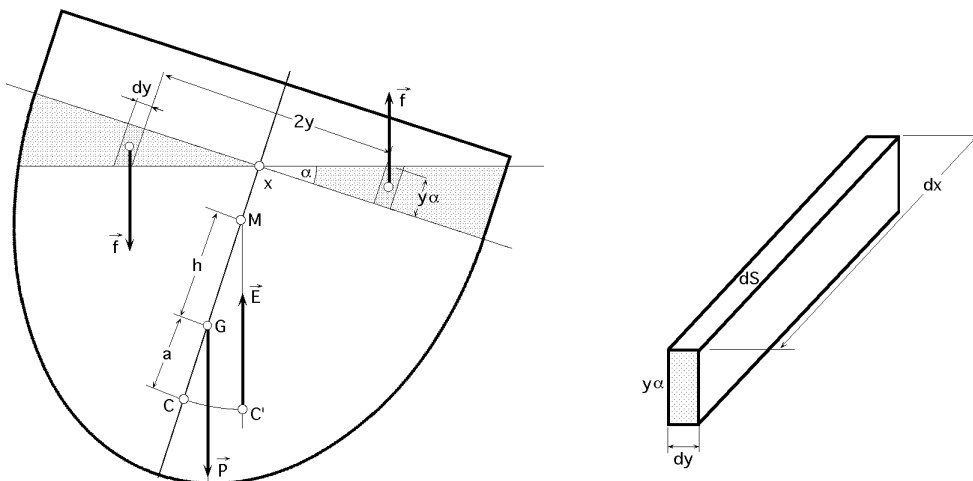


Fig III.14.- Distancia entre el metacentro y el c.d.g. de un flotador

El momento desequilibrador es,

$$M = E x = E l \operatorname{sen} \alpha = E (h + a) \operatorname{sen} \alpha$$

El momento estabilizador M' es,

$$M' = \int 2 df_{est} y = \int 2 (y \rho dS) y = 2 \rho \int y^2 dS = I_{xx'}$$

Igualando dichos momentos se obtiene,

$$E (h + a) \operatorname{sen} \alpha = a I_{xx'} ; h + a = \frac{I_{xx'}}{E \operatorname{sen} \alpha}$$

y como el ángulo α es muy pequeño,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 1$$

resulta finalmente, para valor de la distancia entre el centro de carena y el metacentro,

$$h + a = \frac{I_{xx'}}{E} = \frac{I_{xx'}}{V \rho}$$

siendo ρ el peso específico del fluido.

PERIODO DE OSCILACIÓN DE UN FLOTADOR.- Partiendo de la expresión, $C = I \omega^2$, en la que C es,

$$C = m g h \operatorname{sen} \alpha = m g (r - a) \operatorname{sen} \alpha = m g (r - a)$$

el valor del período T de oscilación de un flotador es,

$$T = \frac{2}{w} = \left| C = I \left(\frac{2}{T} \right)^2 = m g (r - a) \right| = 2 \sqrt{\frac{I}{m g (r - a)}} = \left| R_G^2 = \frac{I}{m} \right| = \frac{2 R_G}{\sqrt{g h}}$$

Aplicación.- Dado el prisma de la Fig III.15, que flota en un líquido de peso específico γ , de sección transversal cuadrada de lado l y peso específico γ_1 , las condiciones de flotabilidad y estabilidad se calculan como sigue,

Peso del prisma, $P = L l^2 \gamma_1$

Empuje ascensional, $E = L l c \gamma$

La **condición de flotabilidad** es,

$$P = E ; L l^2 \gamma_1 = L l c \gamma ; l \gamma_1 = c \gamma ; \frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{c}{l}$$

Las condiciones de estabilidad, requieren que h tiene que ser mayor que cero, es decir,

$$h = \frac{I_{xx'}}{V} - a > 0 ; \frac{I_{xx'}}{V} > a ; \frac{\frac{L l^3}{12}}{L l c} = \frac{l^2}{12 c} ; a = \frac{l - c}{2}$$

luego,

$$\frac{l^2}{12 c} > \frac{l - c}{2} ; \frac{l^2}{12 c} - \frac{l - c}{2} > 0 ; l^2 - 6 l c + 6 c^2 = 0$$

de la que se obtienen los siguientes valores de c ,

$$c = \frac{l}{2} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \begin{matrix} 0,788 l \\ 0,212 l \end{matrix}$$

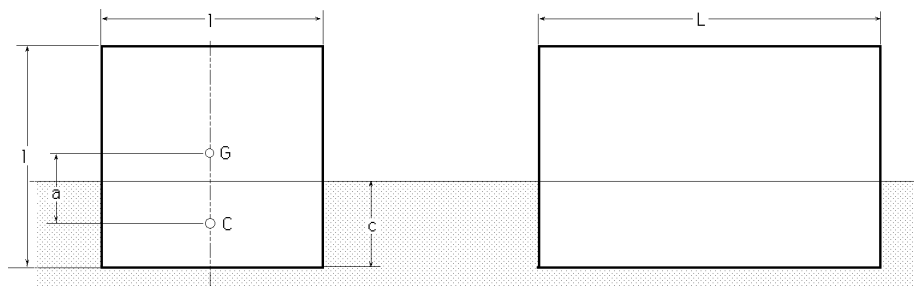


Fig III.15

por lo que la condición de estabilidad se produce para,

$$\frac{c_1}{l} > 0,788 ; \frac{c_2}{l} < 0,212$$

En efecto, podemos poner que,

$$6c^2 - 6cl + l^2 > 0 \quad ; \quad c^2 - cl + \frac{l^2}{6} > 0 \quad ; \quad \left(\frac{c}{l}\right)^2 - \left(\frac{c}{l}\right) + \frac{1}{6} > 0$$

y haciendo, $\frac{c}{l} = x$, resulta:

$$x^2 - x + \frac{1}{6} = y \quad , \quad \text{con } \{y = 0\}$$

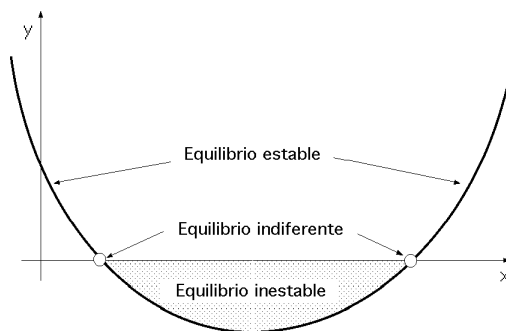


Fig III.16

cuya representación gráfica viene dada en la Fig III.16; en élla, sólo son válidos para el equilibrio estable, aquellos valores que la hagan mayor de cero, es decir,

$$x = \frac{c}{l} > 0,788 \quad ; \quad x = \frac{c}{l} < 0,212$$

Los valores, $0,212 < x < 0,788$, se corresponden con el equilibrio inestable.

IV.- FLUJO INCOMPRESIBLE NO VISCOOSO

IV.1.- CINEMÁTICA DE FLUIDOS

La Cinemática de Fluidos tiene una correspondencia biunívoca con el Primer Principio de la Termodinámica aplicado a sistemas abiertos. En un fluido en movimiento, cada partícula posee una velocidad V que depende de la posición (x,y,z) de dicha partícula y del tiempo t , es decir,

$$V = f(x, y, z, t)$$

y sus proyecciones sobre los tres ejes son función también de dichas variables, viniendo representadas por,

$$u = u(x, y, z, t)$$

$$v = v(x, y, z, t)$$

$$w = w(x, y, z, t)$$

Se llama movimiento permanente o estacionario a aquel en que sus características, como la presión, velocidad, etc, son independientes del tiempo, es decir, son tan solo función de la posición (x,y,z)

$$p = f_1(x, y, z)$$

$$u = u(x, y, z)$$

$$V = f_2(x, y, z)$$

$$v = v(x, y, z)$$

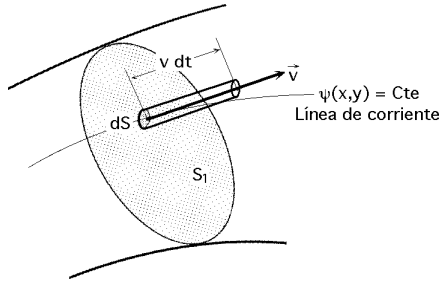
$$w = w(x, y, z)$$

La *trayectoria* es el lugar geométrico de las posiciones ocupadas por una misma partícula, cuando varía el tiempo t .

Si en un instante dado se asigna a cada punto un vector representando, la velocidad en dicho

punto, se obtiene un conjunto de vectores llamado *campo de velocidades*.

La *línea de corriente* es una línea tangente, en cada uno de sus puntos, a la velocidad en ese punto y en el instante considerado. La línea de corriente satisface la condición,



$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

En general, las líneas de corriente varían de un instante a otro; en un movimiento permanente son fijas y coinciden con las trayectorias.

Se dice que en un punto, línea, superficie o volumen, existe un manantial, cuando en dicho punto, línea, superficie o volumen aparecen ciertas cantidades de fluido que a partir del momento en que aparecen participan en la circulación.

Un sumidero en un punto, línea, superficie o volumen es aquel en que desaparecen ciertas cantidades de fluido que antes habían participado en la circulación.

En general, un flujo se representa gráficamente mediante las líneas de corriente, que son las envolventes de los vectores velocidad de las partículas fluidas del flujo; cuando el flujo es permanente, las partículas fluidas se mueven a lo largo de trayectorias coincidentes con las líneas de corriente .

Si el flujo no es permanente, (régimen transitorio), una configuración de líneas de corriente indica únicamente la representación instantánea del flujo, y en este caso no existe, en general, una correspondencia tan sencilla entre las trayectorias y las líneas de corriente .

El conjunto de las líneas de corriente que pasan por el contorno de un área infinitesimal, en un instante determinado, forman un tubo de fluido que se conoce como *tubo de corriente o filete fluido*, Fig IV.1, y es de gran utilidad en el estudio de los fenómenos fluidos.

De la definición de línea de corriente es evidente que no existe paso de flujo a través de la superficie lateral del tubo de corriente; un tubo de corriente se comporta como un conducto de paredes impermeables y espesor nulo, de sección recta infinitesimal.

Un número infinito de tubos de corriente adyacentes, da lugar a un tubo de sección recta finita, que se conoce frecuentemente como *vena fluida* .

El método de estudio puede realizarse a partir del concepto de campo de velocidades $V(x, y, z, t)$, haciendo dos tipos de consideraciones,

a) Se pueden fijar las coordenadas (x_1, y_1, z_1) de un punto en las funciones que dan el campo de velocidades, expresándose la velocidad de las partículas móviles al pasar por dicho punto en el transcurso del tiempo; matemáticamente viene expresado por (x_1, y_1, z_1, t) .

Mediante esta técnica, conocido un punto fijo del espacio, las velocidades de las diversas partículas que pasan por ese punto, forman un continuo; este punto de vista se conoce como método de Euler.

b) Se puede estudiar una partícula genérica del flujo, siguiendo a dicha partícula, método de Lagrange, lo cual significa que (x, y, z) no permanecen constantes en la expresión $V(x, y, z, t)$, sino que varían de forma continua, dando en cada instante la posición de la partícula genérica. Por lo tanto, en este caso, las coordenadas espaciales serán función del tiempo; ambas consideraciones no dependen de si el campo es permanente o no.

Para el flujo bidimensional en coordenadas rectangulares, el potencial de velocidades se define como,

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} ; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

y la función corriente como,

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La derivada total de ϕ se puede poner en la forma,

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = u dx + v dy$$

Las líneas equipotenciales son aquellas a lo largo de las cuales la función ϕ es constante, es decir,

$$d\phi = u dx + v dy = 0 ; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v} \quad \frac{dx}{v} = -\frac{dy}{u}$$

que proporciona el gradiente de la línea de potencial.

La derivada total de ψ es,

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy$$

Para una línea de corriente, función de corriente constante $\psi = C_1$, resulta,

$$d\psi = -v dx + u dy = 0 ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad \frac{dy}{v} = \frac{dx}{u}$$

que es la ecuación diferencial de las líneas de corriente para el flujo bidimensional.

CONSTRUCCIÓN GRÁFICA DE LAS LINEAS DE CORRIENTE Y DE MOVIMIENTO.- En la red ortogonal constituida por las líneas, $\phi = C_1$, $\psi = C_2$, vamos a considerar una línea de corriente $\psi = C_1$

y otra equipotencial ψ_1 que pasan por el punto O de la Fig IV.2, y por otra, la línea de corriente, $\psi_1 + d\psi_1$, y la equipotencial, $\psi_1 + d\psi_1$. Si consideramos como origen de coordenadas el punto O y por él trazamos las tangentes \vec{s} y \vec{n} , a ψ_1 y $\psi_1 + d\psi_1$, respectivamente, puesto que la velocidad se proyecta en verdadera magnitud sobre el eje Os por cuanto éste es tangente a la línea de corriente, las relaciones obtenidas para la velocidad \vec{u} , que son,

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

se transforman en,

$$u = \frac{ds}{dt} = \frac{dn}{dt}$$

y escogiendo para dx y dy valores iguales, los valores de ds y dn también serán iguales, con lo que la malla elemental será un cuadrado.

Esto permite la construcción gráfica de la red de líneas de corriente y equipotenciales, a partir de una línea de corriente de la distribución del potencial a lo largo de esta línea de corriente y de las líneas equipotenciales extremas. Este método se conoce como *método de Prüssil*, Fig IV.3.

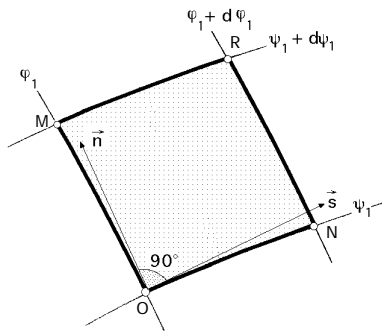


Fig IV.2

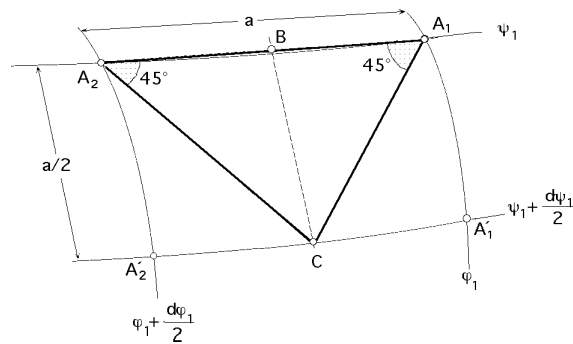


Fig IV.3

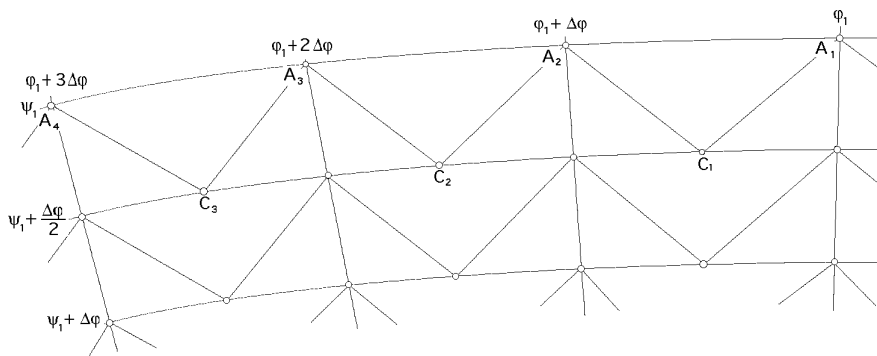


Fig IV.4.- Trazado de las líneas de corriente

Si suponemos una línea de corriente, $\psi = \psi_1$, y sobre la misma dos puntos A_1 y A_2 lo suficientemente próximos como para que el arco (A_1A_2) se pueda confundir con la recta, $(A_1A_2) = a$.

Si ψ_1 es el potencial en el punto A_1 y, $\psi_1 + \Delta\psi$, el potencial en el punto A_2 , el potencial en el

punto B, punto medio del segmento $(A_1 A_2)$ será de potencial, $\phi_1 + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}$.

La normal al segmento $(A_1 A_2)$ en el punto M_1 será tangente a la línea equipotencial que pasa por B.

En el punto C sobre la normal, tal que, $BC = \frac{a}{2}$, el potencial será también $\phi_1 + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}$, por lo que de acuerdo con la ecuación,

$$u = \frac{\phi_1}{s} = \frac{\phi_2}{n}$$

la línea de corriente que pasa por C tiene una cota de valor, $\phi_1 + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}$; de aquí se deduce la construcción gráfica de la red, Fig IV.4,

Sobre la línea de corriente ϕ_1 se toman los puntos A_1, A_2, \dots , tales que correspondan a potenciales en progresión aritmética de razón $\frac{\phi_2 - \phi_1}{n}$. Por cada uno de los puntos A_1, A_2, \dots , se trazan a un mismo lado de la línea de corriente, dos semirrectas que forman 45° con la línea de corriente y que se cortan en los puntos C_1, C_2, \dots , siendo el lugar geométrico de los puntos C la línea de corriente de cota, $\phi_1 + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}$

Si trazamos desde los puntos A_1, A_2, \dots , las perpendiculares $(A_1 A_1'), (A_2 A_2'), \dots$, a la línea de corriente ϕ_1 , se podrá graduar a la línea, $\phi_1 + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}$, en potenciales. A partir de esta nueva línea se construirá la, $\phi_1 + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}$, así como los puntos equipotenciales $A_1'', A_2'' \dots$, cubriéndose de esta forma el dominio a estudiar, de líneas de corriente y equipotenciales.

El trazado de las líneas de corriente debe respetar la condición de ortogonalidad a las equipotenciales que limitan el campo y la conservación del potencial sobre las equipotenciales. El método es válido si se invierte el papel de las equipotenciales y líneas de corriente.

Funciones armónicas., son aquellas que tienen sus derivadas primeras regulares en un dominio y que satisfacen la ecuación de Laplace, $\nabla^2 u = 0$. La suma de dos funciones armónicas es otra función armónica lo que implica que se pueden superponer dos movimientos con potencial de velocidades, sumando sus potenciales.

IV.2.- CAUDAL A TRAVÉS DE UNA SUPERFICIE ELEMENTAL

En general, el caudal Q de una corriente para una sección determinada, es el volumen de fluido que la atraviesa en la unidad de tiempo, m^3/seg . Si se considera un tubo de corriente de sección S_1 normal en cada uno de sus puntos a la línea de corriente correspondiente, y un elemento infinitesimal de sección dS , el volumen de fluido que pasa por dS en el tiempo dt es, $v dS dt$, ya que, $v dt$, es la longitud de este tubo de corriente infinitesimal, Fig IV.1.

Por la sección S_1 pasa un volumen de fluido dW de la forma,

$$dW = \int_{S_1} V dS dt = dt \int_{S_1} V dS$$

y como se ha definido el caudal Q , como el volumen de fluido que pasa por la sección S_1 en la unidad de tiempo, resulta,

$$Q = \frac{dW}{dt} = \int_{S_1} V dS$$

Cuando S_1 no sea perpendicular a la línea de corriente en cada punto, el caudal es,

$$Q = \int_{S_1} V_n dS = \int_{S_1} V \cos \theta dS$$

La velocidad media correspondiente a la sección S_1 es,

$$\hat{V} = \frac{\int_{S_1} V_n dS}{S_1} = \frac{Q}{S_1}$$

Un elemento de volumen no sigue las líneas de corriente, sino las de movimiento; sólo coincidirán cuando el campo de velocidades sea estacionario.

IV.3.- ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Si se considera en un fluido en movimiento un paralelepípedo fijo e invariable, Fig IV.5, de volumen, $dx dy dz$, en el tiempo t contiene una masa M de fluido de la forma, $\rho dx dy dz$; en el transcurso de un tiempo dt , el valor de la masa será,

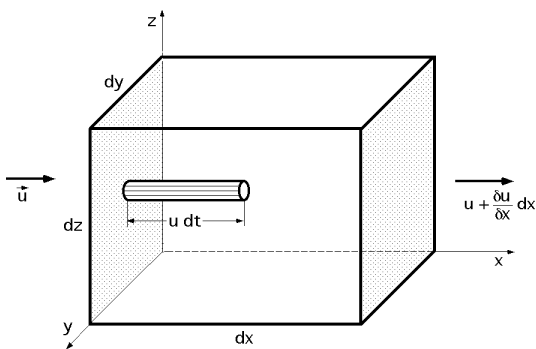


Fig IV.5.- Paralelepípedo elemental de fluido

$$M + \frac{dM}{dt} dt$$

por lo que el valor de M se modifica, y vale: $M + \frac{dM}{dt} dt$

permaneciendo invariable el volumen, $dx dy dz$; la variación de masa contenida en el volumen citado, en el tiempo dt , es,

$$\frac{dM}{dt} dt dx dy dz$$

Este incremento procede de,

- La masa entrante por las seis caras del paralelepípedo.
- De la masa que entra por las fuentes contenidas en el volumen infinitesimal.

Por la cara, $(dy dz)$, entra en el tiempo dt una masa de fluido igual a, $\rho u dt dy dz$

Por la cara opuesta sale,

$$\left\{ u + \frac{(\dot{u})}{x} dx \right\} dt dy dz$$

En consecuencia, por el conjunto de las dos caras perpendiculares al eje Ox se produce una variación de la masa de fluido,

$$- \frac{(\dot{u})}{x} dt dx dy dz$$

y la variación de las masas de fluido entrantes y salientes por el conjunto de las seis caras es,

$$- \left(\frac{(\dot{u})}{x} + \frac{(\dot{v})}{y} + \frac{(\dot{w})}{z} \right) dt dx dy dz$$

A su vez, la variación de masa por unidad de volumen debida a los manantiales y sumideros, en el tiempo dt, la representamos por el caudal q , de la forma,

$$q = \sum_{i=1}^n q_1^i - \sum_{j=1}^m q_2^j, \text{ siendo, } \begin{matrix} \sum_{i=1}^n q_1^i, & \text{la suma de los caudales debidos a los sumideros} \\ \sum_{j=1}^m q_2^j, & \text{la suma de los caudales debidos a los manantiales} \end{matrix}$$

La variación de masa debida a los manantiales y sumideros es,

$$q dt dx dy dz$$

por lo que,

$$\frac{1}{t} dt dx dy dz = - \left(\frac{(\dot{u})}{x} + \frac{(\dot{v})}{y} + \frac{(\dot{w})}{z} \right) dt dx dy dz + q dt dx dy dz$$

$$\frac{1}{t} + \left(\frac{(\dot{u})}{x} + \frac{(\dot{v})}{y} + \frac{(\dot{w})}{z} \right) = q \quad \frac{1}{t} + \text{div}(\vec{V}) = q$$

que es la expresión general de la ecuación de continuidad.

Para el caso en que no existan manantiales ni sumideros, $q = 0$

$$\frac{1}{t} + \left(\frac{(\dot{u})}{x} + \frac{(\dot{v})}{y} + \frac{(\dot{w})}{z} \right) = 0$$

Para fluidos incompresibles, $\rho = Cte$

$$\frac{1}{t} = 0 \quad ; \quad \frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z} = 0 \quad ; \quad \text{div} \vec{V} = 0$$

CASOS PARTICULARES

a) Si el fluido se mueve paralelamente al eje Ox, las componentes de la velocidad son,

$$u = u ; v = 0 ; w = 0$$

y la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 ; u = Cte ; \rho u = C' ; u = C'$$

Como,

$$u = \frac{\text{Peso}}{\text{Volumen}} \frac{\text{Espacio}}{\text{Tiempo}} = \frac{\text{Peso}}{\text{Tiempo}} \frac{\text{Espacio}}{\text{Volumen}} = G \frac{1}{S} = \frac{G}{S}$$

resulta,

$$G = S u = \frac{S u}{V_{\text{específico}}} ; G V_{\text{esp}} = S u$$

b) El movimiento del fluido es irrotacional,

$$\text{rot } \vec{V} = 0$$

y como, $\vec{V} = - \text{grad } \phi = - \nabla \phi$, por derivar de un potencial, se tiene que,

$$\text{div } \vec{V} = \text{div}(-\nabla \phi) = -\Delta \phi ; \text{div } \vec{V} + \Delta \phi = 0, \text{ (ec.de Poisson)}$$

Si, $\text{div } \vec{V} = 0$, $\Delta \phi = 0$, (ecuación de Laplace), el movimiento es conservativo, permanente e incompresible.

Para un movimiento plano irrotacional, las líneas de corriente tienen como ecuación, $\psi(x, y) = Cte$, y forman una red ortogonal con las líneas equipotenciales dadas por, $\phi(x, y) = Cte$,

$$u = 0 ; v = 0 ; u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} ; v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

El caudal q que pasa entre dos líneas de corriente ψ_1 y ψ_2 es, $q = \psi_2 - \psi_1$

La longitud de un arco de línea equipotencial es, $d\phi = V dS$

La longitud de un arco de línea de corriente es, $d\psi = V dS$

El vector torbellino \vec{w} es igual a la velocidad angular instantánea $\vec{\omega}$,

$$\vec{w} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{V}$$

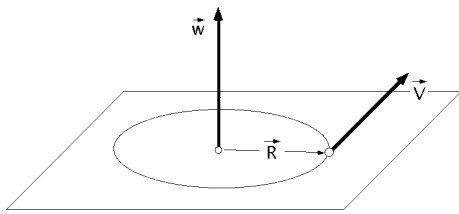


Fig IV.6.- Rotor

La expresión general del rotor es: $\text{rot } \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}$

Como, $\vec{V} = \bar{w} \vec{R}$, se puede poner también en la forma:

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ w_x & w_y & w_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i} (w_y z - w_z y) + \vec{j} (w_z x - w_x z) + \vec{k} (w_x y - w_y x)$$

y, por lo tanto,

$$\text{rot } \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ w_y z - w_z y & w_z x - w_x z & w_x y - w_y x \end{vmatrix} = 2 w_x \vec{i} + 2 w_y \vec{j} + 2 w_z \vec{k} = 2 \bar{b}$$

El vector torbellino representa la velocidad angular instantánea. y se define en la forma,

$$\bar{w} = \bar{b} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{V}$$

IV.4.- TORBELLINOS CILÍNDRICOS

Interesa calcular la componente z del vector \bar{b} ; dicho vector puede ponerse en la forma,

$$\bar{b} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{w}{y} - \frac{v}{z} \right) \vec{i} + \left(\frac{u}{z} - \frac{w}{x} \right) \vec{j} + \left(\frac{v}{x} - \frac{u}{y} \right) \vec{k} \right\}$$

por lo que la componente \bar{b}_z es, $b_z = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{x} - \frac{u}{y} \right)$

De acuerdo con la Fig IV.7, $u = -V \text{ sen } \theta = -V \frac{y}{R}$
 $v = V \text{ cos } \theta = V \frac{x}{R}$

$$\frac{u}{y} = -\frac{V}{R} - y \frac{\frac{V}{R} \frac{R}{y} R - V \frac{R}{y}}{R^2} = -\frac{V}{R} - \frac{y}{R} \frac{V}{R} \frac{R}{y} + \frac{V}{R^2} y \frac{R}{y}$$

$$\frac{v}{x} = \frac{V}{R} + x \frac{\frac{V}{R} \frac{R}{x} R - V \frac{R}{x}}{R^2} = \frac{V}{R} + \frac{x}{R} \frac{V}{R} \frac{R}{x} - \frac{V}{R^2} x \frac{R}{x}$$

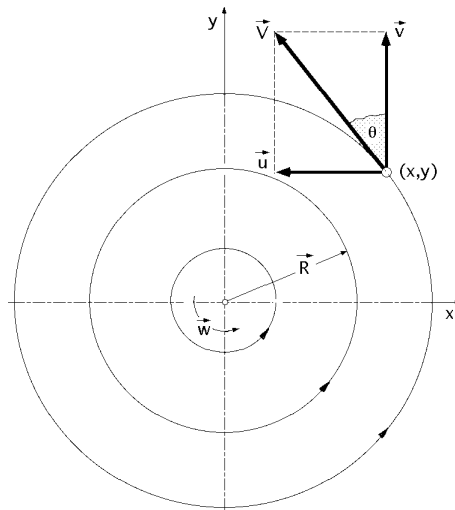


Fig IV.7.- Torbellino cilíndrico

Como,

$$R^2 = x^2 + y^2 \quad ; \quad \frac{R}{x} = \frac{x}{R} \quad ; \quad \frac{R}{y} = \frac{y}{R}$$

$$\frac{u}{y} = -\frac{v}{R} - \frac{y}{R} \frac{v}{R} \frac{y}{R} + \frac{v y}{R^2} \frac{y}{R} = -\frac{v}{R} - \frac{y^2}{R^2} \frac{v}{R} + \frac{v y^2}{R^3}$$

$$\frac{v}{x} = \frac{v}{R} + \frac{x}{R} \frac{v}{R} \frac{x}{R} - \frac{v x}{R^2} \frac{x}{R} = \frac{v}{R} + \frac{x^2}{R^2} \frac{v}{R} - \frac{v x^2}{R^3}$$

sustituyendo en \vec{b}_z se encuentra:

$$\begin{aligned} b_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{v}{R} + \frac{x^2}{R^2} \frac{v}{R} - \frac{v x^2}{R^3} + \frac{v}{R} + \frac{y^2}{R^2} \frac{v}{R} - \frac{v y^2}{R^3} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2v}{R} + \frac{x^2 + y^2}{R^2} \frac{v}{R} - v \frac{x^2 + y^2}{R^3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2v}{R} + \frac{v}{R} - \frac{v}{R} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{R} + \frac{v}{R} \right) \end{aligned}$$

que es la expresión que permite calcular la velocidad angular instantánea en cualquier tipo de torbellino cilíndrico.

IV.5.- ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO DE UN ELEMENTO DE VOLUMEN

Durante el movimiento, cada elemento de volumen de fluido experimenta cambios de posición y de orientación, que analizaremos a continuación. Para ello vamos a considerar un elemento de volumen cualquiera, en el instante t , que contiene a los puntos $M(x,y,z)$ y $M'(x + h, y + k, z + l)$, muy próximos entre sí.

Sea $\vec{v}(u,v,w)$ la velocidad en el punto M , y $\vec{v}'(u',v',w')$ la velocidad en M' , por lo que se podrá poner,

$$\begin{aligned}
u' &= u(x+h, y+k, z+l) = u + h \frac{u}{x} + k \frac{u}{y} + l \frac{u}{z} \\
\vec{V}'(u', v', w'), \quad v' &= v(x+h, y+k, z+l) = v + h \frac{v}{x} + k \frac{v}{y} + l \frac{v}{z} \\
w' &= w(x+h, y+k, z+l) = w + h \frac{w}{x} + k \frac{w}{y} + l \frac{w}{z}
\end{aligned}$$

en donde se han despreciado infinitésimos de orden superior.

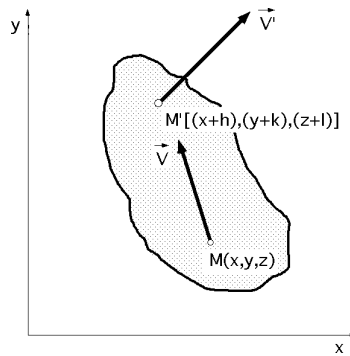


Fig IV.8

Si consideramos la primera de estas ecuaciones, que se puede poner en la forma,

$$u' = u + \frac{1}{2} \left\{ l \left(\frac{u}{z} - \frac{w}{x} \right) - k \left(\frac{v}{x} - \frac{u}{y} \right) \right\} + h \frac{u}{x} + \frac{1}{2} \left\{ k \left(\frac{v}{x} - \frac{u}{y} \right) + l \left(\frac{u}{z} - \frac{w}{x} \right) \right\}$$

y haciendo lo propio con las otras dos y llamando,

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{w}{y} - \frac{v}{z} \right) ; \quad = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{z} - \frac{w}{x} \right) ; \quad = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{x} - \frac{u}{y} \right)$$

$$g_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{w}{y} + \frac{v}{z} \right) ; \quad g_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{z} + \frac{w}{x} \right) ; \quad g_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{x} + \frac{u}{y} \right)$$

se obtiene,

$$\begin{aligned}
u' &= u + (l - k) + h \frac{u}{x} + k g_3 + l g_2 \\
v' &= v + (h - l) + k \frac{v}{y} + h g_3 + l g_1 \\
w' &= w + (k - h) + l \frac{w}{z} + h g_2 + k g_1
\end{aligned}$$

en las que el vector de proyecciones, g_1, g_2, g_3 , es el vector torbellino del campo de velocidades, que sabemos vale,

$$\vec{g} = \vec{b} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{V}$$

La velocidad del punto M' se puede considerar como el resultado de la composición geométrica

de tres velocidades:

a) Una velocidad en la que sus proyecciones u, v, w , se corresponden con una traslación en bloque de la partícula, a la velocidad \vec{V} .

$$r_1 = l - k$$

b) Una velocidad en la que sus proyecciones son,

$$r_2 = h - l$$

$$r_3 = k - h$$

y que se corresponde con una rotación en bloque, de velocidad angular $\vec{\omega}$, siendo estas proyecciones las componentes del producto vectorial,

$$\frac{1}{2} \text{rot } \vec{V} \cdot \overline{MM'} = \vec{\omega} \cdot \overline{MM'}$$

$$d_1 = h \frac{u}{x} + k g_3 + l g_2$$

c) Una velocidad en la que sus proyecciones son,

$$d_2 = h g_3 + k \frac{v}{y} + l g_1$$

$$d_3 = h g_2 + k g_1 + l \frac{w}{z}$$

que se corresponden con una deformación \vec{D} .

En consecuencia, V' se puede poner en la forma,

$$\vec{V}' = \vec{V} + \vec{\omega} \cdot \overline{MM'} + \vec{D}$$

demostrándose que, $\frac{u}{x}, \frac{v}{y}, \frac{w}{z}$, son las velocidades de deformación lineal, velocidad de dilatación

Así un elemento $\overline{MM'}$ paralelo a Ox , de anchura h , se transforma en el tiempo dt , en otro elemento $\overline{M_1M'_1}$ de anchura:

$$h \left(1 + \frac{u}{x} dt \right)$$

En la misma forma, $2 g_1, 2 g_2, 2 g_3$, son velocidades de deformación angular.

Así, dos elementos $\overline{MM'}$ y $\overline{MN'}$, inicialmente paralelos a los ejes Ox y Oy , formando por lo tanto entre ellos, un ángulo de 90° , en el tiempo dt formarán otro ángulo de, $90^\circ - \theta$, tal que,

$$\theta = \left(\frac{u}{y} + \frac{v}{x} \right) dt$$

Durante la transformación \vec{D} se conserva el paralelismo entre las rectas, y un pequeño paralelepípedo rectángulo se transformará en otro paralelepípedo de ángulos diferentes. Estos tres movimientos elementales se esquematizan en la Fig IV.9.

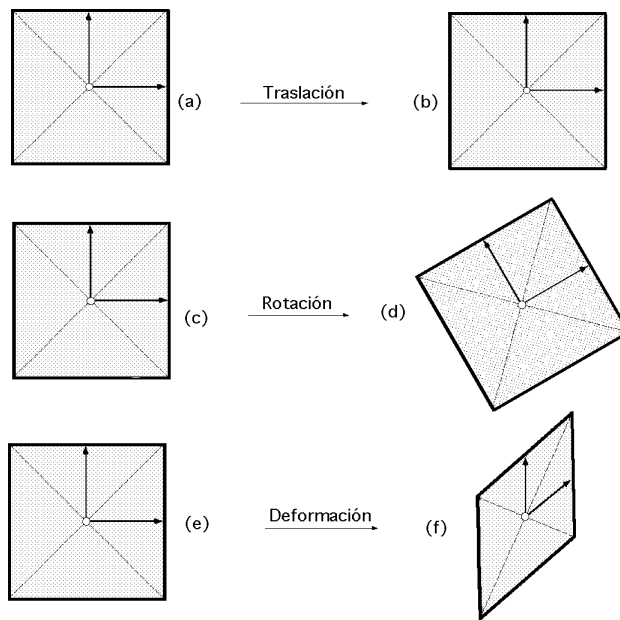


Fig IV.9.- Movimientos elementales

Si se introduce una función de deformación ϕ , de la forma,

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{u}{x} + l^2 \frac{v}{y} + k^2 \frac{w}{z} \right) + k l g_1 + l h g_2 + h k g_3$$

se puede comprobar que las componentes, d_1, d_2 y d_3 de la velocidad de deformación, son las derivadas parciales de ϕ , es decir,

$$d_1 = \frac{1}{h} ; \quad d_2 = \frac{1}{k} ; \quad d_3 = \frac{1}{l} \quad \bar{D} = \text{grad}$$

La descomposición que se acaba de exponer, debida a Helmholtz, es aquella para la cual la velocidad de deformación deriva de un potencial, ϕ .

IV.6.- POTENCIAL DE VELOCIDADES PARA FUENTES Y SUMIDEROS EN FLUJO BIDIMENSIONAL

En los campos fluidodinámicos pueden existir singularidades de distintos géneros; la más sencilla es la que se presenta cuando se introduce otro fluido en el campo o se extrae del mismo.

Esta singularidad toma el nombre de manantial en el primer caso o de sumidero en el segundo.

En realidad se trata de una abstracción matemática que, podría compararse toscamente con una toma o una derivación de una conducción por la que discurriese el fluido. Las singularidades modifican el campo de velocidades de la corriente fluida no perturbada.

Si se suman algebraicamente tanto el potencial de la corriente no perturbada como los potenciales de las singularidades, se define el potencial en un punto cualquiera del campo fluidodinámico total. Se demuestra que la combinación de los potenciales de la corriente no perturbada y de las diversas singularidades posibles da lugar a corrientes con características iguales a las que se tendrían si se sumergiesen en el fluido cuerpos de forma determinada.

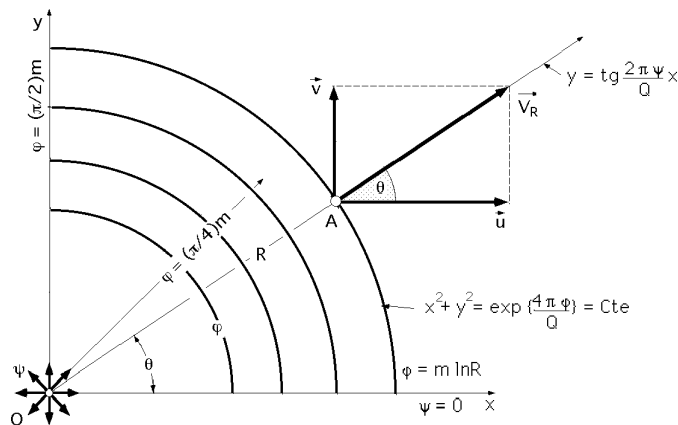


Fig IV.10.- Potencial de velocidades para una fuente en flujo bidimensional

En efecto, si suponemos una fuente colocada en el origen de coordenadas, y un punto A cualquiera de coordenadas (x,y). Las líneas de corriente y en este tipo de flujo, Fig IV.10, son rectas radiales.

La velocidad resultante en el punto A debida al manantial es \vec{V}_R , radial.

Las componentes (u, v) de la velocidad resultante son,

$$u = V_R \cos \theta$$

$$v = V_R \sin \theta$$

Las coordenadas (x, y) del punto A son,

$$x = R \cos \theta$$

$$y = R \sin \theta$$

Se define el flujo por unidad de tiempo Q, (caudal), de la forma,

$$Q = 2 \pi R V_R ; V_R = \frac{Q}{2 \pi R}$$

en la que, la intensidad del manantial se define, para dos y tres dimensiones, en la forma,

$$m_{(2 \text{ dim})} = \frac{Q}{2 \pi} ; m_{(3 \text{ dim})} = \frac{Q}{2 \pi b}$$

siendo b la longitud del manantial, perpendicular al plano del dibujo.

A su vez, el potencial de velocidades para la fuente se obtiene a partir de,

$$u = \frac{Q}{2 \pi R} \cos \theta = \frac{Q}{2 \pi} \frac{x}{R^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{-1}{x}$$

$$v = \frac{Q}{2 \pi R} \sin \theta = \frac{Q}{2 \pi} \frac{y}{R^2} = \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{-1}{y}$$

$$\phi = \frac{Q}{2 \pi} \int \frac{x dx}{x^2 + y^2} = \frac{Q}{4} \ln (x^2 + y^2) = \frac{Q}{4} \ln R^2 = \frac{Q}{2} \ln R$$

Para las líneas de corriente se cumple,

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{Q}{2} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{v}{y} = - \frac{u}{x} = \frac{Q}{2} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

y, por lo tanto, la función corriente toma la forma,

$$\frac{v}{y} = \frac{Q}{2} \frac{x}{x^2 + y^2} ; \quad \int \frac{x dy}{x^2 + y^2} = \frac{Q}{2} \text{arc tg } \frac{y}{x} = \frac{Q}{2}$$

IV.7.- COMBINACIÓN DE UN FLUJO RECTILÍNEO Y UN MANANTIAL

El potencial de velocidades para un flujo rectilíneo, como el indicado en la Fig IV.11, viene dado por, $\phi = u_0 x$, y la función corriente por, $\psi = u_0 y$.

El potencial total de velocidades es, $\phi = u_0 x + \frac{Q}{4} \ln(x^2 + y^2)$

El potencial de la función corriente es, $\psi = u_0 y + \frac{Q}{2} \text{arc tg } \frac{y}{x}$

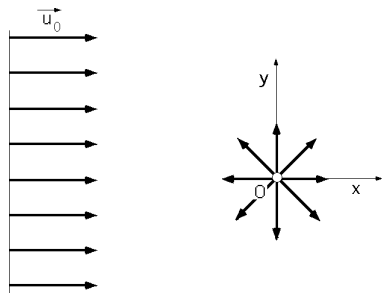


Fig IV.11.- Flujo rectilíneo y fuente

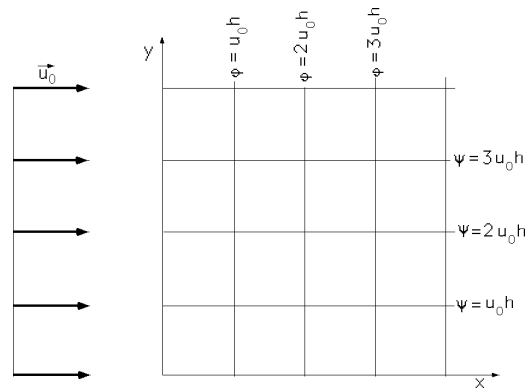


Fig IV.12.- Líneas equipotenciales y de movimiento

Las componentes de la velocidad son,

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = u_0 + \frac{Q x}{2(x^2 + y^2)}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{Q y}{2(x^2 + y^2)}$$

Las líneas de corriente, $\psi = \text{Cte}$, son de la forma,

$$u_0 y + \frac{Q}{2} \text{arc tg } \frac{y}{x} = \text{Cte}$$

y se obtienen dando a la constante los valores, $0, \pm \frac{Q}{4}, \pm \frac{Q}{2}, \dots$

Se puede escoger como cuerpo sólido el dado por, $\psi = 0$, semicuerpo de Rankine, que es el indi-

como en la Fig IV.13, de la forma,

$$\psi = 0 \quad ; \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \left(- \frac{2}{Q} u_0 y \right)$$

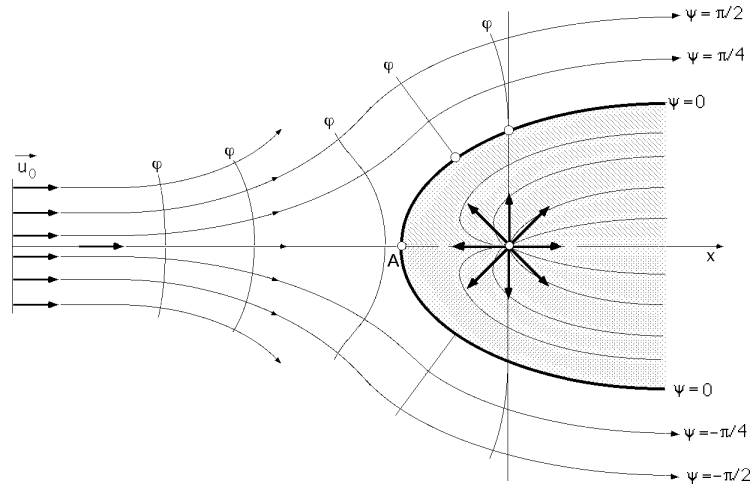


Fig IV.13.- Semicuerpo de Rankine

También se podría haber tomado como cuerpo sólido cualquiera de los, $\psi = \text{Cte}$, y ser las líneas de corriente los restantes. Un cuerpo semiinfinito separa a la corriente uniforme de la fuente; la parte superior y la parte inferior de dicho semicuerpo, coinciden en un punto de remanso, $V=0$, y en él se tiene,

$$u = u_0 + \frac{Qx}{2(x^2 + y^2)} = \left| \begin{array}{l} u = 0 \quad ; \quad x = -a \\ \frac{Q}{2} = m \quad ; \quad y = 0 \end{array} \right| = u_0 - \frac{m}{a} = 0$$

$$x = -a = - \frac{m}{u_0} \quad a = \frac{m}{u_0} = \frac{Q}{2 u_0}$$

Las componentes de la velocidad se pueden poner en la forma,

$$u = u_0 + \frac{m}{R} \cos \theta$$

$$v = \frac{m}{R} \operatorname{sen} \theta$$

Para, $u = v = 0$, se obtiene el punto de remanso A, $\theta = 0^\circ$; $R = - \frac{m}{u_0}$

La velocidad \vec{V} en cualquier punto viene dada por,

$$V^2 = u^2 + v^2 = u_0^2 + \frac{2 m u_0}{R} \cos \theta + \frac{m^2}{R^2} \cos^2 \theta + \frac{m^2}{R^2} \operatorname{sen}^2 \theta = u_0^2 + \frac{2 m u_0}{R} \cos \theta + \frac{m^2}{R^2} =$$

$$= u_0^2 + \frac{2 a u_0^2}{R} \cos \theta + \frac{a^2 u_0^2}{R^2} = u_0^2 \left(1 + \frac{2 a}{R} \cos \theta + \frac{a^2}{R^2} \right)$$

Un flujo rectilíneo y una fuente simulan muy bien la parte frontal de un cuerpo cilíndrico inmerso en una corriente fluida.

IV.8.- OVALO DE RANKINE

Cuando una fuente y un sumidero de igual intensidad se colocan equidistantes del origen de coordenadas, inmersos en una corriente uniforme, u_0x , y todo el fluido de la fuente es absorbido por el sumidero, aparece una línea de corriente divisoria, definida entre el fluido de la corriente uniforme y el fluido transferido de la fuente al sumidero, línea que puede considerarse como la intersección con el plano (x,y) de la superficie de un cilindro de forma ovoidal, conocido como ovalo de Rankine.

La superposición de estos flujos da lugar a un flujo externo alrededor de un cilindro ovoidal; combinando muchas fuentes y sumideros se obtiene el flujo aproximado alrededor de un cilindro de forma arbitraria, simétrico respecto al eje Ox .

El ovalo de Rankine tiene por ecuaciones, para las líneas equipotenciales y de corriente, las siguientes,

$$\begin{aligned}
 &= u_0x - \frac{Q}{2} \ln r_1 + \frac{Q}{2} \ln r_2 = u_0x + \frac{Q}{4} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \\
 &= u_0y - \frac{Q}{2} \theta_1 + \frac{Q}{2} \theta_2 = u_0y - \frac{Q}{2} \left(\text{arc tg } \frac{y}{x-a} - \text{arc tg } \frac{y}{x+a} \right) = \\
 &= u_0y - m \left(\theta_1 - \theta_2 \right) = u_0y - m \text{arc tg } \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}
 \end{aligned}$$

en las que los datos vienen especificados en la Fig IV.14.

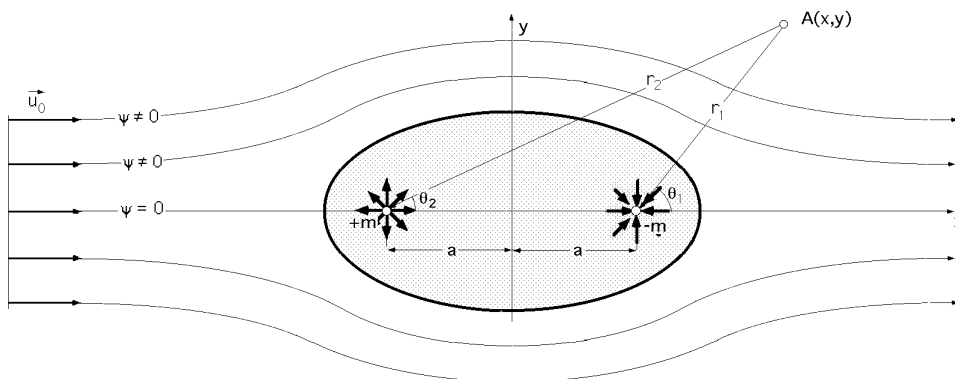


Fig IV.14.- Ovalo de Rankine

Los semiejes del óvalo, L y h , dependen de la intensidad relativa de la fuente y de la corriente uniforme, es decir, de la relación, $\frac{m}{u_0 a}$; la línea oval es, $\psi = 0$.

Cuando se aumenta la relación $\frac{m}{u_0 a}$, desde cero a valores elevados, la forma del óvalo aumenta de tamaño y espesor, desde una placa plana de longitud $2a$, hasta un cilindro casi circular.

En el límite, cuando $\frac{m}{u_0 a} \rightarrow \infty$, $\frac{L}{h} \rightarrow 1$, y $\frac{u_{\text{máx}}}{u_0} \rightarrow 2$, correspondiente al flujo en torno a un cilindro circular.

IV.9.- DOBLETE

Vamos a suponer una fuente situada en el punto A, Fig IV.15, que consideramos como origen de coordenadas, y un sumidero en B, de igual intensidad, lo cual supone el mismo valor de Q, separados una distancia dS infinitesimal.

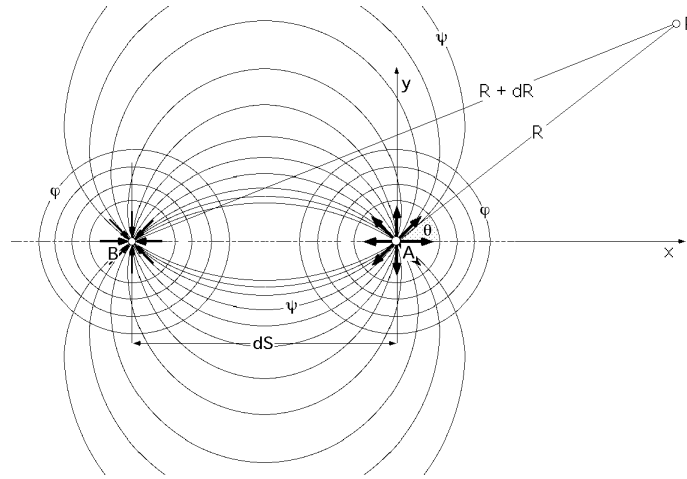


Fig IV.15.- Doblete (visto desde muy cerca)

La fuente y el sumidero pueden estar tan cerca como se quiera, siempre que se mantenga constante el producto de su intensidad por la distancia que los separa, $m \, dS = 0$.

La función potencial D en cualquier punto P es la suma de las funciones potenciales de la fuente y del sumidero; en consecuencia se puede poner,

$$D = \frac{Q}{2} \ln R - \frac{Q}{2} \ln (R + dR) = - \frac{Q}{2} \ln \frac{R + dR}{R} = - \frac{Q}{2} \ln \left(1 + \frac{dR}{R} \right)$$

Desarrollándola en serie de potencias se obtiene,

$$D = - \frac{Q}{2} \left(\frac{dR}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{R} \right)^2 + \dots \right) = - \frac{Q \, dR}{2 \, R} = - \frac{Q \, dS \, \cos}{2 \, R}$$

en la que,

$$F = \frac{Q \, dS}{2} = \text{Cte}$$

siendo la intensidad de la fuente o del sumidero, $\frac{Q}{2} = m$.

La función potencial D para el doblete quedará en la forma,

$$D = - \frac{F \, \cos}{R} = - \frac{F \, x}{R^2} = - \frac{F \, x}{x^2 + y^2}$$

La función de corriente D para el doblete es,

$$u = \frac{D}{x} = \frac{D}{y} = - \frac{F(x^2 + y^2) - 2Fxy}{(x^2 + y^2)^2} = - \frac{F(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$v = \frac{D}{y} = - \frac{D}{x} = \frac{2Fxy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$D = - \frac{2Fxy}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{Fy}{x^2 + y^2}$$

que dice que, las líneas de corriente, son círculos con centro situado sobre el eje perpendicular al x , por el punto medio de la distancia entre el manantial y el sumidero.

Las líneas equipotenciales son también, como hemos visto, círculos.

Un doblete visto desde muy lejos, Fig IV.16, supone que las líneas de corriente son círculos tangentes al eje x en el origen, mientras que visto desde muy cerca se corresponde con la representación anterior.

Las líneas equipotenciales se pueden poner en la forma, $x^2 + y^2 + \frac{F}{D}x = 0$

cuyo centro de coordenadas (a,b) , viene definido por,

$$a = - \frac{F}{2D}$$

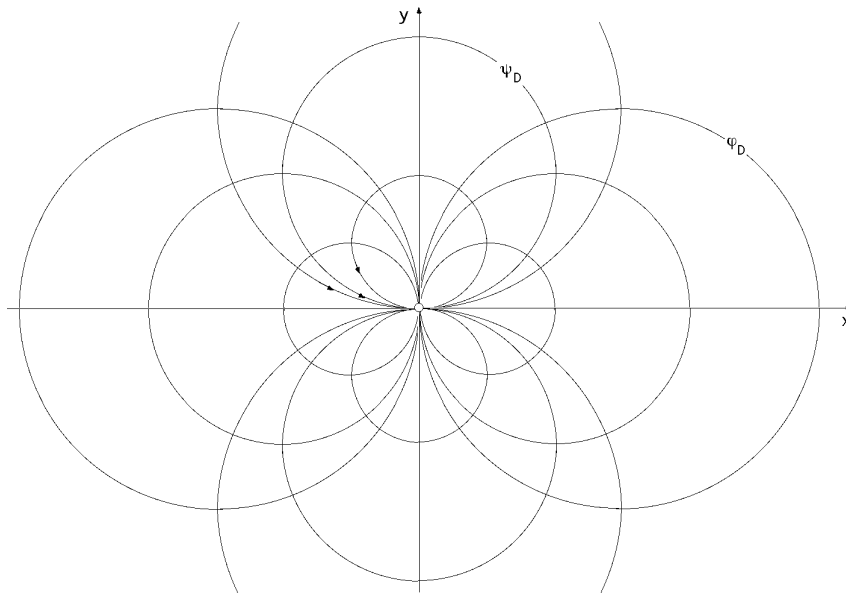
$$b = 0$$


Fig IV.16.- Líneas equipotenciales y de corriente, para un doblete en dos dimensiones (visto desde muy lejos)

Las líneas de corriente se pueden poner en la forma, $x^2 + y^2 - \frac{F}{D}y = 0$

cuyo centro viene definido por,

$$a = 0$$

$$b = \frac{F}{2D}$$

IV.10.- COMBINACIÓN DE UN FLUJO RECTILÍNEO Y UN DOBLETE

Supongamos un doblete en el origen O al cual se superpone un flujo uniforme rectilíneo, con velocidad $-u_0$ a lo largo del eje Ox.

El potencial de velocidades para el flujo rectilíneo es, como sabemos, de la forma, $-u_0 x$

El potencial de velocidades total para el flujo combinado es, $= -u_0 x - \frac{F x}{x^2 + y^2}$

La función de corriente total, para el flujo combinado es, $= -u_0 y + \frac{F y}{x^2 + y^2}$

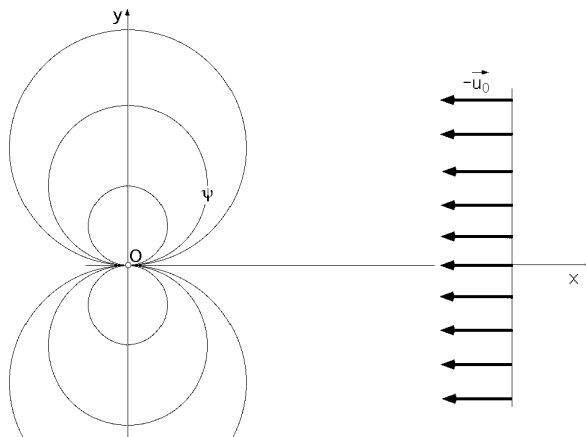


Fig IV.17.- Combinación de flujo rectilíneo y doblete

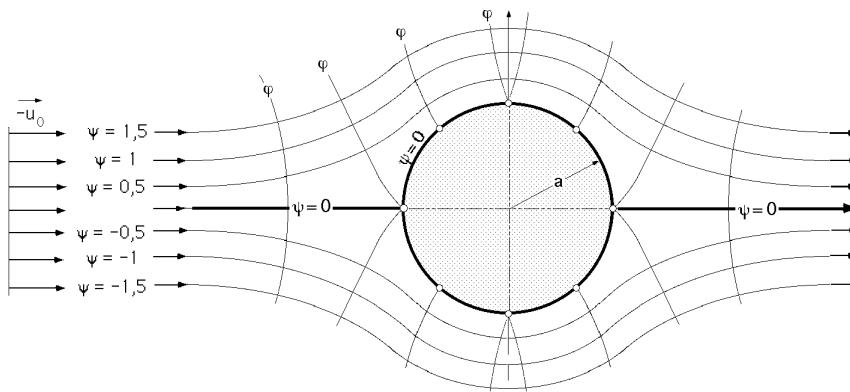


Fig IV.18.- Cuerpo de Rankine; líneas de corriente y equipotenciales

Las líneas de, $\psi = Cte$, son las líneas de corriente; para el caso particular de, $\psi = 0$, Fig IV.18, se obtiene el llamado cuerpo de Rankine, de ecuación,

$$\frac{F y}{x^2 + y^2} = u_0 y \quad \text{Soluciones} \quad y = 0 \quad x^2 + y^2 = \frac{F}{u_0} = a^2, \text{ circunferencia de radio, } a = \sqrt{\frac{F}{u_0}}$$

En consecuencia, la combinación de un flujo rectilíneo y un doblete proporciona el flujo en torno a un cilindro circular de radio a ; ésto será sólo posible si, como hemos indicado anteriormente, el caudal suministrado por la fuente es igual al recogido por el sumidero.

Como, $F = a^2 u_0$, el potencial de velocidad total para el flujo combinado y la función de corriente

total para el mismo, se pueden poner en la forma,

$$= -u_0 x - \frac{x u_0 a^2}{x^2 + y^2} = -u_0 x \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right)$$

$$= -u_0 y + \frac{y u_0 a^2}{x^2 + y^2} = u_0 y \left(-1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right)$$

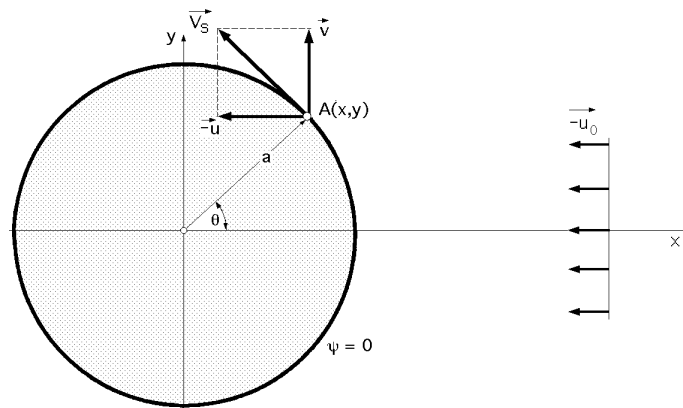


Fig IV.19.- Distribución de velocidades en un cilindro circular

Distribución de velocidades en torno a un cilindro circular.- Supongamos un cilindro circular sometido a una corriente fluida uniforme, Fig IV.19; puede ser el caso de una chimenea cilíndrica sometida a la acción del viento, o el de un tubo inmerso en una corriente fluida, etc.

Las coordenadas de un punto cualquiera vienen dadas por,

$$x = a \cos \theta$$

$$y = a \sin \theta$$

La velocidad V_S en dicho punto es de la forma, $V_S = \sqrt{u_S^2 + v_S^2}$

A su vez, como $u_S = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, $v_S = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, se obtiene:

$$u_S = -u_0 - \frac{u_0 a^2 (y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} = -u_0 - \frac{u_0 a^2 (a^2 \sin^2 \theta - a^2 \cos^2 \theta)}{(a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)^2} = -2 u_0 \sin^2 \theta$$

$$v_S = \frac{2 a^2 x u_0 y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2 a^2 u_0 a^2 \cos \theta \sin \theta}{a^4 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2} = 2 u_0 \sin \theta \cos \theta$$

$$V_S = \sqrt{4 u_0^2 \sin^4 \theta + 4 u_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} = 2 u_0 \sin \theta$$

que es la distribución de velocidades en torno a un cilindro circular, función del ángulo θ que define sobre la circunferencia de radio a , la posición del punto genérico $A(x,y)$.

IV.11.- VÓRTICE

Si se analiza el caso en que se tome la función de corriente de un manantial como función potencial, se obtendrá la formulación correspondiente a un vórtice bidimensional, Fig IV.20, que satisface la ecuación de Laplace, $\nabla^2 \psi = 0$, y cuyas líneas equipotenciales son rectas radiales, mientras que sus líneas de corriente son círculos concéntricos, de centro el origen de coordenadas.

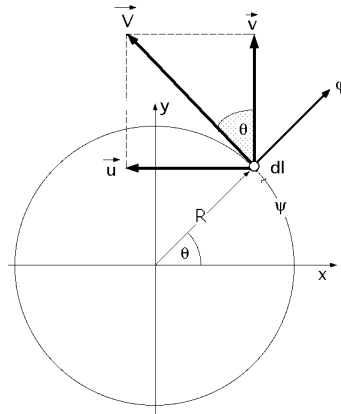


Fig IV.20.- Vórtice; líneas de corriente y equipotenciales

Las componentes de la velocidad total \vec{V} son u y v , y para su cálculo se define el concepto de circulación Γ , como la intensidad del vórtice, que es constante, de la forma,

$$\Gamma = \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int u dx + v dy = \int V R d\theta = 2\pi R V \quad V = \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

Si ψ es el potencial de velocidades y ϕ la función de corriente, se puede poner,

$$u = -V \sin \theta = -\frac{\Gamma}{2\pi R} \sin \theta = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x} = \frac{y}{y}$$

$$v = V \cos \theta = \frac{\Gamma}{2\pi R} \cos \theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{y} = -\frac{x}{x}$$

La integración de estas ecuaciones conduce a:

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \arctg \frac{y}{x} = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln R^2 = -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln (x^2 + y^2) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln R$$

que son la ecuación de las líneas equipotenciales (rectas radiales) y las líneas de corriente, respectivamente; de ellas se deduce,

$$x^2 + y^2 = e^{-\frac{4\psi}{\Gamma}}$$

que son circunferencias concéntricas.

IV.12.- COMBINACIÓN DE UNA FUENTE Y UN VÓRTICE

En algunos estudios de maquinaria para fluidos, tales como el flujo a través de hélices o rotores de bombas centrífugas, se considera la combinación de una fuente y un vórtice; si se supone a la fuente situada en el origen de coordenadas y se la añade un vórtice, en un punto A(x,y) cualquiera del plano, las componentes de la velocidad resultante de la combinación \vec{V} son, \vec{V}_F debida al manantial y \vec{V}_V debida al vórtice.

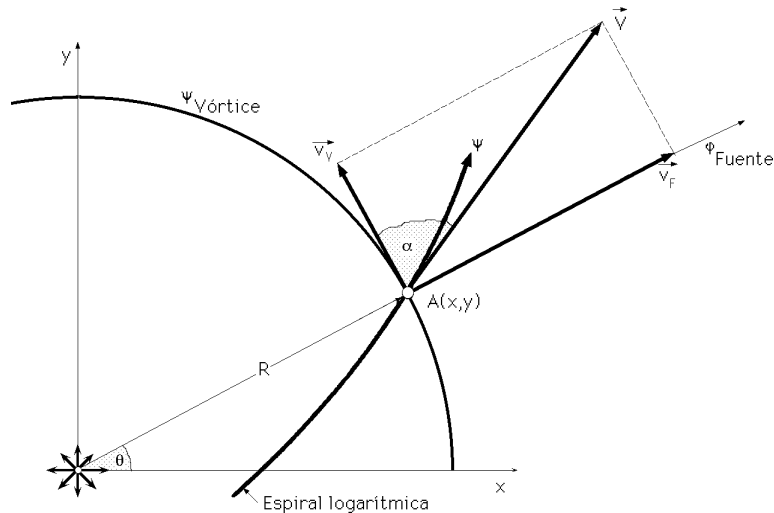


Fig IV.21.- Combinación de una fuente y un vórtice

Si se supone que el caudal Q representa la fuerza de la fuente, y la circulación k representa la fuerza del vórtice, se podrá poner, Fig IV.21,

$$V_F = \frac{Q}{2R} \quad ; \quad V_V = \frac{k}{2R}$$

El ángulo α formado por \vec{V}_F y \vec{V}_V viene dado por:

$$\alpha = \arctg \frac{V_F}{V_V} = \arctg \frac{Q}{k}$$

por lo que para un valor constante de Q y de k , el ángulo α será constante para cualquier valor de R , que es la distancia entre el origen de coordenadas y el punto A(x,y).

La función de corriente ψ para la combinación de un vórtice y una fuente es,

$$\psi = \frac{Q}{2} \arctg \frac{y}{x} - \frac{k}{4} \ln(x^2 + y^2) = \frac{Q}{2} \alpha - \frac{k}{2} \ln R$$

$$\ln R = \frac{Q}{k} \alpha - \frac{\psi}{k} \quad R = e^{\frac{Q}{k} \alpha - \frac{\psi}{k}}$$

Para $\psi = k = 0$ $R = e^{\frac{Q}{k} \alpha}$, que es la ecuación de una espiral logarítmica, Fig IV.21.

El valor de la circulación en torno al centro de un vórtice libre o irrotacional, es constante, e independiente del contorno que se elija, circular o no. En general, la circulación es igual a la suma algebraica de las intensidades de todos los torbellinos que haya en la región interior a la curva cerrada.

A continuación veremos que una región de circulación finita en una corriente está sometida a una fuerza de sustentación proporcional a u_0 y a Γ .

IV.13.- FLUJO EN TORNO A UN CILINDRO CON VÓRTICE LIBRE

La palabra elevación, o impulso ascendente, significa una fuerza en ángulo recto con la línea de flujo no perturbado. El flujo en torno a un cilindro, combinación de flujo rectilíneo y doblete, es simétrico respecto a la línea de corriente no perturbada, eje Ox, y por lo tanto no hay impulso ascendente sobre el cilindro con este tipo de flujo. Solamente se podrá desarrollar un impulso ascendente dinámico si, el conjunto de las líneas de corriente no es simétrico con respecto a la línea de corriente no perturbada; el flujo no simétrico se puede conseguir sumando un vórtice libre al doblete y al flujo rectilíneo.

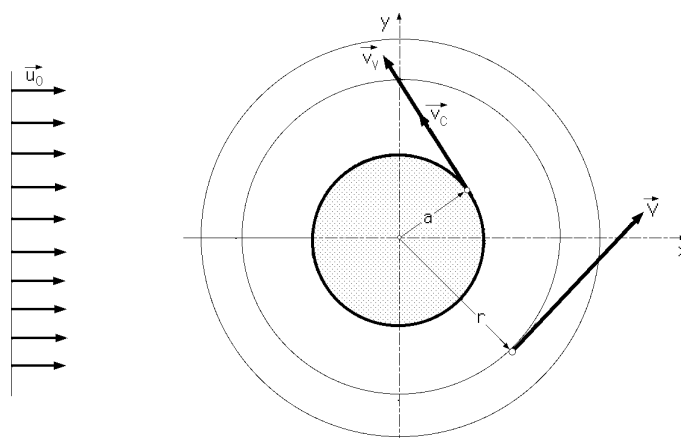


Fig IV.22.- Flujo en torno a un cilindro con vórtice libre

Sea \vec{V}_v la velocidad en la superficie del cilindro debida exclusivamente a un vórtice libre en sentido contrario a las agujas del reloj; la circulación en torno al cilindro es, como sabemos,

$$\Gamma = 2 \pi a V_v$$

siendo a el radio del cilindro; la magnitud de la velocidad resultante es,

$$V = V_c + V_v = 2 u_0 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2 \pi a}$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre un punto de la corriente no perturbada, y un punto del cilindro, se tiene,

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho u_0^2 = p + \frac{1}{2} \rho V^2$$

siendo el valor de la presión,

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho u_0^2 - \frac{\rho}{2} \left(2 u_0 \sin \theta + \frac{u_0^2}{a} \right)^2$$

Para calcular la fuerza neta de impulso ascendente, en ángulo recto con el movimiento no perturbado, se hace la integración de las fuerzas de presión sobre el cilindro en la dirección Oy, Fig IV.23.

Su componente vertical es,

$$dF_{p_{vertical}} = p a d \sin \theta$$

El impulso ascendente, de signo contrario, es,

$$dF_{ascendente} = - p a d \sin \theta$$

por lo que el impulso ascendente total sobre el cilindro F_{asc} es,

$$\begin{aligned} F_{asc} &= - \int_0^{2\pi} p a \sin \theta d\theta = - \int_0^{2\pi} \left\{ p_0 + \frac{1}{2} \rho u_0^2 - \frac{\rho}{2} \left(2 u_0 \sin \theta + \frac{u_0^2}{a} \right)^2 \right\} a \sin \theta d\theta = \\ &= - a \left(p_0 + \frac{\rho u_0^2}{2} \right) \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta + \frac{a \rho}{2} \int_0^{2\pi} \left(4 u_0^2 \sin^3 \theta + \frac{2 u_0}{a} \sin^2 \theta + \frac{\rho}{4} \frac{\sin^2 \theta}{a^2} \right) d\theta \end{aligned}$$

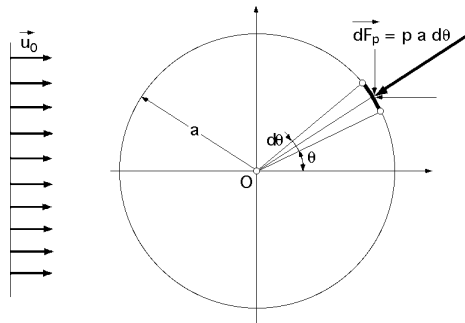


Fig IV.23.- Fuerza de empuje ascensional

y como,

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0 ; \quad \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = 0$$

resulta finalmente,

$$F_{asc} = \frac{a \rho}{2} \left[4 u_0^2 \left\{ - \frac{\cos \theta}{2} (\sin^2 \theta + 2) \right\} + \frac{2 u_0}{a} \left(\frac{2}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) - \frac{\rho}{4} \frac{\cos \theta}{a^2} \right]_0^{2\pi} = \rho u_0^2 a$$

que es la fuerza de impulso ascendente por unidad de longitud del cilindro; a esta ecuación se la conoce como de Kutta-Joukowski.

IV.14.- EJEMPLOS RELATIVOS A LA RESOLUCIÓN ANALÍTICA DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE EN EL PLANO

Sea una función de la variable compleja, $x + i y$, de la forma,

$$f(z) = \phi(x, y) + i \psi(x, y)$$

A todo número complejo, $x + i y$, corresponde en el plano (x, y) un punto bien definido. Se dice que la función $f(z)$ es analítica, cuando el límite para, $z \rightarrow 0$, de la relación,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z}$$

es independiente de la forma con que $z \rightarrow 0$. Esto implica que,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

puediéndose comprobar que las funciones ϕ y ψ satisfacen la ecuación de Laplace.

En consecuencia, la parte real y la parte imaginaria de una función analítica cualquiera de la variable compleja, $x + i y$, son dos funciones armónicas, de forma que para un flujo en el plano (x, y) , la parte real se puede considerar como el potencial de velocidades y la parte imaginaria como la función de corriente.

Las componentes u y v de la velocidad, vienen dadas, como sabemos, por las relaciones,

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

resultando

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \left(- \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} = u - i v$$

a) Movimiento uniforme de velocidad u_0 .- Consideremos la función lineal

$$f(z) = u_0 z = u_0 x + i u_0 y$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se deduce que, $\frac{\partial \phi}{\partial x} = u_0$; $\frac{\partial \psi}{\partial x} = u_0$, que representa una corriente uniforme en la dirección del eje x ; la velocidad se puede calcular a partir de ϕ o de ψ , hallando la derivada de $f(z)$ respecto de z , en la forma,

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u_0 + i u_0 = u_0 (1 + i)$$

en la que, la parte real de la derivada es igual a la componente u de la velocidad, y la parte imaginaria igual a $-v$; para conseguir un resultado práctico, la derivada, df/dz , tiene que existir, y ser única; en este caso se tiene que,

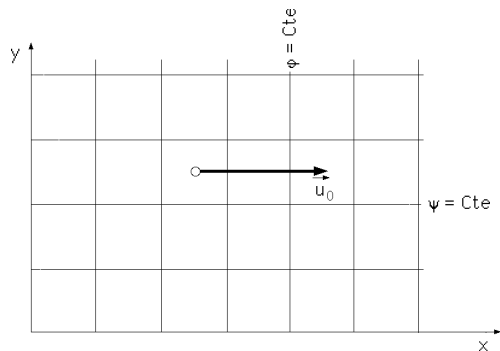


Fig IV.24.- Movimiento uniforme de velocidad u_0

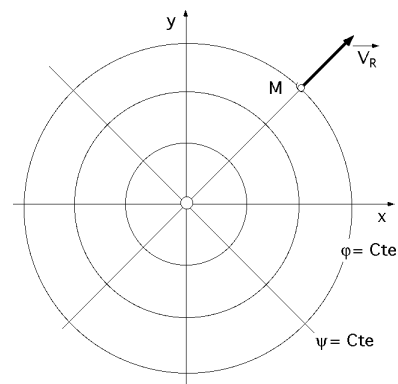


Fig IV.25.- Flujo radial para una fuente

$$\frac{df}{dz} = u_0 = u$$

que es real, y por lo tanto, como era de esperar, $v = 0$.

Las líneas equipotenciales, $\psi = Cte$, son paralelas al eje Oy, y las líneas de corriente, $\phi = Cte$, paralelas al Ox, Fig IV.24.

b) Flujo radial para una fuente (o un sumidero).- Algunas veces conviene utilizar la variable compleja en polares, en la forma,

$$z = x + iy = r e^{i\theta} = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

siendo,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} ; \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}$$

Si se considera,

$$f(z) = \frac{m}{2} \ln z = m \ln r e^{i\theta} = m (\ln r + i \theta)$$

siendo m la intensidad de la fuente de la forma, $m = \frac{q}{2}$, y por lo tanto, un número real, se tiene,

$$\psi = m \ln r = m \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = m \theta = m \arctg \frac{y}{x}$$

La velocidad V_R viene dada por,

$$V_R = \left(\frac{dr}{dt} \right)_{\psi=Cte} = m \frac{dr}{r} \frac{1}{dr} = \frac{m}{r}$$

correspondiéndose con un manantial o con un sumidero, según que el signo de m sea positivo o negativo, Fig IV.25.

c) *Flujo en las proximidades de un punto fijo.*- Este movimiento viene definido por la función compleja

$$f(z) = \frac{a}{2} z^2 = \frac{a}{2} (x + i y)^2 = \frac{a}{2} (x^2 - y^2 + 2 i x y)$$

encontrándose,

$$= \frac{a}{2} (x^2 - y^2)$$

$$= a x y$$

siendo las líneas de corriente hipérbolas equiláteras de ecuación, $a x y = Cte$, y las equipotenciales también hipérbolas equiláteras ortogonales a las líneas de corriente. Las componentes de la velocidad en un punto vienen dadas por,

$$u = \frac{a}{x} = a x \quad ; \quad v = \frac{a}{y} = - a y$$

siendo, por lo tanto, un movimiento plano alrededor de un punto de estancamiento A.

d) *Flujo entre dos paredes que forman un ángulo α .*- Si una de las paredes se hace coincidir con el eje Ox, la función analítica $f(z)$ se puede poner en la forma,

$$f(z) = \frac{a}{n} z^n = \frac{a}{n} (x + i y)^n, \text{ siendo, } n = \frac{\pi}{\alpha}$$

Como en polares se tiene que,

$$z = x + i y = r (\cos \theta + i \sin \theta) \quad z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

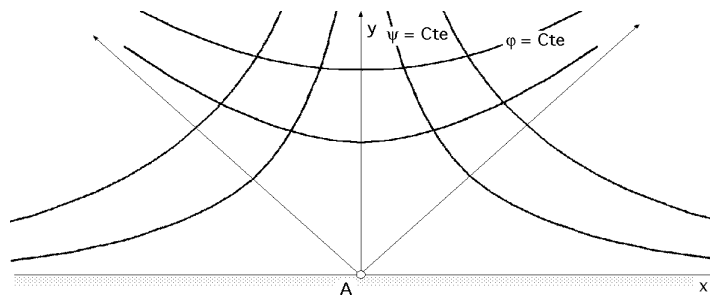


Fig IV.26.- Flujo en las proximidades de un punto fijo; líneas de corriente y equipotenciales

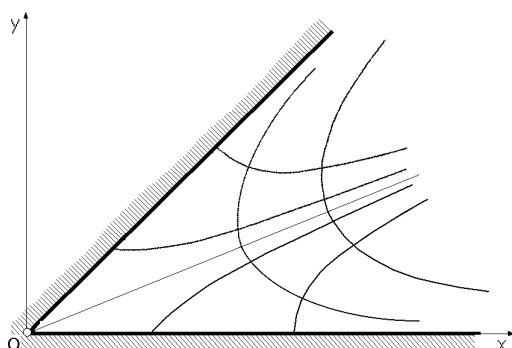


Fig IV.27.- $\alpha = \pi/4$; $f(z)$

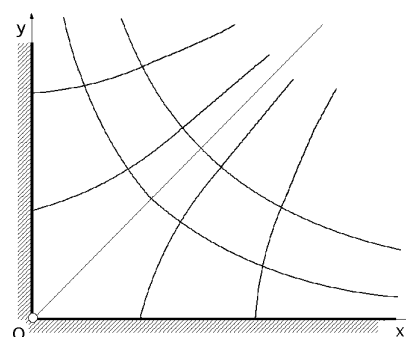


Fig IV.28.- $\alpha = \pi/2$; $f(z) = A z^2$

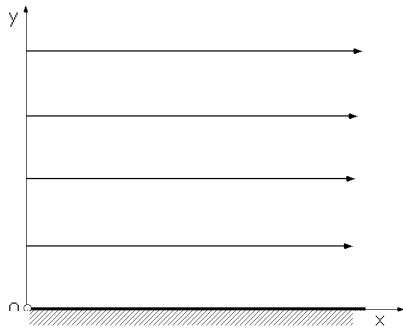


Fig IV.29.- $a = 1$; $f(z) = A z$

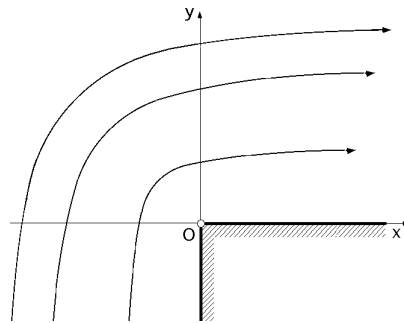


Fig IV.30.- $a = 3/2$; $f(z) = A z^{2/3}$

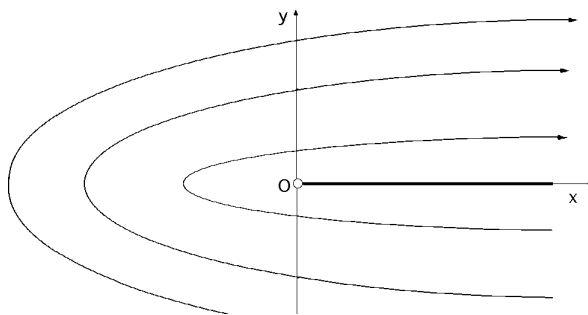


Fig IV.31.- $a = 2$; $f(z) = A z^{1/2}$

Las líneas equipotenciales son de la forma, $\phi = \frac{a}{n} r^n \cos n \theta = Cte$

y las líneas de corriente, $\psi = \frac{a}{n} r^n \sin n \theta = Cte$

En las Fig IV.27-28-29-30-31 se representan algunos casos para diversos valores de a .

IV.15.- LINEALIDAD DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE

La linealidad de la ecuación, $\nabla^2 \phi = 0$, permite hacer combinaciones lineales de soluciones conocidas de la misma. En efecto, sean f_1 y f_2 dos funciones, soluciones de la ecuación de Laplace; la función,

$$f_1 + f_2$$

o cualquier otra combinación lineal de la forma,

$$f_1 + \mu f_2$$

será también solución de esta ecuación; en tal superposición, los valores de las líneas de corriente, o de las equipotenciales, se ajustan algebraicamente, mientras que las velocidades se componen geoméricamente.

Por lo tanto, a partir de dos redes de flujo simples, se pueden obtener nuevas redes en las que, las nuevas líneas equipotenciales vendrán dadas por,

$$\phi_1 + \mu \phi_2$$

y las nuevas líneas de corriente por,

$$1 + \mu \quad 2$$

Como ejemplo de aplicación, vamos a estudiar el *Flujo alrededor de un cilindro circular con circulación.*

El flujo representado por la función que se propone,

$$f(z) = u_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2} \ln \frac{z}{a}$$

tiene una importancia aerodinámica considerable; está constituido por la combinación de dos flujos conocidos:

- a) El flujo alrededor de un círculo (cilindro) con velocidad uniforme u_0 en el infinito
- b) El flujo alrededor de un vórtice (torbellino) puntual

En consecuencia, representa un flujo con circulación alrededor de un círculo de radio a .

La función potencial es de la forma, $\phi = \frac{u_0}{2} \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta$

y la función de corriente, $\psi = - \frac{u_0}{2} \ln \frac{r}{a} + u_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta$

La línea de corriente correspondiente a, $\psi = 0$, se compone de un círculo de radio, $r = a$, y de una curva de ecuación,

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \ln \frac{r}{a} \frac{1}{u_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right)} = \frac{\ln \frac{r}{a}}{2 u_0 r \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)} = \left| \lim_{r \rightarrow a} \frac{\ln \frac{r}{a}}{1 - \frac{a^2}{r^2}} \right| \frac{1}{2} = \frac{1}{4 u_0 r}$$

que junto con, $r=a$, dan lugar a una serie de casos particulares, según que $\frac{1}{4 u_0 r}$ sea mayor, igual o menor que la unidad, Fig IV.32,33 Y 34.

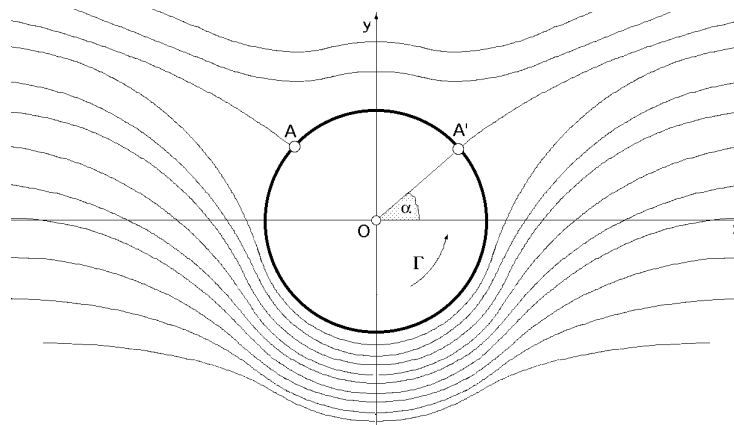


Fig IV.32.- Solución con dos puntos reales de estancamiento A y A'

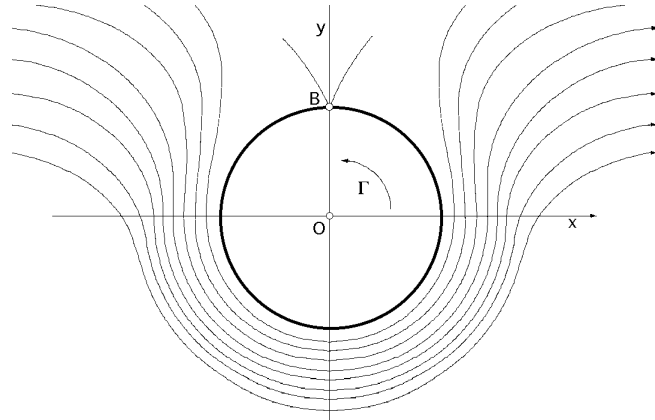


Fig IV.33.- Solución con dos puntos de estancamiento, que se confunden en uno solo B

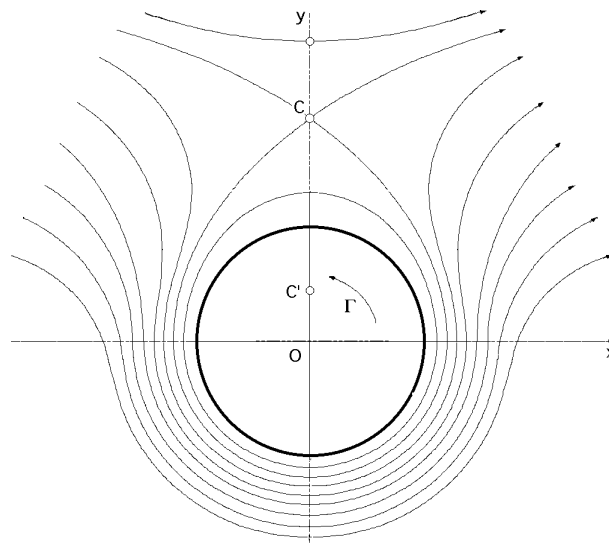


Fig IV.34.- Solución en la que no existen puntos de estancamiento. Existen dos puntos conjugados de velocidad nula

- a) Si, $\frac{u_0 r}{4} < 1$, las soluciones son dos puntos reales de estancamiento A y A'
- b) Si, $\frac{u_0 r}{4} = 1$, los dos puntos de estancamiento se confunden en B
- c) Si, $\frac{u_0 r}{4} > 1$, no hay puntos de estancamiento

Sin embargo, para el caso (c) se encuentran dos puntos de velocidad nula, los puntos C y C' conjugados con relación al círculo, Fig IV.34.

Sobre el círculo la velocidad es tangente, y tiene por ecuación,

$$v = \left(\frac{1}{r} \frac{d\psi}{d\theta} \right)_{r=a} = \frac{u_0}{2} \left(\frac{a}{r} - 2 \right) \sin \theta$$

resultado que se podía preveer de antemano.

IV.16.- REPRESENTACIÓN CONFORME

La relación compleja, $w = F(z)$, en la que,

$$w = u + i v \quad ; \quad z = x + i y$$

expresan una correspondencia tal que, a cada par de valores (x,y) , corresponde un par de valores (u, v) , Fig IV.35.

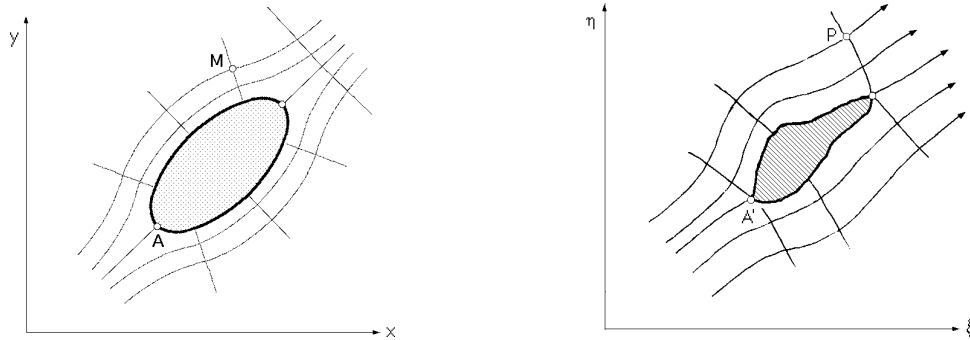


Fig IV.35.- Representación conforme

En consecuencia, a todo punto M del plano (x,y) corresponderá un punto P de coordenadas (ξ, η) del plano conjugado; asimismo, a una línea descrita por M corresponderá una línea descrita por P.

A la intersección de dos curvas corresponde la intersección de dos curvas transformadas.

Se dice que la transformación es conforme cuando conserva los ángulos, es decir, si dos curvas del plano z se cortan en M bajo un cierto ángulo α , en el plano w se corresponderá con dos curvas que se cortan en P, homólogo de M, bajo el mismo ángulo, (salvo para ciertos puntos singulares).

Admitiremos, sin demostración, los siguientes teoremas,

1) Si, $w = f(z)$, es una función analítica de la variable z , la transformación que permite pasar de z a w es conforme.

2) Si se efectúa una transformación conforme de un flujo plano definido por su red de líneas equipotenciales y de corriente, se tiene que,

Las transformadas de las líneas equipotenciales y de corriente formarán una nueva red de líneas equipotenciales y de corriente en donde cada transformada conserva la magnitud de la línea primitiva.

La circulación de las velocidades a lo largo de una línea cualquiera del plano primitivo es igual a la circulación a lo largo de la transformada.

Prácticamente la resolución de un problema de flujo se reduce a buscar una transformación conforme que permita una correspondencia entre el flujo desconocido y otro más simple, o a otro ya conocido.

IV.17.- TRANSFORMACIÓN DE JOUKOWSKI

Esta transformación es de la forma,

$$w = u + i v = \frac{1}{2} \left(z + \frac{b^2}{z} \right)$$

Si se aplica a las líneas de corriente que derivan del potencial complejo,

$$f(z) = u_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - i \frac{u_0}{2} \ln \frac{z}{a}$$

se puede encontrar la forma de las líneas de corriente alrededor de obstáculos cuyo perfil sea el de ala de avión, y conocer así el reparto de velocidades alrededor de los mismos.

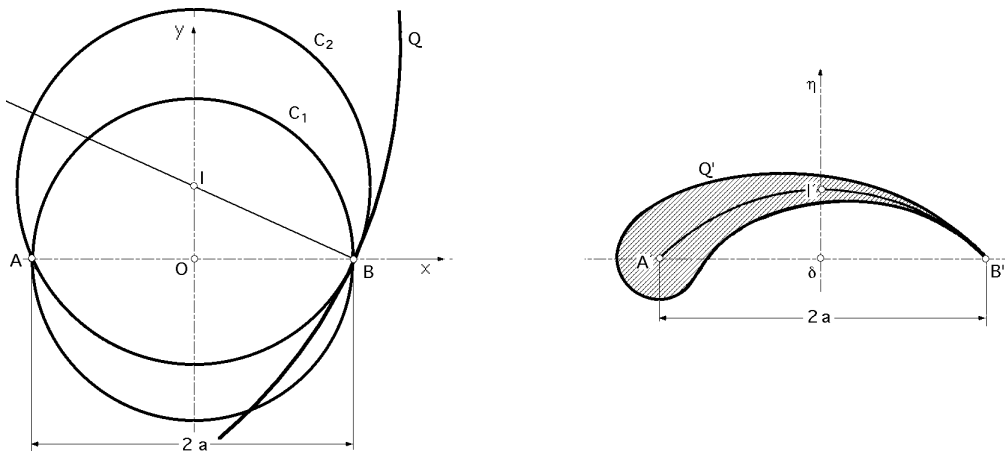


Fig IV.33.- Transformación de Joukowski

Los resultados teóricos así obtenidos concuerdan perfectamente con la experiencia.

Se puede demostrar que esta transformación equivale a las dos relaciones siguientes,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{b^2}{r} \right) \cos \\ &= \frac{1}{2} \left(r - \frac{b^2}{r} \right) \text{sen} \end{aligned}$$

En la Fig IV.33 se tiene que,

Los puntos A y B se transforman en los puntos A' y B'.

Al círculo C₁ de diámetro (AB) le corresponde el segmento (A'B').

A los círculos de ecuación, $x^2 + y^2 = R^2$, de centro O, corresponden las elipses homofocales de focos A y B.

Al círculo C₂ de centro I, que pasa por los puntos A y B, corresponde el arco de círculo (A'T'B').

Al círculo Q tangente en B al círculo C₂, corresponde el perfil Q' tangente en B' al arco (A'T'B').

Si se traza el flujo, con o sin circulación, alrededor del círculo, la transformación de Joukowski permitirá obtener el flujo alrededor del perfil de ala de avión, con lo que se entraría en el estudio de perfiles, mas propio de la aerodinámica teórica.

Si mediante un procedimiento de transformación conforme pasamos de perfiles circulares a perfiles alares, las presiones teóricas sobre cada punto del perfil se corresponderán con las de los correspondientes puntos del círculo y, por lo tanto, al integrarse las mismas se puede llegar a la sustentación de un ala que se extiende indefinidamente (ala infinita).

V.- DINÁMICA DE LOS FLUIDOS PERFECTOS

V.1.- ECUACIONES DE EULER

Vamos a considerar un fluido perfecto en movimiento, y un pequeño paralelepípedo de flujo, fijo, de lados infinitamente pequeños, y de volumen, $dx dy dz$. Como el fluido es perfecto, las presiones que se ejercen sobre las caras de este paralelepípedo, serán normales a las mismas; la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre este volumen, \vec{F} , tiene de componentes, \vec{X} , \vec{Y} , \vec{Z} , por unidad de masa, por lo que las fuerzas que actúan sobre este volumen, en la dirección de los ejes coordenados, serán iguales a estas componentes multiplicadas por la masa del paralelepípedo, Fig V.1; así tendremos que,

$$F_x = m j_x = m \frac{du}{dt}$$

$$F_y = m j_y = m \frac{dv}{dt}$$

$$F_z = m j_z = m \frac{dw}{dt}$$

son las fuerzas que hay que introducir en las ecuaciones del movimiento, según el principio de D'Alambert, y que son el producto de la masa del paralelepípedo por las aceleraciones según los ejes respectivos.

Las ecuaciones del movimiento del volumen escogido del líquido, en las proyecciones sobre los ejes de coordenadas, son,

$$p dy dz - \left(p + \frac{\rho}{x} dx \right) dy dz + X dx dy dz = dx dy dz \frac{du}{dt}$$

$$p dx dz - \left(p + \frac{\rho}{y} dy \right) dx dz + Y dx dy dz = dx dy dz \frac{dv}{dt}$$

$$p dx dy - \left(p + \frac{\rho}{z} dz \right) dx dy + Z dx dy dz = dx dy dz \frac{dw}{dt}$$

Resolviendo la primera de estas tres ecuaciones se encuentra,

$$-\frac{p}{x} + X = \frac{du}{dt} \quad ; \quad \frac{1}{x} \frac{p}{x} = X - \frac{du}{dt}$$

y haciendo lo propio con las otras dos, se llega al siguiente sistema,

$$\frac{1}{x} \frac{p}{x} = X - \frac{du}{dt}$$

$$\frac{1}{y} \frac{p}{y} = Y - \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{1}{z} \frac{p}{z} = Z - \frac{dw}{dt}$$

que son las ecuaciones de Euler.

A su vez, como,

$$u = f(x, y, z, t)$$

y ser, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, su derivada respecto de t es,

$$\frac{du}{dt} = \frac{u}{x} \frac{dx}{dt} + \frac{u}{y} \frac{dy}{dt} + \frac{u}{z} \frac{dz}{dt} + \frac{u}{t} \frac{dt}{dt} = \frac{u}{x} u + \frac{u}{y} v + \frac{u}{z} w + \frac{u}{t}$$

que sustituida en las ecuaciones de Euler, proporciona,

$$\frac{1}{x} \frac{p}{x} = X - \left(\frac{u}{x} u + \frac{u}{y} v + \frac{u}{z} w + \frac{u}{t} \right)$$

$$\frac{1}{y} \frac{p}{y} = Y - \left(\frac{v}{x} u + \frac{v}{y} v + \frac{v}{z} w + \frac{v}{t} \right)$$

$$\frac{1}{z} \frac{p}{z} = Z - \left(\frac{w}{x} u + \frac{w}{y} v + \frac{w}{z} w + \frac{w}{t} \right)$$

que permiten completar el numero de ecuaciones necesario para la resolución del problema, a que hay que calcular para un tiempo t , cuales son las componentes de la nueva velocidad (u , v , w) dadas las componentes iniciales (u_0 , v_0 , w_0), la presión p y la densidad ρ .

Por lo tanto, las ecuaciones necesarias son,

a) Ecuación de continuidad

b) Ecuación de compresibilidad, $f(p, v, T) = 0$

c) Tres relaciones de Euler, $F = m j$

V.2.- ECUACIÓN FUNDAMENTAL

Partimos de las ecuaciones de Euler, a las que respectivamente, multiplicamos por dx , dy , dz , quedando en la forma,

$$\frac{1}{x} \frac{p}{x} dx = X dx - \frac{du}{dt} dx = X dx - \frac{du}{dt} u dt = X dx - u du$$

$$\frac{1}{y} \frac{p}{y} dy = Y dy - \frac{dv}{dt} dy = Y dy - \frac{dv}{dt} v dt = Y dy - v dv$$

$$\frac{1}{z} \frac{p}{z} dz = Z dz - \frac{dw}{dt} dz = Z dz - \frac{dw}{dt} w dt = Z dz - w dw$$

Sumándolas miembro a miembro, resulta,

$$\frac{1}{x} \left(\frac{p}{x} dx + \frac{p}{y} dy + \frac{p}{z} dz \right) = \left. \begin{array}{l} p = f(x, y, z, t) \\ dp = \frac{p}{x} dx + \frac{p}{y} dy + \frac{p}{z} dz + \frac{p}{t} dt \\ \frac{p}{x} dx + \frac{p}{y} dy + \frac{p}{z} dz = dp - \frac{p}{t} dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{x} \left(dp - \frac{p}{t} dt \right) = X dx + Y dy + Z dz - (u du + v dv + w dw)$$

A su vez,

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2 \quad ; \quad V dV = u du + v dv + w dw = d\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

$$\frac{1}{x} \left(dp - \frac{p}{t} dt \right) = X dx + Y dy + Z dz - d\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

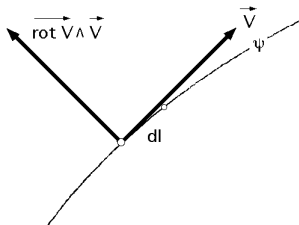


Fig V.2

que es la Ecuación Fundamental de la Hidráulica, combinación lineal de las tres ecuaciones de Euler, y que las reúne en una sola.

Por lo tanto, en su integración se tendrá en cuenta el camino a seguir, es decir, la ecuación fundamental de la Hidráulica solamente se puede integrar a lo largo de una trayectoria, Fig V.2.

Otra forma de obtener esta ecuación sería a partir de,

$$\frac{1}{x} \frac{p}{x} = X - \frac{du}{dt} \quad ; \quad X - \frac{1}{x} \frac{p}{x} = \frac{du}{dt} = u \frac{u}{x} + v \frac{u}{y} + w \frac{u}{z} + \frac{u}{t}$$

Sumándola y restándola, $v \frac{v}{x}$, $w \frac{w}{x}$, se obtiene:

$$X - \frac{1}{x} \frac{p}{x} = u \frac{u}{x} + v \frac{u}{y} + w \frac{u}{z} + \frac{u}{t} + v \frac{v}{x} + w \frac{w}{x} - v \frac{v}{x} - w \frac{w}{x} =$$

$$= u \frac{u}{x} + v \frac{u}{x} + w \frac{u}{x} + v \left(\frac{u}{y} - \frac{v}{x} \right) + w \left(\frac{u}{z} - \frac{w}{x} \right) + \frac{u}{t} = \frac{1}{2} \frac{(V^2)}{x} + (\text{rot } \vec{V} \cdot \vec{V})_x + \frac{u}{t}$$

y haciendo lo propio para las otras dos ecuaciones, y sumándolas junto a esta, resulta,

$$\vec{F} - \frac{1}{2} \text{grad } p = \frac{1}{2} \text{grad } V^2 + (\text{rot } \vec{V} \cdot \vec{V}) + \frac{\vec{V}}{t}$$

que es la ecuación fundamental para un fluido perfecto.

V.3.- ECUACIÓN DE BERNOULLI

La ecuación Fundamental se puede poner en la forma,

$$\frac{1}{\rho} (dp - \frac{\rho}{\rho} dt) = dT - d(\frac{V^2}{2})$$

En régimen permanente, $\frac{\rho}{\rho} dt = 0$, por lo que la ecuación anterior queda en la forma:

$$\frac{dp}{\rho} - dT + d(\frac{V^2}{2}) = 0$$

y si $T = f(p)$ resulta,

$$\frac{dp}{\rho} - (T - T_1) + \frac{V^2 - V_1^2}{2} = 0$$

que siempre hay que aplicar a lo largo de una línea de corriente , en la que,

$T = T - T_1$, es la energía potencial debida a las fuerzas del campo

$\frac{dp}{\rho}$, es la energía debida a las fuerzas de presión

$\frac{V^2 - V_1^2}{2}$, es la energía cinética por unidad de masa

El caso más frecuente, a la hora de aplicar esta ecuación es, que la única fuerza exterior sea el peso, (fluidos pesados), obteniéndose,

$$X = 0 ; Y = 0 ; Z = - g$$

por lo que,

$$\frac{dp}{\rho} + g dz + d(\frac{V^2}{2}) = 0 ; \quad \frac{dp}{\rho} = -g dz ; \quad \frac{dp}{\rho} + dz + d(\frac{V^2}{2g}) = 0$$

Integrándola, resulta,

$$\frac{dp}{\rho} + (z_1 - z_2) + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} = 0 ; \quad \frac{dp}{\rho} + (z_1 - z_2) + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} = 0$$

Si el fluido es incompresible, $\rho = Cte$, y por lo tanto,

$$\frac{p}{\rho} + z + \frac{V^2}{2g} = Cte$$

que es la ecuación de Bernoulli para un fluido ideal y en la que,

z , es la trayectoria

$z + \frac{p}{\gamma}$, es la línea de niveles piezométricos

$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$, es el plano de carga

La representación gráfica de la ecuación de Bernoulli es la indicada en la Fig V.3,

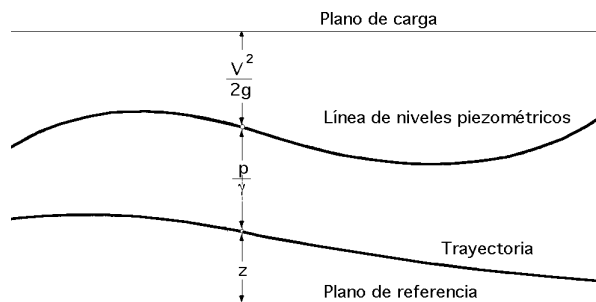


Fig V.3.-Representación gráfica de la ecuación de Bernoulli

Esta ecuación se puede deducir también a partir del Teorema de las fuerzas vivas, con las siguientes consideraciones,

- El líquido es perfecto, por lo que el trabajo debido a las fuerzas interiores es nulo, $T = 0$
- El líquido es incompresible, $k = 0$, por lo que si en un tiempo t ocupa la posición (ABCD), en el tiempo, $t + dt$, ocupará la posición (A'B'C'D')
- Si el régimen es permanente, las masas contenidas en (ABA'B') y en (CDC'D') son iguales, es decir, flujo entrante = flujo saliente, por lo que su valor será,

$$\begin{aligned} \text{Masa en 0, } m_0 &= \text{Volumen}_0 = V_0 \cdot \Delta t \\ \text{Masa en 1, } m_1 &= \text{Volumen}_1 = V_1 \cdot \Delta t \end{aligned} \quad \text{por lo que } V_0 = V_1$$

- El único trabajo es el de las fuerzas exteriores, que se compone del trabajo debido a la acción de la gravedad T_g y del trabajo debido a las presiones T_p .

El trabajo debido a la gravedad es,

$$T_g = \text{Peso} \times \text{Proy. vertical del camino recorrido} = m_0 g (z_0 - z_1)$$

El trabajo debido a las presiones es,

$$T_p = p_0 V_0 \Delta t - p_1 V_1 \Delta t$$

El trabajo debido a las presiones laterales del fluido sobre las paredes es 0, por ser la dirección de la fuerza originada por la presión perpendicular a la trayectoria.

De acuerdo con el Teorema de las fuerzas vivas,

$$m_0 g (z_0 - z_1) + p_0 V_0 \Delta t - p_1 V_1 \Delta t = \frac{m_1 V_1^2 - m_0 V_0^2}{2} = \frac{V_1^2 - V_0^2}{2} V_0 \Delta t$$

y como, $\rho_0 V_0 = \rho_1 V_1$, resulta,

$$(z_0 - z_1) + (p_0 - p_1) = \frac{V_1^2 - V_0^2}{2}$$

que es la expresión matemática del Teorema de Bernoulli para un fluido perfecto.

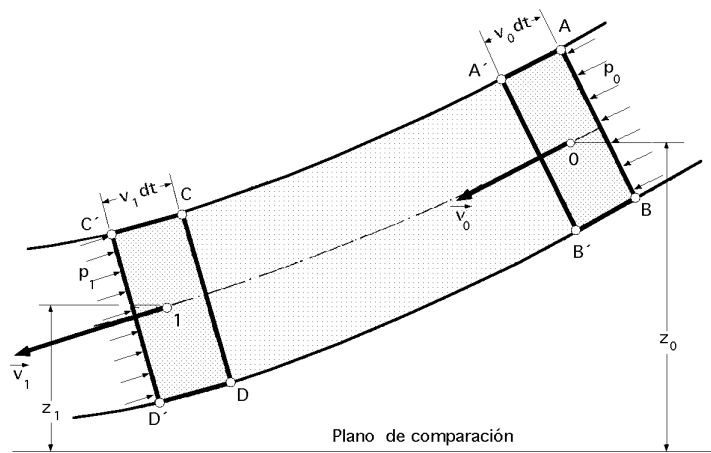


Fig V.4

La ecuación de Bernoulli está enunciada para dos secciones cualesquiera de la vena líquida y expresa la igualdad de las alturas totales H en estas secciones; puesto que estas secciones se han tomado libremente, para cualquier otra sección de la vena líquida, la altura total tendrá el mismo valor. De este modo, para el líquido ideal en movimiento, la suma de las tres alturas citadas, la de nivel, la de presión y la dinámica es una magnitud constante a lo largo de la citada vena líquida.

El sentido energético de la ecuación de Bernoulli para una vena líquida elemental de líquido ideal consiste en que la energía específica total del líquido se mantiene constante a lo largo de la vena líquida. La ecuación de Bernoulli expresa, por consiguiente, la ley de conservación de la energía mecánica para un líquido ideal en movimiento, la cual puede presentarse en tres formas, la de posición, la de presión y la cinética. La primera y la tercera son propias de los cuerpos sólidos y de los líquidos, mientras que, la energía de presión, es característica de los líquidos en movimiento. Durante el movimiento de un líquido ideal, una forma de energía puede transformarse en otra, pero la energía específica total, quedara siempre invariable.

V.4.- ALGUNAS APLICACIONES DEL TEOREMA DE BERNOULLI

TUBOS PIEZOMÉTRICOS.- Sirven para medir la presión estática. Si colocamos en dos secciones de la vena líquida en movimiento, unos tubos que no produzcan ningún tipo de perturbación en la corriente, el líquido alcanzará en ellos un cierto nivel que representa la altura piezométrica o manométrica, $p/\rho g$, Fig V.5.

Aplicando Bernoulli a las dos secciones resulta,

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{V_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \quad ; \quad (z_0 + \frac{p_0}{\rho g}) - (z_1 + \frac{p_1}{\rho g}) = \frac{V_1^2 - V_0^2}{2g} = h$$

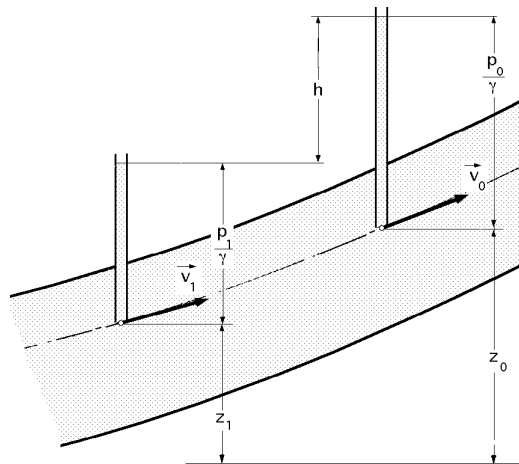


Fig V.5.- Medida de la presión estática mediante tubos piezométricos

El primer miembro representa el desnivel h existente entre los dos tubos piezométricos; a su vez, la diferencia de energía de velocidades entre los dos puntos, es la misma que la diferencia de niveles piezométricos entre dichos puntos.

TUBO VENTURI.- De acuerdo con el apartado anterior se ha ideado un aparato destinado a medir caudales, por simple lectura de las presiones dadas por dos manómetros dispuestos en un tubo cónico, Fig V.6.

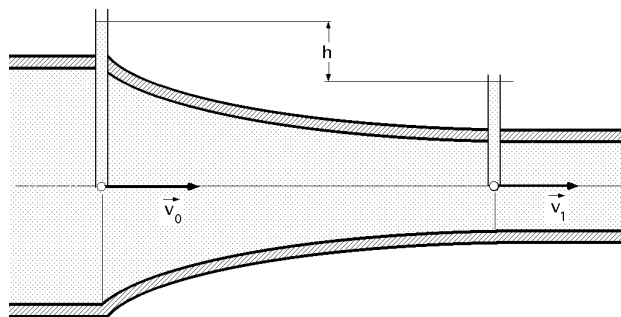


Fig V.6.- Tubo Venturi

$$\text{Como, } z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} \quad \frac{p_0 - p_1}{\gamma} = \frac{V_1^2 - V_0^2}{2g} = h$$

$$z_0 = z_1$$

y como por la ecuación de continuidad, $V_1 = V_0$, despejando V_1 y sustituyendo se obtiene,

$$\frac{(V_0 - \frac{0}{1})^2 - V_0^2}{2g} = h ; \quad V_0 = \sqrt{\frac{2gh}{(\frac{0}{1})^2 - 1}}$$

$$\text{El caudal es, } Q = V_0 = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{1}{2} - \frac{1}{0}}} = \sqrt{\frac{2g(\frac{p_0}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma})}{\frac{1}{2} - \frac{1}{0}}} = k\sqrt{h}$$

En este resultado hay que tener en cuenta, para un fluido real, el rozamiento, que se puede considerar introduciendo un coeficiente de velocidad que oscila entre 0,95, a poco más de la unidad; se suele tomar como valor más indicado 0,985 para los Venturis nuevos y 0,98 para los Venturis usados.

TUBO PITOT.- Sirve para medir la presión total o presión de estancamiento, es decir, la suma de la presión estática y la presión dinámica.

En la embocadura del tubo, punto 1, se forma un punto de estancamiento o de remanso, por lo que la velocidad $V_1 = 0$ y la presión aumenta hasta el valor,

$$P_1 = P_{est} = P_0 + \frac{V_0^2}{2g}$$

A su vez entre 1 y 2,

$$z_1 + \frac{P_{est}}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

como en el punto 1 se tiene, $V_1 = 0$, y en el punto 2, $V_2 = 0$, y llamando, $z_2 = h$, resulta,

$$\frac{P_{est}}{\rho g} = \frac{P_2}{\rho g} + z_2 = \left| P_2 = P_{atm} = 0 \right| = z_2 = h ; P_{est} = \rho g h$$

en la que P_{est} vale,

$$P_{est} = P_0 + \frac{V_0^2}{2g} = P_0 + \frac{\rho g h}{2}$$

TUBO DE PRANDTL.- Este tubo combina un tubo de Pitot y un tubo piezométrico; el tubo de Pitot mide la presión total, y el tubo piezométrico la presión estática, por lo que el tubo de Prandtl mide la diferencia de los dos, es decir, mide la presión dinámica.

Cuando el tubo de Prandtl se introduce en un fluido, produce una modificación en el flujo, de forma que dicha perturbación se traduce en la formación en el punto 1 de un punto de estancamiento, de manera que,

$$P_1 = P_{est} ; V_1 = 0$$

Se supondrá que la diferencia de alturas entre 1 y 2 es despreciable; además habrá que suponer también que, en el punto 2 ya no hay perturbación, por lo que,

$$V_2 = V_0 ; P_2 = P_0$$

En el interior del tubo de Prandtl y del manómetro diferencial, el fluido principal y el fluido manométrico, estarán en reposo, por lo que se puede aplicar la ecuación fundamental de la Hidrostática; aplicando Bernoulli entre 0 y 1, teniendo en cuenta que,

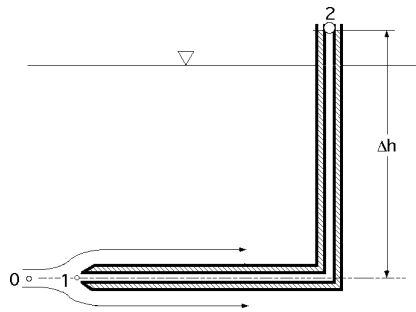


Fig V.7.- Tubo Pitot

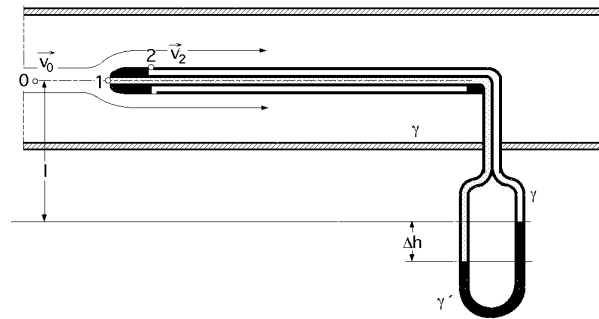


Fig V.8.- Tubo de Prandtl

$$z_0 = z_1 = z_2 \quad ; \quad V_1 = 0 \quad ; \quad p_0 = p_2$$

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{V_0^2}{2g} = \frac{p_1}{\rho} \quad ; \quad p_0 + \frac{V_0^2}{2g} = p_1 \quad ; \quad p_1 - p_2 = \frac{V_0^2}{2g}$$

Aplicando, a su vez, Bernoulli entre 1 y 2, y como, $z_1 = z_2$, resulta,

$$p_1 + \frac{V_1^2}{2g} = p_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

que es la misma demostrada anteriormente.

Aplicando la ecuación fundamental de la Hidrostática entre 1 y 2,

$$p_1 = p_2 + \rho g (h_1 - h_2) \quad ; \quad h_1 - h_2 = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \quad ; \quad h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$$

Como, $p_1 = p_2 + \frac{V_0^2}{2g}$, resulta:

$$p_2 + \frac{V_0^2}{2g} = p_2 + \rho g h \quad ; \quad \frac{V_0^2}{2g} = \rho g h$$

Despejando V_0 , resulta finalmente,

$$V_0 = \sqrt{\frac{2 \rho g h}{\rho}} = \sqrt{2 g h} = \sqrt{2 g h \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)}$$

que es la velocidad teórica de la corriente.

TUBO DE PITOT-DARCY.- Este hidrotímetro, Fig V.9, utilizado para la medida de la velocidad a distintas profundidades, consiste en dos tubos montados sobre una tablilla graduada de modo que sus extremos inferiores, de aproximadamente 1,5 mm de diámetro, y con una llave común L, están doblados, uno, en el sentido de la corriente, y el otro, en el contrario.

Una vez sumergido en el líquido, éste asciende por el primer tubo a un nivel superior a la superficie libre, mientras que en el otro tubo se produce una aspiración, descendiendo el nivel del líquido por debajo de dicha superficie libre. Cuando se introduce el tubo en la corriente, verticalmente, a la

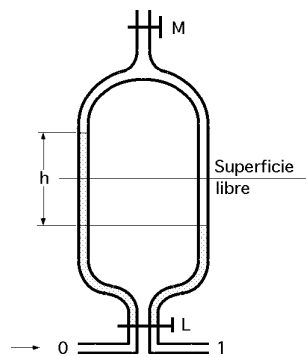


Fig V.9.- Tubo de Pitot-Darcy

profundidad deseada, y se abren las llaves L y M, el líquido habrá adquirido la posición que se indica en la Fig V.9, momento en el cual se cierra la llave M y se saca el aparato.

Aplicando la ecuación de Bernoulli se tiene,

$$0 + \frac{P_0}{\rho} + 0 = 0 + \frac{P_1}{\rho} + \frac{V^2}{2g} \quad ; \quad \frac{V^2}{2g} = \frac{P_0 - P_1}{\rho} = \left(\frac{P}{\rho}\right) = h$$

$$V = \sqrt{2gh} = 4,42 \sqrt{h}$$

Para líquidos reales suele utilizarse otra expresión, de la forma,

$$v = \mu \sqrt{2gh}$$

en la que μ es un coeficiente de reducción de velocidad, que varía entre 0,84 y 1, y depende de la forma y dimensiones del aparato.

V.5.- TEOREMA DE TORRICELLI

Si a una masa líquida la aplicamos la ecuación de Bernoulli entre su superficie libre, y la salida por un orificio libre, tomando como plano de referencia el que pasa por el centro de dicho orificio, Fig V.10, se tiene,

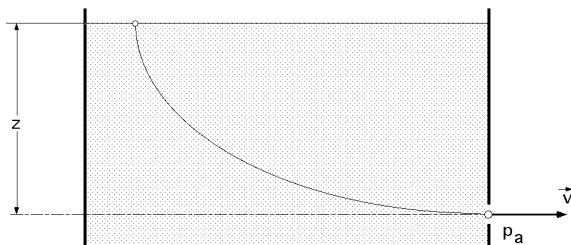


Fig V.10

$$z + \frac{P_a}{\rho} + 0 = 0 + \frac{P_a}{\rho} + \frac{V^2}{2g} \quad ; \quad V = \sqrt{2gz}$$

que es la velocidad de salida de un líquido por un orificio, función de la profundidad a la que se encuentre el orificio.

V.6.- APLICACIÓN DEL TEOREMA DE BERNOULLI A LÍQUIDOS EN MOVIMIENTO DE ROTACIÓN

Supongamos un canal guía que gira alrededor del eje Oz, por el interior del cual circula un líquido; las fuerzas exteriores que actúan sobre dicho líquido en rotación son,

a) Su fuerza centrífuga, $r \omega^2$

b) Su peso g

que proporcionan las siguientes componentes,

Fuerza centrífuga, $\overline{r \omega^2} (x \omega^2, y \omega^2, 0)$	$X = x \omega^2$
Gravedad, $\vec{g} (0, 0, -g)$	$Y = y \omega^2$
	$Z = -g$

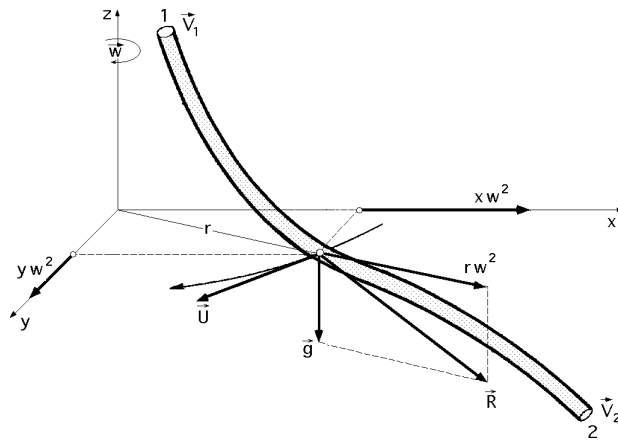


Fig V.11.- Canal guía que gira alrededor del eje z

A su vez,

$$dT = X dx + Y dy + Z dz = x w^2 dx + y w^2 dy - g dz$$

$$\begin{aligned} T = T_2 - T_1 &= w^2 \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} + w^2 \frac{y_2^2 - y_1^2}{2} - g(z_2 - z_1) = \\ &= w^2 \frac{x_2^2 + y_2^2}{2} - w^2 \frac{x_1^2 + y_1^2}{2} - g(z_2 - z_1) = w^2 \frac{r_2^2}{2} - w^2 \frac{r_1^2}{2} - g(z_2 - z_1) \end{aligned}$$

y como para la velocidad tangencial se tiene, $u_1 = w r_1$, $u_2 = w r_2$, por lo que,

$$T = T_2 - T_1 = \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} - g(z_2 - z_1)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación general,

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} - (T_2 - T_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} = 0 \quad ; \quad \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} = 0$$

que se puede poner en la forma,

$$\frac{p_2}{\rho} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g} = \frac{p_1}{\rho} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g}$$

de la que se obtienen las siguientes conclusiones,

a) Si el tubo no gira, $u = 0$, se obtiene de nuevo la ecuación de Bernoulli para líquidos en movimiento, en su forma más simple.

b) Si el tubo es recto y paralelo al eje de giro, la velocidad tangencial es la misma para todos los puntos, $u_2 = u_1$ y así queda también la ecuación de Bernoulli en su forma más simple.

La ecuación anterior es de aplicación al desarrollo de la ecuación general de las turbinas hidráulicas; también lo es a los sistemas de engrase y refrigeración de ejes, etc.

V.7.- DINÁMICA DE LOS FLUIDOS REALES. INTRODUCCIÓN.-

Los fluidos reales se distinguen de los ideales en que poseen una cierta viscosidad, es decir, un rozamiento interior que origina tensiones tangenciales entre los filetes fluidos.

Los movimientos de circulación de los fluidos se pueden dividir en dos tipos,

a) *Movimientos laminares, o de Poiseuille*, que son flujos regulares en los que la masa fluida esta formada por filetes yuxtapuestos, perfectamente individualizados, en los que las superficies libres son lisas y unidas; en realidad sólo se dan en algunos casos muy particulares o en fluidos muy viscosos; el número de Reynolds en flujos por el interior de tubos es inferior a 2.000.

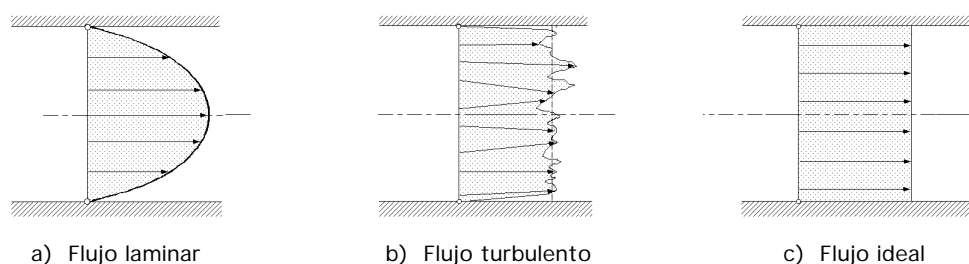


Fig V.12.- Isotaquias de velocidades

b) *Movimientos turbulentos, o hidráulicos*, en los que los filetes líquidos se entrecruzan no conservan su individualidad; las superficies libres son turbulentas y estriadas, y son los movimientos que con más frecuencia se presentan en la práctica.

Si en cada punto de una masa fluida en movimiento turbulento se miden las velocidades instantáneas, se observa que estas varían en magnitud y dirección sin ninguna regularidad, con una frecuencia a veces muy grande, pero no se apartan jamás de un valor medio, alrededor del cual oscilarán más o menos rápidamente; otro tanto sucede con las presiones.

Los valores medios, de velocidades y presiones, definen un régimen ficticio que se conoce como movimiento medio, o régimen de Bazin, siendo sus características las que normalmente aparecen en las fórmulas prácticas de Hidráulica.

Mediante este modelo, el movimiento de un fluido en cualquier tipo de régimen, laminar o turbulento, puede asimilarse al de un fluido perfecto, salvo en las zonas próximas a las paredes, en que la existencia de elevados gradientes de velocidad, aun en fluidos de pequeña viscosidad, hacen que se manifiesten en gran manera las fuerzas de viscosidad; a esta región se la conoce como capa límite.

V.8.- ECUACIONES DE NAVIER-STOKES DE UN FLUIDO VISCOSO INCOMPRESIBLE

En un fluido en movimiento, las tensiones tangenciales engendradas por la viscosidad son proporcionales a los gradientes de velocidad, lo cual permite calcular, en forma muy exacta, las pérdidas existentes en un flujo laminar. Sin embargo, los resultados obtenidos no se pueden utilizar para calcular las pérdidas si el movimiento es turbulento, ni aun en el caso de considerarle como movimiento medio, por cuanto a este habrá que superponer un movimiento de agitación originado al existir un continuo intercambio de pequeñas masas fluidas en movimiento, que originan una disipación de energía por frotamiento viscoso, tal, que las pérdidas de carga totales son mucho más

importantes que las que resultarían de considerar solamente la viscosidad en el citado movimiento medio; en consecuencia, las masas fluidas en movimiento originaran unas variaciones de las cantidades de movimiento que originan una disipación de energía por choque.

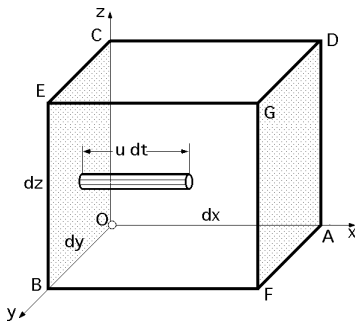


Fig V.13.- Paralelepípedo elemental para fluidos reales

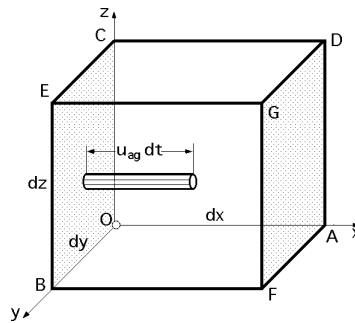


Fig V.14.- Velocidad de agitación en el movimiento turbulento

Por lo tanto, si a las ecuaciones de Euler se añaden las que ocasiona la viscosidad, se obtienen las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma más simplificada. Para su cálculo y determinación, estudiaremos lo que acontece a lo largo del eje Ox, teniendo en cuenta la ecuación de Newton de la viscosidad para la velocidad \vec{u} , y que tendrá por componentes, u_x, u_y, u_z , según los ejes (x, y, z) respectivamente, en la forma,

$$u_x = \frac{u}{x} \quad ; \quad u_y = \frac{u}{y} \quad ; \quad u_z = \frac{u}{z}$$

correspondientes al flujo entrante por las caras (ECOB) ó $dy dz$, (EGFB) ó $dx dz$, y (ECDG) ó $dx dy$, respectivamente.

Para las caras puestas del cubo elemental, a las anteriormente citadas, se tiene,

$$u_x - \frac{u_x}{x} dx = \frac{u}{x} - \frac{2u}{x^2} dx$$

$$u_y - \frac{u_y}{y} dy = \frac{u}{y} - \frac{2u}{y^2} dy$$

$$u_z - \frac{u_z}{z} dz = \frac{u}{z} - \frac{2u}{z^2} dz$$

que restadas de las primeras permiten obtener,

Según el eje Ox: $\frac{2u}{x^2} dx$

Según el eje Oy: $\frac{2u}{y^2} dy$

Según el eje Oz: $\frac{2u}{z^2} dz$

y multiplicándolas por la sección correspondiente, se obtienen las fuerzas de naturaleza viscosa, debidas a la variación de la componente \vec{u} de la velocidad, según los citados ejes, es decir,

$$\frac{2u}{x^2} dx dy dz = dF_{ux}$$

$$\frac{2u}{y^2} dy dx dz = dF_{uy}$$

$$\frac{2u}{z^2} dz dx dy = dF_{uz}$$

Sumándolas se obtiene la fuerza total debida a la viscosidad, para la velocidad \vec{u} ,

$$dF_u = \left(\frac{2u}{x^2} + \frac{2u}{y^2} + \frac{2u}{z^2} \right) dx dy dz = u dx dy dz$$

Lo mismo se podría hacer para las velocidades \vec{v} y \vec{w} actuando sobre las mismas caras anteriormente definidas.

Añadiendo estas expresiones a las ecuaciones de Euler, se tiene, para la velocidad \vec{u} ,

$$\frac{1}{x} \frac{dp}{dx} dx dy dz = X dx dy dz - \frac{du}{dt} dx dy dz + u dx dy dz$$

que convenientemente simplificada se reduce a,

$$\frac{1}{x} \frac{dp}{dx} = X - \frac{du}{dt} + u$$

Como, $u = f(x, y, z, t)$, resulta,

$$\frac{du}{dt} = u \frac{u}{x} + v \frac{u}{y} + w \frac{u}{z} + \frac{u}{t}$$

por lo que,

$$\frac{1}{x} \frac{dp}{dx} = X - \left(u \frac{u}{x} + v \frac{u}{y} + w \frac{u}{z} + \frac{u}{t} \right) + u$$

que junto con las obtenidas para las velocidades \vec{v} y \vec{w} , de la forma,

$$\frac{1}{y} \frac{dp}{dy} = Y - \frac{dv}{dt} + v$$

$$\frac{1}{z} \frac{dp}{dz} = Z - \frac{dw}{dt} + w$$

definen muy bien el régimen laminar, pero no el turbulento, aunque para fluidos incompresibles los regímenes turbulentos pueden ser tratados con esta misma ecuación.

V.9.- MOVIMIENTO TURBULENTO

Para definir y comprender el movimiento turbulento, es necesario hacer figurar los valores medios de la velocidad y de la presión que definen al movimiento medio, y completar las ecuaciones

de Navier mediante un termino que comprenda las variaciones de la cantidad de movimiento entre las diversas partículas fluidas.

Para tener en cuenta este fenómeno, se define una velocidad de agitación \vec{v}_{ag} que en cada instante complementa a la velocidad media del movimiento medio.

La velocidad sobre el eje Ox es, $u = \hat{u} + u_{ag}$

La velocidad sobre el eje Oy es, $v = \hat{v} + v_{ag}$

La velocidad sobre el eje Oz es, $w = \hat{w} + w_{ag}$

siendo, \hat{u} , \hat{v} , \hat{w} , las componentes de la velocidad media del movimiento medio en cada punto en el instante t , y, u_{ag} , v_{ag} , w_{ag} , las componentes de la velocidad de agitación, que no son más que las componentes de la desviación de la velocidad u respecto de su valor medio \hat{u} .

Debido al movimiento de agitación, en el tiempo dt entran por las diferentes caras del cubo elemental, las siguientes masas de fluido,

$$dy dz (u_{ag} dt) ; \quad dx dz (v_{ag} dt) ; \quad dx dy (w_{ag} dt)$$

Las cantidades de movimiento proyectadas por cada masa así definida son iguales a los impulsos mecánicos correspondientes, obteniéndose,

Sobre el eje Ox,

$$\begin{aligned} dy dz u_{ag} dt (\hat{u} + u_{ag}) &= f_{1x} dt \\ dx dz v_{ag} dt (\hat{u} + u_{ag}) &= f_{2x} dt \\ dx dy w_{ag} dt (\hat{u} + u_{ag}) &= f_{3x} dt \end{aligned}$$

Sobre el eje Oy,

$$\begin{aligned} dy dz u_{ag} dt (\hat{v} + v_{ag}) &= f_{1y} dt \\ dx dz v_{ag} dt (\hat{v} + v_{ag}) &= f_{2y} dt \\ dx dy w_{ag} dt (\hat{v} + v_{ag}) &= f_{3y} dt \end{aligned}$$

Sobre el eje Oz,

$$\begin{aligned} dy dz u_{ag} dt (\hat{w} + w_{ag}) &= f_{1z} dt \\ dx dz v_{ag} dt (\hat{w} + w_{ag}) &= f_{2z} dt \\ dx dy w_{ag} dt (\hat{w} + w_{ag}) &= f_{3z} dt \end{aligned}$$

Estudiemos en particular una de las ecuaciones, por ejemplo la f_{1x} sobre el eje Ox,

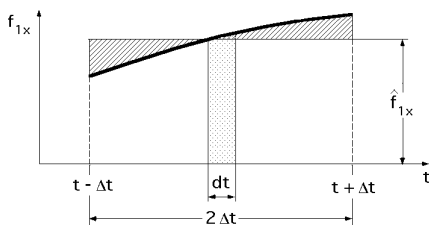


Fig V.15

$$f_{1x} = dy dz u_{ag} (\hat{u} + u_{ag})$$

Su valor medio en el instante t , Fig V.15, es,

$$\hat{f}_{1x} = \frac{1}{2} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} f_{1x} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t-t}^{t+t} dy dz u_{ag} (\hat{u} + u_{ag}) dt = \frac{dy dz}{2} \int_{t-t}^{t+t} u_{ag} (\hat{u} + u_{ag}) dt =$$

$$= \frac{dy dz}{2} \int_{t-t}^{t+t} u_{ag}^2 dt + \frac{dy dz}{2} \int_{t-t}^{t+t} \hat{u} u_{ag} dt = \frac{dy dz}{2} \int_{t-t}^{t+t} u_{ag}^2 dt$$

Las integrales de la forma, $\int_{t-t}^{t+t} u_{ag} dt = 0$, ya que:

$$\hat{u} = \frac{1}{2} \int_{t-t}^{t+t} u dt = \frac{1}{2} \int_{t-t}^{t+t} (\hat{u} + u_{ag}) dt = \frac{1}{2} \int_{t-t}^{t+t} u_{ag} dt + \frac{1}{2} \int_{t-t}^{t+t} \hat{u} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t-t}^{t+t} u_{ag} dt + \frac{1}{2} \hat{u} (t + t - t + t) = \frac{1}{2} \int_{t-t}^{t+t} u_{ag} dt + \hat{u}$$

y como, $\int_{t-t}^{t+t} u_{ag} dt = 0$

y lo mismo para las integrales de la forma, $\int_{t-t}^{t+t} v_{ag} dt = 0$; $\int_{t-t}^{t+t} w_{ag} dt = 0$

La integral, $\int_{t-t}^{t+t} u_{ag}^2 dt$, es la media del cuadrado de la fluctuación que no es cero y que se puede interpretar como una medida de la intensidad de la turbulencia.

La fuerza \hat{f}_{1x} es la ejercida sobre una de las caras (dy, dz) por lo que para el conjunto de dos caras paralelas se tiene,

$$\hat{f}_{1x} - (\hat{f}_{1x} - \frac{\hat{f}_{1x}}{x} dx) = \frac{\hat{f}_{1x}}{x} dx = \frac{dx dy dz}{2} \int_{t-t}^{t+t} u_{ag}^2 dt$$

y haciendo lo mismo para \hat{f}_{2x} y \hat{f}_{3x} , se obtiene,

$$\frac{\hat{f}_{2x}}{y} dy = \frac{dx dy dz}{2} \int_{t-t}^{t+t} u_{ag} v_{ag} dt$$

$$\frac{\hat{f}_{3x}}{z} dz = \frac{dx dy dz}{2} \int_{t-t}^{t+t} u_{ag} w_{ag} dt$$

La proyección sobre el eje Ox de la fuerza total, debida a la cantidad de movimiento, será la suma de las anteriores, es decir,

$$\frac{dx dy dz}{2} \left(\int_{t-t}^{t+t} u_{ag}^2 dt + \int_{t-t}^{t+t} u_{ag} v_{ag} dt + \int_{t-t}^{t+t} u_{ag} w_{ag} dt \right)$$

Para los ejes Oy y Oz se obtienen otras dos ecuaciones similares.

En consecuencia, las ecuaciones de Navier-Stokes para el movimiento medio respecto al eje Ox, quedan en la forma,

$$\frac{1}{x} \frac{p}{x} = X - \frac{du}{dt} + u + \frac{1}{2} \frac{1}{t} \left(\frac{1}{x} \int_{t-t}^{t+t} u_{ag}^2 dt + \frac{1}{y} \int_{t-t}^{t+t} u_{ag} v_{ag} dt + \frac{1}{z} \int_{t-t}^{t+t} u_{ag} w_{ag} dt \right)$$

que se complementan con otras dos respecto a los ejes Oy y Oz.

Otra forma de expresar las ecuaciones de Navier-Stokes, para el movimiento medio, es la debida a White, de la forma,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{u}}{dt} &= - \frac{1}{x} + X + \frac{1}{x} \left(\frac{d\hat{u}}{dx} - \hat{u}_{ag}^2 \right) + \frac{1}{y} \left(\frac{d\hat{u}}{dy} - \overline{u_{ag} v_{ag}} \right) + \frac{1}{z} \left(\frac{d\hat{u}}{dz} - \overline{u_{ag} w_{ag}} \right) = \\ &= - \frac{1}{x} + X + \hat{u} - \frac{1}{x} \left(\hat{u}_{ag}^2 \right) - \frac{1}{y} \left(\overline{u_{ag} v_{ag}} \right) - \frac{1}{z} \left(\overline{u_{ag} w_{ag}} \right) \end{aligned}$$

que se puede poner también como,

$$\frac{1}{x} \frac{p}{x} = X - \frac{du}{dt} + \hat{u} + \frac{1}{x} \hat{u}_{ag}^2 + \frac{1}{y} \overline{u_{ag} v_{ag}} + \frac{1}{z} \overline{u_{ag} w_{ag}}$$

en la que las expresiones, $(-\hat{u}_{ag}^2)$, $(-\overline{u_{ag} v_{ag}})$ y $(-\overline{u_{ag} w_{ag}})$, se conocen como esfuerzos turbulentos debidos al movimiento de agitación.

La integración de las ecuaciones de Navier-Stokes es, en la mayor parte de los casos, imposible, aunque, no obstante, existen soluciones exactas para las mismas al menos en los siguientes casos,

Flujo paralelo permanente y no permanente,

- a) Entre paredes paralelas fijas.
- b) Entre paredes paralelas, una fija y la otra moviéndose en su propio plano, sin o con un gradiente de presión positivo o negativo.
- c) Dentro de un conducto cerrado de sección transversal cualquiera.
- d) Entre cilindros concéntricos en rotación.

Flujo permanente,

- a) Entre placas giratorias
- b) Entre placas convergentes y divergentes
- c) Flujos planos y asimétricos normales a una placa
- d) Flujo en un chorro laminar de sección circular transversal

Flujo no permanente,

a) *Adyacentes a una pared plana acelerada repentinamente*

b) *Adyacentes a una placa oscilante en su propio plano*

Asimismo, y para números de Reynolds pequeños, en los que las fuerzas de inercia se pueden despreciar, se han encontrado las soluciones aproximadas siguientes,

Flujo permanente alrededor de una esfera

Lubricación de un cojinete

Flujo alrededor de un obstáculo entre dos placas paralelas colocadas a una distancia pequeña (flujo de Hele-Shaw)

Finalmente, aquellos flujos laminares con fluidos de viscosidad muy pequeña, y en general, una serie de problemas relacionados con el rozamiento, el coeficiente de transmisión de calor entre la superficie de un cuerpo y el flujo que lo circunda, etc., se pueden resolver por los métodos de la capa límite.

V.9.- ECUACIONES PARA UN FLUIDO PESADO Y VISCOSO

Sea la conducción inclinada indicada en la Fig V.16, en la que el eje Ox coincide con el eje de la misma; para este caso se tiene,

$$\begin{aligned} X &= g \operatorname{sen} & ; & \quad u = V \\ Y &= 0 & ; & \quad v = 0 \\ Z &= -g \operatorname{cos} & ; & \quad w = 0 \\ u &= f(x, y, z, t) \end{aligned}$$

Considerando además la ecuación de continuidad, $\operatorname{div} \vec{V} = 0$, se tiene:

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z} = 0$$

$$\text{y como: } \frac{v}{y} = 0; \frac{w}{z} = 0, \quad \frac{u}{x} = 0; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Además,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{v}{x} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{v}{y} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{v}{z} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{v}{t} = 0$$

$$\frac{w}{x} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{w}{y} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{w}{z} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{w}{t} = 0$$

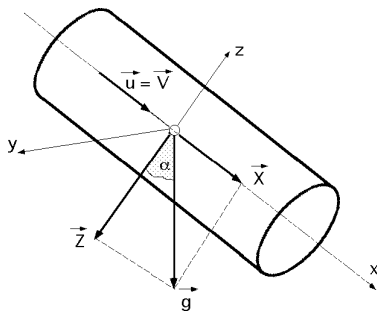


Fig V.16.- Conducción inclinada de un conducto por el que circula un fluido pesado y viscoso

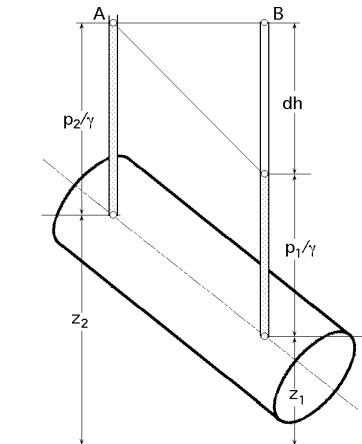


Fig V.17.- Pérdida de carga

y sustituyendo en Navier-Stokes, se obtiene,

$$\frac{1}{x} \frac{p}{x} = g \operatorname{sen} \alpha - \frac{u}{t} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{1}{y} \frac{p}{y} = 0$$

$$\frac{1}{z} \frac{p}{z} = -g \operatorname{cos} \alpha$$

Para un régimen permanente se tiene que, $\frac{u}{t} = 0$

y si además se gira la tubería hasta hacer coincidir g con la dirección del eje Oz , $\alpha = 0$, las ecuaciones anteriores se reducen a,

$$\frac{1}{x} \frac{p}{x} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{1}{y} \frac{p}{y} = 0$$

$$\frac{1}{z} \frac{p}{z} = -g$$

en las que se observa que:

a) La variación de presión con respecto al eje Oz sigue las leyes de la Hidrostática,

$$\frac{p}{z} = -g$$

b) Existe una pérdida de presión debida al roce de las moléculas de fluido,

$$\frac{p}{x} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right) = J$$

$$\frac{dp}{dx} = J dx = J dl$$

siendo l la longitud de la tubería, y J la pérdida de carga por unidad de longitud, $J = f(V)$, adimen-

sional.

Sabemos que cuando no existen pérdidas de presión a lo largo de la conducción, la ecuación de Bernoulli se puede poner en la forma,

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \quad d\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = 0$$

es decir, la línea de niveles piezométricos es horizontal, pero sabemos que, de acuerdo con lo anteriormente estudiado, existe una pérdida de presión a lo largo de la conducción, $\frac{dp}{\gamma} = J dl$, por lo que la línea (AB) pasa a transformarse en la (AB') y, por lo tanto, se puede poner,

$$d\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = J dl \quad ; \quad J = \frac{d\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)}{dl} = \frac{V^2}{2g}$$

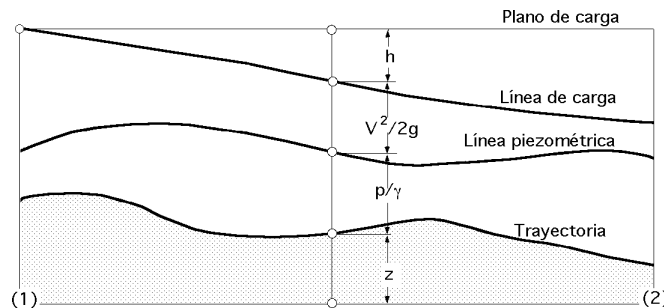


Fig V.18.- Representación gráfica de la ecuación de Bernoulli para un fluido real

En consecuencia, la ecuación diferencial de Bernoulli toma la forma,

$$dz + \frac{dp}{\gamma} + d\left(\frac{V^2}{2g}\right) + J dl = 0$$

que para un fluido incompresible se transforma, una vez integrada, en,

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + J l = Cte$$

En general, para una corriente, la ecuación de Bernoulli es,

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + C_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + C_2 \frac{V_2^2}{2g} + J l = Cte$$

$$dz + \frac{dp}{\gamma} + C d\left(\frac{V^2}{2g}\right) + J dl = 0$$

en la que C es un coeficiente corrector, que se conoce como coeficiente de Coriolis, de forma que,

$\frac{V}{2g}$, sea el promedio de la energía cinética por unidad de masa que pasa por la sección, que para

un régimen uniforme vale la unidad; dejará de valer 1 cuanto mayor sea la irregularidad en la distri-

bucción de la velocidad.

En la Tabla V.1 se indican algunos valores de k para distintos tipos de conducciones,

Tabla V.1.- Valores de k para diversas conducciones

Tipo de Conducción	
Conducciones cilíndricas (Régimen turbulento)	1,06
Conducciones cilíndricas (Régimen laminar)	2
Canal con planchas lisas (Bazín)	1,039
Canal cubierto (Rugosidad normal)	1,11

La representación gráfica de la ecuación completa de Bernoulli se presenta en la Fig V.18, en la que se han dibujado la trayectoria, línea de niveles piezométrico y de carga, y plano de carga, entre dos puntos de la conducción.

V.10.- VARIACIÓN DE LA POTENCIA EN UNA CORRIENTE

Cuando en una corriente fluida se intercalan máquinas, la línea de carga y la línea piezométrica suben o bajan en ese tramo una cantidad equivalente a la energía absorbida o cedida, Fig V.19.

La potencia teórica de una máquina, sea bomba B o turbina T, viene determinada por la diferencia entre las potencias de la corriente N_2 después de la máquina, y N_1 antes de ella, es decir,

$$N_{máq} = N = |N_2 - N_1|$$

La potencia práctica viene afectada por las pérdidas originadas en el interior de la máquina, tanto las de tipo hidráulico, como las de tipo mecánico; las pérdidas se consideraran (+) para el caso de una bomba, y (-) para una turbina; si representamos estas pérdidas por N_p , se tiene,

$$N_{Bomba} = N_2 - N_1 + N_p$$

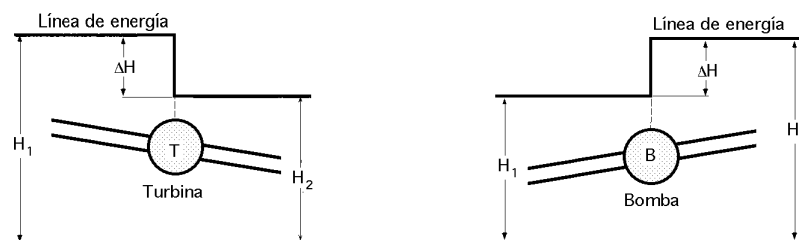


Fig V.19.- Variación del plano de carga cuando se introduce maquinaria en una conducción

$$N_{Turbina} = N_2 + N_1 - N_p$$

El rendimiento de una bomba se define en la forma,

$$\eta_{Bomba} = \frac{\text{Energía aportada al fluido}}{\text{Energía que acciona el motor de la bomba}} = \frac{N_2 + N_1}{N_{Bomba}} = \frac{Q(H_2 - H_1)}{N_{Bomba}} = \frac{Q}{N_{Bomba}} H$$

luego,

$$N_{\text{Bomba}} = \frac{Q H}{B} = \frac{Q H_{\text{man}}}{B}$$

El rendimiento de una turbina se define en la forma,

$$\eta_{\text{Turbina}} = \frac{\text{Energía total obtenida en el eje de la turbina}}{\text{Energía tomada del fluido}} = \frac{N_{\text{Turbina}}}{N_1 - N_2} = \frac{N_{\text{Turbina}}}{Q (H_1 - H_2)} = \frac{N_{\text{Turbina}}}{Q H}$$

siendo, $N_{\text{Turbina}} = Q H_{\text{Turb}} ,$ la potencia útil obtenida en la turbina.

VI.- DESARROLLO TEÓRICO DE LA LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

VI.1.- LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

El estudio de la teoría de la lubricación se puede considerar como un caso particular de la teoría hidrodinámica de flujo laminar; en el fluido que llena los espacios vacíos entre las dos superficies a lubricar, una de las cuales tiene una ligera inclinación respecto a la otra, se desarrollan fuerzas de gran magnitud, experimentando el fluido una especie de acuñamiento; como la inclinación del patín es muy pequeña, se puede tomar como ecuación del movimiento la correspondiente a un movimiento laminar plano, en la hipótesis de que no existan flujos hacia afuera de los extremos del cojinete, en dirección normal al plano de la Fig VI.1.

En un sistema de ejes (x,y) , la velocidad \vec{u} del lubricante dependerá de x y de y , mientras que la presión p no depende más que de x ; de las ecuaciones de Navier-Stokes se puede deducir la ecuación diferencial,

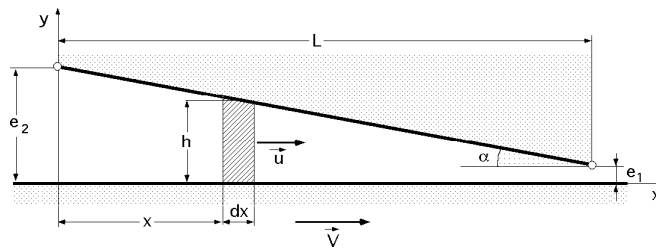


Fig VI.1

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2u}{y^2}$$

En lo que sigue, y por comodidad, se puede suponer que el patín está fijo, y que lo que se mueve es el plano de deslizamiento, a la velocidad \vec{V} ; si se considera una pequeña franja de fluido de espesor dx y altura h , y siendo la inclinación del patín respecto al plano de deslizamiento muy peque-

ña, se puede suponer que la distribución de velocidades es igual a la que resulta entre dos planos paralelos, es decir, h constante, por lo que la velocidad \bar{u} es función únicamente de y , mientras que la presión p es independiente de y .

Integrando la ecuación anterior respecto de y , y considerando que,

$$\frac{dp}{dx} = \text{constante}$$

se obtiene,

$$\frac{u}{y} = \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} y + C_1 \quad ; \quad u = \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

en las que C_1 y C_2 vienen definidas por las condiciones en los límites, en la forma,

$$\begin{aligned} u = V \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad C_2 = V \\ \text{Para,} \quad u = 0 \quad ; \quad y = h \quad ; \quad C_1 = - \left(\frac{V}{h} + \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} \right) \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$u = \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} - \left(\frac{V}{h} + \frac{1}{2} \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} \right) y + V = \frac{y}{2} \frac{dp}{dx} (y - h) + V \left(1 - \frac{y}{h} \right)$$

Aplicando la ecuación de continuidad al volumen de control así definido se puede obtener una nueva ecuación que permite calcular el valor de dp/dx en función de h ; como se desprecian las pérdidas laterales de caudal, el caudal q_v de lubricante, por unidad de anchura del patín, tiene que ser el mismo en todas las secciones transversales, por lo que suponiendo que $dp/dx = \text{cte}$, se tiene,

$$q_v = \int_0^h u \, dy = \int_0^h \left\{ \frac{1}{2} \frac{y^2}{2} \frac{dp}{dx} - \left(\frac{V}{h} + \frac{1}{2} \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} \right) y + V \right\} dy = - \frac{h^3}{12} \frac{dp}{dx} + \frac{Vh}{2}$$

Dado que q_v no puede variar con x , se puede expresar h en función de x en la forma,

$$h = e_2 - x \quad ; \quad dh = - dx$$

y despejando, dp/dx , en la anterior, resulta,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6V}{h^2} - \frac{12}{h^3} q_v \quad ; \quad - \frac{dp}{dh} = - \frac{dp}{dx} = \frac{6V}{h^2} - \frac{12}{h^3} q_v$$

Integrándola se obtiene,

$$p = \frac{6}{h} \left(V - \frac{q_v}{h} \right) + C_3$$

en la que q_v y C_3 son constantes que se determinan por las condiciones impuestas en los límites; como la presión en los extremos del patín de coordenadas, $x = 0$ y $x = L$, debe ser la misma, por

ejemplo, $p = p_0 = 0$, para, $h = e_1$ y $h = e_2$ respectivamente, se tiene,

$$0 = \frac{6}{h} \left(V - \frac{q_v}{h} \right) + C_3 \quad \frac{6}{e_1} \left(V - \frac{q_v}{e_1} \right) + C_3 = 0$$

$$\frac{6}{e_2} \left(V - \frac{q_v}{e_2} \right) + C_3 = 0$$

de las que se obtienen los valores correspondientes a q_v y C_3 de la forma,

$$q_v = V \frac{e_1 e_2}{e_1 + e_2} \quad ; \quad C_3 = - \frac{6 V}{e_1 + e_2}$$

y, por lo tanto,

$$p = 6 V \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h^2} \frac{e_1 e_2}{e_1 + e_2} - \frac{1}{e_1 + e_2} \right) = p(h)$$

La presión se anula en los extremos del patín; pasa por un máximo cuando se tenga, $dp/dx = 0$, lo cual, sustituido en la ecuación,

$$u_{(dp/dx=0)} = \frac{y}{2} \frac{dp}{dx} (y - h) + V \left(1 - \frac{y}{h} \right) = \left| \frac{dp}{dx} = 0 \right| = V \left(1 - \frac{y}{h} \right)$$

que dice que en este máximo el reparto de velocidades es lineal. En cualquier otro punto se cumple que, $dp/dx \neq 0$, (positivo para la cota e_2 y negativo para la cota e_1) y la distribución de velocidades es parabólica, estando la concavidad situada hacia la derecha o hacia la izquierda, según el signo de dp/dx . En particular se observa que se puede formar a partir de la cota de e_2 , un movimiento de aceite en sentido inverso al del movimiento estudiado, Fig VI.2.

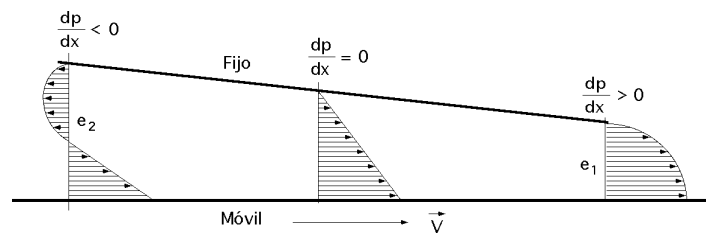


Fig VI.2

La variación de la presión p se puede obtener también en función de x , sustituyendo en la ecuación anterior, $h = e_2 - x$, en la forma,

$$p = \frac{6}{h} \left(V - \frac{q_v}{h} \right) + C_3 = \frac{6 V}{e_2 - x} - \frac{6 V}{(e_2 - x)^2} \frac{e_1 e_2}{e_1 + e_2} - \frac{6 V}{e_1 + e_2} =$$

$$= \frac{6 V (e_2 - x)(e_1 + e_2) - 6 V e_1 e_2 - 6 V (e_2 - x)^2}{(e_2 - x)^2 (e_1 + e_2)} = \frac{6 V (x e_2 - x e_1 - 2 x^2)}{(e_2 - x)^2 (e_1 + e_2)} =$$

$$= \frac{6 V x (e_2 - e_1 - x)}{(e_2 - x)^2 (e_1 + e_2)} = \left| \begin{array}{l} x = e_2 - h \\ e_2 - e_1 = L \end{array} \right| = \frac{6 V x}{h^2 (e_1 + e_2)} (h - e_1) = f(x)$$

$$p = \frac{6 V x}{h^2 (e_1 + e_2)} (h - e_1)$$

Esta ecuación indica que p es positiva en el intervalo, $0 < x < L$, siempre que, $h > e_1$.

Con este método se desprecia la muy ligera posibilidad de que existan cambios de presión a lo largo de una línea vertical de, $x = \text{Cte}$.

El reparto de presiones a lo largo de la superficie del patín se obtiene teniendo en cuenta que,

$$p = \frac{6 V}{h^2} \frac{h (e_1 + e_2) - e_1 e_2 - h^2}{e_1 + e_2}$$

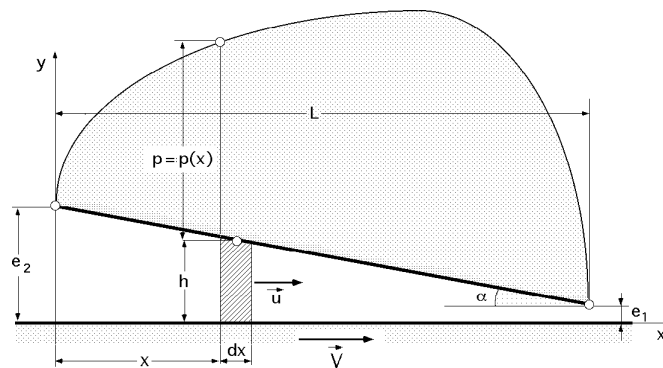


Fig VI.3

y ser el reparto de presiones a lo largo de la superficie del patín,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dh} \frac{dh}{dx}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dh} &= \frac{6 V}{(e_1 + e_2)} \frac{(e_1 + e_2 - 2h) h^2 - \{h (e_1 + e_2) - e_1 e_2 - h^2\} 2h}{h^4} = \\ &= \frac{6 V}{(e_1 + e_2)} \frac{-h (e_1 + e_2) + 2 e_1 e_2}{h^3} = \frac{6 V}{h^2} \left[\frac{2 e_1 e_2}{h (e_1 + e_2)} - 1 \right] \end{aligned}$$

$$\frac{dh}{dx} = -$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6 V}{h^2} \left(\frac{2 e_1 e_2}{h (e_1 + e_2)} - 1 \right)$$

$$\frac{dp}{dh} = \frac{6 V}{h^2} \left(\frac{2 e_1 e_2}{h (e_1 + e_2)} - 1 \right) = \left| \begin{array}{l} h = e_2 \\ = e_1 \end{array} \right| \quad \frac{dp}{e_2 d} = \frac{6 V}{h^2} \left(\frac{2 e_1 e_2}{h (e_1 + e_2)} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d} &= \frac{6}{h^2} V e_2 \left(\frac{2 e_1 e_2}{h(e_1 + e_2)} - 1 \right) = \frac{6}{e_2} V \left(\frac{2 e_1 e_2^3}{h^3 (e_1 + e_2)} - \frac{e_2^2}{h^2} \right) = \frac{6}{e_2} V \left(\frac{2 e_1}{3 (e_1 + e_2)} - \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{6}{e_2} V \left(\frac{2}{3 \frac{e_1 + e_2}{e_1}} - \frac{1}{2} \right) = \frac{6}{e_2} V \left(\frac{2}{3 (1 +)} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

que se anula para, $\frac{2}{1 +} =$

VI.2.- CALCULO DE LA FUERZA TOTAL

La fuerza total F por unidad de anchura que soporta el patinete, es,

$$\begin{aligned} F &= \int_0^L p dx = \int_0^L \frac{6}{h^2 (e_1 + e_2)} V x (h - e_1) dx = \left| \begin{array}{l} x = 0 ; h = e_2 \\ x = L ; h = e_2 - L = e_1 \\ e_2 - h = x ; dx = - \frac{dh}{L} \end{array} \right| = \\ &= \frac{e_1}{e_2} \frac{6}{h^2 (e_1 + e_2)} V (e_2 - h) (h - e_1) \left(- \frac{dh}{L} \right) = \frac{6}{e_2} \frac{V}{(e_1 + e_2)} \left\{ (e_1 + e_2) \ln h + \frac{e_1 e_2}{h} - h \right\}_{e_1}^{e_2} = \\ &= \frac{6}{(e_1 + e_2)^2} V \left[(e_1 + e_2) \ln \frac{e_2}{e_1} + (e_1 - e_2) - (e_2 - e_1) \right] = \\ &= \frac{6}{(e_1 + e_2)^2} V \left[(e_1 + e_2) \ln \frac{e_2}{e_1} + 2 (e_1 - e_2) \right] = \left| \begin{array}{l} e_2 - L = e_1 \\ = \frac{e_2 - e_1}{L} \end{array} \right| = \\ &= \frac{6}{(e_1 + e_2) (e_2 - e_1)^2} V L^2 \left[(e_1 + e_2) \ln \frac{e_2}{e_1} + 2 (e_1 - e_2) \right] = \frac{6}{(e_2 - e_1)^2} V L^2 \left(\ln \frac{e_2}{e_1} - 2 \frac{e_2 - e_1}{e_2 + e_1} \right) = \\ &= \left| \frac{e_1}{e_2} \right| = - \frac{6}{e_2 (1 -)} V L^2 \left(\frac{\ln}{1 -} - \frac{2}{1 +} \right) \end{aligned}$$

que es la fuerza a soportar por el patinete, por unidad de anchura.

Determinación de la posición de la resultante de las fuerzas de presión que se ejercen sobre el patín.

Si la fuerza F está aplicada en el punto de abscisa X se tiene,

$$\begin{aligned} F X &= \int_0^L p x dx \\ p &= \frac{6}{h^2} V \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h^2} \frac{e_1 e_2}{e_1 + e_2} - \frac{1}{e_1 + e_2} \right) = \frac{6}{e_2} V \left(\frac{e_2}{h} - \frac{e_2^2}{h^2} \frac{1}{1 + \frac{e_2}{e_1}} - \frac{1}{1 + \frac{e_1}{e_2}} \right) = \\ &= \left| \frac{e_1}{e_2} \right| = \left| \frac{6}{e_2} V \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 +} - \frac{1}{1 +} \right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_X &= \int_0^L p x dx = \int_0^L \frac{6V}{e_2} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{1+} - \frac{1}{1+} \right) x dx = \\
&= \left. \begin{array}{l} \frac{h}{e_2} = 1 - \frac{x}{e_2} ; x = \frac{e_2}{2} (1 -) ; d = - \frac{dx}{e_2} \\ \text{Límites, } x = 0 ; = 1 \\ x = L ; = 1 - \frac{L}{e_2} = 1 - \frac{e_2 - e_1}{e_2} = \frac{e_1}{e_2} = \end{array} \right| = \\
&= \int_1^{\frac{e_1}{e_2}} \frac{6V}{e_2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+} - \frac{1}{1+} \right) \frac{e_2}{2} (1 -) \left(- \frac{e_2}{2} \right) d = \\
&= \frac{6V e_2}{3} \int_1^{\frac{e_1}{e_2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+} - \frac{1}{1+} \right) (1 -) d = \dots \\
&\dots = \frac{6V e_2}{(1+)^3} \left\{ \frac{(5+)(1-)}{2} + (1+2) \ln \right\} \\
X &= \frac{\frac{-6V e_2}{(1+)^3} \left\{ \frac{(5+)(1-)}{2} + (1+2) \ln \right\}}{\frac{-6V L^2}{(1-)^2 e_2} \left(\frac{\ln}{1-} - \frac{2}{1+} \right)} = \\
&= \frac{e_2^2 (1-)}{(1+)^3 L^2} \frac{\frac{(5+)(1-)}{2} + (1+2) \ln}{\frac{\ln}{1-} - \frac{2}{1+}}
\end{aligned}$$

VI.3.- FUERZA DE ARRASTRE

Si el movimiento de la cuña de lubricante se supone bidimensional, y no existen flujos laterales de aceite, se puede calcular la fuerza de arrastre F_a necesaria para mover la superficie inferior a una velocidad \vec{V} , en la forma siguiente,

$$\begin{aligned}
F_a &= \int_0^L \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} dx = \int_0^L \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} dx = \\
&= \left. \begin{array}{l} u = \frac{y}{2} \frac{dp}{dx} (y-h) + V \left(1 - \frac{y}{h} \right) \\ \frac{du}{dy} \Big|_{y=0} = \left\{ \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} (y-h) + \frac{y}{2} \frac{dp}{dx} - \frac{V}{h} \right\} \Big|_{y=0} = \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} + \frac{V}{h} \end{array} \right| = \int_0^L \left(\frac{h}{2} \frac{dp}{dx} + \frac{V}{h} \right) dx = \\
&= \frac{e_1}{e_2} \left(\frac{h}{2} \frac{6V}{(e_1+e_2)} \frac{-h(e_1+e_2) + 2e_1e_2}{h^3} \left(- \right) + \frac{V}{h} \right) \left(- \frac{dh}{h} \right) = \\
&= \frac{V}{e_1} \frac{e_2}{e_1} \frac{3h(e_1+e_2) - 6e_1e_2}{h^2(e_1+e_2)} + \frac{1}{h} \Big) dh = \frac{V}{e_1} \left(3 \ln h + 6 \frac{e_1e_2}{h(e_1+e_2)} + \ln h \right) \frac{e_2}{e_1} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{V}{L} \left\{ 4 \ln \frac{e_2}{e_1} + 6 \frac{e_1 e_2}{e_1 + e_2} \left(\frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_1} \right) \right\} = \frac{V}{L} \left(4 \ln \frac{e_2}{e_1} + 6 \frac{e_1 - e_2}{e_1 + e_2} \right) = \left| \begin{array}{l} L = e_2 - e_1 \\ = \frac{e_2 - e_1}{L} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{e_2 - e_1} \frac{V L}{L} \left(2 \ln \frac{e_2}{e_1} - 3 \frac{e_2 - e_1}{e_1 + e_2} \right) = \left| \begin{array}{l} = \frac{e_1}{e_2} \\ = \frac{-2}{e_2(1 - \frac{e_1}{e_2})} \end{array} \right| \left(2 \ln \frac{e_2}{e_1} + 3 \frac{1 - \frac{e_1}{e_2}}{1 + \frac{e_1}{e_2}} \right)$$

que es la fuerza de arrastre F_a necesaria para mover la superficie inferior a una velocidad \vec{v} .

VI.4.- COEFICIENTE DE ROZAMIENTO Y POTENCIA DISIPADA POR ROZAMIENTO

A la fuerza de rozamiento, casi horizontal, se deberá ajustar la componente horizontal de la fuerza F que soporta el cojinete, F , por lo que el coeficiente de rozamiento f del patín viene dado por,

$$f = \frac{F_a + F}{F} = \frac{F_a}{F} +$$

y la potencia N absorbida por el desplazamiento horizontal del patín, que es la potencia disipada por rozamiento,

$$N = f F v$$

En todas estas consideraciones se ha tenido en cuenta que el movimiento de la cuña de aceite es bidimensional y que no existen fugas laterales de aceite.

VII.- SEMEJANZA HIDRODINÁMICA Y ANÁLISIS DIMENSIONAL

VII.1.- NÚMEROS DE FROUDE, REYNOLDS, WEBER Y MACH.

En un fenómeno hidráulico, las *variables* que intervienen en el mismo, se pueden reducir a ocho, y son,

- a) La fuerza F
- b) La longitud L
- c) La velocidad u
- d) La densidad ρ
- e) La viscosidad dinámica η
- f) La aceleración de la gravedad g
- g) La velocidad del sonido c_s
- h) La tensión superficial σ

Las *fuerzas* que pueden actuar sobre un fenómeno hidráulico, son,

- 1) Las de inercia (gradiente de presiones)
- 2) Las de peso (gravedad)
- 3) Las de viscosidad (rozamiento)
- 4) Las de capilaridad (tensión superficial)
- 5) Las de elasticidad.

La comparación de las cuatro últimas respecto a la primera, permite determinar los números adimensionales de Froude, Reynolds, Weber y Mach.

El número de Froude se define en la forma,
$$F = \sqrt{\frac{\frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Volumen}}}{\frac{\text{Fuerzas de peso}}{\text{Volumen}}}}$$

$$\frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Volumen}} = \frac{m \frac{du}{dt}}{V} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dl} \frac{dl}{dt} = u \frac{du}{dl} = \frac{u^2}{L} = \frac{u^2}{Lg}$$

$$\frac{\text{Fuerzas de peso}}{\text{Volumen}} = \frac{P}{V} = g$$

$$F = \frac{u}{\sqrt{Lg}}$$

El número de Reynolds se define en la forma,
$$Re = \frac{\frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Volumen}}}{\frac{\text{Fuerzas de rozamiento}}{\text{Volumen}}}$$

$$\frac{\text{Fuerzas de rozamiento}}{\text{Volumen}} = \frac{\frac{du}{dx}}{V} = \frac{1}{L} \frac{du}{dx} = \frac{u}{L^2}$$

$$Re = \frac{\frac{u^2}{L}}{\frac{u}{L^2}} = \frac{uL}{u} = \frac{uL}{\nu}$$

Cuando el número de Reynolds es grande, las fuerzas de inercia predominan sobre las de rozamiento y si es bajo, sucede todo lo contrario.

El número de Weber se define en la forma,
$$W = \sqrt{\frac{\frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Volumen}}}{\frac{\text{Fuerzas de tensión superficial}}{\text{Volumen}}}}$$

$$\frac{\text{Fuerzas de tensión superficial}}{\text{Volumen}} = \frac{F}{V} = \frac{F}{L^3} = \frac{\frac{F}{L}}{L^2} = \frac{\sigma}{L^2}$$

en la que σ es la tensión superficial.

$$W^2 = \frac{\frac{u^2}{L}}{\frac{\sigma}{L^2}} = \frac{u^2 L}{\sigma} ; W = \sqrt{\frac{L}{\sigma}} u = \frac{u}{\sqrt{\frac{\sigma}{L}}}$$

El número de Mach se define en la forma,
$$M = \sqrt{\frac{\frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Volumen}}}{\frac{\text{Fuerzas elásticas}}{\text{Volumen}}}}$$

$$\frac{\text{Fuerzas elásticas}}{\text{Volumen}} = \frac{F}{V} = \frac{F}{L^3} = \frac{\frac{F}{L^2}}{L} = \frac{E}{L}$$

en la que E es el módulo de elasticidad.

$$M^2 = \frac{\frac{u^2}{L}}{\frac{E}{L}} = \frac{u^2}{E} = \frac{u^2}{\underline{E}} \quad ; \quad M = \frac{u}{\sqrt{\underline{E}}} = \frac{u}{c_s}$$

Si el número de Mach es grande predominan las fuerzas de inercia sobre las elásticas, y al contrario, si es bajo.

La celeridad de la onda de peso se define como, $a = \sqrt{L g} = \sqrt{\frac{L}{\underline{g}}}$

La celeridad de la onda capilar se define como, $a = \sqrt{\frac{\underline{\sigma}}{L}}$

La celeridad de la onda elástica se define como, $a = \sqrt{\underline{E}}$

que es *la velocidad del sonido en el fluido*.

Se observa que la velocidad u del fluido lleva una velocidad de onda asociada, que es la celeridad.

Si hacemos, $F = 1$, $W = 1$, $M = 1$, se tiene el caso en que la velocidad del fluido coincide con la celeridad de la onda, lo cual sirve para separar los regímenes cuya característica es la posibilidad de propagación de la onda en todas direcciones, o solo dentro de una porción limitada de fluido; esta velocidad se denomina *velocidad crítica*.

No se puede tratar al número de Reynolds en la misma forma debido que la propagación de la onda de viscosidad es transversal; experimentalmente se determina el valor del número de Reynolds Re , que separa el régimen laminar del turbulento, pudiéndose asegurar que para fluidos que circulan por el interior de una tubería con, $Re < 2.000$, el régimen es laminar, y que por encima de $Re > 8.000$, es turbulento, aunque se han conseguido algunos regímenes laminares por encima de, este número, lo cual no es nada significativo a la hora de definir el régimen turbulento.

Para la celeridad de la onda de gravedad en ríos y mares, si la velocidad es menor que la celeridad, $F < 1$, por lo que el movimiento del líquido en el río será fluvial o lento, mientras que si la velocidad u es mayor que la celeridad a , el movimiento es torrencial o rápido.

En el caso de la velocidad de la onda elástica, la velocidad crítica se corresponde con la velocidad c_s del sonido, $M = 1$; si la velocidad u es menor que la velocidad c_s del sonido, el movimiento es subsónico, y si por el contrario, la velocidad u es mayor que c_s el movimiento es supersónico.

Cuando, $u < c_s$, la perturbación se transmite en todas direcciones, remontando incluso la corriente, mientras que si, $u > c_s$, la perturbación sólo se puede propagar en la dirección de la corriente.

VII.2.- LEY GENERAL DE NEWTON

La información obtenida cuando se ensaya un pequeño modelo, sirve para el diseño de un prototipo más grande, a escala real. Las fuerzas de inercia tienen gran interés, por cuanto aparecen en los números adimensionales de Froude, Reynolds, Weber y Mach, y de ahí es preciso establecer una escala que ligue dichas fuerzas, entre el prototipo y el modelo.

Si se representa dicha escala por x , tendremos,

$$x = \frac{F}{F_m} = \frac{M a}{M_m a_m} = \left| \begin{array}{l} M = V = L^3 \\ M_m = V_m = L_m^3 \end{array} \right. \quad a = \frac{u^2}{L} \left| \begin{array}{l} = \frac{L^2 u^2}{L_m^2 u_m^2} = \frac{u^2}{L_m u_m^2} \end{array} \right.$$

es decir, *Dos fuerzas homólogas cualesquiera están relacionadas entre sí en la misma forma que las densidades de las masas respectivas, que las secciones o superficies correspondientes, y que los cuadrados de las velocidades homólogas.*

Existen unos coeficientes, μ , que son relaciones constantes entre las magnitudes simples de ambos sistemas, de la forma,

$$\mu = \frac{L}{L_m} \quad ; \quad \mu^2 = \frac{L^2}{L_m^2} \quad ; \quad \mu^3 = \frac{V}{V_m} \quad ; \quad \mu = \frac{M}{M_m} \quad ; \quad \mu = \frac{t}{t_m}$$

que permiten obtener,

$$x = \frac{M a}{M_m a_m} = \frac{M}{M_m} \frac{\frac{L}{t^2}}{\frac{L_m}{t_m^2}} = \mu^{-2}$$

que es la ecuación general de Newton, y que es aplicable cuando las fuerzas de inercia predominan sobre las demás, caso que se presenta en alas de aeroplano, palas de hélice, etc, cuyas superficies provocan unas fuerzas acelerativas en el fluido en el que están inmersas, muy importantes.

Como es muy difícil conseguir una semejanza completa entre el prototipo y el modelo, en ingeniería suelen utilizarse tipos particulares de semejanza, siendo las más comunes la geométrica, la cinemática y la dinámica.

La semejanza geométrica se refiere a la dimensión longitud L y hay que asegurarse que se cumple, antes de proceder a los ensayos con cualquier modelo; una definición de este tipo de semejanza podría ser la siguiente, *Un modelo y un prototipo son geoméricamente semejantes si, y solo si todas las dimensiones espaciales en las tres coordenadas tienen la misma relación de escala lineal.* En la semejanza geométrica se conservan todos los ángulos, todas las direcciones de flujo, y la orientación del modelo y del prototipo con respecto a los objetos de los alrededores debe ser idéntica en la simulación.

La semejanza cinemática exige que todas las relaciones entre longitudes homologas del modelo y del prototipo tengan el mismo valor, (escala de longitudes), y también que todas las relaciones entre tiempos homólogos tengan un valor común, (escala de tiempos); en consecuencia habrá una escala única de velocidades.

Así se puede decir que, *Los movimientos de dos sistemas son cinemáticamente semejantes si partículas homologas alcanzan puntos homólogos en instantes homólogos.*

La equivalencia de las escalas de longitud implica simplemente una semejanza geométrica, pero la equivalencia de las escalas de tiempo pueden exigir consideraciones de tipo dinámico tales, como la igualdad de los números de Reynolds y Mach

La semejanza dinámica exige que, cuando el modelo y el prototipo tienen la misma relación de escala de longitudes, la misma relación de escala de tiempos y la misma relación de escala de fuerzas (o de masa), el modelo es dinámicamente semejante al prototipo, y los números de Froude, Reynolds, Weber y Mach, han de ser iguales en el modelo y en el prototipo.

Veamos qué consideraciones hay que tener presentes en lo que respecta a la rugosidad. Sabemos que la fuerza total que se ejerce sobre un cuerpo en movimiento en el seno de un fluido es proporcional a la densidad del fluido, al cuadrado de la velocidad y a la superficie, por lo que teniendo en cuenta modelo y prototipo se tiene,

$$f_r = \rho u^2 \quad ; \quad f_{rm} = \rho_m u_m^2$$

siendo μ y μ_m coeficientes de rozamiento; el valor de x será,

$$x = \frac{f_r}{f_{rm}} = \frac{\rho u^2}{\rho_m u_m^2} = \frac{\rho}{\rho_m} \left(\frac{u}{u_m} \right)^2 = \frac{\rho}{\rho_m} \mu^{-3} \mu_m^2 \left(\frac{u}{u_m} \right)^{-2} = \frac{\rho}{\rho_m} \mu^{-2}$$

por lo que se debe cumplir que, $\mu = \mu_m$, lo que sucede cuando las rugosidades relativas de los dos sistemas sean iguales, es decir,

$$\frac{d}{L} = \frac{d_m}{L_m} \quad ; \quad \frac{d}{d_m} = \frac{L}{L_m} =$$

siendo d y d_m el espesor de las asperezas.

De esto se deduce que, por ejemplo, si el prototipo tiene las superficies pulimentadas, las del modelo deberán tener un pulimento especial, de forma que sus asperezas, $d_m = \frac{d}{\mu}$, tienen que ser mucho más pequeñas que las del prototipo, y conseguir esto, en muchos casos técnicamente es imposible por lo que las fuerzas de rozamiento producidas en el modelo serán mayores, relativamente, que en el prototipo.

NUMERO DE EULER.

El número de Euler se define en la forma,
$$E = \sqrt{\frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas de presión}}} = \sqrt{\frac{\rho u^2 \text{ Volumen}}{2 p \text{ Volumen}}}$$

$$E^2 = \frac{\rho u^2}{2 p} \quad ; \quad E = \frac{u}{\sqrt{\frac{2 p}{\rho}}}$$

en donde p es la variación de la presión.

El estudio de un fenómeno físico consistirá, generalmente, en la investigación experimental de la función,

$$E = \left(F, Re, W, M, \frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{a}{d} \right)$$

en la que, $\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{a}{d}$, son números conocidos como "factores de forma" que relacionan magnitudes de tipo geométrico, que caracterizan el fenómeno.

Despejando la velocidad u , se tiene,

$$u = E \sqrt{\frac{2 p}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 p}{\rho}} \left(F, Re, W, M, \frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{a}{d} \right)$$

estableciéndose una proporcionalidad entre la velocidad u , y la variación de presión p .

Para fluidos perfectos, únicamente intervendrán en la función los parámetros que caracterizan el contorno.

Si representamos la ecuación anterior para el movimiento del fluido que simule el comportamiento de un modelo, se puede poner,

$$u = \sqrt{\frac{2 P_m}{\rho_m}} f_m \left(F, Re, W, M, \frac{a_m}{b_m}, \frac{a_m}{c_m}, \frac{a_m}{d_m} \right)$$

Elevando al cuadrado las expresiones de la velocidad en el modelo y en el prototipo,

$$u^2 = 2 \frac{p}{\rho} \quad ; \quad u^2 = 2 \frac{P_m}{\rho_m}$$

y dividiéndolas entre sí,

$$\left(\frac{u}{u_m} \right)^2 = \frac{2 p}{2 P_m} \frac{\rho_m}{\rho} \left(\frac{u}{u_m} \right)^2 \quad ; \quad \left(\frac{u}{u_m} \right)^2 = \frac{F S^{-1}}{F_m S_m^{-1}} \frac{\rho_m}{\rho} \left(\frac{u}{u_m} \right)^2 = x^{-2} (\mu^{-1})^3 \left(\frac{u}{u_m} \right)^2$$

y despejando x ,

$$x = \mu^{-2} \left(\frac{u}{u_m} \right)^2 = x \left(\frac{u}{u_m} \right)^2$$

luego, $\mu = 1$, por lo que para que se cumpla la semejanza dinámica, debe ser, $\mu = 1$, y tiene que existir una igualdad entre las funciones real del prototipo y del modelo, exigiéndose la igualdad entre los números de F, Re, W y M .

Si ésto se logra, se habrá conseguido la semejanza perfecta. Sin embargo, este tipo de semejanza no existe, pero se pueden obtener buenos resultados igualando tan sólo uno de los parámetros F, Re, W, M , consiguiéndose así una semejanza tanto más perfecta cuanto más pequeña sea la influencia de los restantes parámetros en el fenómeno físico que el ensayo pretende reproducir.

LEY DE REECH-FROUDE.- Cuando se estudia un movimiento en el que la gravedad tiene una influencia predominante, por ejemplo, el vertedero de una presa, el error que se comete es muy pequeño al suponer que la función solo depende del contorno y del número de Froude, con lo que se deberá cumplir además la ley general de Newton, $x = \mu^{-2}$, siendo de la forma,

$$= \left(F, \frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{a}{d} \right)$$

La semejanza geométrica entre el prototipo y el modelo es condición necesaria, pero no suficiente para que, en puntos homólogos, los números de Euler sean iguales.

La semejanza dinámica requiere que, en los puntos homólogos, $F = F_m$, es decir,

$$\frac{u}{\sqrt{Lg}} = \frac{u_m}{\sqrt{L_m g_m}}$$

y como la aceleración de la gravedad suele ser la misma en el modelo y en el prototipo, al igualar $F = F_m$, se puede utilizar la relación,

$$\frac{u}{\sqrt{L}} = \frac{u_m}{\sqrt{L_m}}$$

que obviamente ya no es adimensional.

De todo esto se obtienen una serie de relaciones que van a servir para predecir, a partir de una serie de medidas de velocidades, caudales, etc, efectuadas en el modelo, los valores correspondientes que son de interés en el prototipo; así se tiene,

$$\text{Velocidades, } \frac{u_m}{\sqrt{L_m}} = \frac{u}{\sqrt{L}} \quad ; \quad \frac{u^2}{u_m^2} = \frac{L}{L_m} \quad ; \quad u = u_m \sqrt{\frac{L}{L_m}}$$

$$\text{Caudales, } \frac{Q}{Q_m} = \frac{u}{u_m} = \sqrt{\frac{L}{L_m}} \quad ; \quad Q = Q_m \sqrt{\frac{L}{L_m}}$$

$$\text{Tiempos, } \frac{t}{t_m} = \frac{L}{L_m} \frac{u_m}{u} = \sqrt{\frac{L}{L_m}} \quad ; \quad t = t_m \sqrt{\frac{L}{L_m}}$$

$$\text{Fuerzas, } x = \mu^{-2} = \frac{1}{m} \frac{g}{g_m} = \frac{1}{m} \quad ; \quad f = f_m \frac{1}{m}$$

y suponiendo, $m = m_m$, resulta,

$$f = f_m$$

que es igual a la relación entre masas, $m = m_m$.

$$\begin{aligned} \text{Trabajo} &= \frac{T}{T_m} = \frac{\text{Fuerza} \cdot \text{espacio}}{\text{Fuerza}_m \cdot \text{espacio}_m} = \frac{\text{Masa} \cdot \text{aceleración} \cdot \text{espacio}}{\text{Masa}_m \cdot \text{aceleración}_m \cdot \text{espacio}_m} = \frac{m L t^{-2} L}{(m L t^{-2} L)_m} = \\ &= \frac{m}{m_m} \frac{L^2}{L_m^2} \frac{t_m^{-2}}{t^2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \quad ; \quad T = T_m \end{aligned}$$

Presiones, $\frac{p}{p_m} = \frac{f}{f_m} = \lambda^3 \lambda^{-2} = \lambda$; $p = p_m$

Este caso se puede presentar en orificios, compuertas, ondas de oscilación, cauces fluviales, etc; hay que asegurarse de que no intervengan de modo apreciable ni la tensión superficial, ni la viscosidad.

VII.3.- SEMEJANZA DINÁMICA CON PREDOMINIO DE LA VISCOSIDAD

De la ecuación de Newton,

$$F = \mu \frac{du}{dx}$$

se deduce que la fuerza debida a la viscosidad es proporcional a μ , u , L , por lo que la relación de la fuerza de inercia a la de viscosidad permite obtener el número de Reynolds.

Para que el modelo y el prototipo sean dinamicamente semejantes es necesario que el número de Reynolds sea idéntico en ambos.

Cuanto mayor sea el número de Reynolds, menos importancia tiene la viscosidad en el fenómeno, y viceversa.

Si se utiliza el mismo fluido en el prototipo y en el modelo, es decir, $\mu = \mu_m$, la *relación entre velocidades* es,

$$Re = Re_m ; u L = u_m L_m ; \frac{u}{u_m} = \frac{L_m}{L} = \lambda^{-1} ; u = \lambda^{-1} u_m$$

y como según Froude

$$u = u_m \sqrt{\lambda}$$

se puede comprender es imposible se cumplan ambas relaciones al tiempo, excepto en el caso particular en que, $\lambda = 1$, es decir, cuando el modelo sea igual al prototipo.

Cuando se ensaya con aire, como la densidad del aire es mucho menor que la del agua, las fuerzas de inercia serán más débiles por lo que las fuerzas de viscosidad se harán relativamente más importantes, comportándose de esta forma el aire como un fluido más viscoso que el agua.

En los túneles de viento, los ensayos se hacen según la ley de Reynolds, siendo sus aplicaciones más importantes el estudio del movimiento laminar de fluidos por tuberías, objetos sumergidos en corrientes fluidas, etc. Las escalas correspondientes se obtienen en forma análoga al caso anterior, que resumimos en la Tabla VII.1.

VII.4.- SEMEJANZA DINÁMICA CON PREDOMINIO DE LA ELASTICIDAD

Sabemos que, dimensionalmente, la fuerza de elasticidad es proporcional al módulo de elasticidad y al área sobre la cual actúa dicha fuerza, es decir, proporcional a, $E L^2$, y la relación entre la fuerza de inercia y la fuerza de elasticidad, por unidad de volumen, es el cuadrado del número de Mach, de la forma,

Tabla VII.1.- Resumen de escalas

	Froude	Reynolds	Weber	Mach
Longitud				
Tiempo	$\sqrt{\quad}$	2	$\sqrt{\quad^3}$	
Velocidad	$\sqrt{\quad}$	1/	$1/\sqrt{\quad}$	1
Aceleración	1	1/ 3	1/ 2	1/
Caudal	$\sqrt{\quad^5}$		$\sqrt{\quad^3}$	3
Presión		1/ 2	1/	1
Energía	4		2	3
Fuerza	3	1		2

$$M = \frac{u}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}} = \frac{u}{c_s}$$

en la que c_s es la velocidad del sonido, o velocidad de propagación de la onda elástica en el medio de que se trate.

En los líquidos, la velocidad del sonido varía sólo ligeramente con la temperatura y la presión, mientras que en los gases sucede lo contrario.

Cuanto mayor sea el número de Mach, tanto mayor es la importancia de la elasticidad, y viceversa.

Si los números de Mach sean iguales, los números de Euler también lo serán. El número de Mach sólo tiene importancia en aquellos problemas en los que la compresibilidad tenga una cierta influencia.

VII.5.- ANÁLISIS DIMENSIONAL

TEOREMA DE BUCKINGHAM.- El Teorema de Buckingham establece que en un problema físico en el que se tienen n variables linealmente independientes, que incluye m dimensiones, las variables se pueden agrupar en $(n-m)$ parámetros adimensionales, linealmente independientes.

Algunas de las variables que pueden intervenir en un determinado fenómeno son,

F , fuerza ; L , longitud ; u , velocidad ; ρ densidad ; η viscosidad dinámica ; g , gravedad ; c_s velocidad del sonido ; σ tensión superficial ; k_F conductividad térmica del fluido ; c_F calor específico a presión constante ; h_C coeficiente de convección.

Las **dimensiones** son, Longitud L , masa M , tiempo t y temperatura T .

Las **fuerzas** F pueden ser,

F_{inercia} (debida a un gradiente de presiones)

$F_{\text{elástica}}$

F_{gravedad}

$F_{\text{viscosidad}}$ (rozamiento)

$F_{\text{capilaridad}}$ (tensión superficial).

Si A_1, A_2, \dots, A_n son las variables consideradas, como presión, velocidad, viscosidad, etc., que se

supone son esenciales a la hora de resolver un problema, podemos suponer vienen relacionadas mediante una expresión funcional de la forma,

$$F(A_1, A_2, \dots, A_n) = 0$$

y si, $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}$, representan los parámetros adimensionales que agrupan a las variables, A_1, A_2, \dots, A_n , que incluyen, entre todas ellas, las m dimensiones, el Teorema de Buckingham establece la existencia de una ecuación, función de estos parámetros, de la forma,

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0$$

El método que permite obtener los parámetros π consiste en seleccionar m de las n variables A_i , las cuales pueden tener diferentes dimensiones, pero deben ser linealmente independientes, de forma que contengan entre todas ellas las m dimensiones, pudiéndose emplear como variables repetitivas al combinarlas con las variables A restantes, formándose así cada parámetro adimensional π .

Por ejemplo se puede suponer que A_1, A_2 y A_3 contienen las dimensiones (M, L, t), masa, longitud y tiempo, no necesariamente en cada una de ellas, pero sí en forma colectiva.

El primer parámetro adimensional es, $\pi_1 = A_1^{x_1} A_2^{x_2} A_3^{x_3} A_4$

El segundo parámetro adimensional es, $\pi_2 = A_1^{y_1} A_2^{y_2} A_3^{y_3} A_5$

y así sucesivamente hasta el parámetro $\pi_{n-m} = A_1^{z_1} A_2^{z_2} A_3^{z_3} A_n$

Los exponentes de estas ecuaciones se tienen que examinar de tal manera que cada parámetro resulte adimensional; se sustituyen las dimensiones de las variables A_i y los exponentes de M, L, t,... se igualan a cero por separado, formándose un sistema de ecuaciones (tres para el ejemplo propuesto), con tres incógnitas para cada parámetro π , pudiéndose determinar los exponentes x, y, z , y por lo tanto, los parámetros π correspondientes.

ECUACIÓN GENERAL DE RESISTENCIA.-Las variables que intervienen en el movimiento de un sólido inmerso en una corriente fluida se pueden relacionar mediante la ecuación,

$$\frac{F}{A_L} = f(V_0, L, \dots)$$

siendo la matriz correspondiente de la forma

	F/A _L	V ₀	L		
M	1	0	0	1	1
L	-1	1	1	-3	-1
t	-2	-1	0	0	-1

Si por ejemplo se eligen como variables linealmente independientes, V_0, L, \dots , su determinante es distinto de cero,

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{matrix} = 1$$

y como el número de variables n que intervienen en el fenómeno es 5 y el número de dimensiones m es 3, resulta que el número de parámetros adimensionales que se pueden formar son 2, π_1 y π_2 ,

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (V_0)^{x_1} (L)^{x_2} (\mu)^{x_3} = (L t^{-1})^{x_1} (L)^{x_2} (M L^{-3})^{x_3} (M L^{-1} t^{-1}) = \\ &= (L)^{x_1+x_2-3x_3-1} (M)^{x_3+1} (t)^{-x_1-1} = (L)^0 (M)^0 (t)^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_2 &= (V_0)^{y_1} (L)^{y_2} (\mu)^{y_3} \frac{F}{A_L} = (L t^{-1})^{y_1} (L)^{y_2} (M L^{-3})^{y_3} (M L^{-1} t^{-2}) = \\ &= (L)^{y_1+y_2-3y_3-1} (M)^{y_3+1} (t)^{-y_1-2} = (L)^0 (M)^0 (t)^0 \end{aligned}$$

El parámetro π_1 proporciona el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} x_3 + 1 &= 0 \\ x_1 + 1 &= 0 & x_1 = -1 ; x_2 = -1 ; x_3 = -1 ; \pi_1 &= V_0^{-1} L^{-1} \mu^{-1} = Re^{-1} \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

El parámetro π_2 proporciona,

$$\begin{aligned} y_3 + 1 &= 0 \\ y_1 + y_2 - 3y_3 - 1 &= 0 & y_1 = -2 ; y_2 = 0 ; y_3 = -1 ; \pi_2 &= V_0^{-2} L^{-1} \frac{F}{A_L} \\ y_1 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{F}{A_L} = \pi_2 V_0^2 = \frac{1}{2} (2 \pi) V_0^2 = \frac{1}{2} C_w V_0^2$$

que es la forma que toma la ecuación de resistencia, ya demostrada anteriormente.

ECUACIÓN GENERAL DE LA PERDIDA DE CARGA EN UNA CONDUCCIÓN CILÍNDRICA.-

En un conducto de sección circular la pérdida de presión debida a la fricción se conoce como pérdida de carga P , que multiplicada por la sección transversal A_T tiene que ser igual a la pérdida por fricción F , o fuerza de arrastre, en la forma,

$$\begin{aligned} F &= P \frac{d^2}{4} = \frac{1}{2} (2 \pi) V_0^2 A_L = \frac{1}{2} C_w V_0^2 d L \\ P &= \frac{1}{2d} (8 \pi) V_0^2 L = \frac{V_0^2 L}{2d} = \frac{8 C_w V_0^2 L}{2d} \end{aligned}$$

en la que el valor de C_w se determina mediante formulación empírica o ábacos y diagramas, de entre los que destaca el diagrama de Moody.

MÉTODO BÁSICO DE ANÁLISIS DIMENSIONAL.- Consiste en reducir al mínimo el número de variables que pueden intervenir en un problema, formando con las mismas una serie de grupos adi-

mensionales independientes. En este método todas las ecuaciones racionales se pueden hacer adimensionales con un cierto número de términos independientes; las variables se acomodan en una ecuación dimensional única, de forma que la combinación de variables para formar grupos o términos adimensionales, proporciona un número de grupos independientes siempre menor que el de variables originales.

El proceso se puede iniciar identificando sólo aquellas variables que son significativas del problema; después se agrupan en una ecuación funcional y se determinan sus dimensiones.

Como aplicación directa del método, vamos a hacer un estudio inicial de la transmisión de calor desde un tubo cilíndrico a un fluido que circula por su interior en régimen turbulento.

Si se considera un flujo en convección forzada, y que el tubo está limpio y sin incrustaciones, los coeficientes de película h_C se determinan experimentalmente como función de un cierto número de factores que representan las características dinámicas del flujo y las propiedades físicas del fluido.

El rozamiento del fluido supone un intercambio de energía entre el mismo y la superficie interna del tubo, mientras que la transmisión de calor por convección forzada supone un intercambio de energía térmica entre la superficie del tubo y el fluido; ambos fenómenos dependen del grado de turbulencia del fluido.

En general el rozamiento de un fluido en circulación forzada depende de los siguientes factores,

a) Diámetro interior del tubo d_i ; b) Longitud del tubo L ; c) Velocidad media del fluido u_F en el intervalo correspondiente a la longitud L ; d) Densidad del fluido ρ ; e) Viscosidad dinámica del fluido η ; f) Rugosidad relativa del tubo ϵ/d_i

La transmisión de calor depende de la conductividad k_F del fluido y de su calor específico a presión constante c_F ; la determinación del coeficiente h_C de la transmisión de calor por convección forzada, se puede iniciar a partir de la ecuación,

$$\frac{Q}{A_L T} = h_C = (d_i, u_F, \rho, \eta, L, k_F, c_F, \frac{1}{d_i})$$

que se puede poner también en la forma,

$$F(d_i, u_F, \rho, \eta, L, k_F, c_F, \frac{1}{d_i}) = 0$$

y que adimensionalmente puede expresarse por la matriz que se indica a continuación,

	d_i	u_F	ρ	η	L	k_F	c_F	h_c
Masa M	0	0	1	1	0	1	0	1
Longitud L	1	1	-3	-1	1	1	2	0
Tiempo t	0	-1	0	-1	0	-3	-2	-3
Temperatura T	0	0	0	0	0	-1	-1	-1

de 7 variables y cuyo discriminante es de razón 4, por lo que habrá que especificar de antemano el valor de 3 variables cualesquiera.

El valor de h_C se puede expresar en la forma adimensional siguiente,

$$h_C = d_i^a u_F^b c^c d L^e k_F^f c_F^i$$

es decir,

$$\begin{aligned} (M t^{-3} T^{-1}) &= (L)^a (L t^{-1})^b (M L^{-3})^c (M L^{-1} t^{-1})^d (L)^e (M L t^{-3} T^{-1})^f (L^2 t^{-2} T^{-1})^i = \\ &= M^{c+d+f} L^{a+b-3c-d+e+2i} t^{-b-d-3f-2i} T^{-f-i} \end{aligned}$$

Identificando coeficientes se obtiene,

$$c + d + f = 1$$

$$a + b - 3c - d + e + f + 2 = 0$$

$$b + d + 3f + 2i = 3$$

$$f + i = 1$$

que es un sistema de 4 ecuaciones linealmente independientes, con 7 incógnitas, pudiéndose fijar 3 incógnitas, por ejemplo (i, b, e) y poner las otras 4 en función de ellas, quedando,

$$f = 1 - i$$

$$d = 1 - c - f = i - c = 3 - b - 3f - 2i = 3 - b - 3 + 3i - 2i = -b + i$$

$$c = b$$

$$a = -b + 3c + d - e - f - 2i = -1 + b - e$$

por lo que,

$$h_C = d_i^{-1+b-e} u_F^b b^{-b+i} L^e k_F^{1-i} c_F^i = \left(\frac{d_i}{k_F}\right)^{-1} \left(\frac{d_i u_F}{L}\right)^b \left(\frac{d_i}{L}\right)^{-e} \left(\frac{c_F}{k_F}\right)^i$$

que a su vez se puede poner en la forma,

$$\frac{h_C d_i}{k_F} = \left(\frac{d_i u_F}{L}, \frac{d_i}{L}, \frac{c_F}{k_F}\right)$$

y que para la transmisión de calor por convección forzada, indica que si se efectúan una serie de pruebas que difieran solamente en el valor de la velocidad u_F , con los valores que así se obtengan, junto con los de h_C medidos experimentalmente, se pueden determinar la función o funciones que ligan a los grupos adimensionales

$$Re = \frac{d_i u_F}{\nu} = \frac{d_i u_F}{\nu} ; Nu = \frac{h_C d_i}{k_F} ; Pr = \frac{c_F \nu}{k_F}$$

que sólo serán válidas para valores particulares de los demás grupos adimensionales; por lo tanto,

$$Nu = f\left(Re, Pr, \frac{d_i}{L}\right)$$

modelo que no admite cambios de estado en el fluido que circula; la formulación desarrollada es muy adecuada para estudiar la influencia de la velocidad u_F sobre el coeficiente de transmisión de calor por convección forzada h_C de un sistema cualquiera, pues estas dos variables aparecen una sola vez.

El procedimiento normal para determinar los exponentes (b, e, i) a partir de datos experimentales consiste en igualar el calor transmitido al fluido por convección, con la variación de entalpía que experimenta por esta causa.

Calor transmitido al fluido por convección,

$$Q = h_C A_L (T_{pF} - T_F)$$

Variación de entalpía del fluido,

$$Q = m c_F (T_{sal} - T_{ent}) = A_T u_F c_F (T_{sal} - T_{ent}) = G A_T c_F (T_{sal} - T_{ent}) = G A_T (i_{sal} - i_{ent})$$

en la que,

G es la velocidad másica = $3600 u_F \rho$, Kg/m² hora, viniendo u_F en m/seg

A_T es el área de la sección transversal del tubo correspondiente al diámetro interior

A_L es el área de la superficie de la pared en contacto con el fluido

Igualándolas se obtiene,

$$\frac{h_C}{c_F G} = \frac{A_T (T_{sal} - T_{ent})}{A_L (T_{pF} - T_F)} = St = \frac{Nu}{Re Pr}$$

El número de Stanton St se calcula a partir de datos de Laboratorio mediante la ecuación anterior.

Para *fluidos que se calientan en el interior de tubos*, se aplica satisfactoriamente la ecuación de Dittus-Boelter, de la forma,

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4}$$

viniendo expresado h_C en, Kcal/hora m²°C, la conductividad térmica k_F del fluido en, Kcal/m°C, y la velocidad másica G , en Kg/m² hora.

Los números de Prandtl y Nusselt se definen en la forma,

$$Pr = \frac{c_F}{k_F}$$

$$Nu = \frac{h_C}{k_F} \frac{L}{T} = \frac{h_C L}{k_F T}$$

donde Nu es la relación entre el calor transmitido por convección y el calor transmitido por conducción, en la longitud L .

VII.6.- APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DIMENSIONAL A LAS BOMBAS CENTRIFUGAS

Las variables que intervienen en el movimiento de un líquido, a través de los álabes de una bomba centrífuga, pueden relacionarse mediante la siguiente ecuación,

$$f(E, D, q, \rho, \mu, n) = 0$$

en la que, $E = g H_m$ es la energía específica, D el diámetro, q el caudal bombeado, ρ la densidad del líquido utilizado, μ la viscosidad dinámica del líquido y n el número de revoluciones por minuto de la bomba. Como estas seis variables dependen total o parcialmente de las dimensiones (M, L, t), se pueden obtener, $6 - 3 = 3$, parámetros adimensionales.

La matriz correspondiente a estas variables es de la forma,

	E	D	q			n
M	0	0	0	1	1	0
L	2	1	3	-3	-1	0
t	-2	0	-1	0	-1	-1

Podemos tomar, por ejemplo, E, D y ρ , como variables independientes por cuanto su determinante es distinto de cero,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

pudiéndose poner que,

$$\begin{aligned} 1 &= E^{x_1} D^{y_1} \rho^{z_1} \quad q = L^{(2x_1+y_1-3z_1+3)} t^{(-2x_1-1)} M^{z_1} \\ 2 &= E^{x_2} D^{y_2} \rho^{z_2} \quad n = L^{(2x_2+y_2-3z_2)} t^{(-2x_2-1)} M^{z_2} \\ 3 &= E^{x_3} D^{y_3} \rho^{z_3} \quad \mu = L^{(2x_3+y_3-3z_3-1)} t^{(-2x_3-1)} M^{(z_3+1)} \end{aligned}$$

de las que se deducen los siguientes sistemas de ecuaciones,

$$\begin{aligned} 2x_1 + y_1 - 3z_1 + 3 &= 0 \\ -2x_1 - 1 &= 0 \\ z_1 &= 0 \end{aligned} \quad x_1 = -\frac{1}{2}; \quad y_1 = -2$$

$$\begin{aligned} 2x_2 + y_2 - 3z_2 &= 0 \\ -2x_2 - 1 &= 0 \\ z_2 &= 0 \end{aligned} \quad x_2 = -\frac{1}{2}; \quad y_2 = 1$$

$$\begin{aligned} 2x_3 + y_3 - 3z_3 - 1 &= 0 \\ -2x_3 - 1 &= 0 \\ z_3 + 1 &= 0 \end{aligned} \quad x_3 = -\frac{1}{2}; \quad y_3 = -1; \quad z_3 = -1$$

obteniéndose,

$$1 = \frac{q}{\sqrt{E} D^2} = \frac{q}{\sqrt{g H_m} D^2}$$

$$2 = \frac{n D}{\sqrt{E}} = \frac{n D}{\sqrt{g H_m}}$$

$$3 = \frac{1}{D \sqrt{E}} = \frac{1}{D \sqrt{g H_m}} = \frac{1}{D \sqrt{g H_m}}$$

Los parámetros adimensionales 1 , 2 y 3 permanecen constantes para cada serie de bombas semejantes, funcionando en condiciones dinámicas semejantes.

En consecuencia, a partir de ellos, se pueden obtener otros factores adimensionales comunes a dichas series, mediante los productos de 1 , 2 y 3 o cualquier otra combinación de productos de sus potencias, sean estas enteras o fraccionarias, positivas o negativas; así se pueden obtener,

$$4 = \frac{1}{3} = \frac{q}{D^2 \sqrt{q H_m}} \frac{D \sqrt{q H_m}}{D} = \frac{q}{D} \quad (\text{N}^\circ \text{ de Re para bombas})$$

$$5 = 2 \sqrt{1} = \frac{\sqrt{q}}{D \sqrt[4]{q H_m}} \frac{n D}{\sqrt{q H_m}} = \frac{n \sqrt{q}}{(q H_m)^{3/4}} \quad (\text{Velocidad específica})$$

$$6 = \frac{1}{2} = \frac{q}{D^2 \sqrt{q H_m}} \frac{\sqrt{q H_m}}{n D} = \frac{q}{n D^3} = q_s \quad (\text{Caudal específico})$$

$$7 = \frac{1}{2} = \frac{q H_m}{n^2 D^2} = \frac{2/3}{4/3}$$

De todas las combinaciones que se puedan obtener, sólo 3 son linealmente independientes.

VIII.- TEORÍA ELEMENTAL DE LA CAPA LIMITE BIDIMENSIONAL

VIII.1.- CAPA LIMITE LAMINAR Y TURBULENTA EN FLUJO SOBRE PLACA PLANA

En el movimiento de fluidos sobre una placa plana, la Hidrodinámica clásica se limita a imponer, como condición de contorno, la tangencia del vector velocidad, mientras que la Mecánica de Fluidos viscosos exige la condición adicional de adherencia al contorno de la placa, que es mucho más restrictiva que la de tangencia. En los fluidos poco viscosos, los esfuerzos tangenciales son, con frecuencia, muy inferiores a los de inercia o a los de gravedad, pero ésto no autoriza a prescindir de los esfuerzos viscosos, que pueden llegar a ejercer una influencia considerable sobre la configuración del movimiento.

Prandtl, en 1904, propone que el estudio del movimiento de un fluido de viscosidad pequeña, se podía asimilar al de un fluido perfecto, salvo en una capa próxima al contorno, de espesor δ , en la que concentraba los fenómenos de fricción, y que llamó *capa límite*; en el exterior de dicha capa, las tensiones tangenciales son despreciables, predominando las fuerzas de inercia sobre las de viscosidad, mientras que en el interior de la capa límite la proximidad del contorno hace que el gradiente de velocidades sea muy grande y, por lo tanto, que la tensión tangencial $\tau = \mu \frac{du}{dy}$, sea también muy grande; en esta situación las fuerzas de fricción son del mismo orden de magnitud que las fuerzas de inercia.

El espesor δ de la capa límite puede estar comprendido entre unas pocas moléculas y algunos milímetros, según los casos; fuera de la capa límite se pueden utilizar las ecuaciones de Euler o métodos experimentales basados en las líneas y redes de corriente, que una vez configuradas alrededor del contorno o perfil deseado, permiten obtener el campo de velocidades y la distribución de presiones correspondiente.

En el estudio de la capa límite hay que tener presentes las siguientes consideraciones,

a) Aunque la perturbación producida por la fricción se propaga a todo el fluido, se admite que la propagación queda limitada a una zona del mismo espesor finito δ , en sentido normal al contorno.

b) La forma de la curva de distribución de velocidades en las distintas secciones a lo largo de la capa límite, se puede expresar, en general, mediante las siguientes ecuaciones, Fig VIII.1,

Régimen laminar, $\frac{u}{V_0} = C + C_1 \left(\frac{y}{Y}\right) + C_2 \left(\frac{y}{Y}\right)^2 + C_3 \left(\frac{y}{Y}\right)^3 + \dots$

Régimen turbulento, $\frac{u}{V_0} = \sqrt{\frac{y}{Y}}$

en la que V_0 es la velocidad uniforme del fluido no perturbado; la capa límite en su desarrollo longitudinal, muestra una tendencia progresiva al ensanchamiento, Fig VIII 1.b.

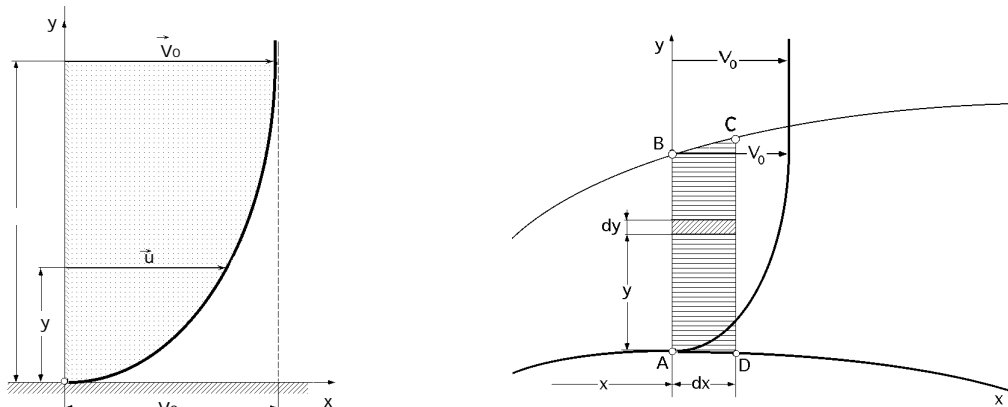


Fig VIII.1.a.b.- Capa límite

POLINOMIO DE SEGUNDO GRADO.- Si la distribución de velocidades es de la forma,

$$\frac{u}{V_0} = C + C_1 \left(\frac{y}{Y}\right) + C_2 \left(\frac{y}{Y}\right)^2$$

Para, $y = 0, u = 0 ; C = 0$

con las condiciones, Para, $y = Y, u = V_0 \quad 1 = C_1 + C_2$

Para, $y = 0, \frac{u}{y} = 0$

$$\frac{1}{V_0} \frac{u}{y} = \left(\frac{C_1}{y} + \frac{2 C_2 y}{2} \right)_{y=0} = \frac{C_1}{y} + \frac{2 C_2}{2} = 0 \quad ; \quad C_1 + 2 C_2 = 0$$

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$C_1 + 2 C_2 = 0$$

$$C_1 = 2 \quad ; \quad C_2 = -1$$

y la forma del perfil de la distribución de velocidades de la capa límite, en régimen laminar, con un polinomio de segundo grado, sería,

$$\frac{u}{V_0} = \frac{2}{3} \frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

POLINOMIO DE TERCER GRADO.- Si el polinomio es de tercer grado,

$$\frac{u}{V_0} = C + C_1\left(\frac{y}{\delta}\right) + C_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + C_3\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

$$\text{Para, } y = 0, u = 0 ; C = 0$$

$$\text{con las condiciones, Para, } y = \delta, u = V_0 \quad 1 = C_1 + C_2 + C_3$$

$$\text{Para, } y = \delta, \frac{u}{y} = 0$$

$$\frac{1}{V_0} \frac{u}{y} = \left\{ \frac{C_1}{y} + \frac{2 C_2}{\delta} \left(\frac{y}{\delta}\right) + \frac{3 C_3 y}{\delta^2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right\}_{y=\delta} = 0 \quad ; \quad C_1 + 2 C_2 + 3 C_3 = 0$$

$$\text{Para, } y = 0 \quad ; \quad \frac{2u}{y^2} = 0 \quad ; \quad \frac{1}{V_0} \frac{2u}{y^2} = \left\{ 0 + \frac{2 C_2}{\delta} + \frac{6 C_3}{\delta^2} \left(\frac{y}{\delta}\right) \right\}_{y=0} = 0 \quad ; \quad C_2 = 0$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 1$$

$$C_1 + 2 C_2 + 3 C_3 = 0 \quad C_1 = \frac{3}{2} \quad ; \quad C_2 = 0 \quad ; \quad C_3 = -\frac{1}{2}$$

$$C_2 = 0$$

y la forma del perfil de la distribución de velocidades de la capa límite, en régimen laminar, con un polinomio de tercer grado, sería,

$$\frac{u}{V_0} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

La experiencia ha permitido comprobar, para placa plana, que el movimiento laminar en la capa límite llega a hacerse inestable cuando se sobrepasa un valor crítico del número de Reynolds,

$$Re_c = \frac{V_0 x_c}{\nu}$$

siendo x_c la distancia a partir del borde de ataque de la placa.

La capa límite continua su desarrollo, como se muestra en la Fig VIII.2; a partir de x_c , se origina la capa límite turbulenta, que se divide en dos subcapas, una de las cuales, en las proximidades de la placa, permite definir una delgada subcapa marcadamente laminar.

Los valores críticos del número de Reynolds que definen la transición, para placa plana, son,

$$Re_{\text{laminar}} < 5.10^5 \quad ; \quad Re_{\text{turbulento}} > 3.10^6$$

Para fluidos que circulan entre dos paredes próximas, el ensanchamiento progresivo de la capa

límite de cada contorno determina que éstas se unan, a una cierta distancia de la entrada, desapareciendo la zona en que el movimiento podía ser asimilable a un fluido perfecto, para realizarse todo él bien en régimen laminar, o bien en régimen turbulento, según el valor del número de Reynolds.

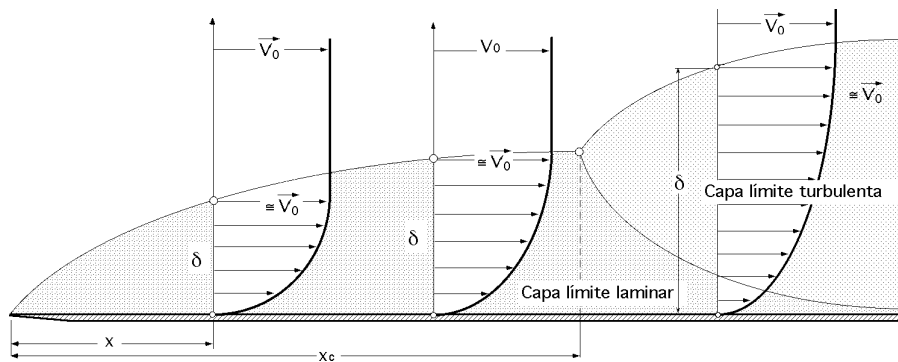


Fig VIII.2.- Desarrollo de la capa límite laminar

En tuberías sólo se puede considerar el movimiento como irrotacional, en las proximidades de la embocadura; con flujo totalmente desarrollado, no.

VIII.2.- ESPESORES Y CAUDALES DE LA CAPA LIMITE

Mediante el concepto de capa límite es posible concentrar en un espesor los fenómenos de fricción; ello implica el que se tengan que cumplir las siguientes condiciones,

a) El valor de la velocidad \bar{u} correspondiente a, $y = \delta$, tiene que estar muy próximo a \vec{V}_0 , pues entonces el gradiente de velocidades será despreciable; suele tomarse, $u = 0,99 V_0$.

b) El esfuerzo de fricción evaluado en la zona de espesor δ , (a lo largo del contorno), mediante la ecuación de la cantidad de movimiento, tiene que coincidir con el obtenido analíticamente para la capa límite laminar, o con el deducido experimentalmente en la capa límite turbulenta.

En ambas situaciones la distribución de velocidades viene dada, para el régimen laminar, por polinomios de grado m (parábolas de segundo o tercer grado en general) y para el régimen turbulento por polinomios de grado $1/m$.

Espesor de desplazamiento de la capa límite.- El espesor de desplazamiento de la capa límite δ_1 está basado en la conservación del caudal a lo largo de la normal al contorno, mediante la equivalencia de las áreas rayadas, como se indica en la Fig VIII.3.

Si se admite que la ley de velocidades es asintótica a \vec{V}_0 , se tiene:

$$\delta_1 = \frac{1}{V_0} \int_0^{\delta} (V_0 - u) dy$$

y si la ley de distribución de velocidades alcanza el valor \vec{V}_0 para el espesor δ , se tiene:

$$\delta_1 = \frac{1}{V_0} \int_0^{\delta} (V_0 - u) dy = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy = \delta - \int_0^{\delta} \frac{u}{V_0} dy = \delta - \frac{q}{V_0}$$

que se puede interpretar como la diferencia entre el espesor δ y el espesor δ_1 de una corriente que tuviese la misma velocidad \bar{V}_0 que la corriente exterior, y transportase la misma masa de fluido, caudal q , que la capa límite real.

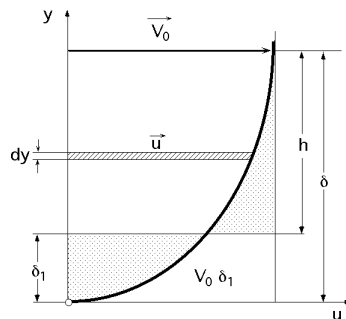


Fig VIII.3.- Espesor de desplazamiento de la capa límite

Considerando capa límite turbulenta, $\frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}}$, resulta:

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/m} dy = \int_0^{\delta} \frac{1}{1/m} y^{1/m} dy = \frac{\delta}{m+1}$$

Espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite.- El espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite δ_2 se define en la forma,

$$\delta_2 = \frac{1}{V_0^2} \int_0^{\delta} u (V_0 - u) dy = \int_0^{\delta} \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy$$

y se corresponde con el espesor de una corriente fluida que tenga la misma velocidad V_0 que la corriente exterior, y la misma variación de la cantidad de movimiento que la debida a la fuerza de arrastre de la capa límite real.

Considerando, $\frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}}$, resulta:

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/m} \left\{1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/m}\right\} dy = \frac{1}{2/m} \int_0^{\delta} y^{1/m} \left(\frac{1}{\delta^{1/m}} - y^{1/m}\right) dy = \frac{m}{(m+1)(m+2)} \delta$$

La relación entre el espesor de desplazamiento δ_1 y el espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite δ_2 , se denomina Factor de forma del perfil F; para una placa plana, en función de m se tiene,

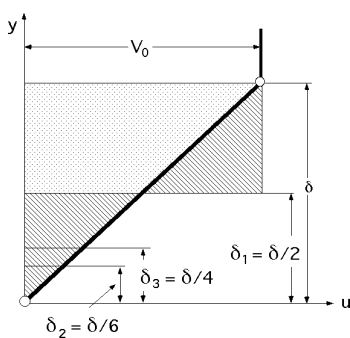
$$F = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\frac{\delta}{m+1}}{\frac{m}{(m+1)(m+2)} \delta} = \frac{m+2}{m}$$

Un valor elevado del factor de forma del perfil implica que está próximo a producirse el desprendimiento de la capa límite.

Espesor de energía de la capa límite.- El espesor de energía de la capa límite δ_3 se define en la forma,

$$\delta_3 = \frac{1}{V_0^3} \int_0^{\delta} u (V_0^2 - u^2) dy = \int_0^{\delta} \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u^2}{V_0^2}\right) dy$$

Considerando, $\frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}}$, resulta:



$$\delta_3 = \int_0^{\delta} \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}} \left\{1 - \sqrt[m]{\left(\frac{y}{\delta}\right)^2}\right\} dy = \frac{2m}{(m+1)(m+2)}$$

Para hacernos una idea del orden de magnitud y del significado, de los diversos espesores de la capa límite así definidos, indicamos en la Fig VIII.4, para el caso particular de una distribución de velocidades triangular, $m = 1$, el orden de magnitud de los mismos, de la forma,

Fig VIII.3.- Espesores de la capa límite en distribución triangular

$$\delta_1 = \frac{\delta}{2} \quad ; \quad \delta_2 = \frac{\delta}{6} \quad ; \quad \delta_3 = \frac{\delta}{4}$$

Caudal de la capa límite..- El caudal q a través de la capa límite se ha definido en la forma,

$$q = \int_0^{\delta} u dy$$

Teniendo en cuenta el espesor de desplazamiento δ_1 , resulta,

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} dy - \int_0^{\delta} \frac{u dy}{V_0} = \delta - \int_0^{\delta} \frac{u dy}{V_0} \quad ; \quad \delta_1 = \int_0^{\delta} \frac{u dy}{V_0} = \frac{q}{V_0}$$

por lo que,

$$q = V_0 (\delta - \delta_1) = V_0 \delta \frac{m}{m+1}$$

Caudal de la cantidad de movimiento de la capa límite.- El caudal de la cantidad de movimiento de la capa límite q_M se define en la forma,

$$q_M = \int_0^{\delta} u^2 dy = V_0^2 \int_0^{\delta} \left(\frac{u}{V_0}\right)^2 dy$$

Teniendo en cuenta la expresión del espesor de la cantidad de movimiento δ_2

$$2 = \int_0^{\delta} \frac{u}{V_0} \left\{ 1 - \frac{u}{V_0} \right\} dy = \int_0^{\delta} \frac{u}{V_0} dy - \int_0^{\delta} \frac{u^2}{V_0^2} dy = \delta - \int_0^{\delta} \frac{u^2}{V_0^2} dy$$

se obtiene,

$$\int_0^{\delta} u^2 dy = (\delta - 1 - 2) V_0^2$$

quedando la expresión del caudal de la cantidad de movimiento en la forma,

$$Q_M = \int_0^{\delta} u^2 dy = (\delta - 1 - 2) V_0^2 = V_0^2 \frac{m}{m + 2}$$

función del espesor δ de la capa límite, del espesor de desplazamiento δ_1 y del espesor de la cantidad de movimiento δ_2 .

VIII.3.- ECUACIÓN INTEGRAL DEL IMPULSO DE LA CAPA LIMITE

CAUDAL DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO.- Como consecuencia de la viscosidad del fluido y de su deformación, aparece un esfuerzo tangencial sobre el contorno de la placa que determina lo que se conoce como *Resistencia de Superficie o de Forma*. Para calcular este esfuerzo se aplica el Teorema de la Cantidad de movimiento al volumen de fluido comprendido en el interior de la capa límite entre las secciones (AB) y (DC) de la Fig VIII.5. Como el movimiento irrotacional exterior a la capa límite es uniforme, no existe gradiente de presiones y, al expresar el equilibrio, la única fuerza actuante es la de arrastre sobre la placa, de la forma, $\tau_0 dx$.

Para una anchura de placa unidad, el caudal de la cantidad de movimiento se evalúa como sigue:

Sobre la cara (AB), el caudal de la cantidad de movimiento entrante es,

$$Q_{M(AB)} = m u = V \int_0^{\delta} u = Q \int_0^{\delta} u = \int_0^{\delta} u^2 dy = Q_M$$

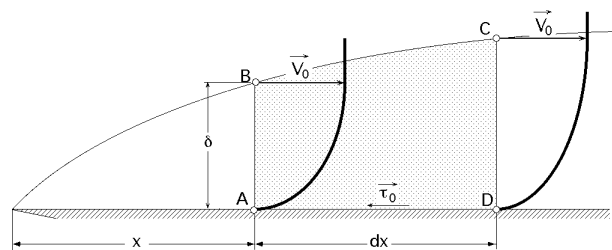


Fig VIII.5.- Volumen de fluido en la capa límite

Sobre la cara (CD), el caudal de la cantidad de movimiento saliente es,

$$Q_{M(CD)} = Q_M + \frac{Q_M}{x} dx = Q_M + \frac{1}{x} \left(\int_0^{\delta} u^2 dy \right) dx$$

por lo que en el volumen de control (ABCD) se tiene una variación del caudal de la cantidad de movimiento, $q_{M(AB)} - q_{M(CD)}$, en la forma,

$$\frac{q_M}{x} dx = \frac{1}{x} \left(\int_0^y u^2 dy \right) dx$$

Sobre el contorno (BC) no existe ningún tipo de esfuerzo cortante porque está fuera de la capa límite, $\frac{du}{dy} = 0$; teniendo en cuenta que sobre este contorno la velocidad es V_0 , el caudal de la cantidad de movimiento entrante por (BC) se obtiene en la forma,

$$q_{M(B)} = \int_0^y V_0 u dy$$

$$q_{M(C)} = q_{M(B)} + \frac{q_{M(B)}}{x} dx = q_{M(B)} + V_0 \frac{1}{x} \left(\int_0^y u dy \right) dx$$

por lo que,

$$q_{M(BC)} = V_0 \frac{1}{x} \left(\int_0^y u dy \right) dx$$

Sobre el contorno (AD) de contacto con la placa no hay caudal saliente de la cantidad de movimiento.

FUERZA DE ARRASTRE.- Igualando el caudal de la cantidad de movimiento con la fuerza de arrastre F_a sobre la placa en dx , y aplicando el Teorema del Impulso se obtiene,

$$\int_0^y u^2 dy dx = - \frac{1}{x} \int_0^y (u^2 dy) dx + V_0 \frac{1}{x} \int_0^y (u dy) dx = \frac{1}{x} \left\{ \int_0^y u (V_0 - u) dy \right\} dx$$

$$F_a = \int_0^y u (V_0 - u) dy = V_0^2 \int_0^y \frac{u}{V_0} (1 - \frac{u}{V_0}) dy = \frac{C_w x}{2} V_0^2$$

$$\int_0^y u^2 dy = \frac{u}{y} \int_0^y u (V_0 - u) dy \quad ; \quad \frac{u}{y} \int_0^y u (V_0 - u) dy = \frac{1}{x} \int_0^y u (V_0 - u) dy$$

$$\int_0^y u^2 dy = \frac{C_w}{2} V_0^2$$

en la que, $\int_0^y u^2 dy = \frac{C_w}{2} V_0^2$, se deduce comparándola con la obtenida por análisis dimensional; los valores de C_w se obtienen mediante formulación, ábacos y tablas.

a) Para una distribución de velocidades de la capa límite laminar, de la forma,

$$\frac{u}{V_0} = \frac{2y}{V_0} - \left(\frac{y}{V_0}\right)^2$$

con,

$$0 = \frac{u}{y} \Big|_{y=0} = \frac{1}{x} \int_0^y u (V_0 - u) dy = V_0^2 \frac{1}{x} \int_0^y \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy$$

se obtiene,

$$\frac{u}{y} \Big|_{y=0} = V_0^2 \frac{1}{x} \int_0^y \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy$$

$$\frac{1}{V_0} \frac{u}{y} \Big|_{y=0} = \frac{2}{x} \quad ; \quad \frac{u}{y} \Big|_{y=0} = \frac{2 V_0}{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{2 V_0}{x} &= V_0^2 \frac{1}{x} \int_0^y \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy = V_0^2 \frac{1}{x} \int_0^y \left\{ \frac{2y}{V_0} - \left(\frac{y}{V_0}\right)^2 \right\} \left\{ 1 - \frac{2y}{V_0} + \left(\frac{y}{V_0}\right)^2 \right\} dy = \\ &= V_0^2 \frac{1}{x} \left(2 - \frac{5}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2}{15} V_0^2 \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\frac{15}{V_0} dx = \frac{1}{x} dx \quad ; \quad \frac{15}{V_0} x = \frac{1}{2} + C \quad ; \quad x^2 = \frac{30}{Re_x} \quad ; \quad \frac{1}{x} = \frac{5,477}{\sqrt{Re_x}}$$

en la que se ha tenido en cuenta que para, $y = 0$; $x = 0$ $C = 0$

Los valores de los coeficientes C_x (local), y C_w (medio), son,

$$0 = \frac{u}{y} \Big|_{y=0} = C_x \frac{V_0^2}{2} = \frac{2 V_0}{x}$$

$$C_x = \frac{4}{V_0} = \frac{4x}{Re_x} = \frac{4}{\frac{1}{x} Re_x} = \frac{4}{5,477 \sqrt{Re_x}} = \frac{0,7303}{\sqrt{Re_x}}$$

$$C_w = \frac{1}{L} \int_0^L C_x dx = 2 C_x \Big|_{x=L} = \frac{1,4606}{\sqrt{Re_L}}$$

b) Para una distribución de velocidades de la capa límite de la forma,

$$\frac{u}{V_0} = \frac{3y}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{V_0}\right)^3$$

resulta,

$$0 = \frac{u}{y} \Big|_{y=0} = \frac{3 V_0}{2}$$

$$\begin{aligned} 0 &= V_0^2 \int_0^{\delta} \left\{ \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy \right\} = V_0^2 \int_0^{\delta} \left\{ \frac{3y}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right\} \left\{ 1 - \frac{3y}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right\} dy = \\ &= 0,139 V_0^2 \frac{\delta^3}{x} = \frac{3}{2} \frac{V_0}{x} \end{aligned}$$

Igualándolas,

$$\delta = 10,79 \frac{dx}{V_0} ; \quad \frac{\delta^2}{2} = 10,79 \frac{V_0}{V_0} x + Cte = \left| \text{Para, } \begin{cases} x=0 & \delta=0 \\ x=L & \delta=\delta \end{cases} \right. = 10,79 \frac{V_0}{V_0} x$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4,64}{\sqrt{Re_x}}$$

$$0 = \frac{3}{2} \frac{V_0}{x} = \frac{3}{2} \frac{V_0 \sqrt{Re_x}}{x} = \frac{0,323}{x} V_0 \sqrt{Re_x} = 0,323 \sqrt{\frac{V_0^3}{x}} = \frac{V_0^2 C_x}{2}$$

$$C_x = \frac{0,646}{x} \frac{\sqrt{Re_x}}{V_0} = \frac{0,646}{\sqrt{Re_x}} ; \quad C_w = \frac{1}{L} \int_0^L C_x dx = 2 C_x \Big|_{x=L} = \frac{1,292}{\sqrt{Re_L}}$$

El valor de C_w así obtenido para placa plana, está muy próximo al valor exacto (Blasius), y es de la forma,

$$C_x = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} ; \quad C_w = \frac{1,328}{\sqrt{Re}} ; \quad \frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}}$$

siendo la fuerza de arrastre F_a sobre cada cara de la placa de longitud L y anchura unidad,

$$F_a = \int_0^L 0 dx = \int_0^L 0,323 \sqrt{\frac{V_0^3}{x}} dx = 0,646 \sqrt{V_0^3 L}$$

VIII.4.- ECUACIONES DE PRANDTL DE LA CAPA LIMITE

Si se supone un fluido incompresible, en movimiento laminar permanente, en flujo bidimensional sobre una pared cualquiera en la que el radio de curvatura es muy superior al espesor de la capa límite, las ecuaciones de Navier-Stokes se simplifican, quedando en la siguiente forma,

$$\frac{1}{x} \frac{P}{x} = x - \frac{du}{dt} + u$$

en la que, $\frac{du}{dt} = u \frac{u}{x} + v \frac{u}{y}$; $x = 0$, en la dirección del movimiento

La ecuación de continuidad es, $\frac{u}{x} + \frac{v}{y} = 0$, y como:

$$v = 0 ; \quad \frac{v}{y} = 0 \quad \frac{u}{x} = 0 ; \quad \frac{u^2}{x^2} = 0$$

la ecuación de Navier-Stokes queda en la forma,

$$\frac{1}{x} \frac{p}{x} = -u \frac{u}{x} - v \frac{u}{y} + \frac{u^2}{y^2}$$

En el borde de la capa límite se tiene la velocidad V_0 del movimiento irrotacional exterior, por lo que aplicando la ecuación de Bernoulli se puede hallar la variación longitudinal de la presión, resultando,

$$\frac{1}{2} \frac{dV_0^2}{dx} = -\frac{1}{x} \frac{p}{x} \quad \frac{1}{2} \frac{dV_0^2}{dx} + \frac{u^2}{y^2} = u \frac{u}{x} + v \frac{u}{y}$$

Si se introduce la función línea de corriente , de la forma,

$$u = -\frac{u}{y} ; v = \frac{u}{x}$$

la ecuación de continuidad se satisface automáticamente, y sustituyendo estos valores en la ecuación anterior se obtiene,

$$\frac{u^2}{x y} - \frac{u^2}{y^2 x} = -\frac{1}{x} \frac{p}{x} - \frac{u^3}{y^3}$$

de aplicación a la obtención de la capa límite laminar sobre un contorno plano.

ECUACIÓN CLÁSICA DE KÀRMÀN.- Los caudales de la cantidad de movimiento, en proyección paralela a la pared, manteniendo la anchura de la capa límite igual a la unidad, son los siguientes,

Sobre (AB), $q_{M(AB)} = q_M$, (entrante)

Sobre (CD), $q_{M(CD)} = q_M + \frac{q_M}{x} dx$, (saliente)

Sobre (BC), $\frac{q}{x} dx V_0$, (entrante)

La variación de la cantidad de movimiento es,

$$-q_M + (q_M + \frac{q_M}{x} dx) - \frac{q}{x} dx V_0 = \frac{q_M}{x} dx - \frac{q}{x} dx V_0$$

El impulso mecánico,

$$p - (p + \frac{p}{x} dx) (\frac{u}{x} dx) - u_0 dx = - (u_0 + \frac{p}{x}) dx$$

Igualándolas se obtiene,

$$\frac{q_M}{x} - V_0 \frac{q}{x} = - \rho_0 - \frac{p}{x}$$

$$\frac{q_M}{x} - V_0 \frac{q}{x} = \left[\begin{array}{l} q_M = (\rho_1 - \rho_2) V_0^2 \quad ; \quad q = (V_0 - u) \quad ; \quad \rho_1 = \text{Cte} \\ \frac{q_M}{x} = \frac{1}{x} \{ (\rho_1 - \rho_2) V_0^2 \} = - \frac{2}{x} V_0^2 \rho_0 + (\rho_1 - \rho_2) 2 V_0 \frac{V_0}{x} \\ \frac{q}{x} = (\rho_1 - \rho_2) \frac{V_0}{x} \end{array} \right] =$$

$$= - \frac{2}{x} V_0^2 \rho_0 + (\rho_1 - \rho_2) 2 V_0 \frac{V_0}{x} - (\rho_1 - \rho_2) V_0 \frac{V_0}{x} = - \rho_0 - \frac{p}{x} =$$

$$= \left[p + \frac{V_0^2}{2} = \text{Cte} \quad ; \quad \frac{p}{x} = - V_0 \frac{V_0}{x} \right] = - \rho_0 + V_0 \frac{V_0}{x}$$

que simplificada convenientemente queda en la forma,

$$\rho_0 = \frac{2}{x} V_0^2 \rho_0 + V_0 \frac{V_0}{x} (\rho_1 + 2 \rho_2)$$

ecuación que se conoce como ecuación de Kàrmàn, en la que las variables V_0 , ρ_1 y ρ_2 no dependen más que de x .

VIII.5.- ECUACIÓN INTEGRAL DE LA ENERGÍA DE LA CAPA LÍMITE

El Primer Principio de la Termodinámica aplicado a un sistema abierto en régimen estacionario, permite calcular el calor Q puesto en juego en una transformación, en la forma,

$$Q = \dot{m} i + \dot{T} + E_{\text{cinética}} + E_{\text{potencial}}$$

i indica que la energía se puede considerar en forma de entalpía, calor o energía cinética, con las mismas unidades que el trabajo de cizalladura o de corte.

A pequeñas velocidades, los términos asociados a la energía cinética y potencial y al trabajo de cortadura son pequeños en comparación con las demás magnitudes, y se pueden despreciar.

La velocidad a la que la entalpía entra a través de la cara (AB) de la capa límite representada en la Fig VIII.6 viene dada por,

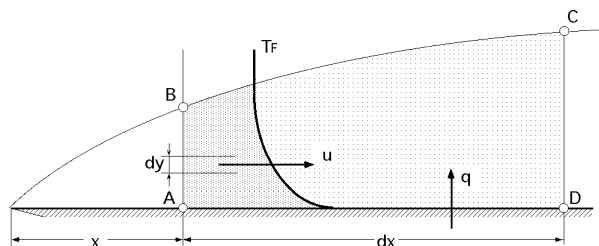


Fig VIII.6.- Capa límite térmica

$$\dot{i}_{(AB)} = m c_p T = c_p \int_0^T u T dy$$

mientras que la velocidad del flujo de entalpía a través de la cara (CD) es,

$$\dot{i}_{(CD)} = \dot{i}_{(AB)} + \frac{\dot{i}_{(AB)}}{x} dx = \dot{i}_{(AB)} + c_p \frac{1}{x} \left\{ \int_0^T u T dy \right\} dx$$

por lo que dentro de la capa límite quedará,

$$\dot{i}_{(AB)} - \dot{i}_{(CD)} = -c_p \frac{1}{x} \left\{ \int_0^T u T dy \right\} dx$$

La entalpía transportada al interior del volumen de control a través de la superficie (BC), viene dada por,

$$\dot{i}_{(BC)} = c_p T_F \frac{1}{x} \left\{ \int_0^T u dy \right\} dx$$

A su vez, el calor conducido a través de la capa límite es,

$$q_k = -k dx \left(\frac{T}{y} \right)_{y=0}$$

Sumando todas las contribuciones energéticas, se obtiene la ecuación integral para la conservación de la energía,

$$c_p T_F \frac{1}{x} \left\{ \int_0^T u dy \right\} dx - c_p \frac{1}{x} \left\{ \int_0^T u T dy \right\} dx - k dx \left(\frac{T}{y} \right)_{y=0} = 0$$

Como fuera de la capa límite térmica la temperatura es T_F , sólo se integrará hasta el límite, $y = T$, de la misma; por lo tanto,

$$c_p T_F \frac{1}{x} \int_0^T u dy - c_p \frac{1}{x} \int_0^T u T dy - k \left(\frac{T}{y} \right)_{y=0} = 0$$

$$\frac{1}{x} \int_0^T (T_F - T) u dy = \frac{k}{c_p} \left(\frac{T}{y} \right)_{y=0} = \left(\frac{T}{y} \right)_{y=0}$$

que es la ecuación integral de la energía de la capa límite laminar para el caso de un flujo de baja velocidad, en la que dx se comporta como un intervalo y es independiente de dy .

Si se utiliza un perfil de velocidades de tercer grado, de la forma,

$$\frac{u}{V_0} = \frac{3y}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{T} \right)^3$$

y una distribución de temperaturas,

$$\frac{T - T_{pF}}{T_F - T_{pF}} = \frac{T - T_F + T_F - T_{pF}}{T_F - T_{pF}} = \frac{T - T_F}{T_F - T_{pF}} + 1 = \frac{3}{2} \frac{Y}{T(x)} - \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{T(x)} \right)^2$$

en la que se han tenido en cuenta las condiciones,

Para,

$$Y = 0 ; T = T_{pF} ; \frac{2T}{Y^2} = 0$$

$$Y = T ; T = T_F ; \frac{T}{Y} = 0$$

se obtiene,

$$\left(\frac{T}{Y} \right)_{Y=0} = (T_{pF} - T_F) V_0 \frac{d}{dx} \int_0^T \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{Y}{T} + \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{T} \right)^3 \right\} \left\{ \frac{3}{2} \frac{Y}{T} - \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{T} \right)^3 \right\} dY =$$

$$= (T_F - T_{pF}) V_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{20} \frac{T^2}{T} - \frac{3}{280} \frac{T^4}{T^3} \right)$$

Teniendo en cuenta que, $\left(\frac{T}{Y} \right)_{Y=0} = (T_F - T_{pF}) \frac{3 k}{2 T}$, resulta:

$$\frac{3}{2 T} = V_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{20} \frac{T^2}{T} - \frac{3}{280} \frac{T^4}{T^3} \right)$$

Llamando, $\theta = \frac{T}{T_F}$, se tiene:

$$\frac{3}{2} = V_0 \frac{d}{dx} \left\{ \left(\frac{3}{20} \theta^2 - \frac{3}{280} \theta^4 \right) \right\}$$

En la ecuación de Pohlhausen se demuestra que,

$$\theta = \frac{T}{T_F} = (Pr)^{-1/3}$$

El valor de Pr es del orden de la unidad para la mayor parte de los gases, $0,6 < Pr < 1$, mientras que para la mayor parte de los líquidos varía en un campo muy grande, con valores elevados para los aceites muy viscosos y bajas temperaturas, y valores muy bajos para los metales líquidos; en consecuencia, cuando,

$$\theta \ll 1 ; \quad \theta^2 \ll 1 \quad \theta^4 \ll \theta^2$$

resulta,

$$\frac{3}{2} = V_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{20} \theta^2 \right) = \frac{3 V_0}{20} \left(2 \frac{d}{dx} \theta + 2 \theta \frac{d}{dx} \theta \right)$$

$$\frac{10}{V_0} dx = 3 d + 2 x^2 d$$

Derivando la solución hidrodinámica,

$$2 = 21,58 \frac{x}{V_0} \quad 2 d = 21,58 \frac{dx}{V_0}$$

sustituyendo, y simplificándola, resulta,

$$\frac{10}{V_0} dx = 3 \frac{10,79}{V_0} \frac{dx}{V_0} + 2 \times 21,58 x^2 \frac{dx}{V_0}$$

$$3 + 4 x^2 \frac{d}{dx} = \frac{13}{14} = \frac{13}{14 (Pr)}$$

La solución general es, $3 = C x^{-3/4} + \frac{10}{10,79 Pr} = C x^{-3/4} + \frac{0,92678}{Pr}$

La solución exacta es, $3 = C x^{-3/4} + \frac{13}{14 Pr} = C x^{-3/4} + \frac{0,92857}{Pr}$

y con la condición,

$$x = x_i ; \quad 2 = \left(\frac{T}{T_0}\right)^3 = 0 ; \quad C = - \frac{13}{14} \frac{\sqrt[3]{x_i}}{Pr}$$

resulta, Fig VIII.7,

$$= 0,976 \sqrt[3]{\frac{1 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^{3/4}}{Pr}}$$

por lo que,

$$\begin{aligned} h_{Cx} = \frac{3 k}{2 T} &= \frac{\frac{3 k}{2}}{0,976 \sqrt[3]{\frac{1 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^{3/4}}{Pr}}} = \left| = \frac{4,64 x}{\sqrt{Re_x}} \right| = \frac{\frac{3 k}{2}}{0,976 \frac{4,64 x}{\sqrt{Re_x}} \sqrt[3]{\frac{1 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^{3/4}}{Pr}}} = \\ &= \frac{3 k}{2 x} \frac{\sqrt[3]{Pr} \sqrt{Re_x}}{0,976 \times 4,64 \sqrt[3]{1 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^{3/4}}} = 0,332 k \frac{1}{\sqrt[3]{1 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^{3/4}}} \frac{\sqrt[3]{Pr} \sqrt{Re_x}}{x} \end{aligned}$$

$$Nu_x = \frac{h_{Cx} x}{k} = \frac{0,332 \sqrt[3]{Pr} \sqrt{Re_x}}{\sqrt[3]{1 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^{3/4}}}$$

De haber considerado la ecuación de tercer grado de partida, se hubiera obtenido,

$$Nu_x = \frac{0,323 \sqrt[3]{Pr} \sqrt{Re_x}}{\sqrt[3]{1 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^{3/4}}}$$

Haciendo, $\frac{x_i}{x} = 0$, se obtiene la ecuación de Pohlhausen, en la forma,

$$Nu_x = 0,332 \sqrt{Re_x} Pr^{1/3}$$

Teniendo en cuenta que,

$$= \frac{0,976}{\sqrt[3]{Pr}} = \frac{T}{L} ; \quad T = \frac{0,976}{\sqrt[3]{Pr}} = 4,534 \frac{x}{\sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr}}$$

el coeficiente medio de transmisión de calor por convección h_C en el intervalo, $0 < x < L$, a lo largo de la superficie plana es,

$$h_C = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} h_{Cx} dx = 2 h_{Cx} \Big|_{x=L} = \frac{0,664 k \sqrt{Re_L} Pr^{1/3}}{L} \quad (\text{exacto})$$

$$h_C = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} h_{Cx} dx = 2 h_{Cx} \Big|_{x=L} = \frac{0,646 k \sqrt{Re_L} Pr^{1/3}}{L} \quad (\text{ecuación de tercer grado})$$

El calor transmitido desde la placa, de anchura unidad, al fluido, es,

$$Q = L h_C (T_{pF} - T_F)$$

Si se considera existen dos zonas longitudinales sobre la placa, perfectamente diferenciadas, una sin aporte de calor, Fig VIII.7, resulta,

$$x < x_1 ; \quad Q = 0$$

$$\text{Para, } x > x_1 ; \quad Q = 0,323 \frac{k_F}{x} Pr^{1/3} \sqrt{Re_x} \frac{T}{\sqrt[3]{1 - \left(\frac{x_1}{x}\right)^{3/4}}}$$

$$\text{con, } T = T_{pF} - T_F$$

Para una zona de la placa comprendida entre, $x_1 < x < x_2$, a la que se aplica un flujo de calor Q , Fig VIII.8, se tiene,

$$Q = 0,323 \frac{k_F}{x} Pr^{1/3} \sqrt{Re_x} \left(\frac{T}{\sqrt[3]{1 - \left(\frac{x_1}{x}\right)^{3/4}}} + \frac{-T}{\sqrt[3]{1 - \left(\frac{x_2}{x}\right)^{3/4}}} \right)$$

observándose que el flujo de calor en la región, $x_1 > x_2$, es (-) lo cual significa que en la citada sección la pared reabsorbe parte del calor comunicado a la capa límite en la región, $x_1 < x < x_2$.

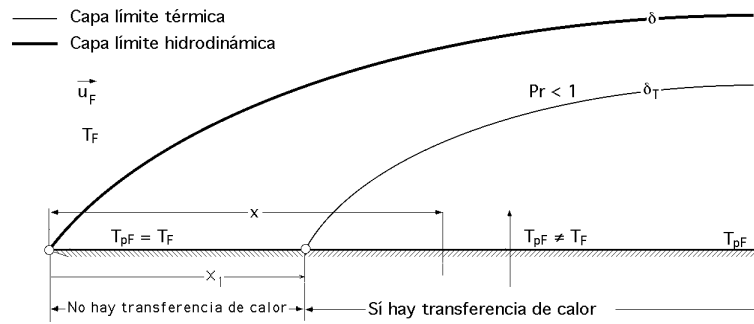


Fig VIII.7- Capa límite térmica e hidrodinámica superpuestas

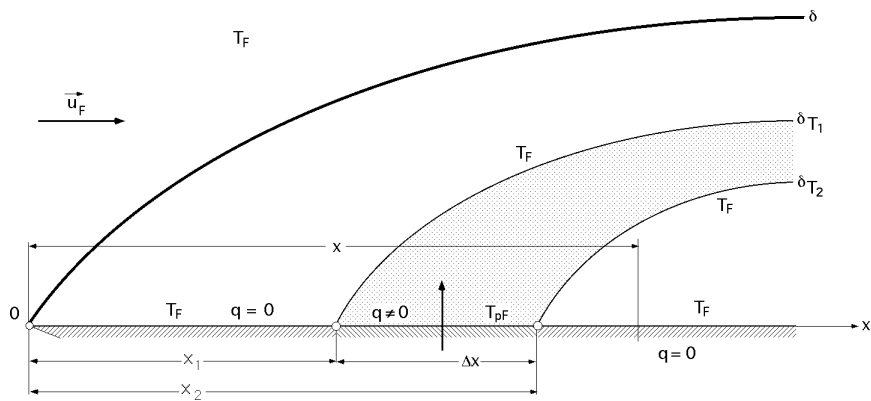


Fig VIII.8 - Placa con una capa límite laminar y dos capas límite térmicas

RELACION ENTRE C_x y h_{Cx} EN FLUJO LAMINAR SOBRE PLACA PLANA.- A partir de la expresión exacta de Blasius para el coeficiente de arrastre local C_x a lo largo de una placa plana,

$$\frac{C_x}{2} = \frac{0,332}{\sqrt{Re_x}}$$

en la que se ha supuesto que para el espesor de la capa límite el gradiente de presiones es cero y las propiedades del fluido constantes, y del número de Nu local para el flujo laminar, (Pohlhausen),

$$Nu_x = 0,332 \sqrt{Re_x} Pr^{1/3}$$

y como el número de Stanton local St_x es,

$$St_x = \frac{h_{Cx}}{c_p V_0} = \frac{Nu_x}{Pr Re_x} = \frac{0,332}{Pr^{2/3} \sqrt{Re_x}} = \frac{0,332 C_x}{Pr^{2/3} 2 \times 0,332} = \frac{C_x}{2 Pr^{2/3}}$$

$$\frac{C_x}{2} = St_x Pr^{2/3} ; \quad Pr > 0,5$$

que se conoce como analogía de Reynolds-Colburn que relaciona el coeficiente de arrastre local C_x con el número de Stanton St_x para flujo laminar a lo largo de una placa plana.

Como es mucho más fácil hacer medidas de la fuerza de arrastre que de la transferencia de calor, para el caso de valores medios se puede poner,

$$\frac{C_w}{2} = St Pr^{2/3} = \frac{h_c}{c_p V_0} Pr^{2/3}$$

en la que C_w es el coeficiente de arrastre medio y St el número de Stanton medio.

Teniendo en cuenta lo anterior, la fuerza de arrastre F_a queda en la forma,

$$F_a = \frac{(L a) C_w V_0^2}{2} = \frac{(L a) h_c V_0^2}{c_p V_0} = (L a) \frac{h_c}{c_p} V_0$$

VIII.6.- CAPA LIMITE TURBULENTA PARA PLACA PLANA

No existe una teoría exacta que permita estudiar la capa límite turbulenta; sin embargo sí existen modelos empíricos que han permitido la obtención de soluciones numéricas de las ecuaciones de la capa límite.

El reparto de velocidades para la placa plana es aproximadamente logarítmico, habiéndose obtenido al efecto los siguientes resultados experimentales,

$$\text{Para, } 10^5 < Re < 10^7 ; \quad \frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{Y}} \quad , \text{ con, } m = 7, \quad F = \frac{9}{7}$$

El valor de δ_0 , de la forma,

$$\delta_0 = \frac{1}{x} \int_0^{\delta_0} u (V_0 - u) dy$$

se puede aplicar también al régimen turbulento, por cuanto en su demostración no se ha fijado la forma de la distribución de velocidades en la capa límite, por lo que la distribución de velocidades u/V_0 puede ser, para placa plana, de la forma,

$$\frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{Y}}$$

y para flujo turbulento por el interior de tuberías, (Nikuradse),

$$\frac{u}{V_{\text{máx}}} = \sqrt[m]{\frac{y}{R}}$$

En estas circunstancias Blasius dedujo experimentalmente que,

$$\delta_0 = 0,0288 V_0^2 \sqrt[4]{\frac{y}{x}} \quad , \text{ con, } 5 \cdot 10^5 < Re < 10^7$$

Siguiendo el mismo método que para el cálculo de la capa límite laminar,

$$\delta_0 = V_0^2 \frac{1}{x} \int_0^{\delta_0} \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy = V_0^2 \frac{1}{x} \int_0^{\delta_0} \sqrt[7]{\frac{y}{Y}} \left\{1 - \sqrt[7]{\frac{y}{Y}}\right\} dy = \frac{7}{72} V_0^2 \frac{d}{dx}$$

Igualando las expresiones,

$$\frac{7}{72} V_0^2 \frac{d}{dx} = 0 = 0,0228 V_0^2 \sqrt[4]{\frac{V_0}{V_0}}$$

se obtiene,

$$\sqrt[4]{d} = 0,234 \sqrt[4]{\frac{V_0}{V_0}} dx ; \quad 5/4 = 0,292 \sqrt[4]{\frac{V_0}{V_0}} x ; \quad \frac{0,376}{x} = \frac{0,376}{\sqrt[5]{Re_x}}$$

en donde se ha supuesto que la capa límite es turbulenta en el total de la longitud de la placa L de forma que para, $x = 0, \quad = 0$.

El esfuerzo cortante τ_0 es,

$$0 = 0,0228 V_0^2 \sqrt[4]{\frac{V_0}{V_0}} = 0,0228 V_0^2 \sqrt[4]{\frac{V_0}{V_0 \frac{0,376 x}{\sqrt[5]{Re_x}}}} = 0,029 V_0^2 \sqrt[5]{\frac{x V_0}{x V_0}}$$

La fuerza de arrastre F_a por unidad de anchura de la placa es,

$$F_a = \int_0^L \tau_0 dx = 0,036 \frac{V_0^2 L}{\sqrt[5]{Re_L}} ; \quad C_x = \frac{0,0576}{\sqrt[5]{Re_x}} ; \quad C_w = \frac{0,072}{\sqrt[5]{Re_L}} = \frac{1}{2} \frac{P}{V_0^2 L}$$

ecuaciones válidas en el intervalo en que lo es la ecuación de Blasius.

Para el número de Re crítico, $Re_c = 5.10^5$, resulta,

$$C_w = \frac{0,072}{\sqrt[5]{Re_L}} - 0,00334 \frac{x_c}{L} = \frac{0,072}{\sqrt[5]{Re_L}} - \frac{1700}{Re_L}$$

Para valores del número de Re comprendidos en el intervalo, $5.10^5 < Re_x < 10^9$, resulta,

$$C_{wx} = \frac{0,455}{(\log_{10} Re_L)^{2,58}}$$

El coeficiente de arrastre, que es exacto para toda la placa, y que incluye las zonas laminar y turbulenta, se determina mediante las expresiones,

$$C_w = \frac{1,328}{\sqrt{Re_c}} \frac{Re_c}{Re_L} + 0,074 Re_L^{-1/5} \left\{ 1 - \left(\frac{Re_c}{Re_L} \right)^{4/5} \right\} ; \quad Re_L > 10^7$$

$$C_w = \frac{1,328}{\sqrt{Re_c}} \frac{Re_c}{Re_L} + \frac{0,523}{\ln^2(0,06 Re_L)} - \left(\frac{Re_c}{Re_L} \right) \frac{0,523}{\ln^2(0,06 Re_c)} ; \quad Re_L < 10^7$$

VIII.7.- DESPRENDIMIENTO DE LA CAPA LIMITE

Cuando el gradiente de presiones se mantiene nulo a lo largo de la placa plana, la capa límite se desarrolla a lo largo de la misma, independientemente de su longitud. Pero si el gradiente de presiones es *adverso*, la presión aumenta en el sentido de la corriente, y el espesor de la capa límite

crece rápidamente.

Por otro lado, el gradiente de presión adverso junto con el esfuerzo cortante en la pared, hacen que disminuya la cantidad de movimiento dentro de la capa límite y, si ambos actúan a lo largo de una distancia suficiente, el fluido de la capa límite se irá frenando hasta alcanzar el reposo; en este instante, la línea de corriente que coincide con la pared se aleja de la superficie a partir del punto de separación, conociéndose este fenómeno como *desprendimiento de la capa límite*.

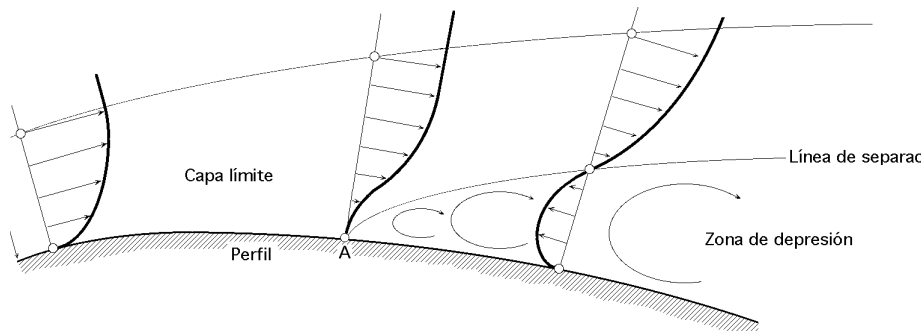


Fig VIII.9.- Desprendimiento de la capa límite

El fenómeno se acentúa cuando el perfil es un conducto divergente; el flujo en las proximidades del contorno se va frenando continuamente hasta alcanzar el punto A de la Fig VIII.9, en el que la velocidad se hace cero. La forma del contorno puede exigir una disminución mayor de la velocidad, cosa imposible, por lo que el fluido se separará de él, produciéndose al mismo tiempo un contraflujo originado por el gradiente de presiones adverso, es decir, aguas abajo del punto de desprendimiento se origina una zona de bajas presiones, que provocan la aparición de una fuerza depresiva dirigida en el sentido de la corriente, denominada *Resistencia de forma*, por depender hasta cierto punto de la geometría del perfil.

Tabla VIII.2.- Coeficientes de arrastre C_w de algunos cuerpos y perfiles inmersos en una corriente fluida de velocidad V_0

$$F_a = \frac{C_w V_0^2 A_{\text{Frontal}}}{2}$$

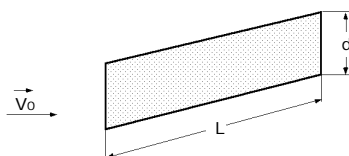
a) Placa plana paralela a la corriente



Régimen laminar: $C_w = \frac{1,33}{\sqrt{Re}}$

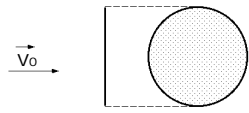
$$Re < 10^7 \quad C_w = \frac{0,074}{\sqrt[4]{Re}} \quad ; \quad Re > 10^7 \quad C_w = \frac{0,455}{\{\log_{10} Re\}^{2,58}}$$

b) Placa plana perpendicular a la corriente, $Re > 10^3$



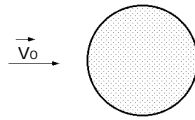
L/d	1	5	10	20	30	
C_w	1,18	1,2	1,3	1,5	1,6	1,95

c) Disco circular normal a la corriente



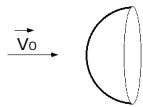
$Re > 10 ; C_w = 1,17$

d) Esfera

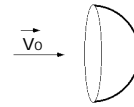


$Re < 1 \quad C_w = 24 \sqrt{Re}$
 $10^3 < Re < 3 \times 10^5 \quad C_w = 0,47$
 $Re > 3 \times 10^5 \quad C_w = 0,20$

e) Hemisferio hueco

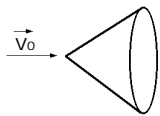


$10^4 < Re < 10^6 \quad C_w = 0,34$



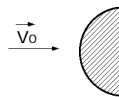
$10^4 < Re < 10^6 \quad C_w = 1,42$

f) Cono de 60°

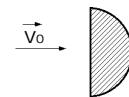


$Re = 10^5 ; C_w = 0,50$

g) Semicilindro

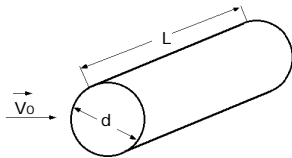


$10^4 < Re < 10^6 ; C_w = 0,42$



$10^4 < Re < 10^6 ; C_w = 1,17$

h) Cilindro normal a la corriente

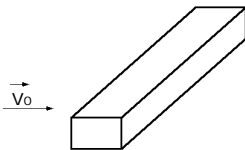


$Re < 0,2 ; C_w = \frac{8 p}{Re \{2,2 - \lg_{10} Re\}}$

$10^3 < Re < 10^5$						
L/d	1	5	10	20	30	
C _w	0,63	0,8	0,83	0,93	1	1,2

$Re > 5 \times 10^5$		
L/d	5	
C _w	0,35	1,6

i) Prisma,

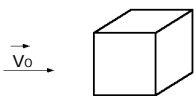


$Re = 3,5 \times 10^4 ; C_w = 2$

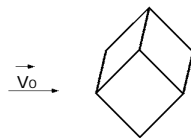


$10^4 < Re < 10^5 ; C_w = 1,6$

j) Cubo

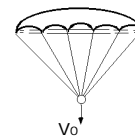


$Re = 10^5 ; C_w = 1,07$



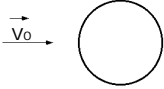



$Re = 10^5 ; C_w = 0,81$

k) Paracaídas (Baja porosidad),

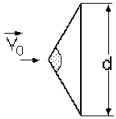
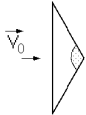
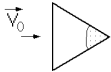
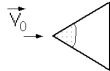
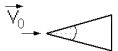
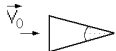


$Re = 10^5 ; C_w = 1,2$

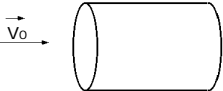
l) Cilindros elípticos

		
Relación 1/1	Régimen laminar, $C_w = 1,20$	Régimen turbulento, $C_w = 0,30$
		
Relación 2/1	Régimen laminar, $C_w = 0,60$	Régimen turbulento, $C_w = 0,20$
		
Relación 4/1	Régimen laminar, $C_w = 0,35$	Régimen turbulento, $C_w = 0,15$
		
Relación 8/1	Régimen laminar, $C_w = 0,25$	Régimen turbulento, $C_w = 0,10$

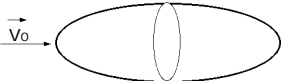
m) Cilindro triangular

	$120^\circ ; Re > 10.000 ; C_w = 1,72$		$120^\circ ; Re > 10.000 ; C_w = 2,0$
	$60^\circ ; Re > 10.000 ; C_w = 1,72$		$60^\circ ; Re > 10.000 ; C_w = 1,39$
	$30^\circ ; Re > 100.000 ; C_w = 1,00$		$30^\circ ; Re > 100.000 ; C_w = 1,80$

n) Cilindro de sección lenticular,

	$Re > 10^3$												
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>L/d</td> <td>0,5</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>C_w</td> <td>1,15</td> <td>0,9</td> <td>0,85</td> <td>0,87</td> <td>0,99</td> </tr> </table>	L/d	0,5	1	2	4	8	C_w	1,15	0,9	0,85	0,87	0,99
L/d	0,5	1	2	4	8								
C_w	1,15	0,9	0,85	0,87	0,99								

o) Elipsoide

	Relación L/d = 0,75	Régimen laminar, $C_w = 0,50$	Régimen turbulento, $C_w = 0,20$
	Relación L/d = 1,00	Régimen laminar, $C_w = 0,47$	Régimen turbulento, $C_w = 0,20$
	Relación L/d = 2,00	Régimen laminar, $C_w = 0,27$	Régimen turbulento, $C_w = 0,13$
	Relación L/d = 4,00	Régimen laminar, $C_w = 0,25$	Régimen turbulento, $C_w = 0,1$
	Relación L/d = 8,00	Régimen laminar, $C_w = 0,20$	Régimen turbulento, $C_w = 0,08$

VIII.8.- PARADOJA DE D'ALEMBERT

Cuando un cuerpo sólido se mueve en el interior de un fluido real, se originan unas fuerzas debidas a la viscosidad. Por el Principio de acción y reacción, el cuerpo ejerce sobre el fluido una fuerza igual y de sentido contrario a la que el fluido ejerce sobre el solido, es decir, el fenómeno de la resistencia que un solido experimenta al moverse en el seno de un fluido, es análogo al de la resistencia que un fluido experimentaría al moverse en el interior de un solido, como una tubería, por ejemplo.

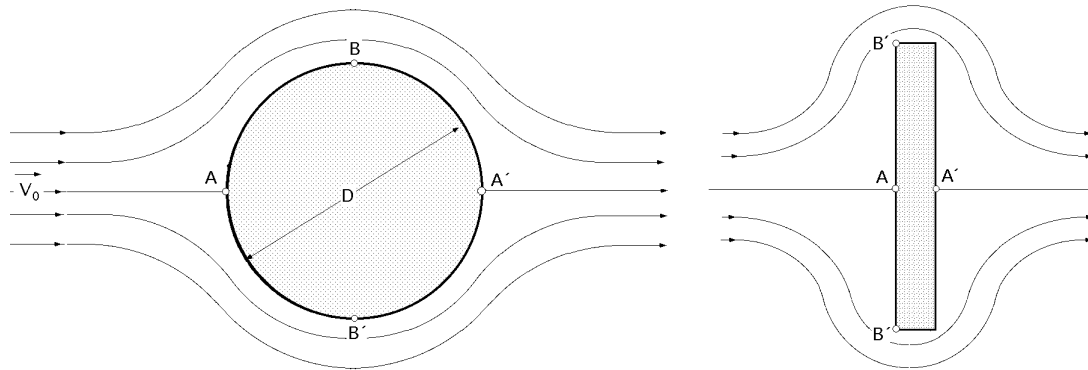


Fig VIII.10.- Cilindro y placa en el seno de un fluido perfecto en movimiento

Sea un cilindro, una esfera, etc, Fig VIII.10, colocados en el seno de un flujo bidimensional, carente de viscosidad; si el fluido se mueve en régimen laminar, su velocidad en los puntos A y A' será nula, (puntos de estancamiento), siendo, por lo tanto, su presión máxima; en los puntos B y B' la velocidad alcanza su valor máximo, y la presión su valor mínimo; en consecuencia, la distribución de presiones en torno al cilindro, esfera, etc., será simétrica, llegándose a la conclusión de que estos sólidos introducidos en un fluido ideal, moviéndose en régimen laminar, no estarán sometidos a ninguna fuerza, permaneciendo quietos, resultado que esta en contradicción con la realidad, por cuanto la experiencia dice que este hecho de la distribución simétrica de presiones no se cumple, hecho afortunado atribuible a la viscosidad del fluido, por cuanto los solidos introducidos en el seno de un fluido en movimiento presentan una resistencia al avance, tanto mayor, cuanto mayor sea la diferencia de presiones existente entre los puntos A y A'.

Si el cilindro, esfera, etc., se mueve con velocidad constante \vec{u}_0 en el seno del fluido ideal en reposo, será equivalente a considerar el cilindro circular fijo, y el fluido ideal moviéndose en sentido contrario, con velocidad, $-\vec{u}_0$.

Al ser el fluido ideal se cumple que,

- a) La energía será constante en todos los puntos de una misma línea de corriente.
- b) Es irrotacional, lo cual implica el que la energía es constante en todos los puntos, aunque no estén en la misma línea de corriente.

Sabemos que,

$$V_s = 2 u_0 \text{ sen } \theta$$

siendo V_s la velocidad del fluido en un punto de la superficie del cilindro, tal como se muestra en la

Fig VIII.11. Si la gravedad no juega ningún papel bien porque el plano del dibujo sea horizontal, o bien, porque el fluido sea un gas, aplicando Bernoulli entre la sección O, corriente sin perturbar, y un punto cualquiera S del cilindro, se tiene,

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{u_0^2}{2} = \frac{p_s}{\rho} + \frac{V_s^2}{2}$$

Despejando p_s resulta, teniendo en cuenta que, $\rho = \rho_0$,

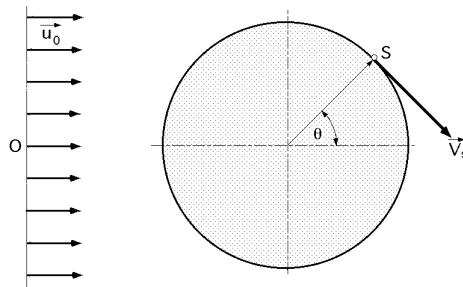


Fig VIII.11.- Circulación de un fluido perfecto en torno a un cilindro

$$p_s = p_0 + \frac{\rho}{2} (u_0^2 - V_s^2) = p_0 + \frac{\rho}{2} (u_0^2 - 4 u_0^2 \sin^2 \theta) = p_0 + \frac{\rho}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta)$$

que se puede poner también en la forma,

$$\frac{p_s - p_0}{\frac{\rho}{2} u_0^2} = \frac{p}{\frac{\rho}{2} u_0^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

Las fuerzas debidas a la presión son normales en cada punto del cilindro; dando valores a θ se obtienen los correspondiente valores de p que se manifiestan en la Fig VIII.12, en la que el

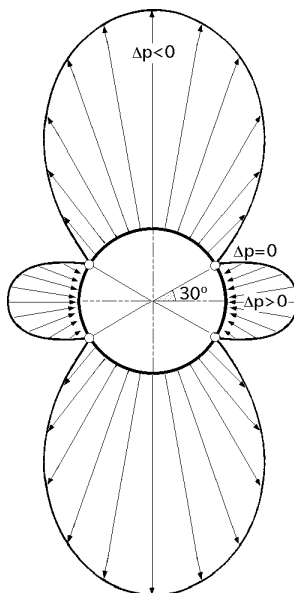


Fig VIII.12.- Diagrama de presiones en la circulación de un fluido perfecto en torno a un cilindro

diagrama polar de presiones nos permite visualizar la paradoja de D'Alembert, y en donde por la simetría de las presiones, la resultante según el eje horizontal, fuerza de arrastre, es nula, es decir, *Un cilindro se mueve en el seno de un fluido ideal sin experimentar resistencia alguna.*

En el fenómeno, la presión puede ser mayor, igual o menor que cero, obteniéndose los siguientes resultados,

Para,

$$p = 0 ; 1 - 4 \sin^2 \theta = 0 ; \theta = \pm 30^\circ$$

$$p > 0 ; 1 - 4 \sin^2 \theta > 0 ; \theta < \pm 30^\circ$$

$$p < 0 ; 1 - 4 \sin^2 \theta < 0 ; \theta > \pm 30^\circ$$

Esto es lo mismo que si el potencial de una singulari-

dad formada por un par de manantiales de signo contrario y muy cercanos se combina con el potencial, $\phi = u_0 x$, de la corriente unidimensional; se tiene un flujo igual al que se tendría si en la corriente traslacional se sumergiese una esfera.

En este flujo el movimiento relativo de la esfera estaría privado de resistencia (paradoja de D'Alembert).

En cambio, si el potencial del par indicado anteriormente se combina con el de un movimiento horizontal plano (bidimensional), se obtiene un flujo igual al que se tendría si se sumergiese en la corriente un cilindro circular de eje normal al plano y de altura infinitesimal como el espesor de la corriente.

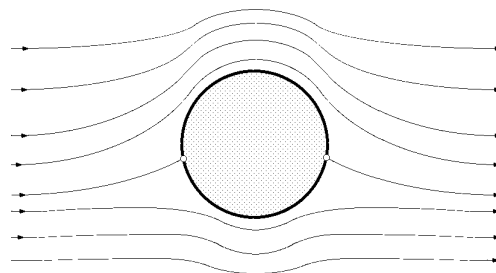


Fig VIII.13

Incluso en este flujo el movimiento relativo del cilindro resultaría privado de resistencia porque la distribución de las presiones en la parte anterior sería igual a la distribución de las mismas en la parte posterior. Además no se manifestaría fuerza ni tan siquiera en sentido transversal al movimiento, porque la distribución de las presiones es simétrica incluso en aquella dirección. Si además se añade a esta configuración el potencial de un torbellino se tiene un flujo igual al que se tendría si el cilindro descrito anteriormente empezase a girar sobre su propio eje, Fig VIII.13, en la que se observa el comportamiento de los filetes de fluido en un cilindro que gira en sentido contrario a las agujas del reloj alrededor de su eje.

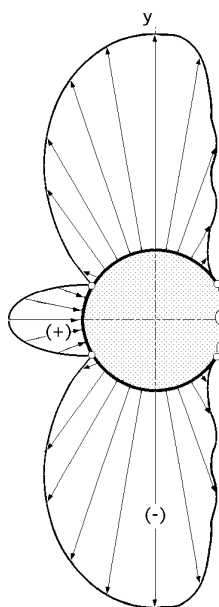


Fig VII.14.- Distribución de presiones alrededor de un cilindro en rotación

En estas condiciones la resistencia todavía es nula, pero en sentido transversal la distribución de las presiones no es ya simétrica sobre ambos lados; aparece entonces una resultante normal, perpendicular al movimiento, que se denomina sustentación, que tiene un valor que vectorialmente viene dado por,

$$\vec{F}_{asc} = (\vec{u}_0 \times \vec{\Gamma})$$

y escalarmente por, $F_{asc} = u_0 \Gamma$, donde Γ es la circulación (teorema de Kutta-Zhoukovski).

El cilindro representa el núcleo del torbellino. Puesto que, en circunstancias reales, el fluido no es perfecto, detrás del cilindro se da una distribución de presiones superficiales distinta de la que se da en la parte anterior, porque la vena fluida se separa de la superficie nace de esta forma una resistencia.

Conviene entonces achatar la sección circular hasta reducirla a un perfil no simétrico, de manera que en la parte posterior los hilos de fluido se separen del perfil lo más tarde posible.

La asimetría de la distribución de presiones sobre dicho perfil recuerda la del cilindro que gira alrededor de su eje; por eso, el perfil continúa siendo la representación física del torbellino del mismo modo que el cilindro.

En la Fig VIII.14 se presenta la distribución de presiones alrededor de un cilindro en movimiento de rotación, sumergido en un fluido en movimiento relativo respecto al baricentro del cilindro

VIII.9.- FLUJO PARA UN FLUIDO REAL EN TORNO A UN CILINDRO CIRCULAR

El flujo alrededor de un cilindro circular es un excelente ejemplo de los efectos causados por el desprendimiento de la capa límite sobre la fuerza de arrastre. Si se considera al cilindro inmerso en la corriente, desde un punto de vista macroscópico la configuración de la misma en torno al cilindro sería la indicada en la Fig VIII.13, pero si nos detenemos en un punto cualquiera de la superficie del cilindro, y se pasa a la observación microscópica, se encuentra que la distribución de velocidades, como se sabe, tiene otra forma, según la cual, la capa de fluido contigua al cilindro se adhiere al mismo, por su viscosidad, por lo que su velocidad en el punto de contacto con el cilindro se reduce a cero, Fig VIII.15.

Esta velocidad aumenta rapidísimamente hasta que, pasada una cierta película de fluido de espesor δ , la velocidad que adquiere el fluido es \bar{V}_0 , correspondiente a las líneas de corriente.

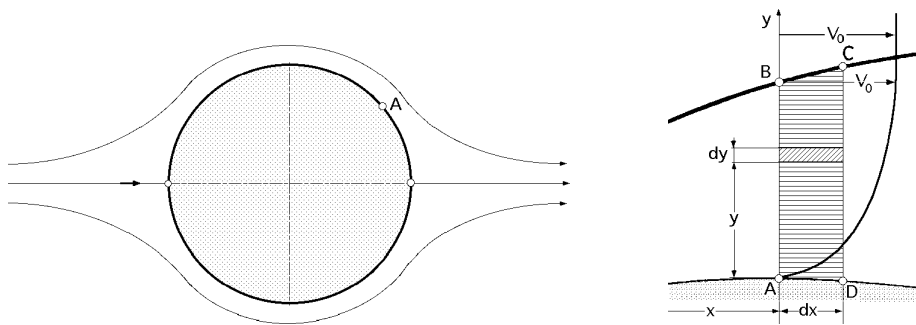


Fig VIII.15.- Cilindro inmerso en una corriente y observación microscópica del flujo en sus proximidades

En la ecuación de Newton

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

se tiene que, aunque δ sea muy pequeña, caso del agua y del aire, por ejemplo, resulta que el gradiente de velocidades du/dy es muy grande, por cuanto la variación de velocidad tiene lugar dentro del espesor δ , muy pequeño, y en consecuencia, el esfuerzo cortante τ será muy grande.

En la práctica, y salvo aquellos casos en que la velocidad del fluido sea muy pequeña, no se suele dar la configuración de las líneas de corriente como las hemos visto hasta ahora sino que a partir de un cierto punto del cilindro, las líneas de corriente se separan, desprendiéndose la capa límite, y creándose aguas abajo del cilindro unos remolinos que configuran la estela, y que originan

una depresión.

Al estudiar, como caso particular, el flujo bidimensional de un fluido incompresible en torno a un cilindro circular de diámetro D , el coeficiente de arrastre C_w es a su vez función del número de Reynolds, Fig VIII.16, según hemos visto por análisis dimensional, pudiéndose considerar 6 casos para distintos valores de C_w y Re , tal como se indican a continuación.

El tipo a , Fig VIII.17, tiene un número de Reynolds muy pequeño, $Re < 1$, por lo que las fuerzas de inercia son pequeñas en comparación con las de viscosidad, cerrándose el flujo suavemente detrás del cilindro, aguas abajo del mismo

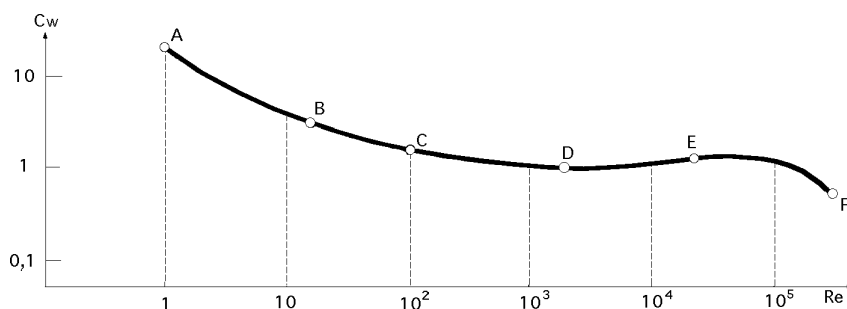


Fig VIII.16.- Valores del coeficiente de arrastre en función del número de Re

Al aumentar el número de Reynolds, el coeficiente de arrastre C_w disminuye; este caso b Fig VIII.18, se presenta para, $Re \approx 20$. El flujo es laminar a lo largo de la superficie del cilindro aguas arriba; en el punto S se produce la separación de la capa límite laminar. Aguas abajo aparece una región en la que se encuentran dos remolinos estacionarios.

Para valores del número de Reynolds, $Re > 20$, Fig VIII.19, los remolinos se hacen inestables, comienzan a vibrar irregularmente, y posteriormente se separan alternativamente de los dos lados, periódicamente, describiendo lo que se conoce como la *trayectoria del vórtice de Kàrmàn*, existiendo después del cilindro una disposición estable y escalonada de vórtices. La capa límite del lado de la corriente arriba del cilindro es laminar, separándose detrás del cilindro. En la estela posterior aparecen una serie de capas libres laminares.

Para valores del número de Reynolds comprendidos entre, $5.000 < Re < 15.000$, Fig VIII.20, el flujo se separa del cilindro para formar una estela simétrica con capas libres turbulentas caso d .

El tipo e Fig VIII.21, aparece para números de Reynolds comprendidos entre, $50.000 < Re < 200.000$, siendo, para este caso, constante el coeficiente de arrastre C_w . El punto S es la separación de la capa límite laminar, produciéndose la transición al mismo tiempo que la separación.

Para el tipo f Fig VIII.22, el número de Reynolds es, $Re > 200.000$, y la transición se produce en la capa límite laminar, por delante del punto de separación. En la capa límite turbulenta existirán una intensa mezcla de porciones de fluido, siendo el perfil de velocidades más brusco, retrasándose, en consecuencia, la separación. Detrás del cilindro, la capa límite turbulenta se separa para formar una estela turbulenta.

Como resumen, se puede asegurar que, para el flujo alrededor de un cilindro, y para números de Re muy pequeños, el flujo es laminar en todos sus puntos; para números grandes de Re , el flujo se puede considerar como potencial, salvo en la capa límite y en la estela.

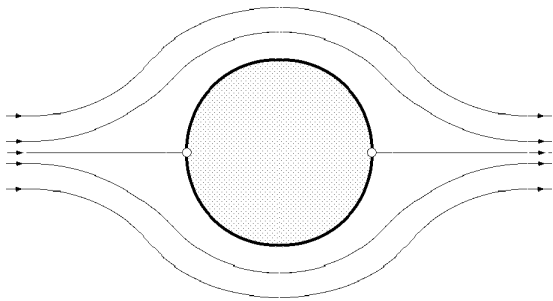


Fig VIII.17
Flujo bidimensional en torno a un cilindro, $Re < 1$, a

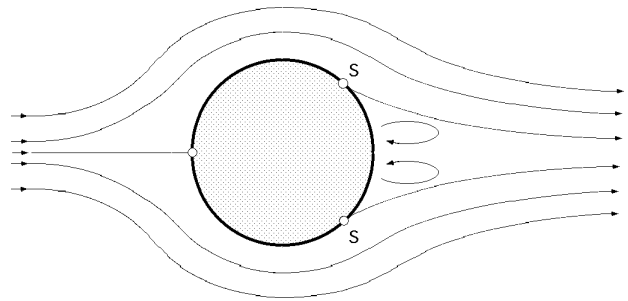


Fig VIII.18
Flujo bidimensional en torno a un cilindro, $Re = 20$, b

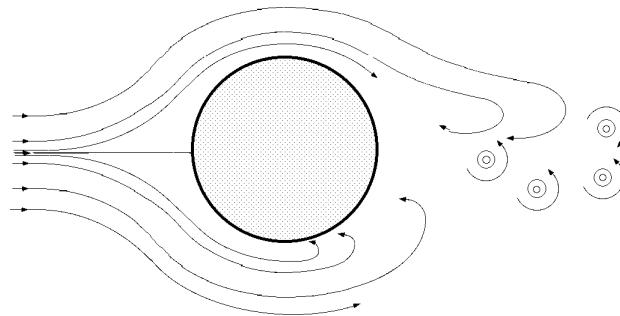


Fig VIII.19.- Flujo bidimensional en torno a un cilindro, $Re > 20$, c

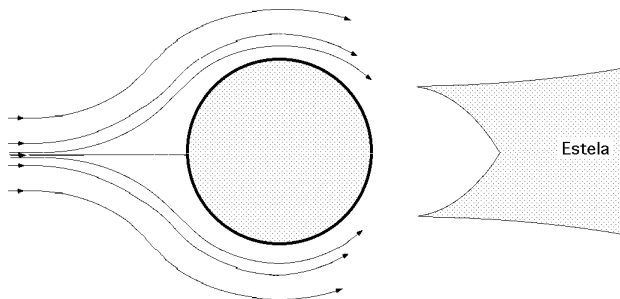


Fig VIII.20.- Flujo bidimensional en torno a un cilindro
 $5.000 < Re < 15.000$, d

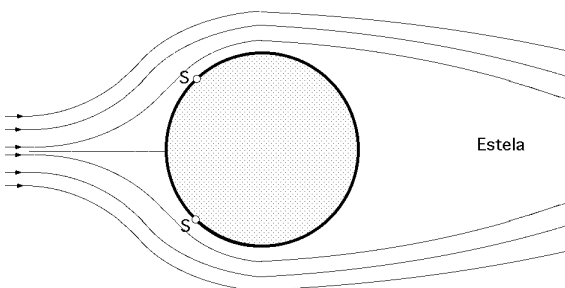


Fig VIII.21.- Flujo bidimensional en torno a un cilindro
 $50.000 < Re < 200.000$, e

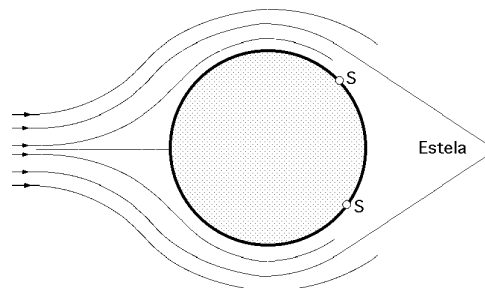


Fig VIII.22.- Flujo bidimensional en torno a un cilindro
 $Re > 200.000$, f

La capa límite se forma a partir del punto de estancamiento, aguas arriba del cilindro, y suele ser laminar, para la cual, un gradiente de presión adverso, precipita la separación mas pronto que

en una capa límite turbulenta, por ser la cantidad de movimiento relativamente pequeña en la capa laminar, encontrándose que, el punto de separación para la capa límite laminar se sitúa mas arriba del cilindro que el punto de separación correspondiente al caso en que la capa límite se hace turbulenta antes de que se separe. La transferencia de la cantidad de movimiento incrementada en la capa límite turbulenta retrasa el punto de separación, deduciéndose la estela en tamaño.

PERFIL DE ALA DE AVIÓN.- Para el caso del perfil de un ala de avión inmersa en un fluido, Fig VIII.24, en el extradós se produce una fuerte depresión (aspiración) y en el intradós se produce una pequeña presión que se extiende hasta el borde de ataque (borde frontal) del ala, para pequeños valores de su ángulo de inclinación (ángulo de incidencia) en relación a la dirección de la corriente no perturbada.

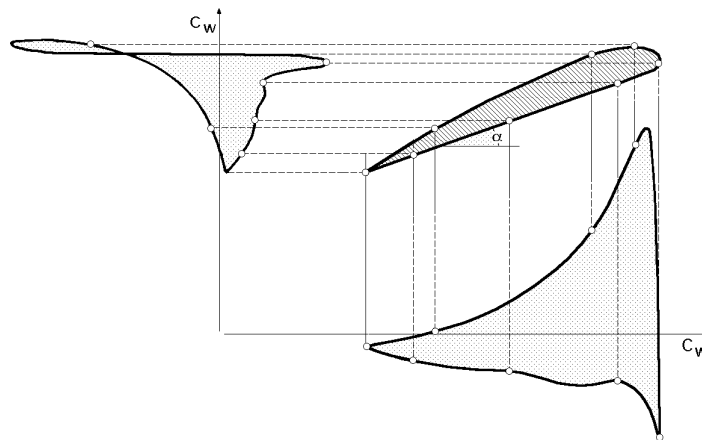


Fig VIII.24.- Coeficientes aerodinámicos de un perfil de ala de avión

El valor medio de la diferencia de presiones entre intradós y extradós, para una superficie de ala igual a,

$$S \text{ (} L_{\text{cuerda}} \times 1 \text{ metro lineal de ala)}$$

proporciona la fuerza de sustentación, de la forma,

$$F_{\text{sust}} = \frac{C_w}{2} S u_0^2$$

en la que C_w es el coeficiente de sustentación, que depende de la forma del perfil y del ángulo de ataque.

Se puede imaginar el ala infinita sustituida por un serie de torbellinos, con el eje paralelo al borde de ataque, como tramos ds de fluido adherente entran en la longitud L del ala. Cuando se examina un ala de longitud L finita, estos torbellinos, que están adheridos a la superficie, no terminan donde el ala está cortada, sino que se repliegan hacia atrás a 90° (torbellinos en forma de herradura o de estribo), formando torbellinos libres.

Estos torbellinos, por efecto de la inducción, desvían hacia abajo la corriente detrás del ala, con velocidad \bar{v} menor que la velocidad \bar{V} del fluido. Por tal motivo, el ala finita puede considerarse

equivalente a un ala infinita con el mismo perfil, pero con una incidencia reducida, y puesto que para el ala infinita la sustentación es función lineal de la incidencia, el ala finita tiene una sustentación menor.

Para un ala infinita, la resultante aerodinámica es perpendicular a la velocidad, (es decir, la resistencia es nula), pero para un ala finita se origina una resistencia inducida R_i , que se añade a la resistencia de perfil R_p debida al rozamiento y a la falta de recuperación de presiones provocada por la separación de la corriente; la suma de estas dos resistencias R es,

$$R = \frac{C_w^* S V^2}{2}$$

donde C_w^* es el coeficiente de resistencia que depende de la forma del perfil y del ángulo α .

En la práctica, la sustentación no crece indefinidamente con α sino que el coeficiente de sustentación alcanza un valor $C_{w(\text{máx})}^*$ y después disminuye bruscamente para, $\alpha = 12^\circ \div 16^\circ$.

Esto es debido a que la vena fluida, cuando el ángulo α tiene un valor demasiado elevado, no puede permanecer unida a la superficie dorsal y se produce una reducción de la depresión, que es el fenómeno de mayor influencia en la sustentación del ala.

La determinación teórica de la distribución de la sustentación sobre la abertura alar de un ala finita de anchura nula, se efectúa de diversas formas, entre las cuales está la de Weissinger, que consiste en esquematizar el ala con un hilillo sustentante situado en coincidencia con el 25% de la cuerda L a partir del borde de ataque, y también en calcular el ángulo de inducción del remolino en correspondencia con una línea situada a 3/4 de la longitud L y finalmente en colocar dicho ángulo igual a la inclinación que allí tiene la línea media del perfil.

Al ala, considerada hasta ahora de espesor nulo, se la dota de los adecuados perfiles alares para mejorar sus características y así determinar experimentalmente el valor de los diversos coeficientes aerodinámicos de un modelo cualquiera (ala, automóvil, fuselaje, etc).

Para obtener la resistencia total, es necesario añadir a la resistencia del perfil deducida anteriormente, la resistencia de rozamiento, como la que se tendría sobre una cara de una superficie plana lisa y cuyo coeficiente de arrastre puede obedecer a,

$$C = \frac{0,455}{(\lg Re)^{2,58}} \quad ; \quad Re = \frac{VL}{\nu}$$

En la capa límite, la corriente es laminar en la primera parte del cuerpo, y después turbulenta debajo de una subcapa laminar (analogía de Prandtl). La resistencia de rozamiento depende de la capa límite, en la que se forman los torbellinos que, al pasar al restante campo del fluido, originan la estela.

IX.- FLUJO VISCOZO INCOMPRESIBLE

IX.1.- FLUJO EN CONDUCTOS CIRCULARES

En un flujo laminar la corriente es relativamente lenta y no es perturbada por las posibles protuberancias del contorno, mientras que la viscosidad es relativamente grande, de forma que si por cualquier circunstancia se iniciase un fenómeno de turbulencia, la viscosidad lo destruiría.

La formulación que a continuación se va a desarrollar sirve, por lo tanto para tuberías lisas como para tuberías rugosas, suponiendo que las partículas de fluido, en un flujo laminar a lo largo de un tubo, se mueven en capas cilíndricas coaxiales; en el eje del tubo, el desplazamiento se realiza a mayor velocidad, mientras que en las paredes permanece en reposo.

La distribución de velocidades en una sección transversal cualquiera del tubo obedece a las fuerzas de rozamiento transmitidas de capa en capa.

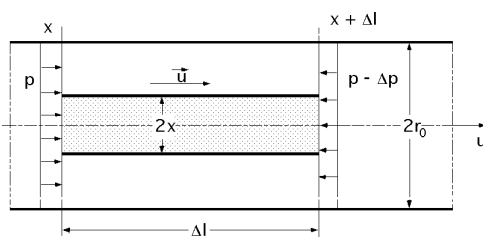


Fig IX.1.- Tubo de fluido para la ecuación de Poiseuille

Si se considera una parte del tubo, Fig IX.1, de diámetro, $2 r_0$, y un cilindro de fluido coaxial de diámetro, $2 x$, y longitud l . Las condiciones de contorno implican que en su cara frontal la presión es p y en la posterior la presión es, $p - p$, sobre el cilindro actuará una fuerza de empuje

de la forma,

$$F_{\text{emp}} = \pi x^2 p$$

La fuerza de rozamiento,

$$F_{\text{roz}} = \int_0^x 2\pi r \mu \frac{du}{dr} dr = 2\pi r \mu \frac{du}{dr}$$

es igual a la de empuje, por lo que,

$$2 \int_0^R r \frac{du}{dr} = -r^2 \frac{dp}{dl} \quad \frac{du}{dr} = \frac{r}{2} \frac{dp}{dl}$$

$$u = \frac{p}{2} \frac{1}{l} \int_0^R r^2 dr = \frac{p}{4} \frac{1}{l} (R^2 - r^2)$$

que es una distribución del campo de velocidades de tipo parabólico, en un plano longitudinal.

La expresión del caudal es,

$$Q = \int_0^R u \, dA = \int_0^R u \, 2\pi r \, dr = \frac{p}{4} \frac{1}{l} \int_0^R (R^2 - r^2) 2\pi r \, dr = \frac{R^4 \pi p}{8 l}$$

que es directamente proporcional a la variación de presión entre las secciones A y B, tramo de longitud, $l = L$, a la cuarta potencia del radio de la conducción, e inversamente proporcional al tramo de tubería considerada de longitud L y a la viscosidad dinámica μ .

El caudal en función de la velocidad media \hat{u}_F es, $Q = \hat{u}_F A$, por lo que la velocidad media se puede poner en la forma,

$$\hat{u}_F = u_F = \frac{Q}{A} = \frac{\frac{R^4 \pi p}{8 l}}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8} \frac{p}{l}$$

La **velocidad máxima** se tiene para, $r = 0$, y es de la forma,

$$u_{\text{máx}} = \frac{R^2}{4} \frac{p}{l}$$

La relación entre la velocidad máxima y la velocidad media es,

$$u_{\text{máx}} = 2 u_F$$

Despejando de la expresión de la velocidad media el valor de p , se obtiene la ecuación de **Poiseuille**, de la forma,

$$p = \frac{8 \mu L u_F}{R^2} = \frac{32 \mu L u_F}{d^2}$$

La pérdida de carga total p correspondiente a la longitud de tubería L se puede poner en función de la pérdida de carga por unidad de longitud de tubería J , en la forma,

$$p = h = J L$$

expresión que se puede poner teniendo en cuenta el número de Reynolds, y el coeficiente de rozamiento, en la forma,

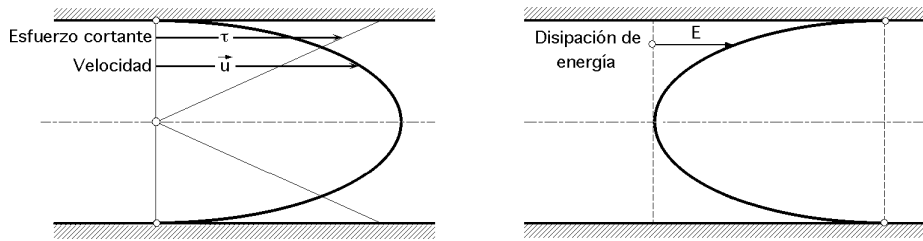


Fig XII.3.- Distribución del coeficiente de cortadura, y disipación de energía

$$J = \frac{1}{L} \frac{p}{g} = \frac{1}{g} \frac{32}{d^2} \frac{u_F}{d} = \frac{64}{2 g d Re} = \frac{u_F^2}{2 g d}$$

Para el régimen laminar, $J = \frac{64}{Re}$

La ecuación de Poiseuille demuestra que la pérdida de carga en régimen laminar, para tuberías lisas o rugosas, es directamente proporcional a la primera potencia de la velocidad. En la Fig IX.2 se indican otros tipos de distribuciones correspondientes al coeficiente de cortadura, velocidad \bar{u} y disipación de energía.

IX.2.- MOVIMIENTO TURBULENTO

Todos los estudios realizados para determinar las pérdidas de carga en el movimiento turbulento, se pueden resumir también por la expresión,

$$J = \frac{1}{d} \frac{u^2}{2g}$$

en la que, $J = f(u, d, \epsilon, \frac{\epsilon}{d}) = f(Re, \frac{\epsilon}{d})$, siendo ϵ la rugosidad absoluta.

Para tuberías lisas se tiene, $\frac{\epsilon}{d} = 0$; $J = f(Re)$

a) $2.000 < Re < 10^5$, $J = 0,3164 Re^{-0,25}$ (Blasius)

b) $Re > 10^5$; $\frac{1}{\sqrt{J}} = 2 \lg_{10} \frac{Re \sqrt{J}}{2,51}$ (Primera ecuación de Kàrmàn-Prandtl)

Para tuberías rugosas se pueden dar tres casos según el valor del número de Reynolds.

Si el número de Reynolds es elevado, $J = f(\frac{\epsilon}{d})$

$$\frac{1}{\sqrt{J}} = 2 \lg_{10} \frac{\epsilon}{2} + 1,74 \quad (\text{Segunda ecuación de Kàrmàn-Prandtl})$$

$$\frac{1}{\sqrt{J}} = 2 \lg_{10} \frac{\epsilon}{d} + 1,14 \quad (\text{Nikuradse})$$

Si el número de Reynolds tiene un valor intermedio,

$$\frac{1}{\sqrt{J}} = 2 \lg_{10} \left(\frac{\epsilon}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{J}} \right), \text{ para } J = f(Re, \frac{\epsilon}{d}) \quad (\text{Colebrook-White})$$

Para números de Reynolds bajos, $f = f(Re)$

$$70.000 < Re < 1.500.000 \quad ; \quad f = 0,0054 + 0,369 Re^{-0,3} \quad (\text{Herman})$$

Nikuradse experimentó con tuberías de rugosidad artificial, obtenida con granos de arena esféricos de diámetro δ , con los que cubría el interior de las tuberías.

Como una protuberancia pequeña podía ser insignificante en una tubería de gran diámetro, la variable representativa del fenómeno no era la rugosidad absoluta δ , sino la relativa, δ/d , oscilando sus valores, para tuberías comerciales, entre los límites, $0,033 < \frac{\delta}{d} < 0,000985$.

La rugosidad natural de las tuberías comerciales (hierro fundido, hormigón, etc), es irregular. La rugosidad absoluta puede venir caracterizada por un valor de δ igual al diámetro de los granos de arena de una tubería de rugosidad artificial que diera el mismo valor de $\frac{\delta}{d}$ para un número de Re lo suficientemente elevado que cumpliera la ecuación, $f = f\left(\frac{\delta}{d}\right)$.

La ecuación de Colebrook-White es la más utilizada para hallar la pérdida de carga en los conductos industriales encontrándose los problemas prácticos, más interesantes, dentro de su campo de aplicación.

Tabla IX.1.- Valores de la rugosidad de algunos materiales utilizados en la construcción de tuberías

Tipo de tubería	Rugosidad (mm)
Vidrio, cobre o latón estirado	0,001 (ó lisas)
Latón industrial	0,025
Acero laminado nuevo	0,05
Acero laminado oxidado	0,15 a 0,25
Acero laminado con incrustaciones	1,5 a 3
Acero asfaltado	0,01
Acero soldado nuevo	0,03 a 0,1
Acero soldado oxidado	0,4
Hierro galvanizado	0,15 a 0,20
Fundición corriente nueva	0,25
Fundición corriente oxidada	1 a 1,5
Fundición asfaltada	0,1
Cemento alisado	0,3 a 0,8
Cemento bruto	Hasta 3

DIAGRAMA DE MOODY.- Las ecuaciones de Poiseuille, Blasius, Colebrook-White, Kàrmàn-Prandtl, Nikuradse, etc, permiten determinar todos los valores de f que se presentan en la práctica; la ecuación de Colebrook-White, de cálculo muy laborioso, es la más universal y en la práctica se recurre a un ábaco, conocido como diagrama de Moody, Fig IX.3, que,

a) Está construido en papel doblemente logarítmico; las variables que utiliza son, f , Re y, por lo tanto, es un diagrama, $(\lg f, \lg Re)$.

b) Es la representación gráfica de dos ecuaciones, La ecuación de Poiseuille, que en papel logarítmico es una recta. La prolongación dibujada a trazos es la zona crítica, en la que la corriente puede seguir siendo laminar a pesar de ser, $Re > 2000$.

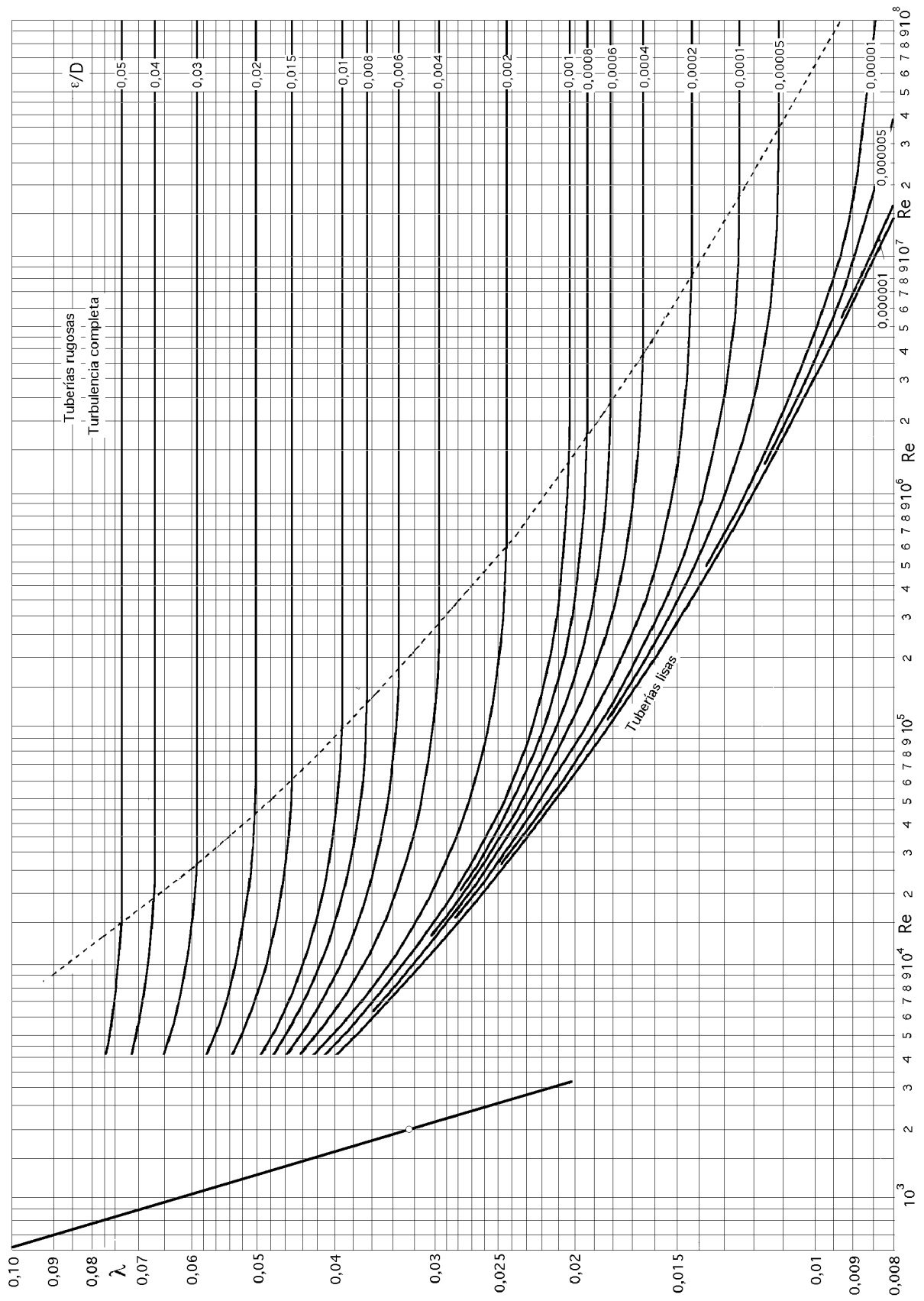


Fig IX.3.- Diagrama de Moody

De no ser así, podría caer en cualquier punto de la zona sombreada; la zona crítica es una zona de incertidumbre, en la que el flujo puede ser laminar o turbulento.

La ecuación de Colebrook-White es una familia de curvas, una para cada valor del parámetro, $1/d$, que para números de Reynolds bajos, coinciden con las de Blasius y con la primera ecuación de Kàrmàn-Prandtl, es decir, son asintóticas a una u otra ecuación, y se van separando de ellas para valores crecientes del número de Reynolds.

En algunos casos se puede hacer una primera aproximación tomando un valor de f comprendido entre los límites, $0,02 < f < 0,03$. Algunos de los valores de f que se necesitan para leer este diagrama se pueden tomar de la Tabla IX.1.

IX.3.- CALCULO DEL COEFICIENTE DE ROZAMIENTO MEDIANTE ALGUNAS FORMULAS PRACTICAS

El valor de f ha sido estudiado y determinado por muchos autores, pudiéndose considerar en algunos casos constante, y en otros, función de alguna variable; así se presentan una serie de grupos de fórmulas, debidas a determinados autores,

Grupo 1,	$f = Cte,$	Dupuit, Chezy,...
Grupo 2,	$f = f(d),$	Darcy, Sonne, Levy, Bazin, Kutter, ...
Grupo 3,	$f = f(u),$	Weisbach, Saint - Venant, Prony, Zeuner, ...
Grupo 4,	$f = f(d,u) = f(Re),$	Flamant, ...
Grupo 5,	$f = f(Re, \frac{1}{d}),$	Lang, Mises, ...

2º Grupo.- FORMULA DE DARCY. En esta fórmula, $J = k Q^2$, siendo,

$$k = \frac{16}{2g^2 d^5}$$

El valor de f se puede poner en la forma, $f = f_1 + \frac{f_2}{d}$, en la que los valores de f_1 y f_2 dependen de las características de la tubería.

Para tuberías lisas y nuevas, $f_1 = 0,01989$, $f_2 = 0,0005078$,

Para tuberías usadas, los valores son dobles, es decir, $f_1 = 0,03978$; $f_2 = 0,0010106$

Campo de validez para valores de d comprendidos en, $0,004 < d < 0,5$, metros
 $0,25 < u < 2,5$, m/seg

Para conducciones nuevas, los valores de k son los siguientes,

a) La mitad de lo que diga la Tabla IX.2, si se trata de fundición

b) La tercera parte de lo que diga la Tabla IX.2, si se trata de conducciones de chapa alquitranada.

Tabla IX.2.- Valores de J/Q^2 de la fórmula de Darcy, (tubería usada)

Diámetro (m)	Valores de JQ^2	Diámetro (m)	Valores de JQ^2	Diámetro (m)	Valores de JQ^2	Diámetro (m)	Valores de JQ^2
0,005	---	0,15	50,639	0,31	1,24120	0,47	0,15099
0,01	116.790.000	0,16	36,301	0,32	1,05710	0,48	0,13565
0,02	2.338.500	0,17	26,626	0,33	0,90700	0,49	0,12236
0,027	445.600	0,18	19,836	0,34	0,77783	0,50	0,11039
0,03	250.310	0,19	15,059	0,35	0,67042	0,55	0,06828
0,04	52.561	0,20	11,571	0,36	0,58126	0,60	0,044031
0,05	15.874	0,21	9,0185	0,37	0,50591	0,65	0,029397
0,06	6020,9	0,22	7,1092	0,38	0,44275	0,70	0,020256
0,07	2666,1	0,23	5,6722	0,39	0,38811	0,75	0,014319
0,08	1321,9	0,24	4,5610	0,40	0,34134	0,80	0,010350
0,09	713,81	0,25	3,7052	0,41	0,30112	0,85	0,007620
0,10	412,42	0,26	3,0345	0,42	0,26640	0,90	0,005720
0,11	251,25	0,27	2,5036	0,43	0,23687	0,95	0,003460
0,12	160,01	0,28	2,0836	0,44	0,21076	1,00	0,003360
0,13	105,84	0,29	1,7420	0,45	0,18801	1,10	0,002090
0,14	72,222	0,30	1,4677	0,46	0,16844	1,20	0,001350

2° Grupo.- FORMULA DE LEVY.- Para tuberías usadas, el valor de k se define como,

$$k = \frac{k}{1 + 3\sqrt{r}}, \text{ con, } r, \text{ el radio de la tubería}$$

$k = 0,09301$

Para tuberías nuevas,

$$k = \frac{0,02952}{1 + \sqrt{r}}$$

Estas fórmulas dan buenos resultados para, $d > 1$ m, y velocidades medias de hasta 2,5 m/seg.

2° Grupo.- FORMULA DE KUTTER..- Esta fórmula es de aplicación al cálculo de sifones. El valor de m con el que funciona es,

$$m = \frac{8g}{50\sqrt{d} + m + 0,5\sqrt{d}}$$

en la que los valores de m son,

- 0,25 para tuberías con incrustaciones ordinarias
- 0,30 para tuberías con incrustaciones medias
- 0,35 para tuberías con incrustaciones importantes
- 0,40 para tuberías con incrustaciones formadas rápidamente

4° Grupo.- FORMULA DE FLAMANT

En este grupo de fórmulas se considera un valor de a igual a, $a = \frac{a}{\sqrt[4]{Re}}$

y, para el caso particular del agua, si se considera, $a = Cte$, se tiene, $a = \frac{a^*}{\sqrt[4]{u d}}$

El valor de k de la expresión, $J = k Q^2$, toma la siguiente forma,

$$k = a_2 \frac{16}{2d^5} \frac{1}{\sqrt[4]{u d}}$$

en la que los valores de a_2 dependen de la rugosidad.

Según sea el material de la tubería se tiene,

Fundición nueva, $a_2 = 0,00092$
 Fundición usada $a_2 = 0,00074$
 Chapa $a_2 = 0,00062$
 Plomo $a_2 = 0,00052$

El campo de aplicación de esta formulación es el comprendido entre los diámetros, $1 < d < 3$, metros, y $2000 < Re < 10^5$.

Tabla IX.3.- Tabla de valores de k de la fórmula de Flamant

Diámetro (m)		Diámetro (m)		Diámetro (m)	
0,01	4427000	0,22	1,86	0,45	0,062
0,015	645000	0,23	1,51	0,46	0,056
0,02	164500	0,24	1,23	0,47	0,051
0,025	57000	0,25	1,01	0,48	0,046
0,03	24000	0,26	0,84	0,49	0,041
0,04	6100	0,27	0,70	0,50	0,0377
0,05	2100	0,28	0,55	0,52	0,0313
0,06	890	0,29	0,50	0,55	0,0240
0,07	430	0,30	0,43	0,60	0,0158
0,08	227	0,31	0,36	0,65	0,0108
0,09	130	0,32	0,314	0,70	0,0076
0,10	79	0,33	0,271	0,75	0,0055
0,11	50	0,34	0,235	0,80	0,0040
0,12	33	0,35	0,205	0,85	0,0030
0,13	22,6	0,36	0,179	0,90	0,0023
0,14	15,6	0,37	0,157	0,95	0,0018
0,15	11,5	0,38	0,139	1,00	0,0014
0,16	8,4	0,39	0,123	1,05	0,0011
0,17	6,3	0,40	0,107	1,1	0,00089
0,18	4,8	0,41	0,097	1,2	0,00059
0,19	3,8	0,42	0,087	1,3	0,00040
0,20	2,3	0,43	0,077	1,4	0,00028
0,21	2,2	0,44	0,066		

5° Grupo.- **FORMULA DE MISES.**- Es una de las más exactas; el valor de k es de la forma,

$$k = 0,0096 + \frac{1}{d} \left\{ \sqrt{k} + 1,7 \sqrt{\frac{1}{u}} \right\}$$

Para el agua a 20°C, se tiene, $k = 0,0096 + \frac{1}{d} \left(\sqrt{k} + \frac{0,0017}{\sqrt{u}} \right)$

en la que el valor de k depende del estado y clase de las superficies de contacto de las tuberías, y del líquido que por ellas circula; sus valores se exponen en la Tabla IX.4.

Tabla IX.4.- Valores de k en función del material de la tubería en la fórmula de Mises

Material	$10^6 k$ (en metros)
Vidrio	0,064 a 0,256
Latón, cobre, plomo	0,064 a 0,320
Cemento pulido	2,40 a 4,80
Cemento tosco, sin pulir	6,40 a 16,00
Chapa con asfalto	9,60 a 19,20
Fundición lisa	32 a 64
Fundición oxidada	80 a 160
Chapa remachada	64 a 160
Fundición en servicio, con unión de brida sin resalto	80
Fundición en servicio, con unión de enchufe y cordón	100
Fundición en servicio, para agua sucia con incrustaciones	160

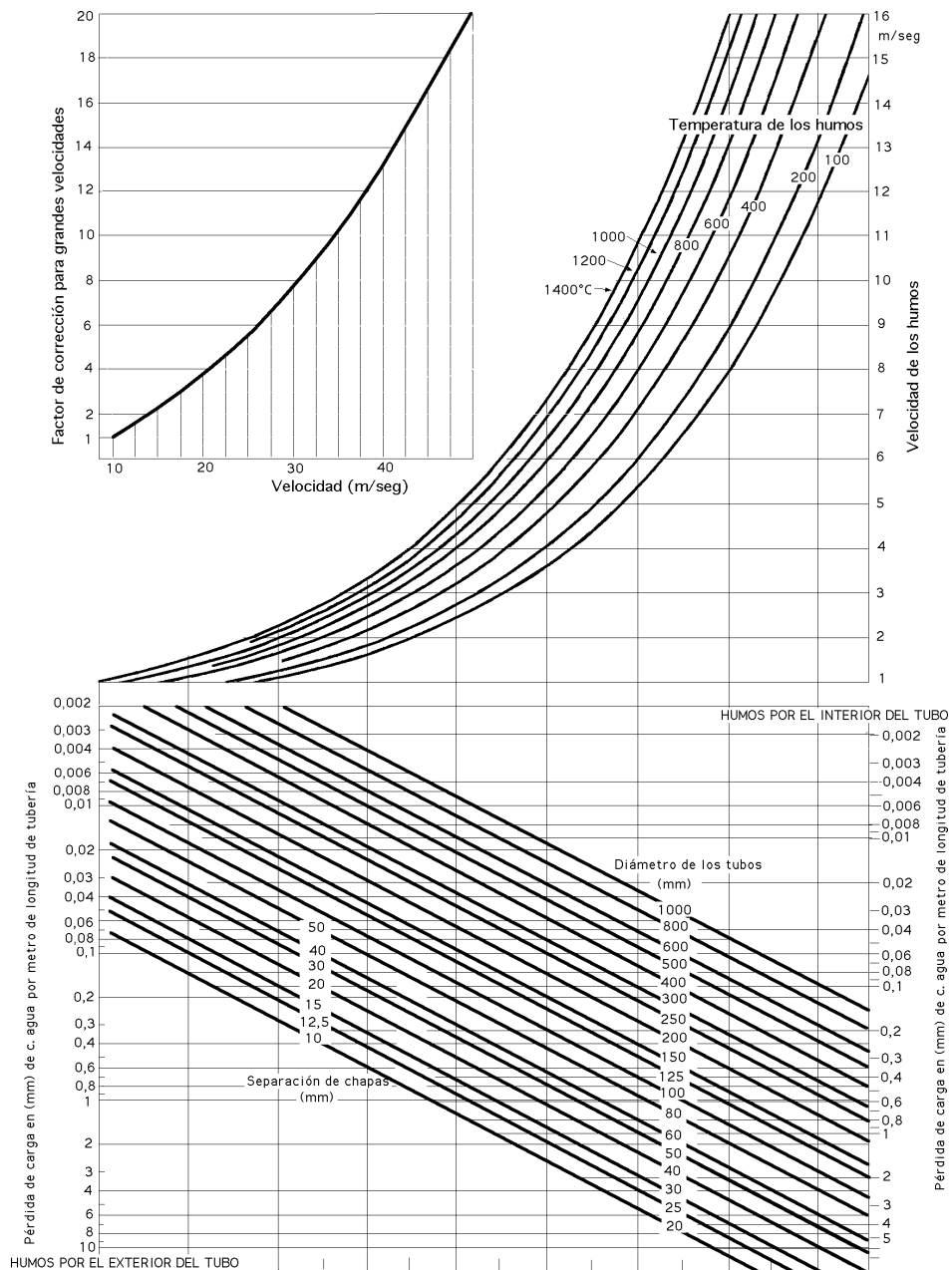


Fig IX.4.a.- Pérdida de carga en mm, por metro lineal de tubo (o de chapa), con corriente paralela a las generatrices

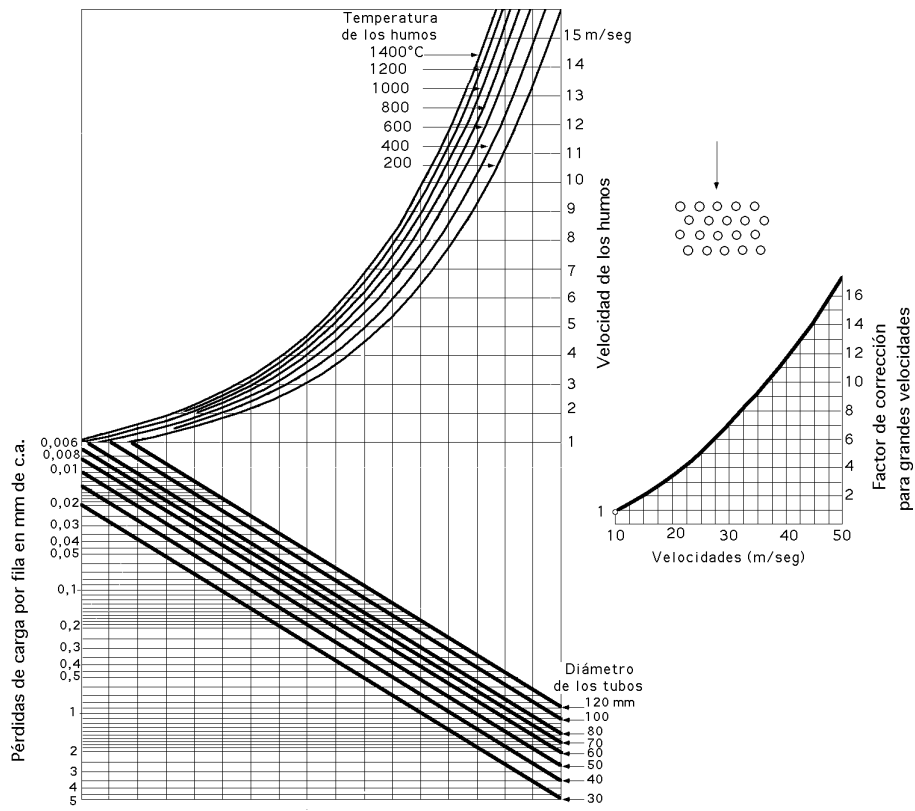


Fig IX.4.b.- Pérdida de carga en mm, por fila de tubos en quincunce, con humos perpendicular a los tubos.

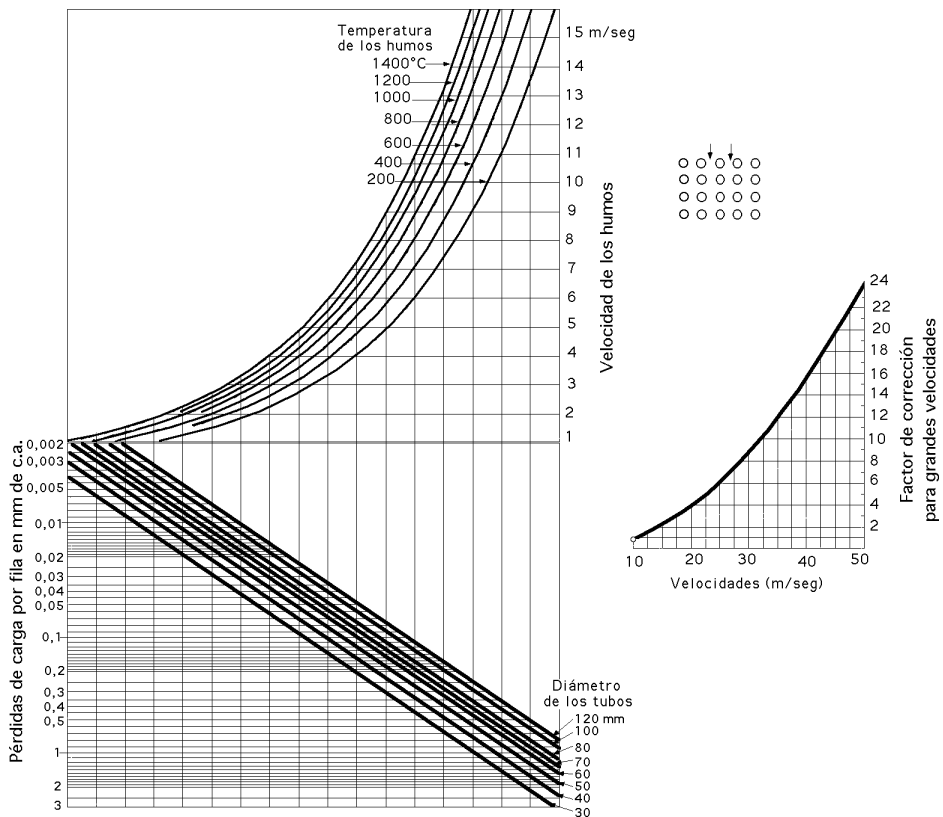


Fig IX.4.c.- Pérdida de carga en mm, por fila de tubos en línea, con humos perpendicular a los tubos

IX.4.- CALCULO GRÁFICO DEL VALOR DE J EN DISPOSICIONES DE TUBOS

En las Fig IX.4.a.b.c, se indica un método gráfico que mediante ábacos permite la determinación del coeficiente J en los siguientes casos de disposición de tubos y chapas,

a) Corriente de humos paralela a los tubos o a las placas, de forma que la distancia entre chapas es igual a la mitad del diámetro de los tubos.

b) Corriente de humos perpendicular a los tubos en quincunce

c) Corriente de humos perpendicular a los tubos en línea

Para grandes velocidades el valor de J se calcula para, $u = 10$ m/seg, se halla el factor de corrección para la velocidad deseada y se multiplica el valor de J a 10 m/seg por el factor de corrección, obteniéndose el valor de J a la velocidad deseada.

IX.5.- FLUJO EN CONDUCTOS NO CIRCULARES

FLUJO LAMINAR, INCOMPRESIBLE Y PERMANENTE, ENTRE DOS PLACAS PARALELAS.- En primer lugar se puede suponer que las placas están inclinadas formando un ángulo respecto a la horizontal, teniendo la placa superior una velocidad constante \bar{u}_0 ; el flujo entre las dos placas fijas es un caso particular, al hacer la velocidad de la placa móvil, $u_0 = 0$.

La placa superior se mueve paralelamente en la dirección del flujo, existiendo a lo largo del mismo, en la dirección de x , una variación de presión. Si se toma un elemento de fluido en forma de lámina, Fig IX.5, de dimensiones (dx, dy) y anchura unidad, para un flujo permanente, la lámina se moverá con velocidad constante \bar{u} , siendo la ecuación del movimiento,

$$p \, dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy - dx + \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right) dx + dx \, dy \, \text{sen } \theta = 0$$

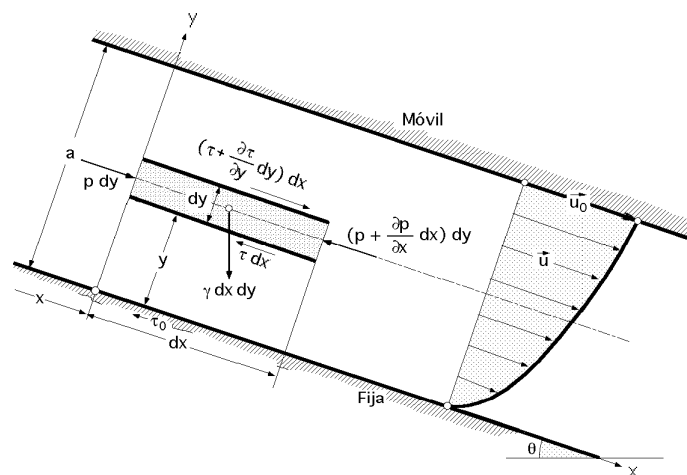


Fig IX.5.- Flujo laminar entre placas paralelas

que simplificada se reduce a,

$$-\frac{p}{x} + \frac{1}{y} + \text{sen } \theta = 0 \quad ; \quad -\frac{p}{x} + \frac{1}{y} - \frac{h}{x} = 0 \quad ; \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{x} (p + h)$$

en las que se ha tenido en cuenta que, $\text{sen } \theta = -\frac{h}{x}$

Como no existe aceleración en la dirección y el segundo miembro de esta ecuación no es función de y ; integrándola se obtiene,

$$= y \frac{1}{x} (p + h) + C_1 = \frac{du}{dy} \quad \frac{du}{dy} = \frac{1}{x} y \frac{1}{x} (p + h) + \frac{C_1}{x}$$

cuya integral es,

$$u = \frac{1}{2} \frac{1}{x} (p + h) \frac{y^2}{2} + \frac{C_1}{x} y + C_2$$

Para calcular las constantes C_1 y C_2 utilizaremos las condiciones en los límites, de la forma,

Para, $y = 0$, $u = 0$

$$C_2 = 0$$

Para, $y = a$, $u = u_0$

$$u_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{x} (p + h) a^2 + \frac{C_1}{x} a \quad \frac{C_1}{x} = \frac{u_0}{a} - \frac{1}{2} \frac{1}{x} (p + h)$$

por lo que,

$$u = \frac{1}{2} \frac{1}{x} (p + h) y^2 + \frac{u_0}{a} y - \frac{1}{2} \frac{1}{x} (p + h) \frac{a}{2} y = \frac{u_0 y}{a} - \frac{1}{2} \frac{1}{x} (p + h) (a y - y^2)$$

El gasto a través de una sección transversal cualquiera, es,

$$Q = \int_0^a u dy = \frac{u_0 a}{2} - \frac{1}{12} \frac{1}{x} (p + h) a^3$$

siendo la velocidad media \hat{u} entre placas,

$$\hat{u} = \frac{Q}{a} = \frac{u_0}{2} - \frac{1}{12} \frac{1}{x} (p + h) a^2$$

y el esfuerzo en la pared,

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{du}{dy} \Big|_{y=0} = \left\{ y \frac{1}{x} (p + h) + \frac{u_0}{a} - \frac{1}{2} \frac{1}{x} (p + h) \frac{a}{2} \right\} \Big|_{y=0} = \\ &= \frac{1}{x} \left\{ (p + h) (y - \frac{a}{2}) \right\} \Big|_{y=0} + \frac{u_0}{a} = a \frac{1}{x} (p + h) + \frac{u_0}{a} \end{aligned}$$

que demuestra que dicho esfuerzo cortante en la pared, es constante.

El caso particular en que las dos placas sean fijas se resuelve haciendo, $u_0 = 0$.

FLUJO LAMINAR INCOMPRESIBLE ENTRE TUBOS CILÍNDRICOS CONCÉNTRICOS.- Para estudiar este tipo de flujo, se puede considerar un conducto en el que se toma una sección anular de fluido de espesor infinitesimal dr , radio r , y longitud dx , en el que el fluido tiene una aceleración nula, y después, como caso particular, aplicarlo al flujo laminar incompresible entre tubos cilíndricos concéntricos.

De acuerdo con la Fig IX.6, la ecuación del movimiento es,

$$2 \pi r dr p - 2 \pi r dr \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) - 2 \pi r dx \tau + 2 \pi (r + dr) \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r} dr \right) dx + 2 \pi r dr dx \text{sen } \theta = 0$$

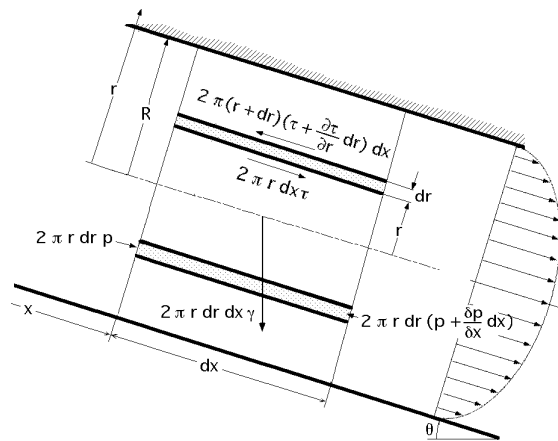


Fig IX.6.- Flujo laminar entre tubos cilíndricos concéntricos

Simplificando y despreciando el término, $2 \frac{\partial \tau}{\partial r} dx dr^2$, resulta,

$$- \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\tau}{r} + \frac{\tau}{r} + \text{sen } \theta = 0$$

y como, $\text{sen } \theta = - \frac{h}{x}$, se obtiene,

$$- \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\tau}{r} + \frac{\tau}{r} - \frac{h}{x} = 0 ; \quad \frac{\tau}{x} (p + h) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial p}{\partial x} r \right)$$

Integrándola,

$$\frac{r^2}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (p + h) - r \tau = C_1 ; \quad \frac{r^2}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (p + h) - \frac{du}{dr} r = C_1$$

$$du = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (p + h) r dr - \frac{C_1}{r} dr \quad u = \frac{1}{4} \frac{\partial p}{\partial x} (p + h) r^2 - \frac{C_1}{r} \ln r + C_2$$

Para el caso particular de *flujo entre dos cilindros concéntricos* de radios,

$r = b$, para, $u = 0$, (tubo interior)

$r = R$, para, $u = 0$, (tubo exterior)

las constantes C_1 y C_2 , Fig IX.7, son de la forma,

$$C_1 = \frac{1}{4} \frac{(p + h)(R^2 - b^2)}{x} \frac{1}{\ln \frac{R}{b}}$$

$$C_2 = \frac{1}{4} \frac{(p + h)}{x} \{-R^2 + (R^2 - b^2) \frac{\ln \frac{R}{r}}{\ln \frac{R}{b}}\}$$

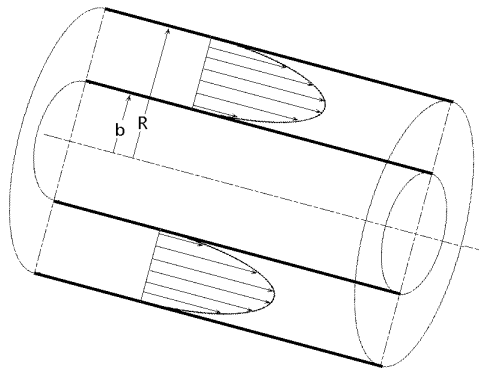


Fig IX.7.- Isotaquia de velocidades para flujos concéntricos

y el valor de la velocidad,

$$u = \frac{1}{4} \frac{(p + h)}{x} \{r^2 - R^2 + (R^2 - b^2) \frac{\ln \frac{R}{r}}{\ln \frac{R}{b}}\}$$

El caudal es,

$$Q = \int_b^R u \cdot 2\pi r \, dr = \frac{\pi}{8} \left\{ -\frac{(p + h)}{x} \left(R^4 - b^4 - \frac{(R^2 - b^2)^2}{\ln \frac{R}{b}} \right) \right\}$$

pudiéndose obtener a partir de estos resultados los demás valores que caracterizan este flujo.

IX.6.- DIÁMETRO HIDRÁULICO

Cuando el conducto no tiene sección circular, el análisis del flujo completamente desarrollado se puede considerar análogo al de tubos circulares; en flujo laminar, las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento se pueden resolver en forma exacta, mientras que para flujos turbulentos se puede hacer uso de perfiles logarítmicos, aunque resulta mucho más simple utilizar el *diámetro hidráulico*, que permite obtener buenas aproximaciones.

Se define el diámetro hidráulico d_h como la relación,

$$d_h = 4 \frac{\text{Sección transversal mojada}}{\text{Perímetro mojado}}$$

en la que el perímetro mojado viene determinado por todas las superficies sometidas a esfuerzos de fricción.

Para una sección circular se tiene, $d_h = 4 \frac{\frac{d^2}{4}}{d} = d$

y la expresión de la pérdida de carga J por unidad de longitud, en función del diámetro hidráulico d_h ,

$$J = \frac{u^2}{d_h} \frac{1}{2g}$$

Para una conducción cuadrada, $d_h = a$

Para una conducción rectangular, $d_h = \frac{2 a h}{a + b}$

Para una conducción triangular, $d_h = \frac{2 a h}{a + b + c}$

Para una conducción formada por dos tubos concéntricos, Fig IX.8,

$$d_h = 4 \frac{\frac{(d_2^2 - d_1^2)}{4}}{(d_2 + d_1)} = \frac{(d_2 + d_1)(d_2 - d_1)}{d_2 + d_1} = d_2 - d_1$$

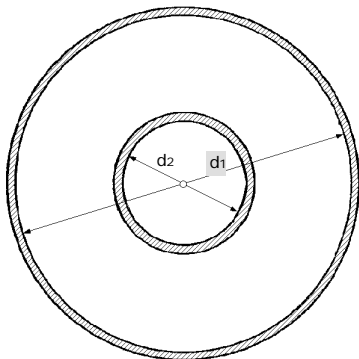


Fig IX.8.- Dos tubos concéntricos

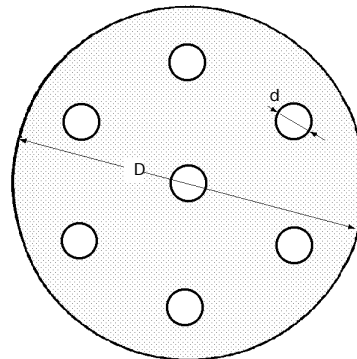


Fig IX.9.- Tubos tipo intercambiador

Para una conducción tipo intercambiador, formada por varios tubos rodeados por una carcasa exterior, Fig IX.9,

$$d_h = 4 \frac{\frac{(D^2 - n d^2)}{4}}{(D + n d)} = \frac{D^2 - n d^2}{D + n d}$$

IX.7.- RESISTENCIA DE FORMA

PERDIDAS ACCIDENTALES EN CONDUCTOS CERRADOS.- Las pérdidas accidentales tienen lugar en los cambios de sección y dirección de la corriente, en las contracciones, ensanchamientos bruscos, curvas, codos, bifurcaciones, o por accesorios instalados en ellas, como diafragmas, llaves, válvulas, etc. Todos ellos originan una perturbación de la corriente que provoca la aparición de

remolinos, intensificándose de esta forma las pérdidas de carga, que en algunos casos pueden ser más importantes que las pérdidas continuas, sobre todo en conducciones relativamente cortas.

Se admite que si la conducción tiene una longitud superior a mil veces el diámetro, el error que se comete despreciando las pérdidas accidentales es menor que el que se cometería en el cálculo de para las pérdidas continuas.

Las pérdidas accidentales se pueden expresar por la ecuación,

$$P_{acc} = \frac{u^2}{2g}$$

en la que el coeficiente se obtiene experimentalmente, teniendo un valor diferente para cada caso, función de las condiciones geométricas del accidente o del contorno, incluida la rugosidad y el número de Reynolds, aunque en la mayoría de los casos depende sólo del contorno.

El valor de la velocidad \bar{u} se corresponde con el de la velocidad media del fluido si se trata de codos, válvulas, etc, mientras que es la velocidad en la sección menor cuando se trate de ensanchamientos bruscos o contracciones.

Estas pérdidas se pueden calcular también utilizando la misma formulación que se emplea para las pérdidas continuas, sustituyendo en dicha expresión la longitud de la tubería L_g , por otra mayor que comprenda dichas pérdidas en metros de longitud de tubería, por lo que la longitud a utilizar en la fórmula será la longitud geométrica, más la longitud equivalente correspondiente a las pérdidas de carga accidentales, $L = L_g + L_{equiv}$, siendo esta longitud equivalente de la forma,

$$L_{equiv} = \frac{d}{\alpha}$$

Cuando, $10.000 < Re < 20.000$, el valor de α no depende prácticamente del número citado, estando comprendidos en estos márgenes los problemas prácticos de fluidos con poca viscosidad, como el agua y el aire.

TEOREMA DE BELANGUER.- Cuando un fluido que circula por una tubería de sección Ω_1 pasa a otra sección Ω_2 de una forma brusca, Fig IX.10, la sección Ω_1 de la vena fluida se irá ensanchando hasta alcanzar la sección Ω_2 y amoldarse a la tubería.

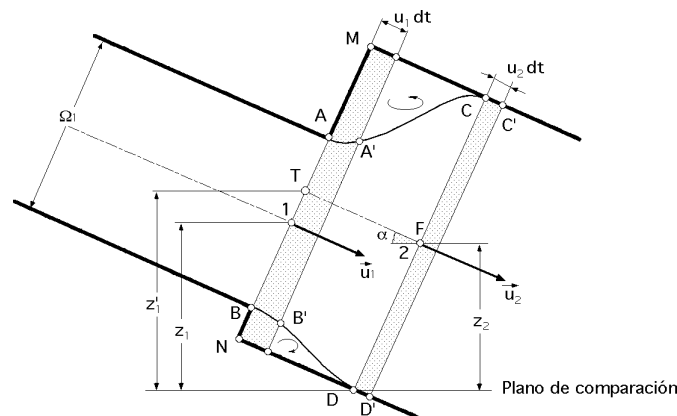


Fig IX.10.- Ensanchamiento brusco

En el volumen de fluido (ABCD), correspondiente a la sección σ_2 en las zonas comprendidas entre los límites de la sección σ_1 y los codos en M y N, se forman unos remolinos, mientras que en el resto del citado volumen, se definen perfectamente las líneas de corriente, que tienden a colocarse paralelas a la conducción de sección σ_2 .

Se podría aplicar entre las secciones 1 y 2 la ecuación de Bernoulli, pero debido al ensanchamiento se desconocen las pérdidas de carga que se originan, las cuales se pueden determinar mediante el Teorema de la Cantidad de Movimiento.

Se puede considerar que la cantidad de movimiento correspondiente al tramo de fluido contenido en la tubería de sección σ_2 , es decir, de (MNCD) en adelante, viene determinada por la cantidad de fluido entrante a través de la sección σ_1 en el tiempo dt ; si las zonas de remolinos permanecen prácticamente invariables, la masa fluida (ABCD) se habrá situado en el tiempo dt en la posición (A'B'C'D').

Como los volúmenes (ABCD) y (A'B'C'D') tienen en común las zonas de remolinos y el tramo (A'B'CD), y suponiendo que el fluido es incompresible en régimen permanente, la variación de la cantidad de movimiento será la diferencia entre las correspondiente a (CDD'C') y (ABB'A'), por lo que tomando como eje de referencia el de la sección σ_2 se tendrá,

La variación de la cantidad de movimiento, $\Delta(mu)$, es,

$$\Delta(mu) = m_2 u_2 - m_1 u_1 = V_2 u_2 - V_1 u_1 = u_2 dt \sigma_2 u_2 - u_1 dt \sigma_1 u_1$$

y aplicando la ecuación de continuidad, $\sigma_1 u_1 = \sigma_2 u_2$,

$$\Delta(mu) = \sigma_2 u_2 dt (u_2 - u_1)$$

El impulso mecánico, $F dt$, resulta de multiplicar las fuerzas F que actúan sobre el fluido, por el tiempo considerado dt ; estas fuerzas son las debidas al peso F_g y a las presiones F_p las cuales habrá que proyectar sobre el mismo eje de simetría, el de la sección σ_2 ; así se tendrá,

a) El peso del volumen de fluido (MNCD) proyectado sobre el eje de simetría citado es,

$$F_g = \sigma_2 (MC) \text{sen } \alpha = \left| MC = \frac{z_1' - z_2}{\text{sen } \alpha} \right| = \sigma_2 \frac{z_1' - z_2}{\text{sen } \alpha} \text{sen } \alpha = \sigma_2 (z_1' - z_2)$$

b) La resultante de las fuerzas debidas a las presiones F_p se puede obtener considerando que en los puntos T y F se tienen las presiones p_1' y p_2 respectivamente, mediante la diferencia entre las fuerzas que actúan sobre la cara (MN) y las que actúan sobre la cara (CD) en el sentido del movimiento es decir,

$$F_p = p_1' \sigma_2 - p_2 \sigma_2 = \sigma_2 (p_1' - p_2) = \left| \frac{u_1' = u_1}{p_1 - p_1' = (z_1' - z_1)} \right| = \sigma_2 \{p_1 - p_2 - (z_1' - z_2)\}$$

y la fuerza F total debida al peso y a las presiones será

$$F = \rho \{ (z_1 - z_2) + (p_1 - p_2) \}$$

que multiplicada por dt e igualada a la que proporciona la variación de la cantidad de movimiento, permite obtener,

$$\rho u_2 dt (u_2 - u_1) = \rho \{ (z_1 - z_2) + (p_1 - p_2) \} dt$$

es decir,

$$\begin{aligned} z_1 + \frac{p_1}{\rho} - (z_2 + \frac{p_2}{\rho}) &= \frac{u_2}{g} (u_2 - u_1) = \frac{2 u_2^2 - 2 u_1 u_2}{2 g} = \frac{2 u_2^2 - 2 u_1 u_2}{2 g} + \frac{u_1^2}{2 g} - \frac{u_1^2}{2 g} = \\ &= \frac{(u_2 - u_1)^2}{2 g} - \frac{u_1^2}{2 g} + \frac{u_2^2}{2 g} \end{aligned}$$

que se puede poner en la forma,

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2 g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2 g} + \frac{(u_2 - u_1)^2}{2 g}$$

y que comparada con la de Bernoulli, permite obtener la expresión de la pérdida de carga para el ensanchamiento brusco,

$$P_{acc} = \frac{(u_2 - u_1)^2}{2 g}$$

que se conoce como fórmula de Belanguer.

Teniendo en cuenta que, $u_1 = \frac{2}{1} u_2$, sustituyendo en P_{acc} resulta:

$$P_{acc} = \frac{(\frac{2}{1} - 1)^2}{2 g} u_2^2 = \frac{u_2^2}{2 g}$$

Si el líquido que llega por la tubería de sección ρ_1 desemboca en un gran depósito, $u_2 = 0$, el valor de P_{accid} será,

$$P_{acc} = \frac{u_1^2}{2 g}$$

y el coeficiente de pérdida de carga valdrá la unidad.

PERDIDA DE CARGA EN ENSANCHAMIENTO BRUSCO.- La pérdida de carga en ensanchamiento brusco, según el teorema de Belanguer, es de la forma,

$$P_{acc} = \frac{(u_2 - u_1)^2}{2 g} = \frac{(\frac{2}{1} - 1)^2}{2 g} u_2^2 = \frac{1}{2 g} u_2^2 ; \frac{(\frac{1}{2} - 1)^2}{2 g} u_1^2 = \frac{1}{2 g} u_1^2$$

en la que los valores de los coeficientes de pérdida de carga vienen dados en la Fig IX.11.

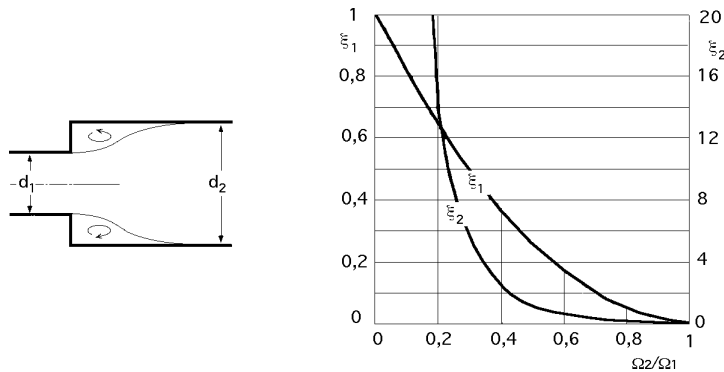


Fig IX.11.- Pérdida de carga en ensanchamiento brusco

PERDIDA DE CARGA EN ENSANCHAMIENTO GRADUAL.- En este caso, la determinación del coeficiente de pérdida de carga no es tan sencilla, pudiéndose poner de acuerdo con la Fig IX.12 en la forma,

$$= m \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2$$

La pérdida de carga es, $P_{acc} = m \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{u_1^2}{2g}$

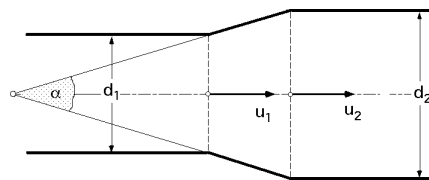


Fig IX.12

Tabla IX.3

	2,5	5	7,5	10	15	20	25	30
m	0,18	0,13	0,14	0,16	0,27	0,43	0,62	0,81

viniendo dados los valores de m en la Tabla II.3

PERDIDA DE CARGA POR CONTRACCIÓN BRUSCA DE LA SECCIÓN.- Si el fluido pasa de la sección 1 a la sección 2, experimenta una contracción e inmediatamente después un ensanchamiento, Fig IX.13.a.b.c.

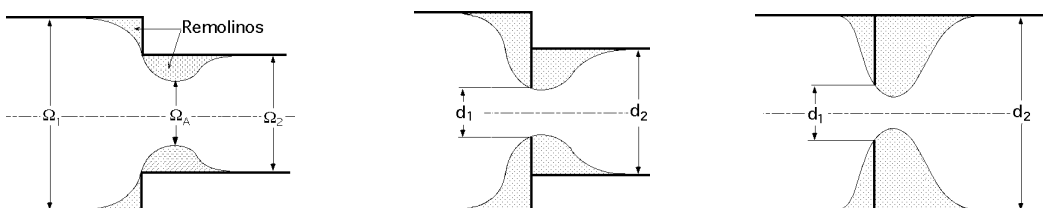


Fig IX.13.a.b.c.

Las pérdidas en la contracción, sección A, son prácticamente despreciables y sólo habrá que tener en cuenta las pérdidas originadas en la expansión posterior, entre las secciones A y 2.

Si llamamos μ al valor de la relación entre las secciones A y 2, que no es más que un coeficiente de contracción, y teniendo en cuenta la ecuación de continuidad entre ambas secciones, resulta,

$$\mu = \frac{A}{2} = \frac{u_2}{u_A} \quad u_A = \frac{u_2}{\mu}$$

que sustituida en la ecuación de Belanguer, permite obtener,

$$P_{acc} = \frac{(u_A - u_2)^2}{2g} = \frac{\left(\frac{u_2}{\mu} - u_2\right)^2}{2g} = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right) \frac{u_2^2}{2g} = \frac{u_2^2}{2g}$$

Según Weisbach, toma los siguientes valores,

Tabla IX.4.- Para el caso a

$\frac{2}{1}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
μ	0,5	0,48	0,45	0,41	0,36	0,29	0,21	0,13	0,07	0,01	0

Tabla IX.5.- Para los casos b y c

$\frac{2}{1}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
(b)		231,7	51	19,8	9,6	5,16	3,08	1,88	1,17	0,74	
(c)		225,9	47,8	30,8	7,8	3,75	1,8	0,8	0,29	0,06	

Se pueden eliminar las pérdidas utilizando tubos progresivos de forma que la tubería se adapte a la vena fluida; de esta forma se puede llegar a obtener valores de μ comprendidos entre 0 y 0,05

PERDIDA DE CARGA EN CURVAS.- Es difícil determinar teóricamente estas pérdidas debido a que las líneas de corriente dejan de ser paralelas al eje de la conducción, presentándose circulaciones secundarias, tal como se muestra en la Fig IX.14.

En la región A se forman torbellinos y en la B se estrecha la sección de la vena, seguida de una expansión, siendo éstas las principales causas de las pérdidas de carga.

Una ecuación que permite calcular el valor de μ propuesta por Navier, es de la forma,

$$\mu = (0,00019 + 0,0009 R) \frac{S}{R^2}$$

en la que S es la longitud del arco medio, correspondiente al cambio de dirección y R es el radio de curvatura; el valor de las pérdidas de carga $P_{(accid)}$ es,

$$P_{acc} = (0,00019 + 0,0009 R) \frac{S}{R^2} \frac{u^2}{2g}$$

El valor de μ se puede determinar también en función de la relación R/r, siendo r el radio de la conducción. Para tubería circular, Weisbach propone los valores de la Tabla IX.6,

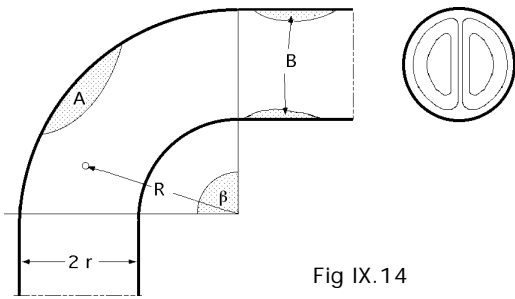


Fig IX.14

Tabla IX.6

r/R	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
		0,13	0,14	0,16	0,2	0,29	0,43	0,67	0,98	1,37	11,95

Otras expresiones propuestas al respecto son,

Weisbach,
$$= \frac{S}{90} \{0,131 + 0,163 \left(\frac{r}{R}\right)^{3,5}\}, \text{ para, } 30^\circ < \beta < 180^\circ$$

$$= \frac{S}{90} \{0,131 + 0,848 \left(\frac{r}{R}\right)^{3,5}\}, \text{ para, } \frac{R}{r} >> 1 < \frac{R}{r} < 5$$

Saint-Venant,
$$= 0,138 \frac{S}{R} \sqrt{\frac{r}{R}}$$

Kauffman,
$$= 0,276 \frac{S}{R} \sqrt{\frac{r}{R}}$$

En este tipo de accidente, se presentan dos formas de pérdidas,

a) Las debidas a la fuerza centrífuga, lo que supone la aparición de un flujo secundario que se superpone al flujo principal y que intensifica el rozamiento.

b) Las producidas por la separación en A y por el estrechamiento en B.

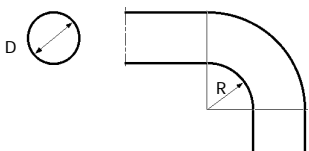
PERDIDA DE CARGA EN CODOS.- En este caso se presentan pérdidas semejantes a las ya citadas para curvas. Para conductos circulares Weisbach propone la siguiente ecuación,

$$= 0,9457 \text{ sen}^2 \frac{\beta}{2} + 2,047 \text{ sen}^4 \frac{\beta}{2}$$

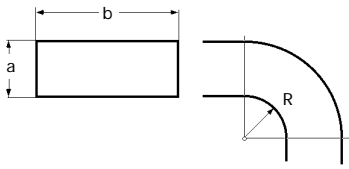
siempre que $\beta < 90^\circ$ y números de Reynolds mayores de 200.000.

Para, $\beta = 90^\circ$, el valor de K es igual a la unidad

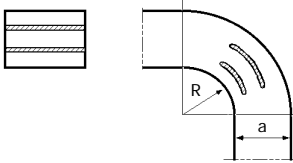
Los coeficientes K se pueden obtener también a partir de las tablas que se exponen a continuación, correspondientes a diversos tipos de codos,



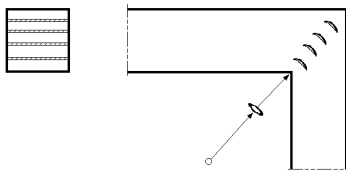
R/D	0	0,25	0,5	1
	0,8	0,4	0,25	0,15



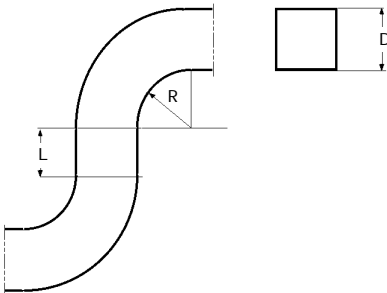
R/a	b/a = 1	b/a = 2	b/a = 3	b/a = 4
0	1,00	0,90	0,80	0,73
0,25	0,40	0,40	0,39	0,32
0,5	0,20	0,20	0,18	0,16
1	0,13	0,13	0,13	0,10



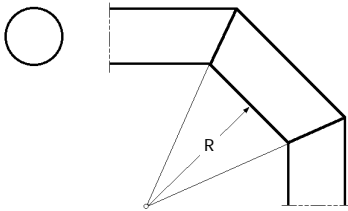
Nº de álabes	1	2	3
R/a	0,25	0,20	0,15
	0,15	0,12	0,10



$R_2 = R_1/2 =$	$= 0,1$	2	3
R/a	0,25	0,20	0,15
	0,15	0,12	0,10



L = 0	= 0,62
L = D	= 0,68



R/d	0,25	0,5	3
Codo de 3 piezas	0,80	0,40	0,30
Codo de 5 piezas	0,50	0,30	0,20

PERDIDAS POR BIFURCACIONES

Las bifurcaciones pueden ser de dos tipos,

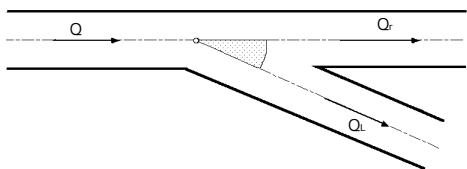
- De divergencia
- De confluencia

Hay que calcular por separado las pérdidas correspondientes al caudal del tramo recto principal Q_r que no cambia de dirección, y al caudal lateral Q_L mediante las fórmulas,

$$P_{acc)_{rL}} = 1 \frac{u_1^2}{2g} \quad ; \quad P_{acc)_{rr}} = 2 \frac{u_2^2}{2g}$$

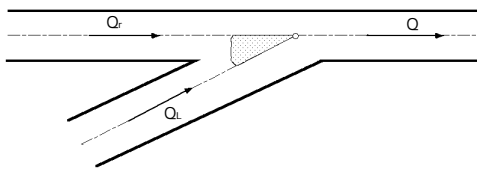
Si los conductos tienen el mismo diámetro, pueden suceder dos casos,

a) Divergencia, (la corriente se divide en dos)



	90°	45°
	0,50	0,25

b) Convergencia, (se reúnen dos corrientes)

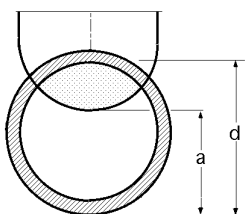


	90°	45°
	1,00	0,50

PERDIDA DE CARGA EN VÁLVULAS.- El coeficiente de pérdida de carga, depende de los siguientes factores,

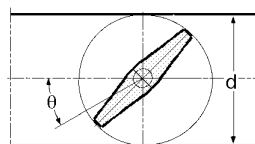
- Tipo de válvula (compuerta, mariposa, etc)
- Del diseño particular de cada una
- Del grado de apertura correspondiente a cada válvula

Weisbach propone los siguientes valores experimentales,



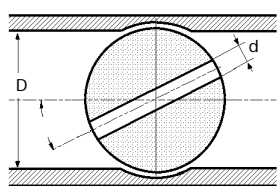
VÁLVULA COMPUERTA

a/d	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8	1
	89,10	17,00	7,60	2,10	0,81	0,26	0,07	0



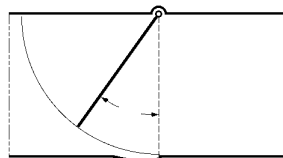
VÁLVULA MARIPOSA

	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	90°
	0,20	0,50	1,50	3,90	10	32	118	751	



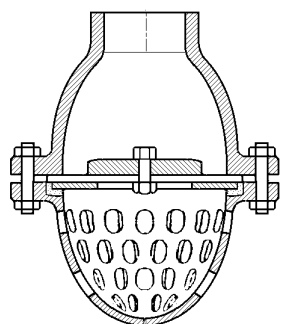
VÁLVULA CILÍNDRICA

	5°	10°	15°	20°	25	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	90°
	0,05	0,30	0,8	1,60	3,1	5,50	9,7	17,3	31,2	52,6	106	206	486	



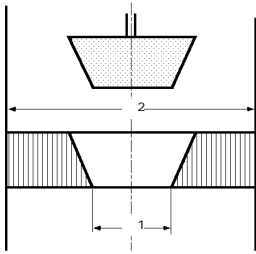
VÁLVULA DE RETENCIÓN

	10°	15°	20°	25°	30°	40°	50°	60°	65°
	5,20	3,10	2,4	2,10	2	1,80	1,7	1,5	1,2



VÁLVULA ALCACHOFA

D (mm)	40	50	65	80	100	125	150	200	250	300	350	400	450	500
	12,0	10,0	8,8	8,0	7,0	6,5	6,0	5,2	4,4	3,7	3,4	3,1	2,8	2,5



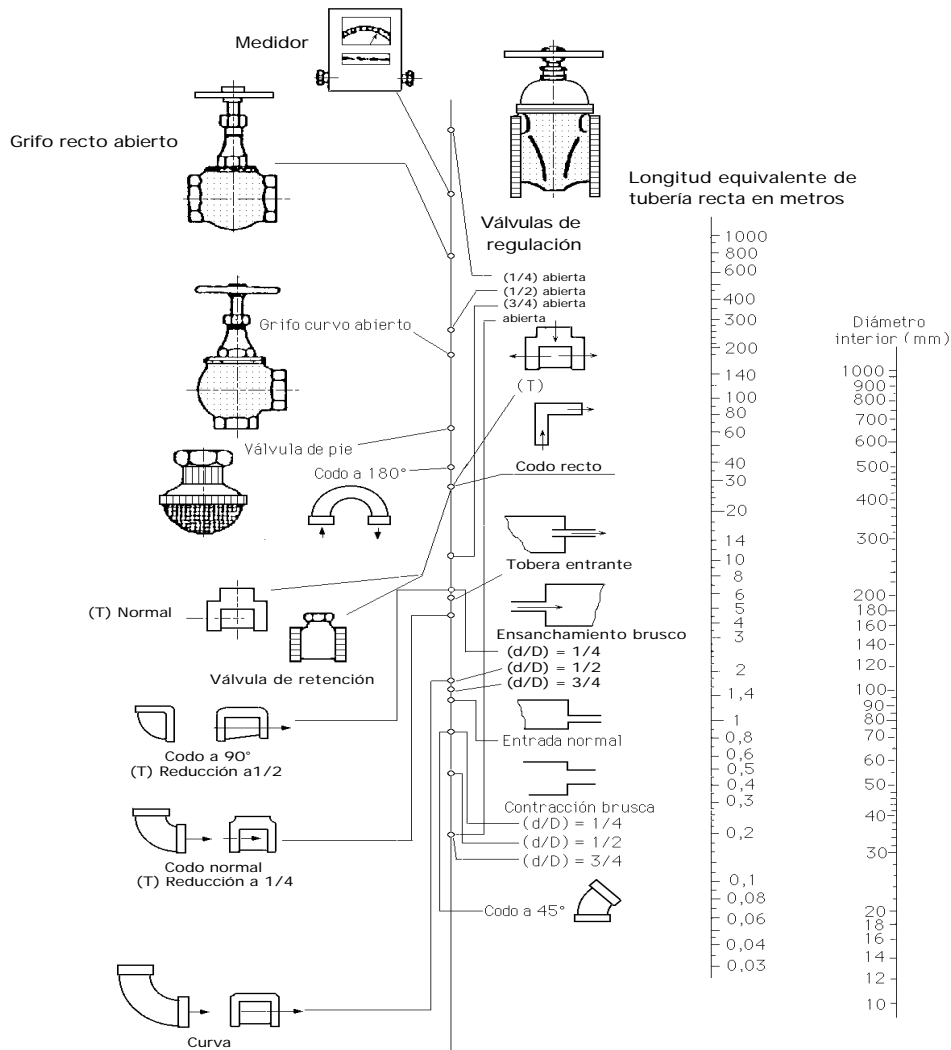
VÁLVULA CÓNICA

Se toma: $= 1,645 \frac{2}{1} - 1$

Coefficientes de resistencia de válvulas y clapetas, según manual de KSB-Amag

Diámetro en (mm)		25	32	40	50	65	80	100	125	150	200
Válvulas de compuerta	De paso libre	1,7	1,4	1,2	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,6	0,6
	Construcción (BOA)	2,1	2,2	2,3	2,3	2,4	2,5	2,4	2,3	2,1	2
	(DIN)	4	4,2	4,4	4,5	4,7	4,8	4,8	4,5	4,1	3,6
Válvulas anulares	Construcción (BOA)	1,6	1,6	1,7	1,9	2	2	1,9	1,7	1,5	1,3
	(DIN)	2,8	3	3,3	3,5	3,7	3,9	3,8	3,3	2,7	2
Válvulas de retención		1,9	1,6	1,5	1,4	1,4	1,3	1,2	1	0,9	0,8

ABACO PARA LA DETERMINACIÓN DE LAS PERDIDAS DE CARGA EN ACCESORIOS, en metros de longitud de tubería equivalente



X.- CALCULO DE TUBERÍAS

X.1.- CALCULO DEL DIÁMETRO DE UNA CONDUCCIÓN

La pérdida total de carga P se puede poner en la forma,

$$P = \frac{L}{d} \frac{u^2}{2g} + \frac{u^2}{2g} = \left(\frac{L}{d} + 1 \right) \frac{u^2}{2g} \quad \left| u = \frac{Q}{d^2} \right. = \frac{4Q}{d^2} \left. = \right.$$

$$= \frac{L}{2g} \frac{16Q^2}{d^5} + \frac{1}{2g} \frac{16Q^2}{d^5}$$

$$2gP \cdot d^5 = 16LQ^2 + 16Q^2 d \quad ; \quad d^5 - \frac{8Q^2}{gP} d - \frac{8LQ^2}{gP} = 0 \quad ; \quad d^5 - E d - F = 0$$

X.2.- CALCULO DEL DIÁMETRO MAS ECONÓMICO DE UNA CONDUCCIÓN

Cuando se construye una conducción, a la hora de elegir el diámetro de la misma, pueden suceder dos casos,

a) Si se toma un diámetro pequeño, resultará una velocidad grande, por lo tanto, una mayor pérdida de carga debida al rozamiento, para un mismo caudal.

b) Si se toma un diámetro grande, la velocidad será menor, pero el coste de la instalación será mayor

En consecuencia, habrá que encontrar una solución que tenga en cuenta estas circunstancias, y que haga el problema lo más económico posible. Para ello consideraremos los siguientes parámetros,

G, es el costo total de la instalación de maquinaria y construcción.

P₂, es el precio por unidad de superficie instalada, de la forma, *d.L*

P_1 , es el precio de la unidad de potencia del grupo de bombeo

L , es la longitud de la tubería

N , es la potencia de la bomba

d , es el diámetro de la conducción

En consecuencia, el gasto total se puede poner en la forma,

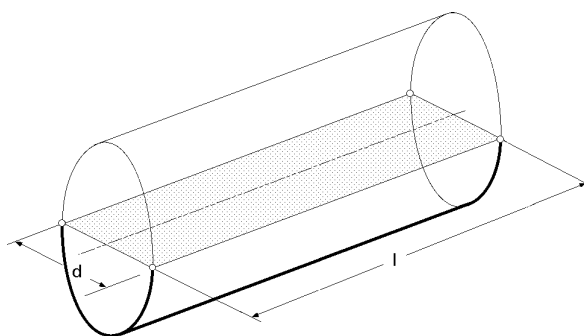


Fig X.1

$$G = P_1 N + P_2 dL$$

La potencia N del grupo de bombeo es,

$$N = \frac{Q (H + P)}{75} = \frac{Q \left\{ H + \frac{8 Q^2 L}{2 g d^5} \right\}}{75}$$

y el costo G de la instalación de maquinaria, construcción y mantenimiento es,

$$G = \frac{Q \left\{ H + \frac{8 Q^2 L}{2 g d^5} \right\}}{75} P_1 + d L P_2$$

Para hallar el diámetro más económico, derivamos la ecuación anterior respecto de d y lo igualamos a cero, obteniéndose,

$$\frac{dG}{dd} = \frac{Q \left(-\frac{40 Q^2 L}{g^2 d^6} \right)}{75} P_1 + L P_2 = 0 \quad ; \quad d = \sqrt[6]{\frac{40 Q^3}{75} \frac{P_1}{g^2 P_2}}$$

Para, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, resulta,

$$d = \sqrt[6]{\frac{5,51 Q^3}{P_2} \frac{P_1}{P_2}} = 1,329 \sqrt[6]{\frac{P_1}{P_2}} \sqrt{Q} = \sqrt{Q}$$

que se conoce como fórmula de Bress y en la que los valores de P_1 y P_2 hay que tomarlos convenientemente actualizados.

El proceso a seguir para hallar el diámetro más económico se puede resumir en lo siguiente,

- 1) Se fija el caudal Q y se elige una velocidad u entre unos límites razonables.
- 2) Con estos datos se calcula el diámetro d
- 3) Se determinan las pérdidas de carga continuas y accidentales; si resultan exageradas, se disminuye la velocidad y se rehacen los cálculos.

El problema se puede resolver también gráficamente, representando las curvas correspondientes a los gastos de instalación y explotación.

Los gastos de instalación comprenden, a) Costo de la tubería; b) Costo del desmonte; c) Costo de los terra-

plenes; d) Costo de los accesorios; e) Costo del grupo de bombeo.

Los gastos de explotación comprenden, a) Gastos de conservación de la tubería, b) Potencia consumida por el grupo de bombeo.

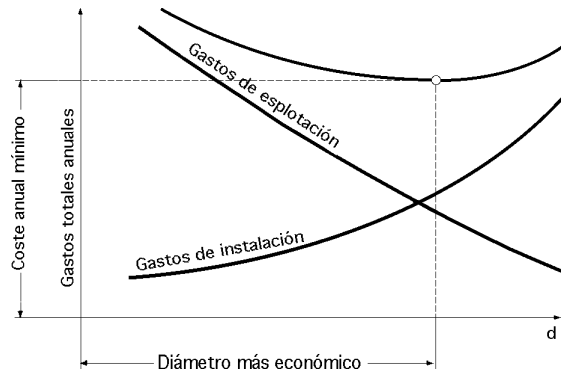


Fig X.2.- Diámetro más económico de una conducción

Conocidas las curvas, se suman sus ordenadas, y el mínimo se corresponde con el diámetro d más económico, como se muestra en la Fig X.2.

X.3.- PERDIDA UNIFORME DE CAUDAL A LO LARGO DE UNA CONDUCCIÓN

Supongamos que un fluido recorre una conducción de sección constante; para un elemento infinitesimal de la misma, de longitud d , la pérdida de carga viene dada por la expresión,

$$dP = J dL = k Q^2 dL$$

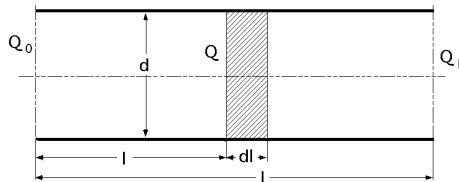


Fig X.3

Para hallar la pérdida de carga continua total, integramos entre los límites 0 y L, en la forma,

$$P = \int_0^L k Q^2 dL$$

Si suponemos que Q_0 es el caudal que entra en la conducción, y que se pierden q m³/seg por metro de tubería, el caudal Q que se transporta a la distancia L del origen es,

$$Q = Q_0 - qL$$

mientras que el caudal al final de la conducción es Q_F de valor,

$$Q_F = Q_0 - qL \quad ; \quad qL = Q_0 - Q_F$$

En consecuencia, se puede poner,

$$P = \int_0^L k Q^2 dL = k \int_0^L (Q_0 - qL)^2 dL = k \left(Q_0^2 L - 2 Q_0 q \frac{L^2}{2} + q^2 \frac{L^3}{3} \right)$$

y sustituyendo el valor de q_L anteriormente encontrado, resulta,

$$P = k L \left\{ Q_0^2 + \frac{(Q_0 - Q_F)^2}{3} - Q_0 (Q_0 - Q_F) \right\} = \frac{k L}{3} (Q_0^2 + Q_0 Q_F + Q_F^2)$$

Si, $Q_F = 0$, es decir, si en el extremo final la conducción ha perdido todo el caudal, la pérdida de carga será,

$$P' = \frac{k L Q_0^2}{3}$$

que es la tercera parte de la pérdida de carga para el caso de que la conducción transportara a lo largo de su longitud L todo el caudal Q_0 sin perder nada, es decir,

$$P = k Q_0^2 L$$

X.4.- TUBERÍA CON TOMA INTERMEDIA

Sea la conducción (ab) de longitud l y diámetro d constante, Fig X.4, que parte de un depósito A, de forma que en el extremo b de la misma se tiene un caudal Q .

La línea de niveles piezométricos es la (DB) y, según ella, el valor de la pérdida de carga P en el extremo B, es,

$$P = J l = k Q^2 l = k' \frac{Q^5}{d^5} l$$

Supongamos ahora que a una distancia l_2 del punto a , (comienzo de la conducción), se realiza una toma intermedia en C; el diámetro d se mantiene constante en los tramos de tubería (ac) y

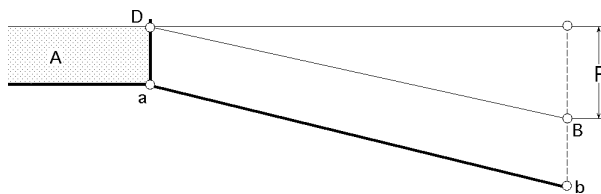


Fig X.4

(cb). En estas circunstancias en el nudo C se tienen los caudales salientes que llamaremos Q_1 y Q_2 .

Para hallar la pérdida de carga total, se puede aplicar la fórmula de Darcy a cada tramo, de forma que la suma de las pérdidas de

carga en el tramo de longitud l , tiene que ser igual a la suma de las pérdidas de carga correspondientes a los tramos l_1 y l_2 , por lo que,

$$P = k' \frac{l_1}{d^5} Q_1^2 + k' \frac{l_2}{d^5} (Q_1 + Q_2)^2 = \frac{k'}{d^5} \{l_1 Q_1^2 + l_2 (Q_1 + Q_2)^2\}$$

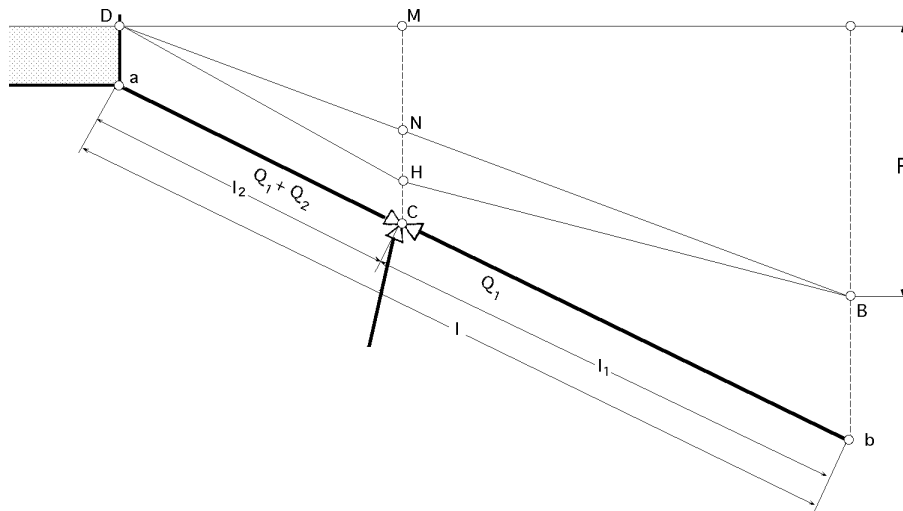


Fig X.5.- Tubería con toma intermedia

de la que se deduce,
$$d = \sqrt[5]{\frac{l_1 Q_1^2 + l_2 (Q_1 + Q_2)^2}{P}} k'$$

A su vez, como el valor de P es el mismo para ambos casos, resulta,

$$\frac{k'}{d^5} \{l_1 Q_1^2 + l_2 (Q_1 + Q_2)^2\} = k' \frac{Q^2}{d^5} l$$

$$l Q^2 = l_1 Q_1^2 + l_2 (Q_1 + Q_2)^2 = Q_1^2 (l_1 + l_2) + 2 l_2 Q_1 Q_2 + l_2 Q_2^2$$

ecuación de segundo grado en Q_1 de la que se obtiene,

$$Q_1^2 + \frac{2 l_2 Q_2}{l} Q_1 + \left(\frac{l_2 Q_2^2}{l} - Q^2\right) = 0 \quad Q_1 = -\frac{l_2 Q_2}{l} \pm Q \sqrt{\frac{l_2}{l} \left(\frac{Q_2}{Q}\right)^2 \left(\frac{l_2}{l} - 1\right) + 1}$$

en la que solo se considerará el signo (+) ya que el signo (-) proporcionaría un caudal negativo

Casos particulares,

a) Si Q_2 es muy pequeño frente a Q , el valor del caudal Q_1 sería,

$$Q_1 = -\frac{l_2 Q_2}{l} + Q$$

que nos dice que, para igual pérdida de carga, el caudal Q_1 en la extremidad b de la tubería es Q menos una fracción de Q_2 que depende de la posición de la toma intermedia.

b) Si la toma está en la posición media de la tubería, $l_2 = \frac{l}{2}$, el caudal es, $Q_1 = Q - \frac{Q_2}{2}$

c) Si se cierra la válvula en C la línea de niveles piezométricos será la (DB) y la carga en C será (MN); al abrir dicha válvula C, la carga en ese punto disminuirá.

Todo el caudal que llegue a C saldrá por la toma intermedia cuando se cumpla que la línea de niveles piezométricos del tramo (Cb) es horizontal.

d) Si la llave en C está cerrada, $P = k' \frac{Q^2}{d^5} l$; $Q = \sqrt{\frac{P d^5}{k' l}}$

$$P_{2(ac)} = \frac{k' l_2 (Q_1 + Q_2)^2}{d^5} = MH$$

Si la llave en C está abierta,

$$P_{1(cb)} = \frac{k' l_1 Q_1^2}{d^5} = P - P_2$$

En todo el proceso se ha supuesto que la tubería es de gran longitud, por lo que no se han tenido en cuenta las pérdidas accidentales.

X.5.- TUBERÍA CON TOMA INTERMEDIA ENTRE DOS DEPÓSITOS

Sea la conducción (BAC) que une los depósitos B y C a diferentes niveles, y en ella una toma intermedia A, con llave, para regular el consumo por (AD).

Para hallar la expresión que permite calcular el caudal Q que circula entre B y C, podemos utilizar la ecuación de Darcy, en la forma,

$$J = \frac{u^2}{2 g d} \quad u = \sqrt{\frac{2 g d J}{}}$$

$$Q = u \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2 g d J}{}} = 3,477 \sqrt{J d^5}$$

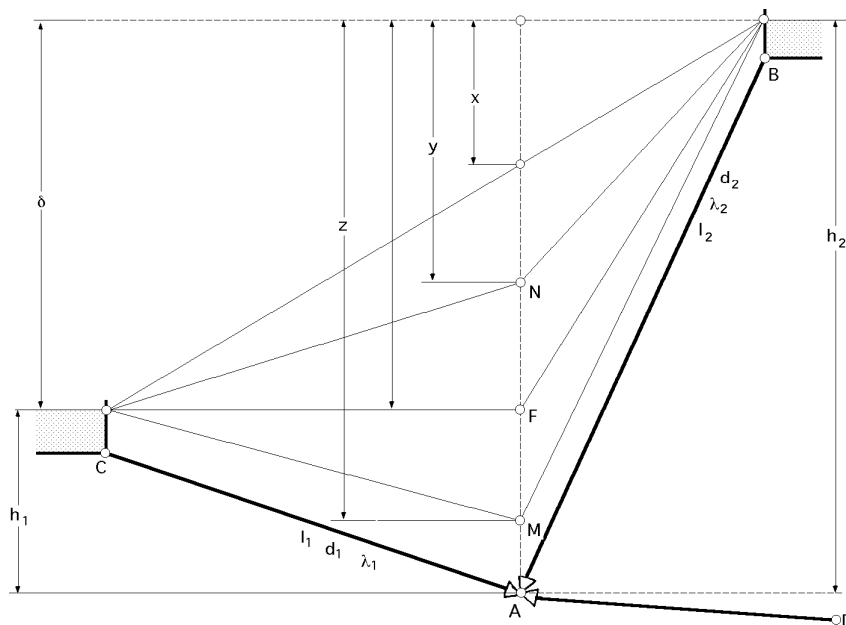


Fig X.6.- Tubería con toma intermedia entre dos depósitos

a) Si se supone que,

$$d_1 = d_2 = d \quad ; \quad l_1 = l_2 = l$$

se pueden presentar varios casos, de entre los que destacamos,

$$a-1) \text{ Llave cerrada, } J = \frac{1}{l_1 + l_2} \quad ; \quad Q = 3,477 \frac{d^5}{\sqrt{l_1 + l_2}}$$

$$a-2) \text{ Llave muy abierta, } Q = 3,477 \frac{d^5}{\sqrt{l_2}} \left(\sqrt{\frac{z}{l_2}} + \sqrt{\frac{z}{l_1}} \right)$$

en la que el depósito C actúa como depósito de socorro del B, estando la toma alimentada por los dos depósitos, y en donde z es la pérdida de carga para el ramal (AB) y $(z -)$ la pérdida de carga para el ramal (AC).

b) Si se supone que, $d_1 = d_2$, y, $l_1 = l_2$, se pueden dar casos semejantes a los del apartado anterior.

b-1) La llave A está cerrada, y por lo tanto, el agua del depósito B afluirá al depósito C, con un caudal Q de la forma,

$$J_1 = \frac{z - x}{l_1} \quad Q = 3,477 \left(\frac{1}{\sqrt{l_1}} \sqrt{\frac{z - x}{l_1}} d_1^5 + \frac{1}{\sqrt{l_2}} \sqrt{\frac{x}{l_2}} d_2^5 \right)$$

$$J_2 = \frac{x}{l_2}$$

b-2) La llave A comienza a abrirse, arrojando un caudal q; habrá un descenso en el nivel piezométrico hasta N, siendo la línea piezométrica (BNC); el depósito C recibirá un caudal menor.

El caudal saliente por la toma es,

$$Q = Q_2 - Q_1 = 3,477 \left(\frac{1}{\sqrt{l_2}} \sqrt{\frac{y}{l_2}} d_2^5 - \frac{1}{\sqrt{l_1}} \sqrt{\frac{z - y}{l_1}} d_1^5 \right)$$

b-3) La llave A se sigue abriendo hasta que el punto F de la línea piezométrica esté contenido en el plano horizontal del nivel de líquido del depósito más bajo C; el valor del caudal que el depósito B proporciona y que es el que sale por la toma, por cuanto el depósito C no interviene, es,

$$Q = Q_2 = \frac{3,477}{\sqrt{l_2}} \sqrt{\frac{z}{l_2}} d_2^5$$

existiendo un equilibrio entre el depósito C y la toma intermedia.

b-4) La llave A se sigue abriendo, aumentando el caudal que sale por la toma intermedia; el nivel piezométrico de la toma A llegará hasta un punto por debajo del plano horizontal del nivel del líquido del depósito C, punto M, y de esta forma el depósito C actuará como un depósito de socorro para el B, estando por lo tanto, alimentada la toma por los dos depósitos. El caudal que proporciona la llave, con z y $z -$, las pérdidas de carga para los ramales (BA) y (CA), respectivamente es.

$$Q = 3,477 \left(\frac{1}{\sqrt{l_1}} \sqrt{\frac{z}{l_1}} d_1^5 + \frac{1}{\sqrt{l_2}} \sqrt{\frac{z}{l_2}} d_2^5 \right)$$

X.6.- EL PROBLEMA DE LOS TRES DEPÓSITOS

El problema de los tres depósitos es un caso de ramificación única, y consiste en tres depósitos a distintos niveles, unidos por las conducciones (AM), (BM) y (CM), que forman un sistema de circulación en Y.

Se fija un sentido en la circulación, el que parezca más lógico, y si una vez resuelto el problema aparece signo contrario al propuesto, se invierte el sentido; supondremos que

$$Q_3 = Q_1 + Q_2$$

Para su estudio aplicaremos Bernoulli entre los tramos de tuberías (AD), (BE), y (CF), siendo los puntos D, E y F muy próximos al de confluencia M, pero lo suficientemente alejados de él, como para considerar a la circulación todavía regular.

Las pérdidas de carga para cada tramo considerado son,

$$P_1 = k_1 Q_1^2 + k_1' Q_1^2 \quad h_1 = Q_1^2 (k_1 + k_1' \quad 1)$$

$$P_2 = k_2 Q_2^2 + k_2' Q_2^2 \quad h_2 = Q_2^2 (k_2 + k_2' \quad 2)$$

$$P_3 = k_3 Q_3^2 + k_3' Q_3^2 \quad h_3 = Q_3^2 (k_3 + k_3' \quad 3)$$

en las que en el sumatorio de los coeficientes de pérdidas accidentales se han incluido todo tipo de pérdidas en codos, curvas, entrada y salida de las tuberías, etc.

Aplicando Bernoulli entre los depósitos y el punto M, se tiene,

$$\text{Tramo (AM), } z_1 + 0 + 0 = z_M + \frac{P_M}{\rho g} + \frac{u_{MA}^2}{2g} + Q_1^2 (k_1 + k_1' \quad 1)$$

$$\text{Tramo (BM), } z_2 + 0 + 0 = z_M + \frac{P_M}{\rho g} + \frac{u_{MB}^2}{2g} + Q_2^2 (k_2 + k_2' \quad 2)$$

$$\text{Tramo (CM), } z_M + \frac{P_M}{\rho g} + \frac{u_{MC}^2}{2g} = z_3 + 0 + 0 + Q_3^2 (k_3 + k_3' \quad 3)$$

Restando las ecuaciones primera y segunda, de la tercera, se obtiene,

$$z_1 - z_3 = \frac{u_{MA}^2}{2g} - \frac{u_{MC}^2}{2g} + Q_1^2 (k_1 + k_1' \quad 1) + Q_3^2 (k_3 + k_3' \quad 3)$$

$$z_2 - z_3 = \frac{u_{MB}^2}{2g} - \frac{u_{MC}^2}{2g} + Q_2^2 (k_2 + k_2' \quad 2) + Q_3^2 (k_3 + k_3' \quad 3)$$

Aplicando de nuevo Bernoulli en el nudo M, entre los puntos (EM), (FM) y (DM), se obtiene,

$$z_M + \frac{P_M}{\rho g} + \frac{u_{MA}^2}{2g} = z_E + \frac{P_E}{\rho g} + \frac{u_{MB}^2}{2g} + \text{Pérdidas en M}$$

$$z_M + \frac{P_M}{\rho g} + \frac{u_{MA}^2}{2g} = z_F + \frac{P_F}{\rho g} + \frac{u_{MC}^2}{2g} + \text{Pérdidas en M} \quad ; \quad \text{Pérdidas en M} = \frac{u_{MA}^2 - u_{MC}^2}{2g}$$

$$z_M + \frac{p_M}{\rho} + \frac{u_{MB}^2}{2g} = z_F + \frac{p_F}{\rho} + \frac{u_{MC}^2}{2g} + \text{Pérdidas en M} \quad ; \quad \text{Pérdidas en M} = \frac{u_{MB}^2 - u_{MC}^2}{2g}$$

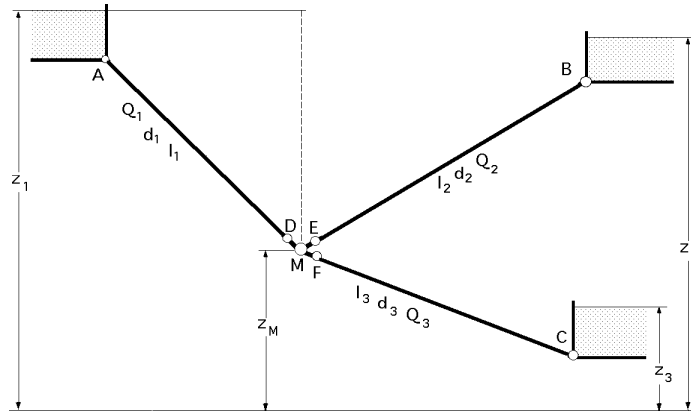


Fig X.7.- El problema de los tres depósitos

y sustituyendo estos resultados en las ecuaciones que proporcionan $(z_1 - z_3)$ y $(z_2 - z_3)$, resulta,

$$z_1 - z_3 = \text{pérdidas en el tramo (AC)}$$

$$z_1 - z_2 = \text{pérdidas en el tramo (AB)}$$

que junto con, $Q_1 = 0$, en el nudo M, se obtiene un sistema de tres ecuaciones que puede dar lugar al siguiente tipo de problemas,

1) Determinación de caudales, conocidas las características de la red y las diferencias de cotas entre los depósitos; habrá por lo tanto, tres ecuaciones con tres incógnitas.

2) Determinación de la diferencia de cotas entre los depósitos, conocidos los caudales y las características de la red; habrá por lo tanto dos ecuaciones con dos incógnitas, ya que la ecuación de los caudales es una identidad.

X.7.- REDES RAMIFICADAS

Se dice que una red es ramificada, cuando se va subdividiendo continuamente en nuevos ramales, Fig X.8. Supongamos una red cualquiera como la indicada en la Fig X.8, a la que aplicaremos Bernoulli entre el punto A, correspondiente al nivel del depósito de alimentación, y los puntos terminales F, G, H, ..., M, de las distintas ramificaciones; así aparecerán una serie de ecuaciones, tantas como puntos terminales (8 en nuestro ejemplo), del tipo,

$$(z_A + 0 + 0) - (z_5 + \frac{p_5}{\rho} + \frac{u_5^2}{2g}) = k_1' Q_1^2 (l_1 + \dots) + k_2' Q_2^2 (l_2 + \dots) + k_5' Q_5^2 (l_5 + \dots)$$

o también

$$z_A - (z_5 + \frac{p_5}{\rho} + \frac{u_5^2}{2g}) = Q_1^2 (k_1 l_1 + k_1' \dots) + Q_2^2 (k_2 l_2 + k_2' \dots) + Q_5^2 (k_5 l_5 + k_5' \dots)$$

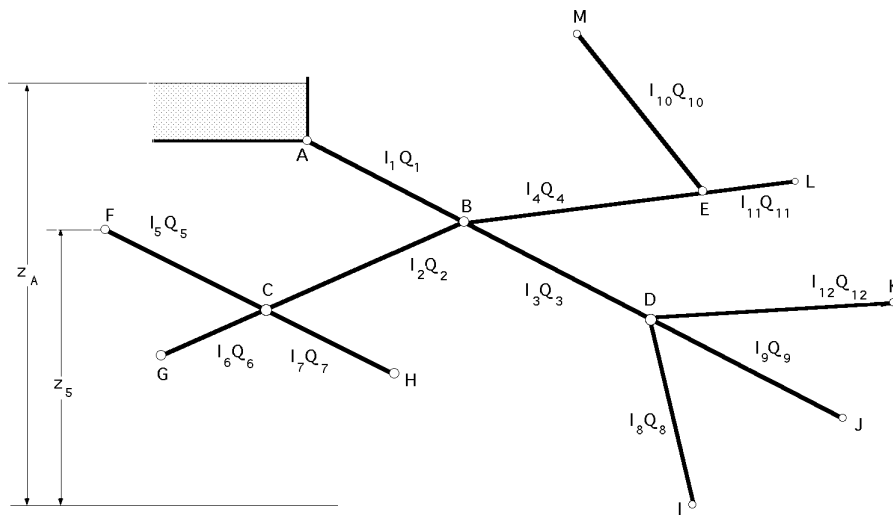


Fig X.8.- Redes ramificadas

Además, en los nudos B, C, D, E, se cumple que, $Q_i = 0$, apareciendo tantas ecuaciones como nudos (4 en este ejemplo), en total 12 ecuaciones, con las que se pueden plantear los siguientes tipos de problemas,

a) Determinación de los caudales, conocidas las diferencias de carga y las características de la red; se tiene un sistema de 12 ecuaciones y 12 incógnitas.

b) Determinación de las diferencias de carga, conocidas las características de la red y los caudales; como, $Q_i = 0$, son idénticas, se dispone de un sistema de 8 ecuaciones y 8 incógnitas.

X.8.- REDES MALLADAS

Este problema se presenta en las instalaciones de tuberías con el aspecto de redes entrelazadas entre si; la solución del problema se fundamenta en las leyes de Kirchoff para corrientes eléctricas, por cuanto se tienen que cumplir las siguientes condiciones,

- En un nodo cualquiera, la suma algebraica de los caudales entrantes y salientes, tiene que ser cero
- En un circuito cerrado, la suma de las pérdidas de carga tiene que ser nula.

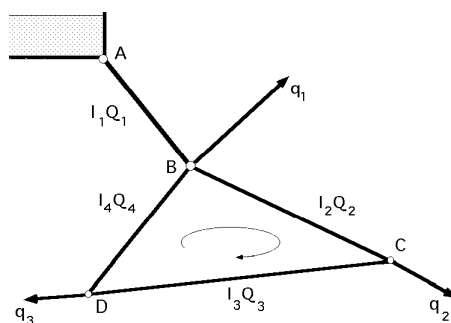


Fig X.9.- Red mallada

La ecuación de continuidad confirma la primera. Para la segunda se puede suponer que las pérdidas accidentales son despreciables frente a las continuas y que los términos cinéticos se anulan

entre sí, por suponer que cada conducción es de diámetro constante; si no se conoce el sentido de la circulación, o no se intuye, éste se escogerá libremente.

Como ejemplo de cálculo supondremos la malla que se presenta en la Fig X.9, obteniéndose,

$$\text{Tramo (BC), } P_{BC} = (z_B + \frac{P_B}{\gamma}) - (z_C + \frac{P_C}{\gamma}) = Q_2^2 k_2 L_2$$

$$\text{Tramo (CD), } P_{CD} = (z_C + \frac{P_C}{\gamma}) - (z_D + \frac{P_D}{\gamma}) = Q_3^2 k_3 L_3$$

$$\text{Tramo (BD), } P_{BD} = (z_B + \frac{P_B}{\gamma}) - (z_D + \frac{P_D}{\gamma}) = Q_4^2 k_4 L_4$$

y cambiando el signo a la ecuación del tramo (BD) y sumándolas miembro a miembro, se obtiene,

$$k_2 Q_2^2 L_2 + k_3 Q_3^2 L_3 - k_4 Q_4^2 L_4 = 0$$

quedando así confirmada la segunda ley, según la cual, en un circuito cerrado la suma de las pérdidas de carga es nula.

$$Q_1 = q_1 + Q_2 + Q_4$$

La primera ley proporciona los siguientes caudales,

$$Q_2 = Q_3 + q_2$$

$$Q_3 = Q_4 + q_3$$

Para el ejemplo de la, Fig X.10, con dos mallas, sería,

$$Q_1 - q_1 - Q_2 - Q_5 = 0$$

$$Q_2 - Q_3 - q_2 - Q_6 = 0$$

$$Q_3 - Q_4 - q_3 = 0$$

Aplicando la primera y segunda ley a la red,

$$Q_4 + Q_5 - q_4 - Q_7 = 0$$

$$Q_6 + Q_7 - q_5 = 0$$

$$k_2 Q_2^2 L_2 + k_3 Q_3^2 L_3 + k_4 Q_4^2 L_4 - k_5 Q_5^2 L_5 = 0$$

$$k_6 Q_6^2 L_6 - k_7 Q_7^2 L_7 - k_4 Q_4^2 L_4 - k_3 Q_3^2 L_3 = 0$$

en las que los valores de Q son los caudales en cada tramo de tubería, mientras que los valores de q son los caudales en los diferentes puntos de la red.

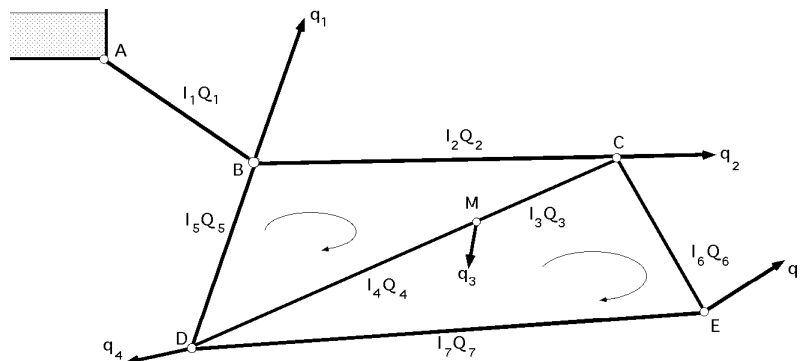


Fig X.10

Si hubiésemos aplicado la segunda ley a la malla (BCEDB), la ecuación que se obtendría sería combinación lineal de las dos últimas. Como resumen, se tiene un total de 7 ecuaciones que, según el tipo de datos de que se disponga, darán lugar a un tipo u otro de problema.

X.9.- TUBERÍAS EN PARALELO. MÉTODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS

Dado el sistema de 3 tuberías representado en la Fig X.11, montadas en paralelo, a través de las cuales circula un fluido homogéneo, hay que determinar el caudal que circula por cada una de ellas; se tienen dos mallas, y en cada una de ellas tiene que cumplirse que la suma de las pérdidas de carga tiene que ser igual a cero, es decir, en las tuberías montadas en paralelo, la pérdida de carga tiene que ser la misma para cada tramo.

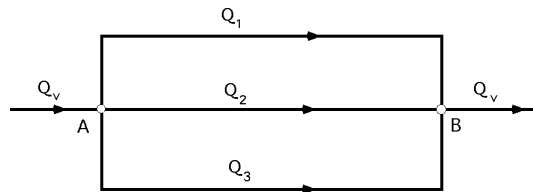


Fig X.11

La expresión general que permite calcular las pérdidas de carga es,

$$P = \frac{1}{d} \frac{u^2}{2g} L = k Q^2$$

por lo que, en nuestro caso, se tendrá,

$$k_1 Q_1^2 = k_2 Q_2^2 = k_3 Q_3^2 = P_{AB}$$

y en cada nudo,

$$Q_i = 0 ; Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_v$$

Aplicando Bernoulli entre los nudos A y B se encuentra,

$$z_{A1} + \frac{P_{A1}}{\rho g} + \frac{u_{A1}^2}{2g} = z_{B1} + \frac{P_{B1}}{\rho g} + \frac{u_{B1}^2}{2g} + P_{AB}$$

y supuestas, para simplificar, las tuberías de diámetro constante y las z_{A1} y z_{B1} iguales, se tiene,

$$\frac{P_{A1}}{\rho g} - \frac{P_{B1}}{\rho g} = P_{AB} = \frac{P_{AB}}{\rho g}$$

y, por lo tanto, se podrá poner,

$$k_1 Q_1^2 = k_2 Q_2^2 = k_3 Q_3^2 = \frac{P_{AB}}{\rho g}$$

y llamando, $k = k$, y sustituyendo en la anterior, resulta,

$$k Q_1^2 = k Q_2^2 = k Q_3^2 = P_{AB}$$

luego,

$$Q_1 = \sqrt{\frac{P_{AB}}{k}} ; Q_2 = \sqrt{\frac{P_{AB}}{k}} ; Q_3 = \sqrt{\frac{P_{AB}}{k}} ; Q_v = \sqrt{\frac{P_{AB}}{k}}$$

por lo que,

$$Q_v = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \sqrt{\frac{P_{AB}}{k}} + \sqrt{\frac{P_{AB}}{k}} + \sqrt{\frac{P_{AB}}{k}} + \sqrt{\frac{P_{AB}}{k}}$$

y que simplificada queda en la forma,

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k}}$$

en la que habrá que sustituir los valores de k correspondientes a cada tubería, que sabemos son de la forma,

$$k = \frac{16}{2g} \frac{L_{AB}}{d^5} = 0,08271 \frac{L_{AB}}{d^5}$$

Una vez determinado el valor de k se calcula el valor de la pérdida de carga P_{AB} introduciendo el caudal Q_v y a partir de aquí, la distribución del caudal en cada uno de los tramos.

TUBERÍAS EN PARALELO.- En las redes de tuberías, el caudal que se tiene en una salida determinada puede proceder de diversos circuitos; los problemas de redes son, en general, muy complicados y requieren una serie de ensayos en los que los circuitos se compensan de uno en uno, hasta que todas las condiciones que deba satisfacer la corriente fluida, se cumplan.

Como ya sabemos, estas condiciones son,

- a) La suma algebraica de las caídas de presión alrededor de cada circuito debe ser nula
- b) El caudal que llega a cada nudo debe ser igual al que sale de él
- c) La fórmula de Darcy tiene que cumplirse en cada tubería, es decir, existe una relación entre la pérdida de energía y el caudal que debe satisfacerse en cada tubería

La primera condición establece que la caída de presión entre dos puntos cualesquiera del circuito, por ejemplo entre el A y el G de la Fig X.12, a lo largo de la tubería (AG) o a lo largo de la (AFEDG).

La segunda condición es la ecuación de continuidad.

La fórmula de Darcy se sustituye por una fórmula exponencial; expresando l en función de la velocidad u para cada tubería y fluido dados, la formula de Darcy se puede reducir a otra de la forma, $J = r Q^n$, con la que habrá que calcular las pérdidas de carga.

MÉTODO ITERATIVO DE HARDY-CROSS.- Como en la práctica los problemas de redes de

tuberías no se pueden resolver analíticamente, hay que recurrir a los métodos de aproximaciones sucesivas; el método de Hardy-Cross consiste en suponer inicialmente en cada tubería un caudal determinado de forma que, en cada nudo, se satisfaga la ecuación de continuidad, y a continuación se calcula una corrección de caudales para cada circuito, de forma que estos queden muy compensados.

Las pérdidas accidentales se incluyen como longitudes equivalentes de tubería en cada tramo; con ayuda de la ecuación de la pérdida de carga, $J = r Q^n$, en la que r y n se calculan para cada tubería, el método se aplica como sigue,

a) Se supondrá inicialmente una distribución de caudales que satisfagan la ecuación de continuidad en los nudos, y que después de un minucioso examen de la red se presuma que es la mejor.

b) Se calcula a continuación la pérdida de carga para cada tubería, $J = r Q^n$, y acto seguido la pérdida de carga alrededor de cada circuito, es decir,

$$J = r Q^n$$

que deberá satisfacer la condición de ser igual a cero, para cada circuito compensado

c) Se calculará para cada circuito el término,

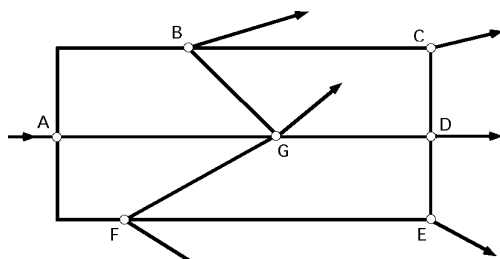


Fig X.12

$$\left| n r Q_0^{n-1} \right|$$

considerando a todos los términos que tengan esta forma, positivos.

d) Se establecerá para cada circuito un caudal correctivo ΔQ que va a servir para compensar, en más o en menos, la pérdida de carga en el circuito, (para $\sum r Q^n = 0$),

$$Q = \frac{r Q_0^n}{\left| n r Q_0^{n-1} \right|}$$

e) Se calcularán los caudales corregidos en cada tubería, y se repetirá el proceso hasta conseguir la precisión deseada.

Se sabe que la solución es la correcta, cuando se satisfacen todas las condiciones, para cada circuito.

El término correctivo se obtiene como sigue,

Para cualquier tubería se pone un caudal Q de la forma,

$$Q = Q_0 + \Delta Q$$

en la que Q es el caudal corregido, Q_0 es el caudal supuesto y ΔQ es la corrección que hay que introducir.

Por lo tanto, para una tubería cualquiera se tendrá,

$$J = r Q^n = r (Q_0 + Q)^n = r (Q_0^n + n Q_0^{n-1} Q + \dots)$$

Si Q es pequeño comparado con Q_0 todos los términos de la serie después del segundo se pueden despreciar, por lo que para un circuito se tendrá,

$$J = r Q^n = r Q_0^n + Q \quad n r Q_0^{n-1} = 0$$

en la que Q sale del sumatorio porque es el mismo para todas las tuberías del circuito.

Despejando Q se tiene el término correctivo del caudal, ya indicado anteriormente,

$$Q = \frac{r Q_0^n}{n r Q_0^{n-1}}$$

Cuando Q se aplica a un circuito, tiene el mismo sentido en todas las tuberías, es decir, se suma a los caudales que tienen dirección contraria a las agujas del reloj, y se resta a los de la misma dirección que las agujas del reloj; como Q lleva consigo el signo, el denominador del término correctivo será la suma de los valores absolutos de los términos.

Los valores de r están en el numerador y en el denominador y, en consecuencia, se pueden utilizar valores proporcionales a los valores reales de r , más pequeños; análogamente, las distribuciones de los caudales se pueden expresar como un porcentaje de los caudales reales; para encontrar una determinada pérdida de carga, se tienen que usar los valores reales de r y Q , después de que se haya encontrado la verdadera distribución de caudales.

XI.- GOLPE DE ARIETE

XI.1.- FORMULACIÓN DE MICHEAUD

Sea una conducción de sección constante S por la que fluye un líquido desde el depósito A al B. Supongamos que en B está instalada una válvula; si se cierra, se originará en B un aumento de presión que se transmitirá desde B hacia A; por el contrario, si en vez de cerrar la válvula, se abre, se originará en B una depresión que igualmente se transmitirá de B hacia A; tales efectos se denominan *golpe de ariete*; en todo el fenómeno, el depósito A mantiene constante el nivel de la superficie libre del agua, u otro líquido que contenga.

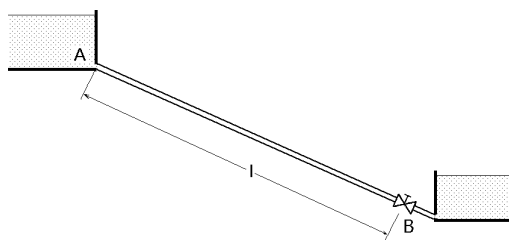


Fig XI.1

De acuerdo con la Fig XI.1, y tal como se ha dicho, al cerrar la válvula en B se origina un aumento de presión que, en B, pasará desde 0 hasta p , siendo su valor medio,

$$\frac{0 + p}{2} = \frac{p}{2}$$

en el supuesto de que esta variación sea lineal.

Si se supone que t es el tiempo de cierre de la válvula, el impulso mecánico viene dado por,

Impulso mecánico: $p S \frac{t}{2}$

que es el que disipa la cantidad de movimiento del líquido, y cuyo valor es igual a la masa contenida en el tubo (AB) multiplicada por la velocidad \vec{v} , de la forma,

$$M = S l v$$

por lo que igualando el impulso a la cantidad de movimiento, se obtiene,

$$S l \quad v = p S \frac{t}{2} ; \quad p = \frac{2 l}{t} v$$

que en metros de altura de columna de agua es de la forma,

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{2 l}{t} \frac{v}{g} = \frac{2 l v}{t g}$$

que se conoce como fórmula de Micheaud, y en cuya demostración no se ha tenido en cuenta, ni la compresibilidad del agua, ni la elasticidad del material de que está construida la tubería.

Multiplicándola y dividiéndola por a (velocidad de la onda de presión generada por el cierre), también llamada *celeridad*, se tiene,

$$h = \frac{2 l \frac{a}{a} v}{t g} = \frac{2 l}{t} \frac{a v}{g} = \frac{a v}{g} \frac{2 l}{t}$$

siendo, $\frac{2 l}{t} = \frac{2 l}{a}$, el tiempo que la onda de presión precisa para remontar la tubería, reflejarse en el depósito superior y volver a B, es decir, es el tiempo de ida y vuelta de la onda de presión al punto B

Allievi demostró que ésta fórmula sólo es válida para un tiempo de cierre de la válvula mayor, o igual que el tiempo que tardaría la onda de presión en ir de B a A y en volver de A a B, es decir, $t \geq \frac{2 l}{a}$. Este caso se corresponde con la maniobra lenta del cierre de la válvula y cuando se cumpla hay que utilizar la fórmula de Micheaud.

Cuando, $t < \frac{2 l}{a}$, se considera que la maniobra de cierre de la válvula es rápida y se toma como valor de la sobrepresión,

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{a v}{g}$$

que fue deducida por Allievi, y que demostraremos más adelante.

La sobrepresión originada por el golpe de ariete es independiente de la presión estática que en cada sección de la tubería existiera antes de la perturbación producida por el cierre de la válvula, pero es función del tiempo t y de la distancia de B a la sección considerada; en consecuencia, a la presión existente antes del golpe de ariete, habrá que añadir la sobrepresión originada por el mismo, siendo la presión después del golpe,

$$h = h_x + h$$

La fórmula de Micheaud da resultados más fuertes que otras y, por lo tanto, si se utiliza, quedara calculada la conducción con más seguridad para su resistencia. Los golpes de ariete se pueden atenuar con un cierre progresivo de la llave de paso o mediante depósitos de aire en el extremo de la conducción, válvulas de seguridad, chimeneas de equilibrio, etc.

X.2.- FORMULACIÓN DE ALLIEVI

Para determinar las formulas de Allievi, se supondrá que las pérdidas de carga son despreciables frente al efecto de sobrepresión producido por el golpe de ariete. Para su estudio consideraremos una conducción sometida al golpe de ariete, representando en la misma las presiones por h_{tx} siendo t el tiempo contado a partir del comienzo de la perturbación y x la distancia contada desde la sección O donde se encuentra la válvula a la sección en la que se desea conocer la presión.

Se considerará sentido (+) el contrario a la corriente.

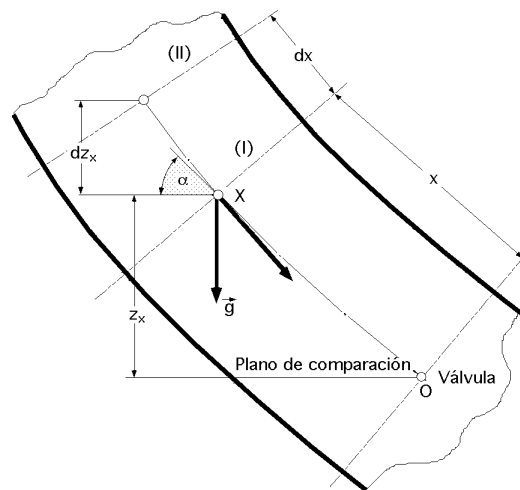


Fig XI.2.- Conducción sometida a golpe de ariete

Si no existe perturbación, es decir, si no se produce el cierre de la válvula instalada en O, la presión en la sección x para régimen permanente, es,

$$\text{Para, } t = 0 ; z_x + h_{0x} + \frac{v^2}{2g} = 0 + h_{00} + \frac{v^2}{2g} , \text{ con, } h_{0x} = \frac{p_{0x}}{\rho g} ; h_{00} = \frac{p_{00}}{\rho g}$$

y simplificándola resulta,

$$h_{0x} = h_{00} - z_x = \left| \begin{array}{l} dz_x = \text{sen } \alpha \, dx \\ z_x = \int_0^x \text{sen } \alpha \, dx \end{array} \right| = h_{00} - \int_0^x \text{sen } \alpha \, dx \quad p_{0x} = p_{00} - \int_0^x \rho g \text{sen } \alpha \, dx$$

Para, $t = t$, momento en que se origina la perturbación, se pueden aplicar las fórmulas de Euler, que sabemos ligan las variables u, v, w, p y ρ , en un punto de un líquido en movimiento, en función del tiempo que, al variar, hace que se modifiquen las variables, para ese mismo punto. Por lo tanto, en nuestro caso, de las 3 ecuaciones de Euler sólo utilizaremos la primera, por cuanto, $v = 0$, y, $w = 0$, ya que se puede considerar como eje x el de simetría de la conducción; en consecuencia,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -x - \frac{du}{dt}$$

en la que se hacen las siguientes consideraciones,

$$X = -g \operatorname{sen}$$

$$Y = -g \operatorname{cos}$$

$$Z = 0$$

Como la velocidad de la corriente es $(-u ; v = 0 ; w = 0)$, resulta que u es de la forma, $u = f(x,t)$, y por lo tanto,

$$du = \frac{u}{x} dx + \frac{u}{t} dt \quad \frac{du}{dt} = \frac{u}{x} \frac{dx}{dt} + \frac{u}{t} = u \frac{u}{x} - \frac{u}{t}$$

apareciendo el signo (-) debido a que la velocidad es, $-u$.

Sustituyendo en la ecuación de Euler, se tiene,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d(\rho h)}{dx} = -g \operatorname{sen} - \left(u \frac{u}{x} - \frac{u}{t} \right) = -g \operatorname{sen} - u \frac{u}{x} + \frac{u}{t}$$

es decir,

$$\frac{h}{x} = -\operatorname{sen} - \frac{1}{g} \left(u \frac{u}{x} - \frac{u}{t} \right)$$

y como, $u \frac{u}{x}$, es despreciable frente a $\frac{u}{t}$, como veremos más adelante, queda:

$$\frac{h}{x} = -\operatorname{sen} - \frac{1}{g} \left(u \frac{u}{x} - \frac{u}{t} \right) = -\operatorname{sen} + \frac{1}{g} \frac{u}{t} \quad \frac{u}{t} = g \operatorname{sen} + g \frac{h}{x}$$

$$\frac{u}{t} = g \operatorname{sen} + g \frac{h}{x}$$

que es la Primera ecuación diferencial de Allievi.

Para calcular $\frac{u}{x}$ se parte de la ecuación de la conservación de la masa.

Si en la conducción de la Fig XI.3 se toma un elemento dx de la tubería, y si en la sección (I) de la misma se considera que la velocidad del líquido es u , en la sección (II) la velocidad será de la forma,

$$u + \frac{u}{x} dx$$

Como en el elemento dx se cumple que,

Variación de masa en $dx = \text{Masa entrante} - \text{Masa saliente}$

se tiene,

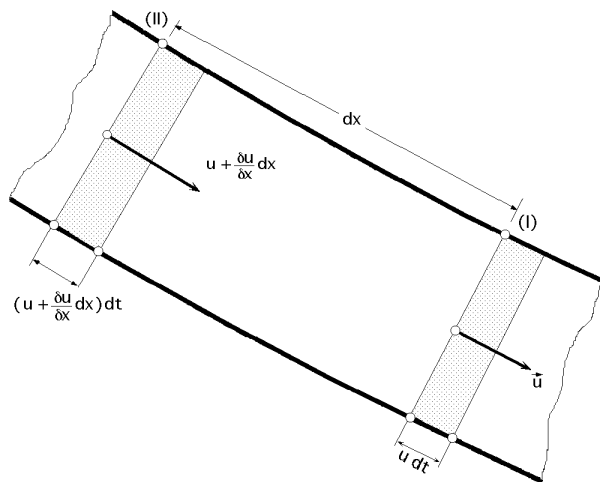


Fig XI.3.- Masa de líquido contenida en dx

Masa entrante (II), $(u + \frac{u}{x} dx) dt$

Masa saliente (I), $u dt$

siendo la variación de masa en el elemento dx,

$$\frac{u}{x} dx dt$$

que es el líquido almacenado en el tiempo dt debido a la compresibilidad del mismo y a la dilatación de la tubería.

Para determinar la variación de masa en el tiempo dt partiremos de que la masa de líquido contenida en la longitud invariable dx,

antes de la perturbación es, ρdx , que durante el tiempo dt experimenta una variación de la forma,

$$\left(\frac{dx}{t} \right) dt$$

que igualada a la anteriormente hallada, permite obtener,

$$\frac{u}{x} dx dt = \left(\frac{dx}{t} \right) dt = \frac{1}{t} dx dt + \frac{1}{t} dx dt$$

$$\frac{u}{x} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t}$$

Como,

$$= \frac{\text{Peso}}{\text{Volumen}} = \frac{\text{Peso}}{v} \quad d = d\left(\frac{\text{Peso}}{v}\right) = \text{Peso} d\left(\frac{1}{v}\right) = \text{Peso} \left(\frac{-1}{v^2}\right) dv = \frac{\text{Peso}}{v} \left(\frac{-dv}{v}\right) = - \frac{dv}{v}$$

y siendo,

$$k = - \frac{1}{v} \left(\frac{v}{p}\right)_T = - \frac{1}{v} \frac{dv}{dp} = \frac{1}{v} \quad \frac{dv}{v} = - \frac{dp}{p} = - \frac{d(h)}{h}$$

con módulo de elasticidad del líquido, resulta,

$$d = \frac{d(h)}{h} = 2 \frac{dh}{h}$$

y, por lo tanto, la variación de ρ en función del tiempo será,

$$\frac{1}{t} dt = \frac{2}{t} \frac{h}{h} dt$$

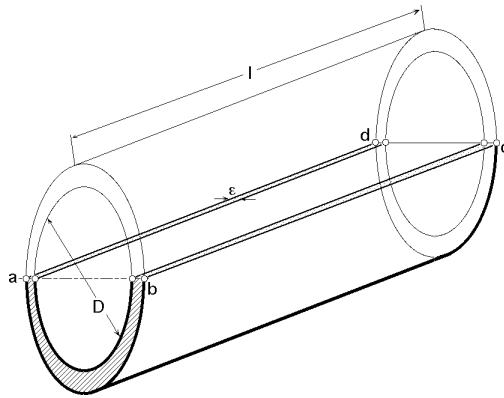


Fig XI.4

Para calcular $\frac{d}{t}$ se considerará que sobre las paredes de la tubería se ejerce una presión, $p = h$
 Para tuberías de poco espesor se cumple que la fuerza ejercida contra las paredes cilíndricas de la tubería es la misma que se ejerce sobre un plano diametral cualquiera; así se tiene,

$$F = p \{ \text{área}(abcd) \} = p D l = 2 e l \quad ; \quad p D = 2 e \quad = \frac{p D}{2 e}$$

Tomando logaritmos y diferenciando,

$$\ln p + \ln D = \ln 2 + \ln e + \ln l \quad ; \quad \frac{dp}{p} + \frac{dD}{D} = \frac{de}{e} + \frac{dl}{l}$$

ya que al variar la presión p , varían también D y e .

Sin embargo $\frac{de}{e}$ y $\frac{dD}{D}$ son variaciones muy pequeñas si se las compara con $\frac{dl}{l}$ y $\frac{dp}{p}$ y se desprecian, quedando finalmente,

$$\frac{dp}{p} = \frac{d}{l} \quad d = \frac{dp}{p} = \frac{p D}{2 e} \frac{dp}{p} = \frac{D}{2 e} dp$$

Al aumentar el diámetro de la tubería, su variación será dD , y el alargamiento unitario en la dirección del mismo $\frac{dD}{D}$.

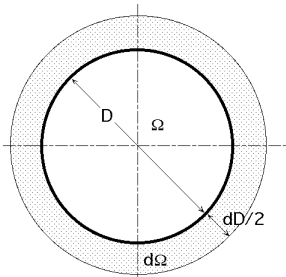


Fig XI.5.- Variación de la sección

Como el módulo de elasticidad E del material de la tubería es de la forma,

$$E = \frac{d}{\frac{dD}{D}} = D \frac{d}{dD} \quad ; \quad dD = \frac{D}{E} d = \frac{D^2}{2 e E} dp$$

y como la variación de la sección debida al aumento del diámetro, Fig XI.5, vale,

$$d = D \frac{dD}{2} = \frac{D}{2} \frac{D^2}{2 e E} dp = \frac{D^3}{4 e E} dh = \frac{D}{e E} dh \quad \frac{d}{t} dt = \frac{D}{2 E} \frac{h}{t} dt$$

por lo que,

$$\frac{u}{x} = \frac{1}{t} \frac{d}{t} + \frac{1}{t} \frac{h}{t} = \left| \begin{array}{l} \frac{d}{t} = \frac{D}{e E} \frac{h}{t} \\ \frac{h}{t} = \frac{2}{D} \frac{d}{t} \end{array} \right| = \frac{1}{e E} \frac{D}{t} \frac{h}{t} + \frac{1}{t} \frac{2}{D} \frac{h}{t} = \frac{D}{e E} \frac{h}{t} + \frac{2}{D} \frac{h}{t} = \left(\frac{D}{e E} + \frac{2}{D} \right) \frac{h}{t}$$

que es la Segunda ecuación diferencial de Allievi.

XI.4.- CELERIDAD

Se define la celeridad a , en la forma,

$$\frac{1}{a^2} = \left(\frac{D}{e E} + \frac{2}{D} \right) \frac{h}{t} \quad a = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{D}{e E} + \frac{2}{D} \right) \frac{h}{t}}}$$

que tiene en cuenta la compresibilidad del líquido y la rigidez de la tubería.

El coeficiente de compresibilidad es,

$$k = - \frac{1}{v} \frac{dv}{dp} = \frac{1}{v} \frac{dv}{dp} \quad \frac{dv}{v} = - \frac{dp}{k} = \left| \begin{array}{l} v = \frac{1}{\rho} \\ dv = - \frac{d\rho}{\rho^2} \end{array} \right| = \frac{- \frac{d\rho}{\rho^2}}{\frac{1}{\rho}} = - \frac{d\rho}{\rho} \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{k} = \frac{d}{k}$$

En un medio indefinido, una onda plana longitudinal se propaga con una celeridad,

$$a_0 = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{d}{k}}$$

que coincide con el valor de la celeridad definido en la expresión del número Mach, en la que solo interviene la compresibilidad del fluido, ó bien, a partir de la expresión general anteriormente definida en la que se ha considerado que el sumando $\frac{D}{e E}$ es despreciable.

Para un conducto circular de diámetro D , espesor e , y constituido por un material de módulo de elasticidad E , la celeridad de una onda plana toma la forma ya conocida,

$$a = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{k} + \frac{D}{e E} \right)}} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\left(1 + \frac{D}{e E} k \right)}} = \frac{9.900}{\sqrt{48,3 + k \frac{D}{e}}} \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

de acuerdo con la Teoría de Allievi, en la que el valor de k depende del material de que esté construida la tubería, de la forma,

Para $k = 0,5$, (Tuberías de hierro y acero)

Para $k = 1,0$, (Tuberías de fundición)

Para $k = 1,5$, (Tuberías de plomo y hormigón armado)

viniendo expresado a en m/seg, D en mm y e en mm

XI.5.- SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE ALLIEVI

El sistema de ecuaciones diferenciales a resolver es,

$$\frac{u}{t} = g \operatorname{sen} \quad + g \frac{h}{x}$$

$$\frac{u}{x} = \frac{g}{a^2} \frac{h}{t}$$

Aplicando el Teorema de Swartz,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \left(\frac{u}{t} \right) &= \frac{1}{t} \left(\frac{u}{x} \right) & \frac{1}{x} \left(\frac{u}{t} \right) &= \frac{1}{x} \left(g \operatorname{sen} \quad + g \frac{h}{x} \right) = g \frac{2h}{x^2} & \frac{2h}{x^2} &= \frac{1}{a^2} \frac{2h}{t^2} \\ \frac{1}{t} \left(\frac{u}{x} \right) &= \frac{1}{t} \left(\frac{g}{a^2} \frac{h}{t} \right) = \frac{g}{a^2} \frac{2h}{t^2} \end{aligned}$$

que es la ecuación de ondas unidimensional, (ecuación hiperbólica), cuya integral general es de la forma,

$$h = h_0 + F \left(t - \frac{x}{a} \right) + f \left(t + \frac{x}{a} \right)$$

por lo que,

$$\frac{u}{x} = \frac{g}{a^2} \frac{h}{t} = \frac{g}{a^2} \left\{ F' \left(t - \frac{x}{a} \right) + f' \left(t + \frac{x}{a} \right) \right\}$$

Integrándola respecto de x , se obtiene,

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \frac{g}{a^2} \left\{ F' \left(t - \frac{x}{a} \right) + f' \left(t + \frac{x}{a} \right) \right\} dx = \left| \begin{array}{l} t - \frac{x}{a} = \quad ; - dx = a d \\ t + \frac{x}{a} = \quad ; dx = a d \end{array} \right| = \\ &= u_0 + \frac{g}{a^2} \left\{ \int F' \left(\quad \right) (-a d) + \int f' \left(\quad \right) (a d) \right\} dx = u_0 + \frac{g}{a^2} \left\{ -a F \left(\quad \right) + a f \left(\quad \right) \right\} = \\ &= u_0 + \frac{g}{a^2} \left\{ -a F \left(t - \frac{x}{a} \right) + a f \left(t + \frac{x}{a} \right) \right\} = u_0 - \frac{g}{a} \left\{ F \left(t - \frac{x}{a} \right) - f \left(t + \frac{x}{a} \right) \right\} \end{aligned}$$

ecuación que, junto con la primera de Allievi,

$$h = h_0 + F \left(t - \frac{x}{a} \right) + f \left(t + \frac{x}{a} \right)$$

son sólo válidas a lo largo de un tramo de tubería de característica única.

La ecuación anterior, 1ª ecuación de Allievi, muestra que la presión existente en la sección x , en el instante t de la perturbación, es suma de tres tipos de presión,

a) La presión h_0 , (presión estática), correspondiente al régimen permanente.

b) La presión $F(t - \frac{x}{a})$, variable con x y con t pero constante si, $t - \frac{x}{a} = \text{Cte}$, por lo que:

$$x = a t + \text{Cte}$$

es decir, es una onda de presión (depresión) de velocidad a desplazándose en el sentido de las x crecientes; se la llama *Golpe de ariete directo o sobrepresión*.

c) La presión $f(t + \frac{x}{a})$ variable con x y con t es una onda de presión de velocidad a , desplazándose en el sentido de las x decrecientes; se le llama *contragolpe o depresión*.

CASOS PARTICULARES DE LAS ECUACIONES DE ALLIEVI

En la conducción puede existir, a veces, una sola clase de ondas, o las F , o las f . Si suponemos que la que permanece sólo es la F , se puede poner,

$$h_x = h_{tx} = h_{0x} + F(t - \frac{x}{a}) ; \quad h_{tx} - h_{0x} = h = F(t - \frac{x}{a})$$

$$u_x = u_{tx} = u_0 + \frac{g}{a} F(t - \frac{x}{a}) ; \quad u_{tx} - u_0 = u = \frac{g}{a} F(t - \frac{x}{a})$$

Eliminando $F(t - \frac{x}{a})$ entre las dos anteriores se obtiene,

$$\frac{h}{u} = \frac{a}{g} ; \quad h = \frac{a}{g} u = \frac{p}{a} \quad p = a u$$

Si la onda que prevalece es la $f(t + \frac{x}{a})$, se encuentra,

$$h = - \frac{a}{g} u = - \frac{p}{a} ; \quad p = - a u$$

En ambos casos, la variación de la altura de presión h , al paso de la onda por una sección, viene determinada por estas relaciones simples respecto a la variación de velocidad u en la misma sección, pudiéndose poner que,

h es del mismo signo que u para la onda F

h es de signo opuesto al de u para la onda f

Para el caso general en el que coexistan las ondas F y f , no es tan sencillo encontrar una relación entre h y u .

Condiciones en los límites.- Mientras el movimiento del fluido no sea perturbado, las funciones F y f serán nulas. A partir del instante, $t = 0$, es decir, desde el comienzo de la maniobra de apertura o

cierre, las ecuaciones de Allievi vendrán caracterizadas por las condiciones en los límites, es decir,

- En la embocadura, $x = L$, la presión es invariable, $h = 0$,

- En una sección inmediata a la válvula, $x = 0$, la ley de variación de velocidades viene impuesta por las condiciones de salida.

- Si el cierre es instantáneo, la F es una recta horizontal, $F = Cte$, es decir,

$$\left(t - \frac{x}{a}\right) = Cte \quad ; \quad x = a t + Cte = \left| \text{Para, } t = 0 \right| = Cte$$

Las condiciones en la embocadura son, $x = L$, por lo que,

$$h = 0 = F\left(t - \frac{L}{a}\right) + f\left(t + \frac{L}{a}\right) \quad ; \quad F\left(t - \frac{L}{a}\right) = -f\left(t + \frac{L}{a}\right)$$

que se verifica para cualquier valor de t ; por lo tanto, puede reemplazarse, para, $X = L$, por,

$$t = t - \frac{L - x}{a}$$

quedando,

$$F\left(t - \frac{L - x}{a} - \frac{L}{a}\right) + f\left(t - \frac{L - x}{a} + \frac{L}{a}\right) = 0$$

Para los cálculos interesa escribir la onda reflejada $f\left(t + \frac{x}{a}\right)$ en la forma:

$$F\left(t - \frac{2L - x}{a} - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) = 0$$

$$f\left(t + \frac{x}{a}\right) = -F\left(t - \frac{2L - x}{a} - \frac{x}{a}\right) = -F\left(t - \frac{2(L - x)}{a}\right)$$

la cual expresa que su valor es igual y de signo contrario, al que tomó la onda directa, $\frac{2(L - x)}{a}$, segundos antes del instante considerado.

Se dice que una sección está en *golpe de ariete directo*, cuando aún no ha llegado a ella la onda reflejada; y se dice que está en *contragolpe*, cuando ya ha pasado por ella. En la sección de la válvula, la fase de golpe directo tiene una duración de valor,

$$= \frac{2L}{a}$$

Ya hemos visto que durante el golpe de ariete directo se tiene,

$$h = F\left(t - \frac{x}{a}\right) = \left| u = -\frac{g}{a} F\left(t - \frac{x}{a}\right) \right| = -\frac{a}{g} u$$

Si la válvula se cierra por completo, en la fase de golpe directo se verifica, $-u = u_0$, obteniéndose,

$$h = \frac{a}{g} u_0 ; \quad p = a u_0$$

que es el máximo valor de la sobrepresión que puede ocurrir en una tubería, ya que, si la detención se produce después de iniciada la fase de contragolpe, p disminuiría por efecto de la onda reflejada.

Asimismo, las ondas se reflejan total o parcialmente en toda aquella sección en donde las características de la conducción se modifiquen, bien en su diámetro, espesor, etc. Estos fenómenos se estudian introduciendo lo que se conoce como *impedancia* Z , definida para cada punto en la forma,

$$\frac{p}{q} = Z = \frac{h}{S u} = \frac{g h}{S u}$$

Como en general, $\frac{h}{u} = \frac{a}{g} = \frac{F + f}{F - f}$, la expresión para la impedancia quedará en la forma,

$$Z = \frac{p}{q} = \frac{g}{S} \frac{h}{u} = \frac{g}{S} \frac{a}{g} \frac{F + f}{F - f} = \frac{a}{S} \frac{F(t - \frac{x}{a}) + f(t + \frac{x}{a})}{F(t - \frac{x}{a}) - f(t + \frac{x}{a})}$$

en donde, Z , puede ser real o compleja

Z , será nula para una sección abierta sobre un medio infinito

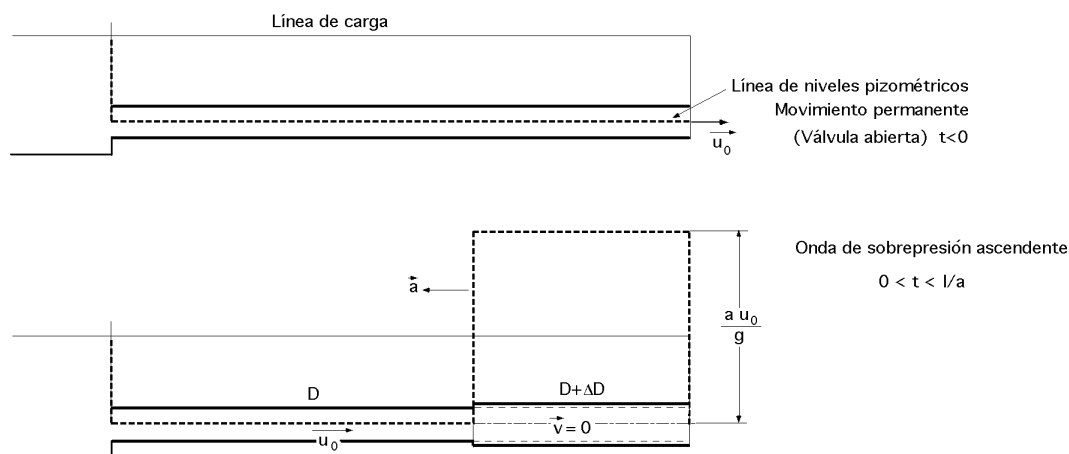
Z , será para una sección cerrada, (tubería con fondo rígido)

Para que no exista reflexión es necesario que la impedancia sea igual a,

$$Z = \frac{a}{S}$$

que se conoce como *impedancia iterativa*, lo cual implica que sólo se tenga en cuenta o bien la F , o bien la f , pero sólo una de las dos.

A continuación se presenta gráficamente el fenómeno del golpe de ariete, con diversas fases del mismo:



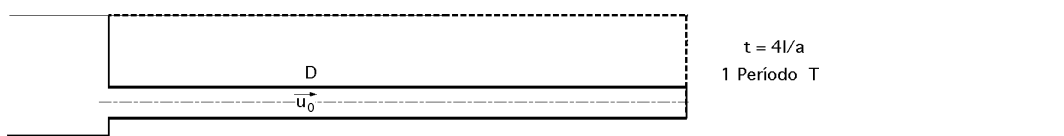
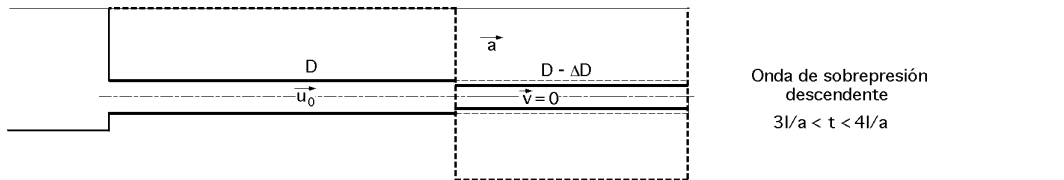
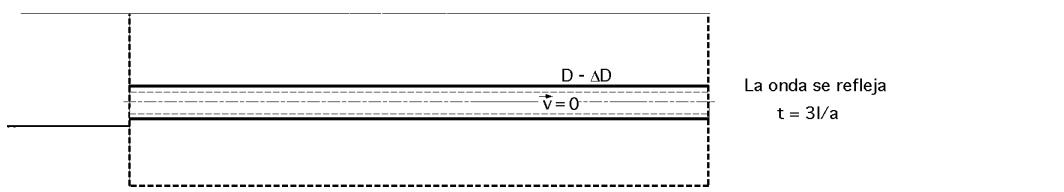
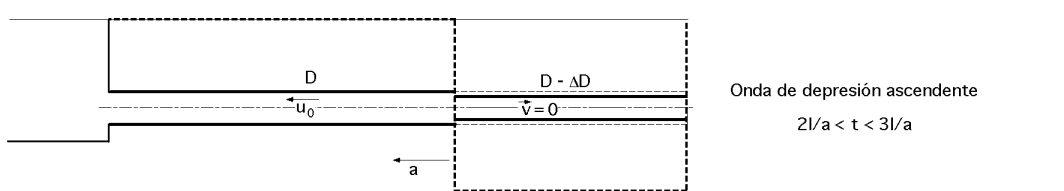
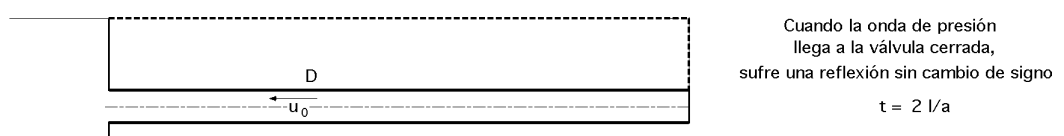
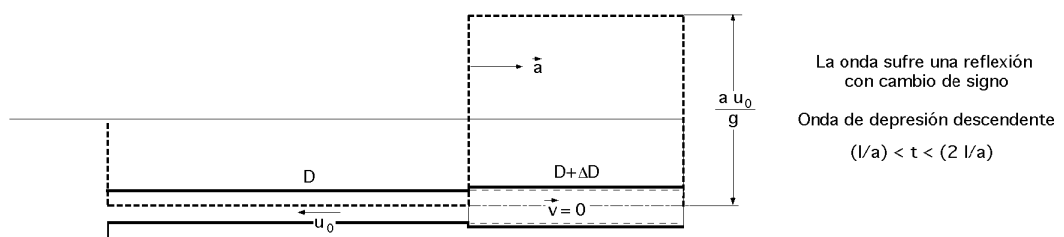
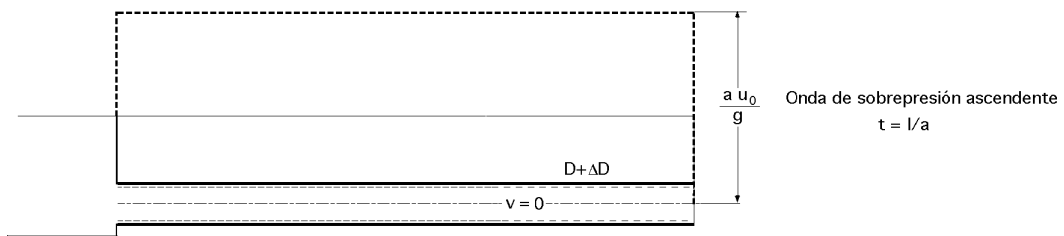


Fig XI.6.- Esquema del golpe de ariete directo en una conducción cilíndrica

XI.6.- CALCULO GRÁFICO DEL ESPESOR DE TUBERÍAS

Una vez hallado el valor de la sobrepresión h , ya sea por la fórmula de Micheaud para maniobra lenta, dada por,

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{a}{g} u \bar{t}$$

o por la de Allievi, para maniobra rápida,

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{a u}{g}$$

se puede hallar gráficamente el espesor de la tubería.

Como, $\frac{p}{\rho g} = \frac{p D}{2 e}$; $p = \frac{2 e}{D}$; $\frac{p}{\rho g} = \frac{2 e}{D} = h_1$

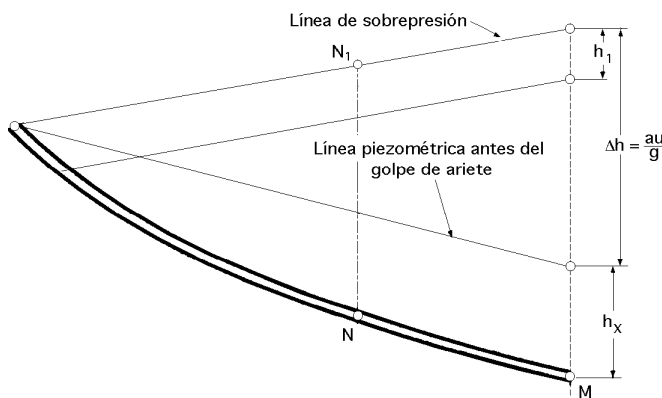


Fig XI.7

Si se considera el valor de, $e = 1$ mm, Fig XI.7, para un determinado valor de D , se habrá calculado h_1 .

Como en M , la presión total vale,

$$h = h_x + h$$

resulta que, por contener h a h_1 un número n de veces, la tubería debe tener un espesor de n mm.

En un punto cualquiera N , lo mismo, es decir, las n' veces que h_1 estará contenido en (NN_1) ; sin embargo, a pesar de ello, el espesor se uniformiza para toda la conducción, tomando el más desfavorable, añadiéndole una pequeña cantidad k , por corrosión, del orden de un 1% a un 2%, quedando finalmente la expresión del espesor en la forma,

$$e = \frac{p D}{2} + k$$

XI.8.- MÉTODO GRÁFICO DE SCHNYDER-BERGERON

El método gráfico de Snyder-Bergeron permite tratar y resolver problemas de golpe de ariete en forma gráfica.

Supongamos un observador situado en la sección M_i de la conducción; en el instante i encontrará en dicha sección una velocidad u_i y una presión p_i que definen el estado de la tubería en ese instante y sección.

Las correspondientes ecuaciones de Allievi son,

$$h_i - h_0 = F_i - f_i$$

$$u_i - u_0 = \frac{g}{a} (F_i - f_i) ; \quad \frac{q_i - q_0}{a} = \frac{g}{a} (F_i - f_i)$$

quedando h_i y q_i definidas, si se conocen en ese instante las funciones F_i y f_i . Estas dos ecuaciones tienen cuatro incógnitas, q_i, h_i, F_i, f_i .

Consideremos ahora un observador que, en vez de estar fijo en la sección M_i , se desplaza por la conducción con una velocidad igual a la celeridad a de las ondas elásticas, en el sentido de las x positivas y que parte, en el instante i de la sección M_i , llegando a otra sección M en el instante t en el que las magnitudes h y u vienen dadas por,

$$h - h_0 = F_i - f ; \quad u - u_0 = \frac{g}{a} (F_i - f)$$

lo cual se explica porque en estas ecuaciones, la función F_i mantiene el mismo valor por cuanto el observador y la onda F_i se desplazan a la misma velocidad y en el mismo sentido, por lo que el observador verá una onda F_i que no cambia, y una onda f que se desplaza con relación a él con una velocidad relativa, $2a$, en el sentido de las x negativas.

Eliminando F_i, f y f_i entre estas ecuaciones, se obtiene,

$$h - h_i = - \frac{a}{g} (u - u_i) = - \frac{a}{g} \frac{q - q_i}{a}$$

que es la relación que se quería encontrar entre h y q ; está representada por una recta que pasa por el punto M_i de la Fig XI.8, correspondiente al tiempo i , en la sección M_i .

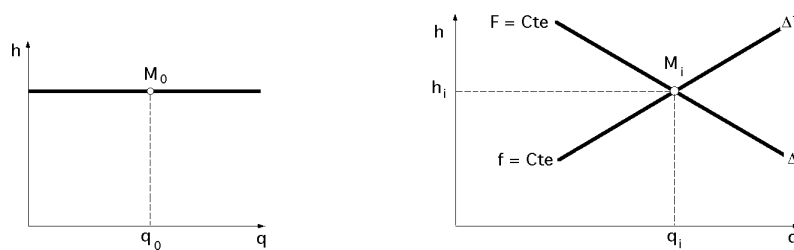


Fig XI.8

Su coeficiente angular es, $-\frac{a}{g}$

La recta es la curva característica buscada, pero sólo es válida para un observador móvil ligado a la onda F .

Se puede considerar, en la misma forma, a otro observador que se desplace por la conducción en el sentido de las x negativas, con velocidad a .

Para él, la onda f_i mantendrá constante su valor, encontrándose, después de eliminar, F, F_i y f_i

$$h - h_i = \frac{a}{g} (u - u_i) = \frac{a}{g} \frac{q - q_i}{a}$$

recta β , cuya pendiente es $\frac{a}{g}$ y que a su vez pasa por el punto M_i de la Fig XI.8; ésta será la característica relativa al observador móvil ligado a la onda f .

Ambas rectas, α y β , son simétricas con relación a la horizontal que pasa por M_i .

Si se hubiese considerado el caso particular en el que no existiese la onda f , para el primer observador ligado a la onda F sería fácil comprobar que tanto h como q permanecen constantes e iguales, respectivamente, a h_i y q_i , cumpliéndose en el punto M_i que,

$$h - h_0 = h_i - h_0 = F_i = Cte = h$$

$$\frac{q - q_0}{a} = \frac{q_i - q_0}{a} = \frac{g}{a} F_i = Cte = \frac{q}{a}$$

que ya hemos estudiado anteriormente.

El método gráfico de Schnyder-Bergeron es mucho más completo, por cuanto considera al tiempo las dos clases de ondas.

DESARROLLO DEL MÉTODO.- Hemos visto que, para el observador móvil que se desplaza a una velocidad igual a la celeridad a de las ondas, la curva característica en un punto de la conducción en régimen variado es una recta, y su coeficiente angular no depende más que del sentido de desplazamiento del observador; para trazar esta recta es suficiente conocer uno de sus puntos, por ejemplo, el correspondiente al tiempo y lugar de partida. Si el observador parte de M_i , en el tiempo t_i , desplazándose a la velocidad a , comprueba que en cualquier punto de la conducción, la altura piezométrica h y el caudal q , en el momento en que él pase por un punto determinado, están relacionados entre si por la misma ley lineal que no depende más que de las constantes a y g de la conducción, del régimen h_i y q_i inicial, y del sentido de desplazamiento de la onda elástica.

Despejando f_i y F_i en las ecuaciones,

$$h_i - h_0 = F_i + f_i \qquad 2 F_i = h_i - h_0 + \frac{a}{g} (q_i - q)$$

$$\frac{q_i - q_0}{a} = \frac{g}{a} (F_i - f_i) \qquad 2 f_i = h_i - h_0 - \frac{a}{g} (q_i - q)$$

Las rectas α y β son las rectas características relativas a los dos observadores, y pasan por el punto M .

Analicemos mediante algunos ejemplos, como se pueden resolver los problemas de golpe de ariete.

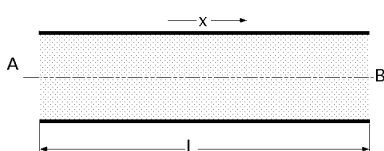


Fig XI.9

Supongamos una conducción cilíndrica AB de longitud L , Fig XI.9, en la que la altura piezométrica en los extremos proporciona dos ecuaciones, función del caudal q , que representaremos por las curvas características correspondientes a dichos extremos A y B

Supondremos que los valores de h y q en la extremidad A son conocidos en el instante t , siendo el punto representativo correspondiente el A_t .

Un observador parte de A en el instante t , con velocidad positiva \bar{a} , y llega a B en el instante $t + \frac{L}{a}$; durante el recorrido atraviesa todas las secciones de la conducción y los regímenes que va encontrando dicho observador, en cada sección, se hallan sobre la recta D, Fig XI.10.

El régimen correspondiente a la sección B se encontrará pues, necesariamente, sobre esta recta y al mismo tiempo sobre la curva característica ψ_B siendo su intersección el punto $B_{\{t+(L/a)\}}$.

Si ahora parte el observador de la sección B, en el instante $t + \frac{L}{a}$, un observador con velocidad $-a$, llegará al punto A en el instante correspondiente a $t + \frac{2L}{a}$ y el punto representativo será la intersección de Δ' con A y así sucesivamente.

De esta forma es posible determinar el punto de funcionamiento en los dos extremos de la conducción. Como al observador se le puede hacer partir de cualquier sección, donde hay que conocer el

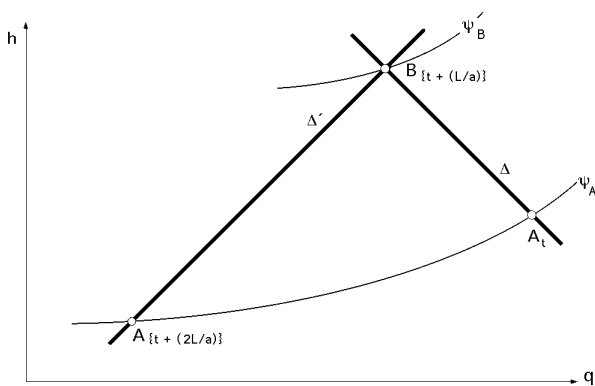


Fig XI.10

instante t de partida, el caudal y la presión, se estará en condiciones de estudiar el fenómeno en cualquier otro punto de la conducción y en cualquier instante.

Hemos supuesto que las curvas características ψ_A y ψ_B son fijas, pero esta circunstancia no es el caso general, por cuanto estas curvas son, en realidad, las características de los accesorios fijados en las extremidades de la conducción, pudiéndose corresponder, por ejemplo, con,

- a) Una conducción que desagua en un gran depósito, $h = Cte$.
- b) Una conducción cerrada, $u = 0$
- c) Una conducción que se abre, siguiendo una ley función del tiempo.
- d) Una bomba centrífuga en una extremidad de la conducción, definida por la ley que relaciona el caudal con la altura manométrica y el número de rpm de la bomba, (curva característica de la bomba).

En una conducción de longitud L en la que \bar{a} es la celeridad, se puede adoptar $\frac{L}{a}$ como unidad de tiempos, siendo los demás múltiplos de $\frac{L}{a}$; cuando la conducción esté constituida por varias tuberías en serie, de longitudes L_1, L_2, L_3, \dots , etc., Fig XI.11, para las que los tiempos,

$$\frac{L_1}{a_1}, \frac{L_2}{a_2}, \frac{L_3}{a_3}, \dots$$

serían diferentes, se tomará como unidad de tiempos un divisor común a los diversos valores $\frac{L}{a}$.

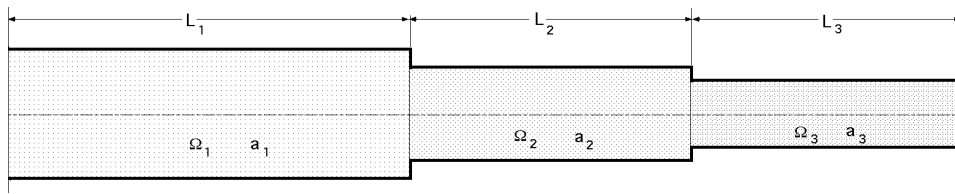


Fig XI.11.- Conducción con varias tuberías en serie

Una conducción en serie se dice es de característica múltiple, cuando el estudio se hace considerando varios observadores móviles, haciendo cada uno el recorrido correspondiente a una sola tubería de diámetro constante.

Cuando dos observadores se encuentren en una extremidad común, correspondiente a dos tuberías consecutivas, deberán observar necesariamente el mismo caudal q y la misma altura h .

EJEMPLO DE CONSTRUCCIÓN GRÁFICA.- Supongamos la instalación de la Fig XI.12 en la que el depósito es lo suficientemente grande como para que en A la altura h sea siempre igual a h_0 .

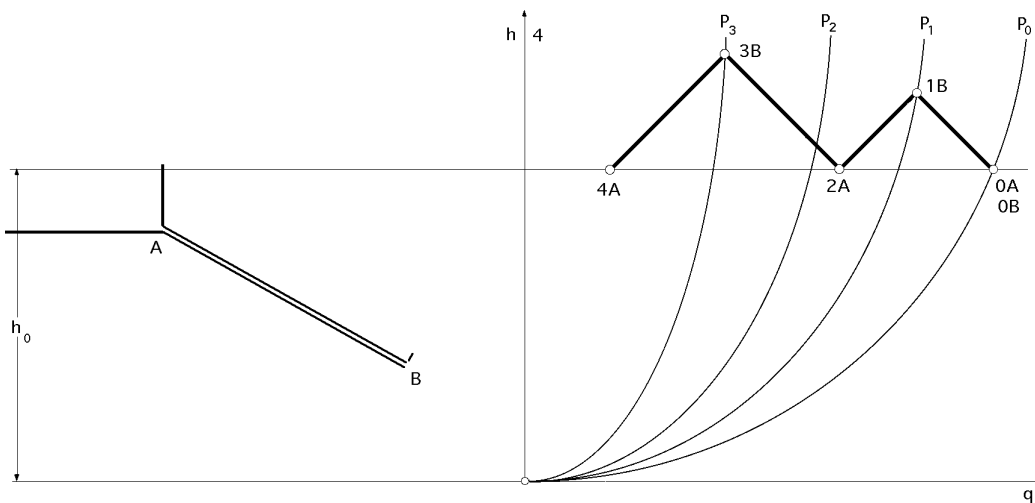


Fig XI.12

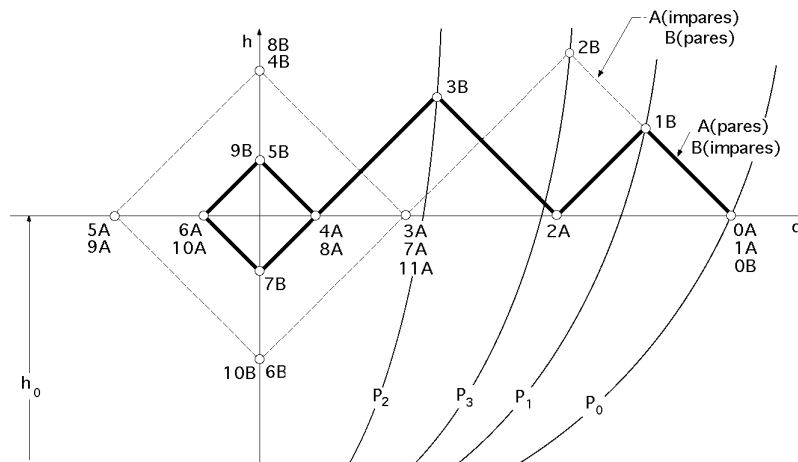


Fig XI.13

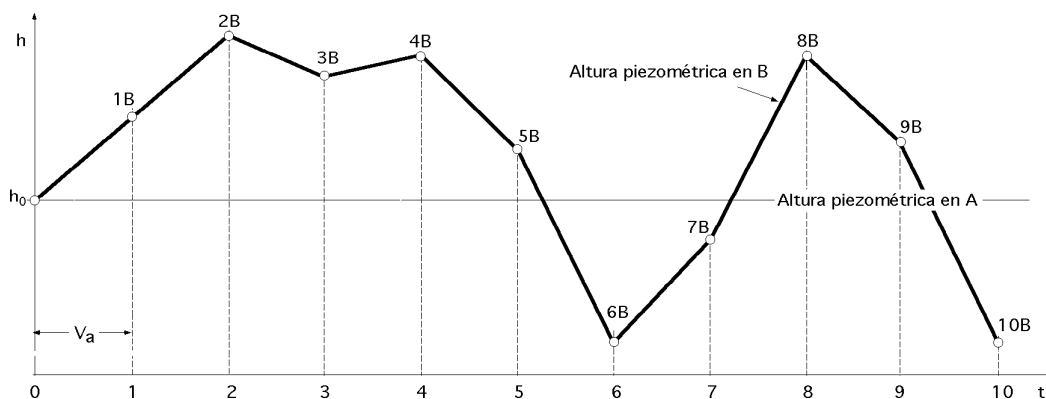


Fig XI.14

Despreciaremos las pérdidas de carga.

Si q_0 es el caudal inicial, contado positivamente en el sentido de las x , es decir, de A a B, la curva característica del orificio es una parábola, pudiéndose trazar las correspondientes al punto B en los tiempos 0, 1, 2, 3..., en donde se ha considerado la unidad de tiempos igual a $\frac{L}{a}$, y que llamaremos $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$, etc.

En el punto B, desde que la válvula se cerró en el tiempo, $t = 0$, y la onda ha recorrido el tramo (BA) de la conducción, se ha reflejado en el depósito, y vuelve según (AB) de nuevo a la válvula, ha transcurrido un tiempo igual a 4, y el caudal será nulo. En el punto A no habrá ninguna modificación en el movimiento hasta el tiempo 1.

Imaginemos que el observador parte de A en el tiempo 0, punto O_A , y se dirige hacia B. Su característica es la recta (pendiente negativa), que pasa por O_A . El observador llega a B en el instante 1, siendo el punto de funcionamiento el 1_B sobre la parábola P_1 .

Si el observador vuelve sobre sus pasos, su característica será la recta (pendiente positiva), que pasará por el punto 1_B , llegará al punto A en el tiempo 2, siendo el punto de funcionamiento el 2_A sobre la recta de cota h_0 .

En forma análoga se obtendrían los puntos 3_B y 4_A .

Pero a partir del tiempo 4, en que la onda llega a B y se refleja por estar la válvula cerrada, la característica será la recta, $q = 0$, obteniéndose los puntos $5_B, 6_A, 7_B$ y 8_A , de forma que los puntos siguientes $9_B, 10_A, 11_B$ y 12_A , y sucesivos, coincidirán con los $5_B, 6_A, 7_B$ y 8_A , obteniéndose así los regímenes en A para los tiempos pares, y en B para los impares.

Para hacerlo a la inversa, es decir, en A los regímenes para tiempos impares y en B para los pares, el observador partirá de A en el tiempo 1, punto 1_A , hasta que la perturbación llegue al punto B en el tiempo 2, punto 2_B así sucesivamente.

En la gráfica (h,t) de la Fig XI.14, se ha representado la variación en el punto B de la altura piezométrica h , en función del tiempo, y en las Fig XI.15 y 16, las variaciones de caudal en los puntos A y B, respectivamente.

Estas gráficas se pueden construir y utilizar sin dificultad, para determinar, bien el régimen de funcionamiento en los instantes intermedios, bien en dos puntos cualquiera situados entre A y B.

El método es general y permite estudiar, p.e., el problema considerando las pérdidas de carga en la conducción, que contribuyen a amortiguar bastante rápidamente las oscilaciones de caudal y presión, pero por el contrario, complicarían bastante el trazado de las gráficas precedentes.

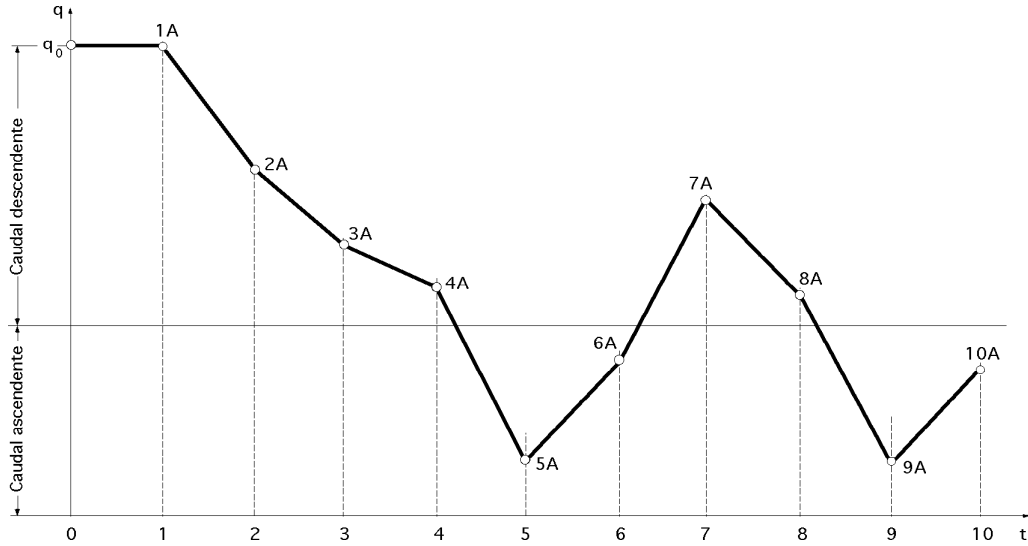


Fig XI.15

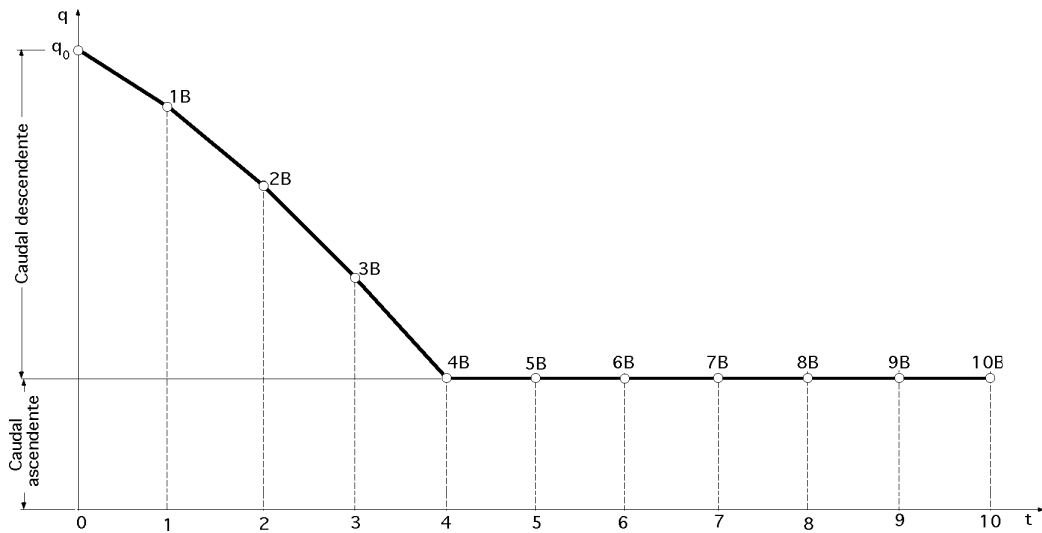


Fig XI.16

INFLUENCIA DE LAS PERDIDAS DE CARGA.- Las pérdidas de carga, uniformemente repartidas a lo largo del conducto, no se pueden determinar exactamente en forma gráfica; lo que se suele hacer es suponerlas localizadas en una serie de puntos determinados, por ejemplo en O_1, O_2, O_3, O_4 , etc., igualmente repartidos a lo largo del conducto. En la práctica, el resultado obtenido se aproxima lo suficiente a la realidad si se las supone localizadas en un solo punto; en nuestro ejemplo, en el O_1 a la entrada de la conducción.

En estas condiciones, el estudio se hace igual que si se despreciasen las pérdidas de carga, con la sola diferencia de que la carga no sea, $H = H_0 = Cte$, sino que se reemplace por otra de la forma,

$$H = H_0 - k Q^2$$

que en la Fig XI.17 viene representada por la parábola, que representa la pérdida de carga a lo largo de la conducción.

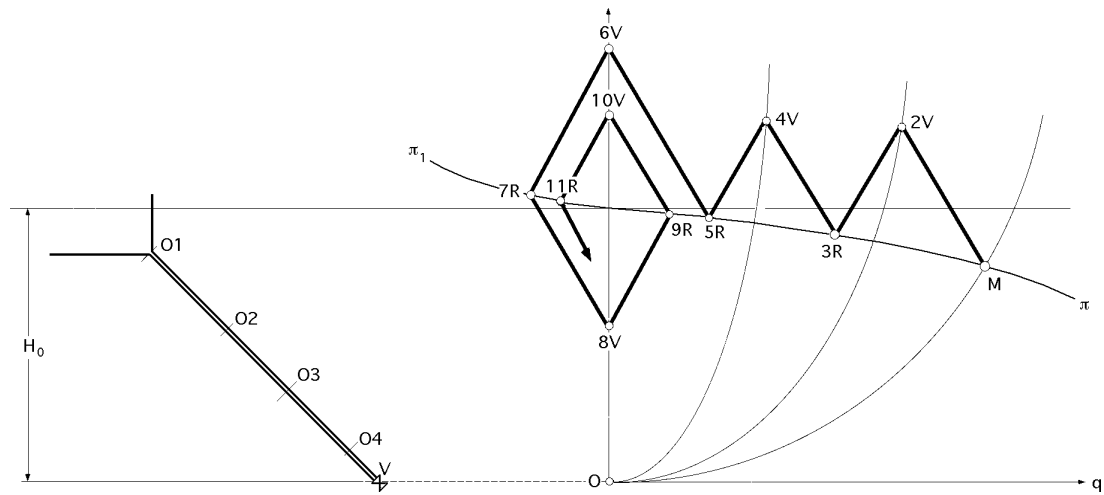


Fig XI.17

En el ejemplo elegido, después del tiempo 6, es decir, cuando el caudal comienza a tomar valores negativos, la presión delante del diafragma O_1 que representa la pérdida de carga de la conducción, es superior a la presión en el depósito, (parábola π_1).

El esquema se va trazando a partir del cierre total de la válvula que produce un decrecimiento regular del golpe de ariete y, por consiguiente, del amortiguamiento que las pérdidas de carga engendran.

XII.- FLUJO COMPRESIBLE

XII.1.- RELACIONES ENTRE EL COEFICIENTE ADIABÁTICO Y LA VELOCIDAD DEL SONIDO EN UN FLUIDO COMPRESIBLE

Si en un fluido se origina una perturbación, la velocidad de avance del frente de onda correspondiente es proporcional a la raíz cuadrada del cociente entre el módulo de compresibilidad E del fluido y su densidad ρ .

En efecto, de acuerdo con la Fig XII.1, se puede suponer que el émbolo que cierra un cilindro está en equilibrio con el fluido contenido en el mismo, situado en A a la presión p . Al originarse una perturbación, empujando al émbolo mediante un incremento de presión dp , durante un tiempo dt , se desplaza a la velocidad \vec{u} un cierto espacio, $u dt$, mientras que el frente de onda elástico y longitudinal originado por la perturbación en ese tiempo se habrá situado en la posición f a la velocidad \vec{c}_s .

En la zona B del cilindro, todavía sin perturbar, se conserva la presión general que existía antes de la perturbación p .

Igualando la cantidad de movimiento al impulso mecánico se tiene,

Variación de la cantidad de movimiento,

$$V u = (c_s dt S) u$$

Impulso mecánico,

$$F dt = dp S dt$$

$$c_s dt S u = S dt dp \quad ; \quad dp = c_s u$$

A su vez, como el módulo de compresibilidad E es la relación entre el esfuerzo unitario dp y la disminución unitaria de volumen, dv/v , de la forma,

$$E = \frac{dp}{\frac{dv}{v}} = \frac{dp}{\frac{u dt S}{c_s dt S}} = \frac{c_s}{u} dp \quad ; \quad dp = \frac{u}{c_s} E$$

que sustituida en la anterior, permite obtener,

$$c_s u = \frac{u}{c_s} E \quad c_s = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

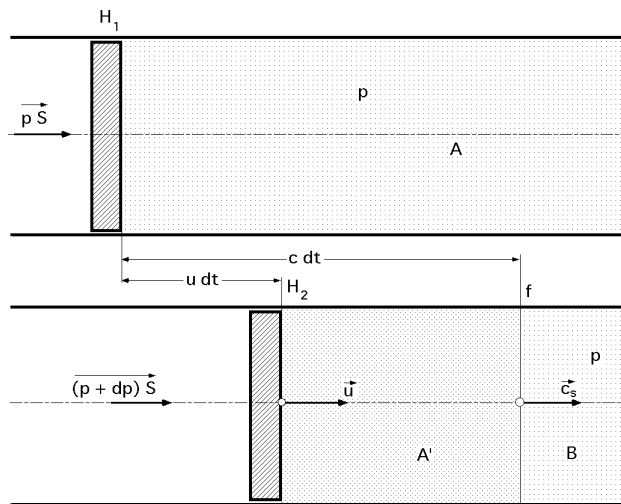


Fig XII.1.- Perturbación en un conducto

Si se supone que la compresión es adiabática, el factor de compresibilidad k es,

$$E = \frac{1}{k} = -v \left(\frac{p}{v} \right)_Q = \left| \begin{array}{l} \text{Teorema de Reech} \\ \left(\frac{p}{v} \right)_Q = \left(\frac{p}{v} \right)_T \end{array} \right| = -v \left(\frac{p}{v} \right)_T$$

en la que el signo (-) es consecuencia de que, al tratarse de una compresión, un aumento de presión dp se corresponde con una disminución de volumen dv .

La expresión general de la velocidad del sonido en un fluido cualquiera c_s es,

$$c_s = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \left| \frac{1}{\rho g} \right| = \sqrt{-v^2 g \left(\frac{p}{v} \right)_T} = \left| \begin{array}{l} \text{Para un gas perfecto} \\ p v = R T \quad ; \quad \left(\frac{p}{v} \right)_T = - \frac{R T}{v^2} \end{array} \right| = \sqrt{g R T} = \sqrt{g p v} = \sqrt{c_p (-1) g T}$$

siendo c_p el calor específico del fluido en cuestión a presión constante. A su vez,

$$c_s = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \left| E = -v \left(\frac{p}{v} \right)_Q \right| = \sqrt{-v \left(\frac{p}{v} \right)_Q} = \left| \left(\frac{p}{v} \right)_Q = \left(\frac{p}{v} \right)_Q \left(\frac{v}{v} \right)_Q \right| = \sqrt{-v \left(\frac{p}{v} \right)_Q \left(\frac{v}{v} \right)_Q} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} = \frac{1}{v g} \\ \left(\frac{-p}{v}\right)_Q = -\frac{1}{g} \frac{1}{v^2} \end{array} \right| = \sqrt{-\frac{v}{g} \left(\frac{-p}{v}\right)_Q \left(-\frac{1}{g} \frac{1}{v^2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{g v} \left(\frac{-p}{v}\right)_Q} = \sqrt{\left(\frac{-p}{v}\right)_Q}$$

en la que se ha tenido en cuenta que, $v = 1/g$, que permite calcular la velocidad del sonido c_s en un fluido compresible, cuando a éste se le somete a una variación de presión dp .

Se sabe que la velocidad \bar{c}_1 de derrame de un fluido es de la forma,

$$c_1 = \sqrt{2 g T_{circ}} = \sqrt{2 g \frac{-1}{-1} p_0 v_0 \left\{1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{-1}\right\}}$$

en la que p_0 y v_0 , son las condiciones iniciales del fluido sin perturbar, que se corresponden con las de un punto de estancamiento por ser, $c_0 = 0$.

La velocidad máxima es,

$$c_{1 \text{ máx}} = \sqrt{2 g \frac{-1}{-1} p_0 v_0} = \sqrt{2 g \frac{-1}{-1} R T_0} = c_{s0} \sqrt{\frac{2}{-1}}$$

en la que c_{s0} es la velocidad del sonido en las condiciones de estancamiento.

XII.2.- FORMULACIÓN DE HUGONIOT

En una tobera se cumple,

$$i_0 - i_1 = \frac{c_1^2 - c_0^2}{2 g} = c_p (T_0 - T_1)$$

siendo i_0 la entalpía del fluido en el estado inicial, i_1 la entalpía del fluido a la salida de la tobera, T_0 la temperatura absoluta del fluido en el estado inicial y T_1 la temperatura del fluido a la salida de la tobera.

Al estudiar la circulación de un fluido por una tobera, se supone que al ser un proceso muy rápido, éste es adiabático, por lo que el fluido no intercambia calor con el medio exterior. De acuerdo con la Fig XII.2, la ecuación anterior se puede poner en su forma diferencial, y obtener el siguiente sistema de ecuaciones en di ,

$$\begin{array}{l} -di = \frac{1}{2 g} d(c^2) = \frac{c dc}{g} \\ dQ = du + p dv = 0, y \end{array} \quad \begin{array}{l} i = u + p v \\ di = du + p dv + v dp \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ di = v dp \end{array} \quad \frac{dc}{c g} = -\frac{v dp}{c^2}$$

que indica que un aumento de velocidad origina una disminución de presión, y viceversa.

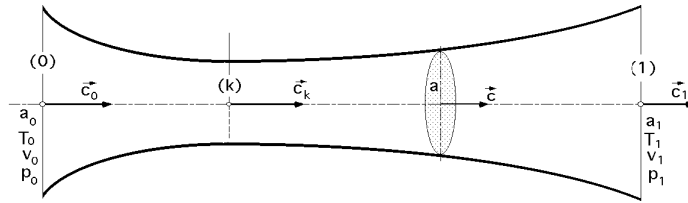


Fig XII.2.- Tobera Laval

Diferenciando la ecuación de continuidad $G = a c \rho = \frac{a c}{v} = Cte$, en la que ρ es el peso específico del fluido y a una sección cualquiera, se obtiene,

$$dG = da c \rho + a dc \rho + a c d \rho = 0$$

$$\frac{da}{a} + \frac{dc}{c} + \frac{d \rho}{\rho} = 0$$

y como, $\rho = \frac{1}{v}$ $d \rho = - \frac{dv}{v^2}$, se obtiene:

$$\frac{da}{a} + \frac{dc}{c} - \frac{dv}{v} = 0 \quad ; \quad \frac{da}{a} + \frac{dc}{c} - \frac{dv}{v} = 0$$

Por ser un proceso adiabático,

$$p v = Cte \quad ; \quad p v^{-1} dv + dp v = 0 \quad ; \quad p dv + v dp = 0 \quad ; \quad \frac{dv}{v} = - \frac{dp}{p}$$

que sustituida en la anterior permite obtener,

$$\frac{da}{a} + \frac{dc}{c} + \frac{dp}{p} = \left| \frac{dc}{c} = - \frac{g v dp}{c^2} \right| = \frac{da}{a} - \frac{g v dp}{c^2} + \frac{dp}{p} = 0 \quad \frac{da}{a} = \left(\frac{g v}{c^2} - \frac{1}{p} \right) dp$$

En la garganta de la tobera, la sección a es mínima y, por lo tanto, $da = 0$, por lo que de la ecuación anterior se deduce,

$$\frac{g v}{c^2} = \frac{1}{p} \quad c = \sqrt{g p v}$$

que es idéntica a la expresión encontrada para c_s por lo que si la tobera funciona en régimen de diseño, en su garganta la velocidad del fluido es la del sonido en esas condiciones, obteniéndose,

$$\frac{da}{a} = dp \left(\frac{g v}{c^2} - \frac{1}{p} \right) = g v dp \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_s^2} \right)$$

Las variaciones de la velocidad y sección vienen dadas por,

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} = \frac{g v dp}{c^2} \quad g v dp = - c dc$$

$$\frac{da}{a} = c \, dc \left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{1}{c^2} \right) = \left(\frac{c^2}{c_s^2} - 1 \right) \frac{dc}{c} = (M^2 - 1) \frac{dc}{c}$$

siendo, $M = \frac{c}{c_s}$, el número de Mach.

La ecuación así obtenida se conoce como fórmula de Hugoniot, y de ella se deduce que,

a) Si, $M < 1$, resulta que, da/a , es de signo contrario a, dc/c ; como, dc/c , es siempre creciente, da/a , tiene que disminuir y, por lo tanto, en la parte convergente de la tobera, el número de Mach será siempre menor que la unidad, $M < 1$, Régimen subsónico.

b) Si, $M = 1$, resulta que, $da = 0$, que se corresponde con la sección mínima de la tobera, es decir, su garganta. {Régimen sónico.

c) Si, $M > 1$, resulta que, da/a , es del mismo signo que, dc/c , y por lo tanto, como dc/c sigue creciendo, da/a , también aumentará, y en consecuencia, en la parte divergente de la tobera, en condiciones de funcionamiento de diseño, el número de Mach es mayor que la unidad, $M > 1$, Régimen supersónico.

A su vez, si la ecuación,

$$\frac{dc}{c} = \frac{dv}{v} - \frac{da}{a}$$

se sustituye en la fórmula de Hugoniot, se obtienen las ecuaciones,

$$\frac{da}{a} = (M^2 - 1) \left(\frac{dv}{v} - \frac{da}{a} \right) \quad ; \quad \frac{da}{a} M^2 = (M^2 - 1) \frac{dv}{v} \quad ; \quad \frac{da}{a} = \left(1 - \frac{1}{M^2} \right) \frac{dv}{v}$$

$$\frac{dc}{c} = \frac{dv}{v} - (M^2 - 1) \frac{dc}{c} \quad ; \quad \frac{dc}{c} M^2 = \frac{dv}{v}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que,

$$\frac{da}{a} + \frac{dc}{c} + \frac{1}{p} \frac{dp}{p} = 0$$

resulta,

$$(M^2 - 1) \frac{dc}{c} + \frac{dc}{c} + \frac{1}{p} \frac{dp}{p} = 0 \quad ; \quad \frac{dp}{p} = - M^2 \frac{dc}{c}$$

por lo que para cualquier valor del número de Mach, al aumentar $\frac{dc}{c}$ que $\frac{dp}{p}$ decrece, produciéndose, por lo tanto, una caída de presión a lo largo de la tobera, a medida que el fluido avanza por la misma.

XII.3.- DERRAME POR TOBERAS

En las toberas se produce una transformación de la entalpía del fluido en energía cinética, según la ley de Grashoff,

$$i_0 - i_1 = \frac{1}{2g} (c_1^2 - c_0^2) \quad ; \quad c_0 = 0 \quad ; \quad c_1 = \sqrt{2g(i_0 - i_1)} = 91,48 \sqrt{i_0 - i_1}$$

con, c_1 en m/seg, y $i_0 - i_1$, en Kcal/kg

La caída de entalpía se puede leer en un diagrama entalpía-entropía, conociendo los estados inicial y final de la transformación en la tobera. Los datos del punto O son conocidos; la transformación reversible finaliza en el punto 1, cuando se alcanza la salida de la tobera, a la presión p_1 , por lo que este punto 1 quedará también perfectamente determinado; se calculan las entalpías correspondientes $i_0 - i_1$, se sustituyen en la fórmula anterior y se calcula la velocidad c_1 de salida.

Sin embargo, la circulación del fluido en la tobera se realiza consumiendo un trabajo de rozamiento, siendo el proceso irreversible; el punto final de la transformación, en las condiciones p_1 de presión, será el punto 1', Fig XII.3.

La nueva ecuación para la velocidad de salida $c_{1'}$ será de la forma,

$$c_{1'} = 91,48 \sqrt{i_0 - i_{1'}}$$

inferior a c_1 .

Para hallar el punto 1' se define un coeficiente de reducción de velocidad ϕ , ya que al ser, $c_1 > c_{1'}$, resulta que, $c_{1'} = \phi c_1$, y si se conoce c_1 mediante el proceso isentrópico, se puede aplicar el coeficiente ϕ de valor,

$$\phi = 0,92 \text{ para toberas cortas}$$

$$\phi = 0,975 \text{ para toberas largas}$$

y obtener, $c_{1'} = \phi c_1$; con este dato se calcula,

$$i_0 - i_{1'} = \frac{c_{1'}^2}{91,48^2}$$

y conocido $i_{1'}$ se halla sobre el diagrama (i,S) citado, la posición exacta del punto 1'.

En el proceso irreversible, la pérdida de fuerza viva viene dada por el área (m11'n m) del diagrama (i,S), Fig XII.3, es decir,

$$\text{área (m 1 1' n m)} = \frac{c_1^2 - c_{1'}^2}{2g} = i_{1'} - i_1$$

y es el calor necesario para ir del punto 1 al punto 1' siendo, por lo tanto, una energía que no se aprovecha.

El trabajo de rozamiento T_{Roz} viene dado por el área (0mn1'0), igual a,

$$T_{\text{Roz}} = \text{Pérdida de energía cinética} + \text{área (011'0)} = T_1 + \text{área (011'0)}$$

y por lo tanto, la pérdida de energía cinética T_1 es menor que el trabajo de rozamiento T_{Roz} , por lo

que de este trabajo se recupera una parte representada por el área (011'0) que se transmite a una temperatura mayor que la del estado final, de modo que aún así puede transformarse ulteriormente en trabajo.

De todos modo, esta recuperación apenas llega en el mejor de los casos a un 25%.

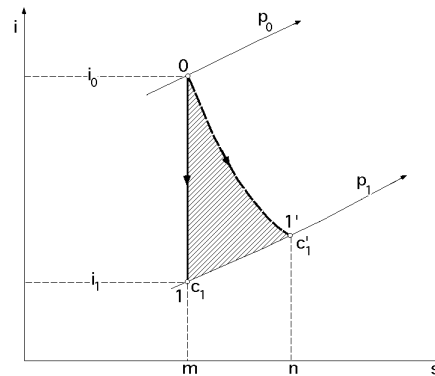


Fig XII.3.- Caída de entalpía en un diagrama (i-s)

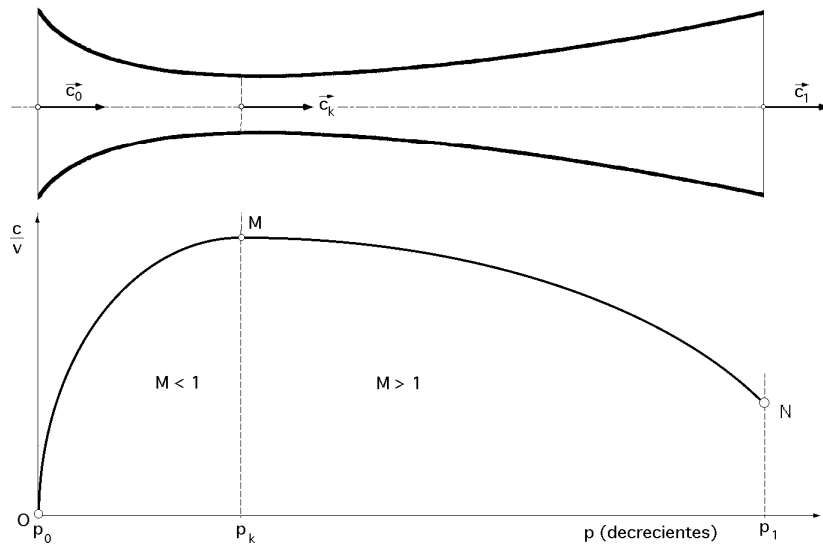


Fig XII.4.- Distribución de velocidades en las diversas secciones de una tobera Laval

Para calcular las secciones de la tobera, aplicamos la ecuación de continuidad; por tratarse de un movimiento permanente, el gasto G a través de cualquier sección transversal de la tobera tiene que ser el mismo, es decir,

$$G = \frac{a c}{v} = \frac{a_0 c_0}{v_0} = \frac{a_1 c_1}{v_1} = Cte$$

Al considerar G en la forma, $G = c a/v$, se observa que la sección a depende de la relación, c/v , al ser G constante.

Si el fluido es incompresible, $v = Cte$, al producirse un aumento de la velocidad, que es lo que se pretende en una tobera, forzosamente deberá disminuir la sección a . En este caso, la tobera

es convergente.

Si el fluido es compresible, un aumento de c supone a su vez un aumento de su volumen específico v , como hemos visto anteriormente, debido a que se produce una disminución de presión, por ser, $p v = \text{Cte}$. Por lo tanto, la relación, c/v , es la que indica la variación de las secciones.

Si en un sistema de coordenadas $(\frac{c}{v}, p)$ en donde sobre el eje de abscisas se sitúan las variaciones de presión en forma decreciente, tal como sucede en el sentido de la circulación del fluido por la tobera, se obtiene la gráfica Fig XII.4, que dice,

Entre O y M , la velocidad \vec{c} crece más rápidamente que \vec{v} , por lo que la función, c/v , es creciente, y alcanza un valor máximo en el punto M , al que corresponde la presión p_k de la garganta de la tobera. Como G es constante y, c/v , creciente, forzosamente la sección a de la tobera tiene que disminuir.

A partir del punto M , y para presiones menores que p_k , resulta que es el volumen específico v el que crece más rápidamente que \vec{c} , y por lo tanto la relación, c/v , disminuye, por lo que la sección a de la tobera aumentará para poder seguir manteniendo el gasto G constante; así se obtiene una tobera convergente-divergente tipo Laval.

CONDICIONES CRITICAS.- Para determinar las condiciones críticas, en las que se produce el máximo de $\frac{c}{v}$ y el mínimo de a , se sigue el siguiente desarrollo,

La velocidad de derrame del fluido por la tobera es,

$$c = \sqrt{2g \frac{1}{\gamma} p_0 v_0 \left\{ 1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} \right\}}$$

por lo que el valor del gasto másico G es,

$$G = \frac{ac}{v} = \frac{a}{v} \sqrt{2g \frac{1}{\gamma} p_0 v_0 \left\{ 1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} \right\}} = \left| \begin{array}{l} p_0 v_0 = p v \\ v = v_0 \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1/\gamma} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{a}{v_0 \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1/\gamma}} \sqrt{\frac{2g}{\gamma} p_0 v_0 \left\{ 1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} \right\}} = a \sqrt{\frac{p_0}{v_0} \frac{2g}{\gamma} \left\{ \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} \right\}}$$

En la sección crítica hay que hallar el máximo de $\frac{c}{v}$ ó lo que es lo mismo, el máximo de G , por lo que si llamamos,

$$Y^2 = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} \quad ; \quad \frac{d}{dp} \left\{ \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} \right\} = 0$$

$$\frac{1}{p_0^{2/\gamma}} \frac{2 p_0^{(2-\gamma)/\gamma}}{\gamma} - \frac{1}{p_0^{(\gamma+1)/\gamma}} \frac{\gamma+1}{\gamma} p_0^{1/\gamma} = 0$$

que simplificada convenientemente y haciendo, $p = p_k$, resulta,

$$p_k = p_0 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

que es el valor de la presión p_k en la garganta de la tobera, en función del coeficiente γ de la adiabática y de la presión p_0 inicial.

Teniendo en cuenta que γ es un dato característico del fluido, se obtienen para valor de p_k los siguientes valores,

Para el vapor de agua recalentado, $\gamma = 1,30$; $p_k = 0,5457 p_0$

Para el vapor de agua saturado, $\gamma = 1,135$; $p_k = 0,5774 p_0$

Para el vapor de agua húmedo, con título x , $\gamma = 1,035 + 0,1 x$

Para, $\gamma = 1,40$; $p_k = 0,527 p_0$

La temperatura crítica se obtiene a partir de,

$$T_k = T_0 \left(\frac{p_k}{p_0} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} = T_0 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{-1}{\gamma-1}} = \frac{2}{\gamma+1} T_0$$

En la misma forma se obtienen v_k y a_k ,

$$p_0 v_0^\gamma = p_k v_k^\gamma \quad ; \quad v_k = v_0 \left(\frac{p_0}{p_k} \right)^{1/\gamma} = v_0 \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

$$a_k = \frac{G}{k_{\text{máx}} \sqrt{2 g \frac{p_0}{v_0}}} \quad , \quad \text{siendo, } k_{\text{máx}} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+1}}$$

La presión de salida p_1 puede ser mayor o menor que la presión crítica p_k por cuanto ésta sólo depende de la presión inicial p_0 y del coeficiente adiabático γ , pero no de p_1 .

Si $p_1 > p_k$ hay que suponer que la relación $\frac{c}{v}$ no ha alcanzado todavía su valor máximo, y en consecuencia, la forma de la tobera será convergente. Por lo tanto, carece de significado hablar de sección crítica, por lo que cualquier embocadura redondeada interiormente, o cualquier tobera cónica, o cualquier orificio practicado en pared delgada, darán un chorro cilíndrico con velocidad de salida máxima.

Si, $p_1 < p_k$, la tobera es convergente-divergente. Los cálculos se realizan a partir de la sección crítica, estableciendo la condición de que la vena fluida no se despegue de las paredes, para lo cual el ángulo del divergente tiene que ser del orden de 10° . La longitud L del divergente se calcula a partir de,

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{D_1 - D_k}{2L}$$

siendo α el ángulo de salida, y L la longitud del divergente. La longitud L_1 del convergente se proyecta corta para limitar las pérdidas por rozamiento; dicho tramo, en muchas toberas, se limita a un simple borde redondeado.

XII.4.- ESTUDIO DE UNA CORRIENTE FLUIDA EN UNA TOBERA LAVAL

Si se mantienen constantes las condiciones iniciales (p_0, v_0) , resulta que el gasto G también se mantiene constante, por lo que,

$$G = \frac{a \sqrt{\frac{2g}{\gamma - 1} p_0 v_0 \left\{ 1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right\}}}{v_0 \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1/\gamma}} = \frac{a c_{\max}}{v_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}} = \frac{c_{\max}}{v_0} a Y = \text{cte}$$

La ecuación Y se puede representar en función de $\frac{p}{p_0}$, Fig XII.5, teniendo en cuenta que:

Pasa por el origen, $\frac{p_0}{p_0} = 1$; $Y = 0$

Se anula para, $\frac{p_1}{p_0} = 0$; $Y = 0$

Tiene un máximo para, $p = p_k$; $\frac{p_k}{p_0} < 1$, punto crítico

Al ser G constante, también lo será el producto, $a Y = \text{Cte}$, por lo que diferenciándola se obtiene,

$$a dY + da Y = 0 \quad ; \quad \frac{da}{a} = - \frac{dY}{Y}$$

y teniendo en cuenta la ecuación de Hugoniot resulta,

$$\frac{da}{a} = \left(\frac{c^2}{c_s^2} - 1 \right) \frac{dc}{c} = (M^2 - 1) \frac{dc}{c} = - \frac{dY}{Y} \quad \frac{dY}{Y} = \left(1 - \frac{c^2}{c_s^2} \right) \frac{dc}{c} = (1 - M^2) \frac{dc}{c}$$

Si se mantiene constante la presión a la entrada de la tobera p_0 y a lo largo de la tobera va disminuyendo entre $p/p_0 = 1$, y, p/p_k , la curva Y es ascendente y dY creciente; $M < 1$, el signo de dc es el mismo que el de dY , y por lo tanto, dc es creciente, aumentando la velocidad hasta, $c = c_s$, que sabemos se alcanza en el punto crítico k .

Sobrepasado el punto crítico k , si las condiciones de la presión p siguen decreciendo, p/p_0 , disminuye, y nos encontraremos en el tramo (CO) de la curva (AO), en el que dY es decreciente, mientras que la velocidad continúa aumentando, dc es creciente, y la velocidad c es supersónica.

En una tobera diseñada para funcionar con unas determinadas condiciones de trabajo, pueden suceder los siguientes casos,

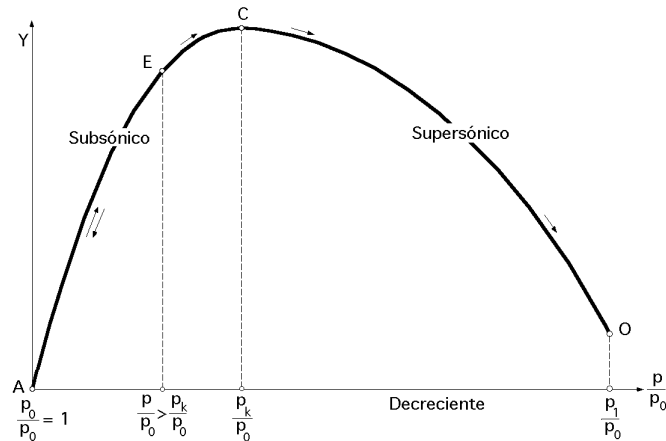


Fig XII.5.- Valores de Y en función de p/p_0

a) La presión de salida es ligeramente superior a la presión crítica, $p_1 > p_k$. En la parte convergente de la tobera el valor de Y va aumentando entre los puntos A y C, la corriente es subsónica y la velocidad c va aumentando, pero no llega a tomar el valor c_s del punto crítico k , por cuanto la presión de salida es superior a la crítica.

En la parte divergente de la tobera Y disminuye pero la corriente sigue siendo subsónica, ya que al no haber podido superar el punto C de la curva, se continúa en la rama (AC) de la misma; por lo tanto, en toda la tobera la corriente es subsónica, por no haberse alcanzado el punto crítico k .

b) La presión de salida es igual a la presión crítica, $p_1 = p_k$. En el convergente se sigue la rama (AC) como en el caso anterior, hasta llegar al punto crítico k , en donde se tiene, $c = c_s$. En el divergente se sigue la rama (CA) por lo que el movimiento es subsónico, salvo en la garganta en donde alcanza el punto crítico.

c) La presión de salida es menor que la presión crítica, $p_1 < p_k$. En el convergente se sigue la rama (AC) y en la garganta de la tobera se llega al punto crítico. En el divergente, la sección a aumenta, por lo que Y disminuye siguiendo la rama (CO), siendo el movimiento supersónico; según Hugoniot la velocidad \vec{c} aumenta y como p_1 es inferior a p_x el fluido se expansionará totalmente, siendo estas las condiciones de diseño y, por lo tanto, de funcionamiento perfecto. Sin embargo, la presión exterior puede ir aumentando gradualmente, aunque manteniéndose siempre inferior a p_k por lo que las condiciones a la salida no serán ya las de diseño o de funcionamiento perfecto.

Sin embargo la presión exterior puede ir aumentando gradualmente, aunque manteniéndose

siempre inferior a p_k por lo que las condiciones a la salida no serán ya las de diseño.

El fluido en régimen supersónico, choca a la salida de la tobera, o en sus proximidades (parte interior), con el fluido exterior de densidad mayor, apareciendo una onda de choque en una determinada sección de la tobera, Fig XII.6; después del choque, la velocidad pasa de supersónica a subsónica, experimentando el fluido una compresión irreversible; la presión aumentará, pero su valor no llegará nunca a ser el alcanzado en una compresión isentrópica.

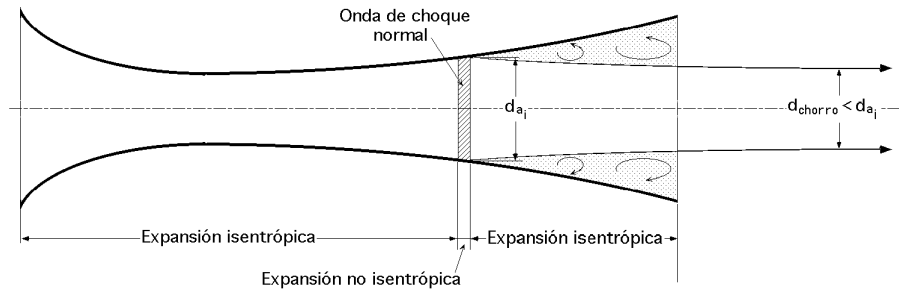


Fig XII.6.- Onda de choque en el divergente de la tobera

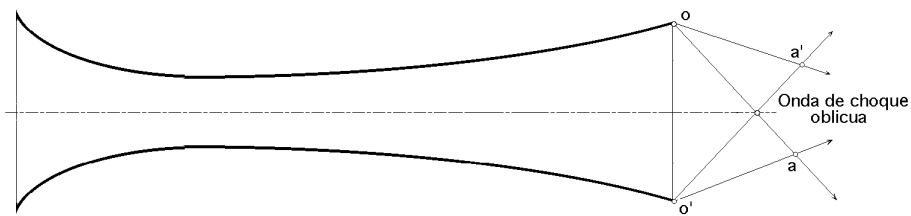


Fig XII.7.- Onda de choque a la salida

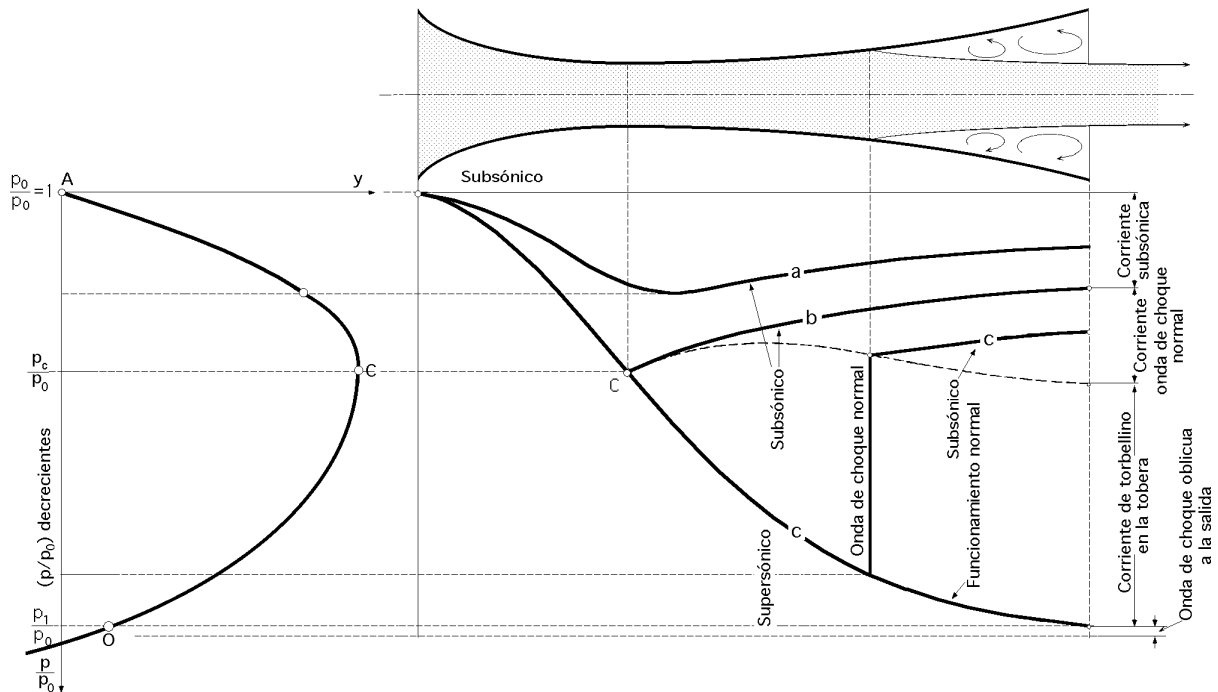


Fig XII.8.- Tipos de derrame en una tobera

Debido a este choque, y después de él, la parte divergente de la tobera actúa como difusor, por lo que la velocidad subsónica disminuye aún más su valor, aumentando la presión hasta igualar la de descarga p_1 .

d) *La presión del fluido a la salida de la tobera es mayor que la presión exterior, $p > p_1$.*- La onda de choque, oblicua, se produce a la salida de la tobera, en el exterior, en donde la presión p tiende a p_1 , Fig XII.7.

En los casos considerados y resumidos en la Fig XII.8, el gasto G permanece constante por cuanto las dimensiones de la tobera son fijas, ya que éste sólo depende de las condiciones críticas y de las iniciales, y se tiene que cumplir la ecuación de continuidad.

XII.5.- PERFIL DE UNA TOBERA POR EL MÉTODO GRÁFICO DE KOLB

Este método permite determinar el perfil de una tobera, calculando la secciones correspondientes en forma gráfica.

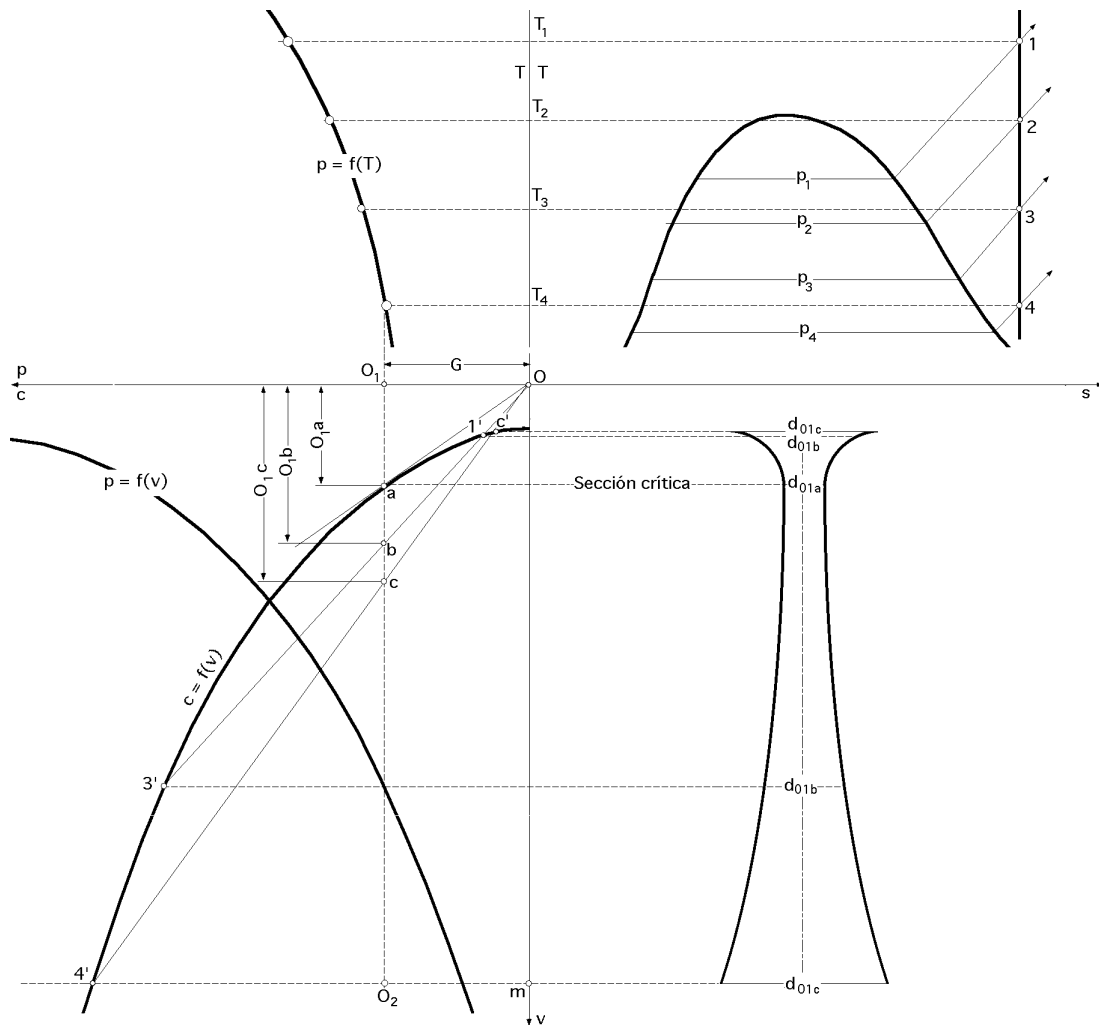


Fig XII.9.- Método gráfico de Kolb

De acuerdo con la Fig XII.9, sea la transformación 1,2,3,4, la línea de expansión del fluido en el diagrama (T,s), a través de la tobera. En un diagrama (p,v) se puede trazar la curva, $p = f(v)$, que relaciona las presiones con los volúmenes específicos adquirido por el fluido; admitiendo que la transformación es adiabática, la velocidad en una sección cualquiera es,

$$c = \sqrt{\frac{2g}{\gamma - 1} (p_0 v_0 - p v)} = \sqrt{\frac{2g}{\gamma - 1} p_0 v_0 \left\{1 - \left(\frac{v_0}{v}\right)^{\gamma - 1}\right\}}$$

Conocida esta curva se traza una paralela (O_1O_2) a la la distancia G del gasto, a una escala arbitraria. Una secante cualquiera trazada desde el origen O, tal como la ($O4'$), corta a (O_1O_2) en un punto c para el que se obtiene la sección correspondiente al punto 4 de la curva de expansión, es decir, $a_4 = (O_1C)$. En efecto, los triángulos semejantes (OO_1C) y ($O4'm$), proporcionan,

$$\frac{(4'm)}{(OO_1)} = \frac{(Om)}{(O_1C)} \quad ; \quad (O_1C) = (OO_1) \frac{(Om)}{(4'm)} = G \frac{v_4}{c_4} = a_4$$

que habrá que determinar a la misma escala que la utilizada para G.

En general, cualquier recta que parta del origen O y corte a, $c = f(v)$, lo hará en dos puntos, tales como el 1' y el 3' a los que corresponde la misma sección (O_1b) = $a_1 = a_3$.

La sección mínima (O_1a) = $a_{\text{mín}}$ corresponde a la tangente ($O2'$) trazada desde O a la curva, $c = f(v)$.

Este método es perfectamente aplicable sea cual fuere la línea de expansión 1,2,3,4.

XII.6.- FLUJO ISENTRÓPICO DE UN GAS PERFECTO.

Vamos a establecer unas ecuaciones que permitan determinar las características de flujo isentrópico de un gas perfecto en función de las condiciones iniciales, p_0 , v_0 , T_0 , y del número de Mach M existente en cada sección.

Sabemos que,

$$i_0 - i = \frac{1}{2g} (c^2 - c_0^2) = c_p (T_0 - T)$$

y como, $c_0 = 0$, resulta,

$$\frac{c^2}{2g} = c_p (T_0 - T) \quad c_p T_0 = c_p T + \frac{c^2}{2g}$$

dividiendo la anterior por, $c_p T$, y teniendo en cuenta que,

$$c_p = \frac{R}{\gamma - 1} \quad ; \quad c_s = \sqrt{g R T}$$

se obtiene la siguiente *relación entre temperaturas*,

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{c^2}{2 g c_p T} = 1 + \frac{c^2(-1)}{2 g R T} = 1 + \frac{c^2(-1)}{2 c_s^2} = 1 + \frac{-1}{2} M^2$$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{-1}{2} M^2}$$

Relación entre presiones, $\frac{P}{P_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(1 + \frac{-1}{2} M^2\right)^{-1}}$

Relación entre volúmenes, $\frac{v}{v_0} = \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(1 + \frac{-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

Combinando la relaciones isentrópicas anteriores y la ecuación de continuidad, se puede obtener una relación entre el número de Mach y la sección correspondiente; en efecto,

$$G = \frac{c a}{v} = \frac{c_k a_k}{v_k} \quad ; \quad \frac{a}{a_k} = \frac{c_k}{c} \frac{v}{v_k}$$

$$\frac{v}{v_k} = \frac{v}{v_0} \frac{v_0}{v_k} = \left(1 + \frac{-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left\{\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{-1}{2} M^2\right)\right\}^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

A su vez, si la ecuación $\frac{c_k}{c} = \frac{\sqrt{g R T}}{c}$, se multiplica y divide por $\sqrt{T T_0}$, se obtiene,

$$\frac{c_k}{c} = \frac{\sqrt{g R T}}{c} \sqrt{\frac{T_k}{T_0}} \sqrt{\frac{T_0}{T}} = \frac{c_s}{c} \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \sqrt{1 + M^2 \frac{-1}{2}} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{2}{\gamma+1} \left\{1 + M^2 \frac{-1}{2}\right\}}$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{a}{a_k} &= \frac{c_k}{c} \frac{v}{v_k} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + M^2 \frac{-1}{2}\right)} \left\{\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + M^2 \frac{-1}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{\gamma-1}} = \\ &= \frac{1}{M} \sqrt{\left\{\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + M^2 \frac{-1}{2}\right)\right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \end{aligned}$$

Para, $\gamma = 1,4$, resulta, $\frac{a}{a_k} = \frac{1}{M} \frac{(1 + 0,2 M^2)^3}{1,728}$

Para las condiciones de remanso dadas, el gasto máximo posible a través de un conducto en forma de tobera tiene lugar cuando en su garganta hay condiciones críticas, o sónicas.

Entonces se dice que el conducto está **bloqueado** y no puede haber un gasto mayor, a menos que se agrande la garganta.

El gasto máximo es el que fija la garganta de la tobera, de la forma,

$$G_{\text{máx}} = \frac{c_k a_k}{v_k} = \left| \begin{array}{l} c_k = \sqrt{g R T_k} \\ v_k = v_0 \left(\frac{1 +}{2}\right)^{1/(-1)} \end{array} \right| = a_k \frac{\sqrt{g R T_k}}{v_0 \left(\frac{1 +}{2}\right)^{1/(-1)}} = a_k \frac{\sqrt{g R T_0 \frac{2}{+1}}}{v_0 \left(\frac{1 +}{2}\right)^{1/(-1)}} =$$

$$= a_k \frac{\sqrt{g R T_0 \left(\frac{2}{+1}\right)^{\frac{+1}{-1}}}}{v_0} = \left| \text{Para, } = 1,4 \right| = \frac{0,6847 p_0 a_k}{\sqrt{R T_0}}$$

Para calcular el *número de Mach* a partir de, a/a_k , con un 2% de error y, $= 1,40$, se pueden utilizar las siguientes ecuaciones,

Régimen subsónico,

$$M = \frac{1 + 0,27 \left(\frac{a}{a_k}\right)^{-2}}{1,728 \left(\frac{a}{a_k}\right)}, \text{ para, } 1,34 < \frac{a}{a_k} <$$

$$M = 1 - 0,88 \left(\ln \frac{a}{a_k}\right)^{0,45}, \text{ para, } 1,0 < \frac{a}{a_k} < 1,34$$

Régimen supersónico,

$$M = 1 + 1,2 \sqrt{\frac{a}{a_k} - 1}, \text{ para, } 1,0 < \frac{a}{a_k} < 2,9$$

$$M = \left\{ 216 \frac{a}{a_k} - 254 \left(\frac{a}{a_k}\right)^{2/3} \right\}^{1/5}, \text{ para, } 2,9 < \frac{a}{a_k} <$$

Para cada valor de a existen dos soluciones posibles, una subsónica y otra supersónica; la solución adecuada se toma teniendo en cuenta la presión, o la temperatura, en alguna sección del conducto.

XII.7.- ONDA DE CHOQUE NORMAL

Si un cuerpo se mueve a velocidad constante en un fluido, sumando al conjunto cuerpo y fluido una velocidad igual y de sentido contrario a la del cuerpo, el fenómeno mecánico no se ha alterado, siendo ahora el fluido el que se mueve alrededor del cuerpo estacionario. Ahora bien, aunque la velocidad del cuerpo, o lo que es lo mismo, la velocidad del fluido sin perturbar alrededor del cuerpo estacionario, sea subsónica, si esta velocidad se aproxima a la velocidad del sonido, es posible que en un cierto punto alrededor del cuerpo la velocidad del fluido exceda la velocidad del sonido, y entonces el flujo se hace muy complejo, originándose perturbaciones de gran importancia, que afectan el empuje ascensional y el arrastre del perfil de ala.

En la onda de choque los parámetros del gas y su velocidad cambian bruscamente. La velocidad disminuye bruscamente y la presión por el contrario aumenta bruscamente también. El fenómeno se estudia mejor considerando el caso recíproco, cuerpo en reposo y corriente en movimiento.

El frente del salto tiene un espesor de unos 10^{-5} mm en un gas real, y divide la corriente en

dos partes, aguas arriba del salto la corriente está imperturbada, y aguas abajo hasta llegar al cuerpo la corriente está perturbada con un aumento de la presión, densidad y temperatura, fluyendo la corriente sobre el cuerpo después del salto. Antes del salto el cuerpo no tiene influjo alguno sobre la corriente, ya que la corriente supersónica incide sobre el obstáculo, mientras que la corriente subsónica se deforma antes de llegar al obstáculo, y se prepara para realizar el flujo sobre el mismo. A esto se debe el aumento de la resistencia que experimenta un cuerpo, por ejemplo un avión, al acercarse a la velocidad del sonido (barrera del sonido).

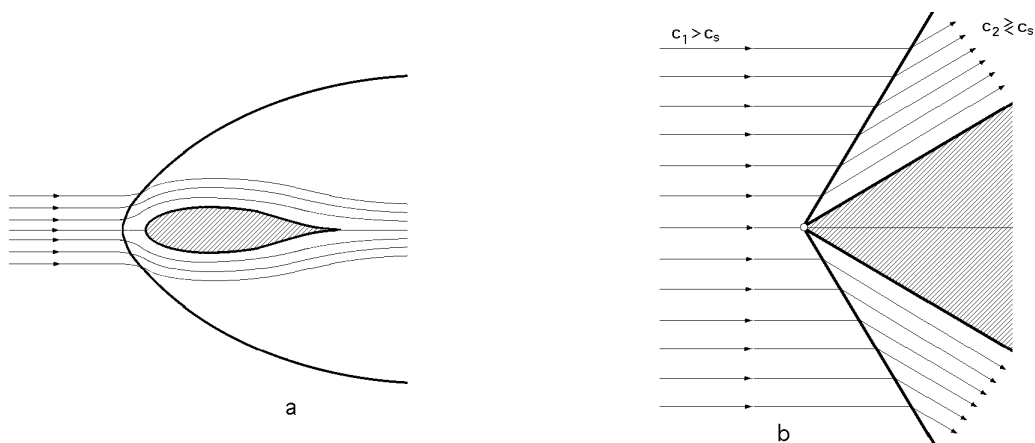


Fig XII.10- Salto en curva a y salto cónico b

Según la forma del sólido y la velocidad de la corriente incidente se puede originar,

a) El salto normal, en el cual el frente es normal a la dirección de la corriente, $\alpha = 90^\circ$

b) El salto cónico, representado en la Fig XII.10b, $\alpha < 90^\circ$; el salto tiene forma curva, como en la Fig XII.10a, acercándose en la parte central a un salto normal.

Para una misma velocidad de la corriente incidente la disminución de la velocidad es mayor en el salto normal que en el cónico, hasta tal punto que en el primero, aguas abajo, la velocidad siempre es subsónica, mientras que en el segundo puede ser subsónica o supersónica, aunque en todo caso menor que aguas arriba.

En el frenado que la corriente experimenta en la onda de choque se originan pérdidas importantes, por lo que la presión del fluido después del salto es menor que en el caso isentrópico, mientras que la temperatura es mayor.

El ángulo α depende del número de Mach antes del salto y del ángulo β del perfil según la relación,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{M_i^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 1}{1 + M_i^2 \left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen}^2 \alpha \right)} \operatorname{cotg} \alpha$$

Esta fórmula se basa en el método Schlieren que determina la velocidad de la corriente supersónica fotografiando el flujo, aprovechando los cambios de refracción de la luz producidos por los cambios de densidad para así fotografiar la onda de choque. En la fotografía se mide el

ángulo θ y conocidos ρ y μ en la ecuación anterior se despeja M_j .

A medida que aumenta el ángulo del borde de ataque del perfil el ángulo θ aumenta, es decir, la intensidad de la onda crece.

Si el ángulo θ excede de un valor máximo, la onda se desprende del cuerpo y en su parte central toma una forma aproximada al salto normal.

Si el ángulo θ sigue aumentando, toda la onda toma la forma del salto normal aumentando intensamente las pérdidas.

Los perfiles aerodinámicos para corrientes subsónicas tienen el borde de ataque redondeado y el borde de estela afilado para evitar el fenómeno de separación con la consiguiente formación de remolinos y aumento de pérdidas. Los perfiles para corrientes supersónicas, por el contrario, deben tener el borde de ataque afilado, dependiendo la disminución de las pérdidas más de la parte frontal del cuerpo.

La onda de choque normal produce una irreversibilidad en los flujos supersónicos. Excepto a presiones muy bajas, estas ondas de choque son muy delgadas, (unas micras de espesor), y se presentan como discontinuidades en el fluido.

Para su estudio seleccionaremos un volumen de control inmediatamente por delante y por detrás de la onda, tal como se muestra en la Fig XII.11.

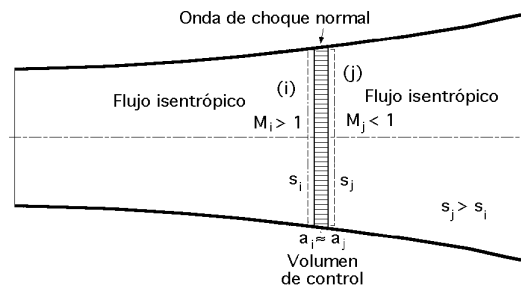


Fig XII.11.- Onda de choque normal

Para calcular los cambios de todas las propiedades, incluyendo la velocidad de la onda, utilizaremos las siguientes relaciones entre las secciones i y j , anterior y posterior a la onda de choque.

Ecuación de continuidad, $G_i = G_j$; $\frac{a_i c_i}{v_i} = \frac{a_j c_j}{v_j}$, y como, $a_i = a_j$ $\frac{c_i}{v_i} = \frac{c_j}{v_j}$

Ecuación de la cantidad de movimiento,

$$(p_i a_i - p_j a_j) dt = c_j dt a_j - c_i dt a_i$$

$$p_i - p_j = c_j^2 \frac{a_j}{g} - c_i^2 \frac{a_i}{g}$$

Ecuación energética, $i_i + \frac{c_i^2}{2g} = i_j + \frac{c_j^2}{2g}$; $i_i - i_j = \frac{c_j^2 - c_i^2}{2g}$

Ecuación de los gases perfectos, $\left(\frac{p v}{T}\right)_i = \left(\frac{p v}{T}\right)_j$; $\rho = \text{Cte}$; $i = c_p T$; $c_p = \text{Cte}$

Si se conocen las condiciones aguas arriba (p_i, c_i, v_i, i_i, T_i), las ecuaciones anteriores permiten hallar las condiciones aguas abajo (p_j, c_j, v_j, i_j, T_j). Como la velocidad aparece al cuadrado, sólo será correcta aquella solución en la que, $s_j > s_i$, de acuerdo con el Segundo Principio de la Termodinámica, siendo s_j y s_i las entropías correspondientes a las secciones posterior y anterior de la onda de choque.

LINEAS DE RAYLEIGH Y FANNO.- Para un gas perfecto, las relaciones de las diversas propiedades a través de la onda de choque, son únicamente función de γ y del número Mach aguas arriba M_i . Eliminando v_j y c_j en las ecuaciones anteriores se obtiene,

$$\frac{c_i}{c_j} = \frac{v_i}{v_j}$$

$$p_i - p_j = \frac{c_j^2}{g v_j} - \frac{c_i^2}{g v_i} = c_j^2 \frac{1}{v_j} - c_i^2 \frac{1}{v_i}$$

$$i_i - i_j = \frac{c_j^2 - c_i^2}{2g} ; \quad i_i + \frac{c_i^2}{2g} = i_j + \frac{c_j^2}{2g} = i_0 = \text{Cte}$$

y como,

$$i = c_p T = c_p \frac{p v}{R} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p v$$

resulta,

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} p_i v_i + \frac{c_i^2}{2g} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_j v_j + \frac{c_j^2}{2g}$$

A su vez, $v_j = \frac{v_i c_j}{c_i}$, por lo que la ecuación anterior toma la forma:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} p_i v_i + \frac{c_i^2}{2g} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_j v_i \frac{c_j}{c_i} + \frac{c_j^2}{2g} ; \quad \frac{v_i}{\gamma - 1} \left\{ p_i - p_j \frac{c_j}{c_i} \right\} = \frac{c_j^2 - c_i^2}{2g}$$

De la ecuación,

$$p_i - p_j = \frac{c_j^2}{g v_j} - \frac{c_i^2}{g v_i} = \frac{c_j^2}{g \frac{c_j}{c_i} v_i} - \frac{c_i^2}{g v_i} = \frac{c_i^2}{g v_i} (c_j - c_i)$$

se obtiene,

$$c_j = c_i + \frac{p_i - p_j}{c_i} g v_i$$

por lo que,

$$\frac{v_i}{-1} \left\{ p_i - p_j \frac{c_i + \frac{p_i - p_j}{c_i} g v_i}{c_i} \right\} = \frac{\left\{ 2 c_i + \frac{p_i - p_j}{c_i} g v_i \right\} \left\{ \frac{p_i - p_j}{c_i} g v_i \right\}}{2 g}$$

$$\frac{v_i}{-1} \frac{c_i^2 (p_i - p_j) - p_j v_i g (p_i - p_j)}{c_i^2} = \frac{\left\{ 2 c_i + \frac{p_i - p_j}{c_i} g v_i \right\} \left\{ \frac{p_i - p_j}{c_i} g v_i \right\}}{2 g}$$

$$\frac{c_i^2 - p_j v_i g}{-1 c_i^2} = \frac{2 c_i^2 + (p_i - p_j) g v_i}{2} = c_i^2 + \frac{(p_i - p_j) g v_i}{2}$$

$$p_j v_i g \frac{+1}{2 (-1)} = \frac{c_i^2}{(-1)} - \frac{p_i g v_i}{2}$$

Dividiéndola por, $p_i v_i g$, resulta,

$$\frac{p_j}{p_i} \frac{+1}{2 (-1)} = \frac{c_i^2}{(-1) p_i v_i g} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{p_j}{p_i} = \frac{2 c_i^2}{(+1) p_i v_i g} - \frac{-1}{+1} = \frac{1}{+1} \left\{ \frac{2 c_i^2}{p_i v_i g} - (-1) \right\} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Para un gas perfecto} \\ \frac{c_i^2}{p_i v_i g} = \frac{c_i^2}{R T_i g} = \frac{c_i^2}{c_s^2} = M_i^2 \end{array} \right| = \frac{2 M_i^2 - (-1)}{+1}$$

que es la **relación de presiones**; se observa que para cualquier valor de $p_j > p_i$, sólo para, $M_i > 1$, lo cual implica que el número de Mach aguas arriba de una onda de choque normal tiene que ser supersónico, para satisfacer el Segundo Principio de la Termodinámica.

Respecto al número de Mach aguas abajo de la onda de choque, se obtiene,

$$p_i - p_j = \frac{c_j^2}{g v_j} - \frac{c_i^2}{g v_i} = \left| \begin{array}{l} \frac{c^2}{p v g} = M^2 \\ \frac{c_j^2}{p_j v_j g} = M_j^2 \end{array} \right. \quad p_j = \frac{c_j^2}{v_j g M_j^2} \left| = M_j^2 p_j - M_i^2 p_i \right.$$

$$p_j (1 + M_j^2) = p_i (1 + M_i^2) \quad ; \quad \frac{p_j}{p_i} = \frac{1 + M_i^2}{1 + M_j^2}$$

que se conoce como **línea de Rayleigh**, y proporciona la relación entre las presiones existentes a ambos lados de la onda de choque, en función de los números de Mach correspondientes.

Igualando esta expresión a la anteriormente deducida,

$$\frac{p_j}{p_i} = \frac{1 + M_i^2}{1 + M_j^2} = \frac{2 M_i^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}$$

y despejando M_j ,

$$M_j^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 + M_i^2}{M_i^2 - (\gamma - 1)} (\gamma - 1) - 1 \right\} = \frac{1}{2} \frac{2 + (\gamma - 1) M_i^2}{M_i^2 - (\gamma - 1)} = \frac{2 + (\gamma - 1) M_i^2}{2 M_i^2 - (\gamma - 1)}$$

Como M_i es supersónico, esta ecuación predice que, para todo valor de $\gamma > 1$, M_j debe ser subsónico; en consecuencia, una onda de choque normal desacelera bruscamente el flujo, pasando éste desde unas condiciones supersónicas a otras subsónicas.

Para calcular la *relación entre las temperaturas*, antes y después de la onda de choque, partimos de la ecuación,

$$\frac{1}{\gamma - 1} p_i v_i + \frac{c_i^2}{2g} = \frac{1}{\gamma - 1} p_j v_j + \frac{c_j^2}{2g} \quad ; \quad \frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{p_j}{\rho_j} - \frac{p_i}{\rho_i} \right) + \frac{c_j^2 - c_i^2}{2g} = 0$$

y en general,

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2g} = \text{Cte} \quad ; \quad \frac{\gamma - 1}{2} \frac{c^2}{g} + \frac{p}{\rho} = \text{Cte}$$

Para un gas perfecto, $p v = R T$ y $\rho = \gamma R T$, que sustituida en la anterior permite obtener,

$$T \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{c^2}{2} + 1 \right) = \text{Cte}$$

y como, $c^2 = \gamma R T M^2$, resulta,

$$T \left(\frac{\gamma R T M^2}{\gamma R T} \frac{\gamma - 1}{2} + 1 \right) = \text{Cte} \quad ; \quad T \left\{ \frac{M^2}{2} (\gamma - 1) + 1 \right\} = \text{Cte} \quad ; \quad \frac{T_j}{T_i} = \frac{\frac{M_i^2}{2} (\gamma - 1) + 1}{\frac{M_j^2}{2} (\gamma - 1) + 1}$$

que es la relación buscada para las temperaturas.

Para determinar la relación entre los *volúmenes específicos*, o lo que es lo mismo, entre las *velocidades del fluido*, antes y después de la onda de choque normal, partimos de,

$$T \left\{ \frac{M^2}{2} (\gamma - 1) + 1 \right\} = \text{Cte} \quad ; \quad p (1 + M^2) = \text{Cte}$$

$$\text{por lo que, } v = \frac{R T}{p} = 2 R \frac{1 + M^2}{M^2 (\gamma - 1) + 2}$$

$$\frac{v_i}{v_j} = \frac{(1 + M_i^2) \{M_j^2 (\gamma - 1) + 2\}}{(1 + M_j^2) \{M_i^2 (\gamma - 1) + 2\}} = \frac{(1 + M_i^2) \left\{ (\gamma - 1) \frac{M_i^2 (\gamma - 1) + 2}{2 M_i^2 - (\gamma - 1)} + 2 \right\}}{\left\{ 1 + \frac{M_i^2 (\gamma - 1) + 2}{2 M_i^2 - (\gamma - 1)} \right\} \{M_i^2 (\gamma - 1) + 2\}} =$$

$$= \frac{(1 + M_i^2) (\gamma + 1)^2 M_i^2}{\{M_i^2 (\gamma + 1) + (\gamma + 1)\} \{M_i^2 (\gamma - 1) + 2\}} = \frac{(\gamma + 1) M_i^2}{M_i^2 (\gamma - 1) + 2}$$

que relaciona los volúmenes específicos aguas arriba y aguas abajo de la onda de choque con el número M_i .

Como, $p = \rho R T$, despejando T y sustituyéndola en la ecuación,

$$T \left\{ \frac{M^2}{2} (\gamma - 1) + 1 \right\} = \text{Cte}$$

se obtiene,

$$\frac{p}{\rho R} \left\{ \frac{M^2}{2} (\gamma - 1) + 1 \right\} = \text{Cte}$$

Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad, $\rho c = \text{Cte}$, y

$$M = \frac{c^2}{c_s^2} = \frac{c^2}{g p v} = \frac{c^2}{p}$$

resulta,

$$\frac{p c}{\rho R} \left(\frac{c^2}{2 p} \frac{\gamma - 1}{\gamma} + 1 \right) = \text{Cte} ; \quad p c \left(\frac{c^2}{2 p} \frac{\gamma - 1}{\gamma} + 1 \right) = \text{Cte}$$

y como, $c = \sqrt{g R T M}$, sustituyendo en la anterior, e incluyendo los valores de ρ , g y R en la constante,

$$p \sqrt{T} M \left(\frac{c^2}{2 p} \frac{\gamma - 1}{\gamma} + 1 \right) = \text{Cte}$$

en la que el valor de T se deduce de la ecuación, $T \left(\frac{c^2}{2 p} \frac{\gamma - 1}{\gamma} + 1 \right) = \text{Cte}$, obteniéndose,

$$p M \sqrt{\frac{c^2}{2 p} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} + 1 \right)} = \text{Cte}$$

Sustituyendo en ésta los valores de, $p = \rho R T$; $c = \sqrt{g R T M}$, se obtiene:

$$p M \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2} M^2 + 1} = \text{Cte} ; \quad \frac{p_i}{p_j} = \frac{M_j \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2} M_j^2 + 1}}{M_i \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2} M_i^2 + 1}}$$

que se conoce como *línea de Fanno*.

La intersección de las líneas de Rayleigh y Fanno, es,

$$\frac{P_i}{P_j} = \frac{M_j \sqrt{\frac{-1}{2} M_j^2 + 1}}{M_i \sqrt{\frac{-1}{2} M_i^2 + 1}} = \frac{1 + M_j^2}{1 + M_i^2} \quad \frac{M_i}{M_j} = \frac{\sqrt{(-1) M_j^2 + 2}}{\sqrt{(-1) M_i^2 + 2}} = \frac{1 + M_j^2}{1 + M_i^2}$$

Para hallar el valor de M_i en función de M_j , se procede de la siguiente forma,

$$\frac{M_i^2 (-1) M_i^2 + 2}{(1 + M_i^2)^2} = \frac{M_j^2 (-1) M_j^2 + 2}{(1 + M_j^2)^2} = A \quad M_i^4 \{(-1) - 2A\} + 2M_i^2(1 - A) - A = 0$$

$$M_i^2 = \frac{-(1 - A) \pm \sqrt{1 - A - A}}{-1 - 2A}$$

Operando y tomando el signo (-) se obtiene,

$$M_i^2 = \frac{-2 + M_j^2 (-1)}{2 M_j^2 - (-1)} = \frac{\frac{2}{-1} + M_j^2}{\frac{2}{-1} M_j^2 - 1}$$

que permite determinar, sustituyendo en las expresiones $\frac{T_i}{T_j}$, $\frac{P_i}{P_j}$, etc, los valores de las mismas en función del número de Mach, bien M_i ó M_j .

OTRAS EXPRESIONES DE LAS LINEAS DE FANNO Y RAYLEIGH, EN COORDENADAS (i-s)

Línea de Fanno.- En el movimiento de fluidos por conductos de sección constante, se emplea frecuentemente la relación,

$$= \frac{G}{a} = *c = \frac{c}{v} = Cte$$

en la que es una función constante a lo largo de la conducción, y puede considerarse como una medida de la *intensidad del movimiento*.

Inicialmente, el fluido está en el estado 0 caracterizado por las condiciones, $c_0 = 0$, i_0 . Cuando el fluido se expande pasa a otro estado de entalpía i ; la velocidad en la sección correspondiente sabemos es de la forma,

$$c = 91,48 \sqrt{i_0 - i}$$

Cualquiera que sea la ley del rozamiento del fluido sobre las paredes de la conducción, el valor del volumen específico v , es,

$$v = \frac{91,48 a \sqrt{i_0 - i}}{G} = k \sqrt{i_0 - i}$$

en la que k es una constante, siempre que lo sea G/a , como en el caso de tubos cilíndricos en régimen permanente.

Para cada valor de $\frac{G}{a}$, el volumen específico dado por la ecuación, $v = k\sqrt{i_0 - i}$, representa una familia de curvas, $v = \text{Cte}$, para los diversos valores de i ; hallando su intersección con las curvas, $i = \text{Cte}$, se obtiene el lugar geométrico de los correspondientes valores de i y v que se conoce como línea de Fanno, para cada valor de, G/a .

Hay que tener en cuenta que para una entalpía inicial i_0 las curvas de, $i = \text{Cte}$, son a su vez curvas de velocidad c constante, y se comprueba, como veremos mas adelante, que en los puntos a, b, c, \dots en los que las curvas de Fanno cortan a la curva, $i_s = \text{Cte}$, $M=1$, es decir a ,

$$c_s = 91,48 \sqrt{i_0 - i_s} \quad ; \quad i_s = i_0 - \left(\frac{c_s}{91,48}\right)^2$$

las tangentes a dichas curvas son verticales y los puntos de tangencia los de máxima entropía para cada curva.

Su representación en el diagrama (T,s) es la que se indica en la Fig XII.12.

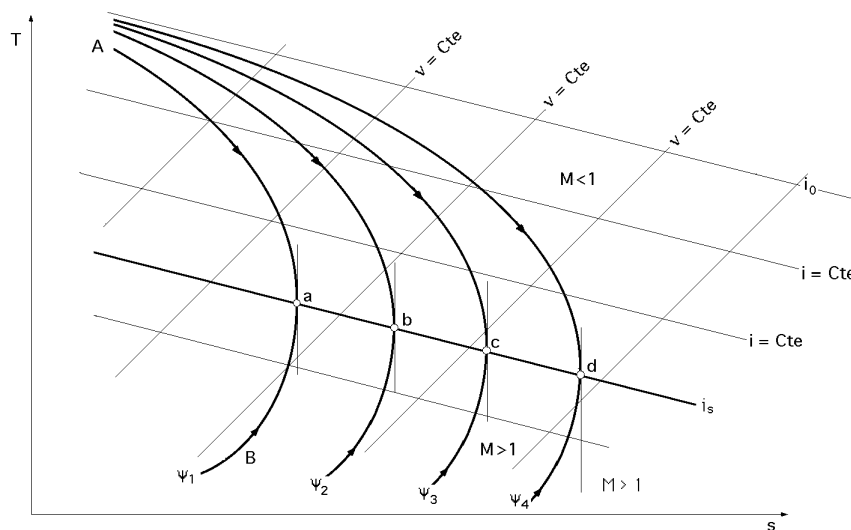


Fig XII.12.- Curvas de Fanno en el diagrama (T-s)

Como todo proceso real va ineludiblemente ligado a un aumento de entropía, las curvas de Fanno correspondientes a un tubo cilíndrico se interrumpirán en los puntos a, b, c, \dots de tal modo, que la velocidad límite que el fluido puede alcanzar por su expansión en dicho tubo cilíndrico, será la del sonido.

Si el movimiento es supersónico, el frotamiento dará lugar a un aumento de presión, temperatura y densidad, y a una disminución de la velocidad del número Mach.

Si el movimiento es subsónico, el frotamiento dará lugar a un aumento de la velocidad y del número Mach, y a una disminución de la presión, temperatura y densidad.

En ambos casos, el número Mach tiende siempre a la unidad, por lo que es imposible observar el paso de, $M < 1$, a, $M > 1$, y viceversa, al menos de una manera continua.

En el diagrama (i,s) para cada valor de i y para i_0 dada, la forma de las líneas de Fanno no varía, desplazándose paralelas unas a otra a medida que varía la función ψ . Su tangente vertical coincide, como sabemos, con $M=1$, siendo los puntos a, b, c, ... de entropía máxima.

Para determinar la ecuación de las curvas de Fanno en el diagrama (i,s) representado en la Fig XII.13, de la forma, $s = f(i)$, partimos de las siguiente ecuaciones,

Proceso irreversible, $s - s_0 = c_v \ln \frac{p v}{p_0 v_0}$

Ecuación energética, $i_0 = i + \frac{c^2}{2g}$; $c_0 = 0$; $c = \sqrt{2g(i_0 - i)}$

Ecuación de continuidad, $G = \frac{c}{v}$; $a = Cte$; $v = \frac{c}{G}$

Ecuación de estado, $p v = R T$; $i = c_p T = c_p \frac{p v}{R}$; $p = \frac{R i}{v c_p}$

Eliminando p , v y c , entre estas ecuaciones se obtiene,

$$\begin{aligned}
 s - s_0 &= c_v \ln \frac{p v}{p_0 v_0} = c_v \ln \frac{\frac{R i}{v c_p} v}{p_0 v_0} = c_v \ln \frac{R i v^{-1}}{c_p p_0 v_0} = \\
 &= c_v \ln \frac{R i}{c_p p_0 v_0} \frac{c^{-1}}{G^{-1}} = c_v \ln \frac{R i}{c_p p_0 v_0} \frac{\sqrt{\{2g(i_0 - i)\}^{-1}}}{G^{-1}} = \\
 &= c_v \ln \left\{ \frac{R (2g)^{(-1)/2}}{c_p p_0 v_0 G^{-1}} i \sqrt{(i_0 - i)^{-1}} \right\}
 \end{aligned}$$

que es la ecuación de Fanno en el diagrama (i,s).

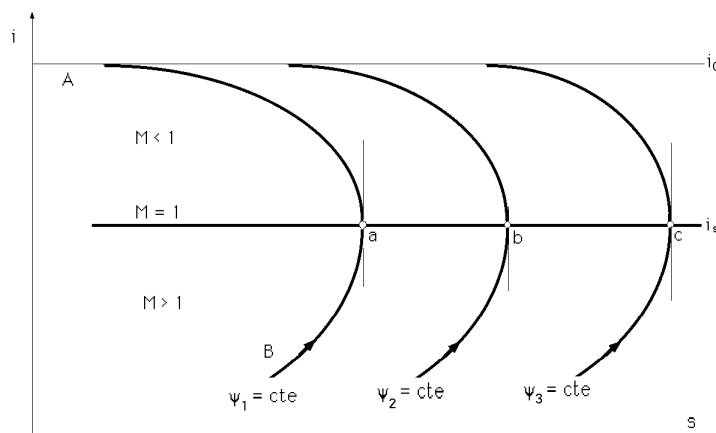


Fig XII.13.- Curvas de Fanno en el diagrama (i-s)

La condición de entropía máxima, $ds/di = 0$, punto de tangencia vertical, es,

$$\frac{ds}{di} = \frac{d}{di} \left\{ i \sqrt{(i_0 - i)^{-1}} \right\} = \sqrt{(i_0 - i)^{-1}} - i \frac{-1}{2} \sqrt{(i_0 - i)^{-3}} = 0$$

de la que despejando el valor, $i = i_a$, se obtiene la condición de entropía máxima,

$$i_a = \frac{2}{+1} i_0 \quad ; \quad i_0 = \frac{+1}{2} i_a$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación, $c^2 = 2g(i_0 - i)$, resulta,

$$\begin{aligned} c_a^2 &= 2g \left(i_0 - \frac{2}{+1} i_0 \right) = 2g \frac{-1}{+1} i_0 = 2g \frac{-1}{+1} \frac{+1}{2} i_a = g(-1) i_a = \\ &= g(-1) \frac{RT_a}{-1} = gRT = c_s^2 \end{aligned}$$

por lo que en a se alcanza solamente el valor límite, $M=1$.

Para, $i > i_a$, el flujo es subsónico y para, $i < i_a$, es supersónico; las dos condiciones, antes y después de la onda de choque normal, deben caer en la línea de Fanno correspondiente a la sección para la que se presenta dicha onda de choque. Como en su determinación no se ha utilizado la ecuación de la cantidad de movimiento, esta solución no es definitiva. La línea de Fanno así descrita se refiere a un flujo a través de una sección transversal constante, como es el que se tiene en un elemento de longitud de la tobera donde se presenta la onda de choque, por lo que dicha ecuación también será válida para una conducción, en flujo adiabático, de sección transversal constante.

El gas, en el extremo de la conducción, aguas arriba, que es el punto de partida inicial, se puede representar mediante un punto de la curva de Fanno, correspondiente a la entalpía inicial al gasto G correspondiente.

Las propiedades del gas se van modificando a medida que éste va avanzando por la conducción, aumentando su entropía, de forma que, el punto representativo sobre la curva de Fanno se mueve hacia el punto a de entropía máxima.

Si el conducto está alimentado por una tobera Laval, el flujo, inicialmente puede ser supersónico, en cuyo caso, la velocidad irá disminuyendo a lo largo del conducto, mientras que si a la entrada el flujo es subsónico, la velocidad aumentará.

Si se considera que en una cierta parte de la conducción, el flujo es sónico, está claro que aguas arriba de esta sección el flujo no habrá alcanzado dichas condiciones sónicas; sin embargo, para la zona aguas abajo de la sección sónica, si el flujo aguas arriba es supersónico se tendrán ondas de choque y estrangulamiento, mientras que si es subsónico, se tendrá estrangulamiento, es decir, ante la imposibilidad de tener el gasto de diseño se presenta en su lugar un gasto menor. En un conducto de sección transversal constante, el gas no puede cambiar gradualmente de flujo subsónico a supersónico, o viceversa.

Línea de Rayleigh.- Las condiciones antes y después de la onda de choque, deben satisfacer la ecuación de la cantidad de movimiento, de la forma, $p + \rho c^2 = \text{Cte}$, que junto con las otras ecuaciones que definían el incremento de entropía del proceso irreversible, la ecuación de continuidad y la ecuación de estado del fluido, permiten determinar, en un diagrama (i,s), la línea de Rayleigh.

Eliminando c entre las ecuaciones de continuidad y de la cantidad de movimiento se obtiene,

$$p + \rho G^2 v^2 = \text{Cte} \quad ; \quad p + \frac{G^2}{g^2} = \text{Cte} = B$$

Eliminando p entre esta ecuación y la de la entropía, resulta,

$$s - s_0 = c_v \ln \frac{(B - \frac{G^2}{g^2}) v}{p_0 v_0} = c_v \ln \frac{\rho_0}{p_0} + c_v \ln \frac{B - \frac{G^2}{g^2}}{g^2}$$

La entalpía se puede poner en función de v y de las condiciones aguas arriba; teniendo en cuenta el valor de B , se tiene,

$$i = c_p T = c_p \frac{p v}{R} = c_p \frac{v}{R} (B - \frac{G^2}{g^2}) = \frac{c_p}{g R} (B - \frac{G^2}{g^2})$$

Las dos últimas ecuaciones relacionan i y s a través del parámetro ρ , su representación gráfica en un diagrama (i,s) permite obtener la línea de Rayleigh, Fig XII.14.

Para hallar el máximo de entropía, o lo que es lo mismo, el punto de tangencia vertical, hay que calcular, $ds/di = 0$,

$$\frac{ds}{di} = \frac{ds}{d} \frac{d}{di} = \left| \begin{array}{l} \frac{ds}{d} = \frac{c_v (2 - 1)}{(B - \frac{G^2}{g^2})^3} \left\{ B - \frac{G^2}{g^2} (+ 1) \right\} \\ \frac{di}{d} = \frac{c_p}{g R^2} \left(\frac{2 G^2}{g^2} - B \right) \end{array} \right| =$$

$$= \frac{c_v (2 - 1) g R^2}{(B - \frac{G^2}{g^2})^3 c_p} \frac{B - \frac{G^2}{g^2} (+ 1)}{\frac{2 G^2}{g^2} - B} = 0$$

Para que se satisfaga esta ecuación el numerador tiene que ser cero y el denominador distinto de cero, por lo que,

$$B - \frac{G^2}{g^2} (+ 1) = 0 \quad ; \quad g^2 B = G^2 (+ 1)$$

Sustituyendo B y G por su valores respectivos, se obtiene,

$$g^2 p + g^2 \frac{c^2}{v^2} \frac{1}{g^2} = \frac{c^2}{v^2} (+ 1) \quad c^2 = g^2 p v^2 = g p v = c_s^2$$

es decir, en el punto de tangencia vertical se tiene, al igual que para la curva de Fanno, una velocidad igual a la del sonido, $M = 1$.

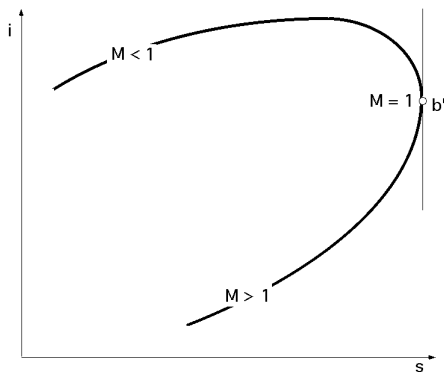


Fig XII.14
Línea de Rayleigh en el diagrama (i-s)

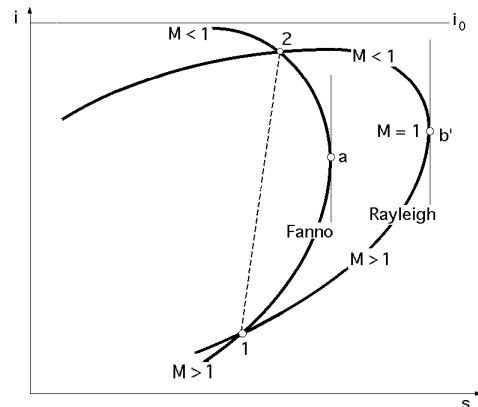


Fig XII.15
Intersección de las curvas de Fanno y Rayleigh

Como las condiciones de flujo inmediatamente antes y después de la onda de choque normal deben quedar incluidas en ambas curvas, la única posibilidad de que esto se cumpla es que dichas condiciones cambien súbitamente desde un punto de intersección, en condiciones subsónicas a otro punto en condiciones supersónicas, tal como se muestra en la Fig XII.15.

Como la entropía es siempre creciente, resulta que la sección aguas arriba de la onda de choque normal corresponde al punto de intersección de menor entropía, es decir, régimen supersónico, por lo que esta onda de choque se producirá siempre desde flujo supersónico a subsónico.

XII.8.- FLUJO ADIABÁTICO EN CONDUCTOS DE SECCIÓN CONSTANTE, CON ROZAMIENTO

El flujo de un gas a través de una tubería de sección constante está sometido a las siguientes hipótesis,

- 1.- Gas perfecto (calores específicos constantes)
- 2.- Flujo permanente unidimensional
- 3.- Flujo adiabático (no hay transmisión de calor a través de las paredes)
- 4.- Coeficiente de rozamiento λ constante en toda la longitud de la tubería
- 5.- El diámetro equivalente de la tubería D es cuatro veces el diámetro hidráulico
- 6.- Los cambios de altura son despreciables frente a los efectos del rozamiento
- 7.- No hay variaciones del trabajo de flujo

Las ecuaciones que rigen este flujo son las de continuidad, energía, cantidad de movimiento y de estado.

La línea de Fanno se refiere a casos de sección constante y utiliza las ecuaciones de continuidad y de la energía, por lo que se puede aplicar al flujo adiabático en un tubería de sección constante.

Una partícula de gas a la entrada de la tubería se representa mediante un punto en la línea de Fanno correspondiente, por una entalpía de estancamiento i_0 y por un gasto másico G por unidad de sección.

Cuando la partícula se mueve a lo largo del conducto, sus propiedades se modifican debido al rozamiento o a las irreversibilidades, con el correspondiente aumento de entropía. Por lo tanto, el punto que representa estas propiedades se mueve a lo largo de la línea de Fanno hacia el punto de máxima entropía, $M = 1$.

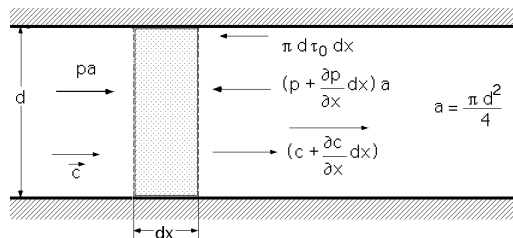


Fig XII.16.- Flujo adiabático en conductos de sección constante, con fricción

Si la tubería se alimenta mediante una tobera convergente-divergente, el flujo es, originalmente, supersónico y, entonces, la velocidad disminuye a medida que el gas avanza por el conducto. Si el flujo a la entrada es subsónico, la velocidad aumenta a medida que el gas avanza por el conducto.

Existe una longitud de tubería en la que en el extremo aguas abajo el flujo es sónico, $M = 1$; para longitudes de tubería más cortas, el flujo no alcanza las condiciones sónicas a la salida, pero para longitudes más largas de la tubería, aparecerán ondas de choque y posiblemente bloqueo a la entrada si el flujo es supersónico y efectos de bloqueo si el flujo es subsónico.

El bloqueo a la entrada implica el que el flujo másico especificado no se puede alcanzar en dicho estado y aparecerá menos flujo. En un tubería de sección constante, el gas no puede pasar gradualmente de régimen subsónico a régimen supersónico o viceversa.

La ecuación de la cantidad de movimiento incluye el efecto del esfuerzo cortante en la pared τ_0 para un elemento de tubería de longitud dx y sección transversal a , es de la forma,

$$\left\{ p a - \left(p + \frac{dp}{dx} dx \right) a - \tau_0 d dx \right\} dt = c a \left(c + \frac{dc}{dx} dx - c \right) dt$$

$$dp + \frac{d}{a} \tau_0 dx - c dc = 0 \quad ; \quad dp + \frac{4}{d} \tau_0 dx + c dc = 0$$

A su vez, el valor de τ_0 se obtiene en la forma,

$$dp \frac{d^2}{4} = d dL \tau_0 \quad ; \quad dp = \frac{4 dL}{d} \tau_0 = \frac{c^2 dL}{2 d} \quad ; \quad \tau_0 = \frac{c^2}{8}$$

ecuación en la que cada término se puede poner en función del número de Mach.

Si γ es constante, o toma un valor medio para la longitud de tubería considerada, esta ecuación se puede transformar en otra, función del número de Mach, $M = c/c_s$; dividiéndola por ρ , resulta,

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho} dx + \frac{c}{\rho} dc = 0$$

$$c^2 = M^2 \frac{p}{\rho} \quad ; \quad \frac{c^2}{\rho} = M^2 \frac{p}{\rho} \quad ; \quad \frac{c}{\rho} dc = M^2 \frac{dc}{\rho}$$

Para expresar, dc/c , en función del número Mach M , se parte de la ecuación de la energía

$$i_0 = i + \frac{c^2}{2} = c_p T + \frac{c^2}{2}$$

Diferenciándola y dividiéndola por, $c = \sqrt{\gamma R T} M$, resulta:

$$c_p dT + c dc = 0 \quad ; \quad \frac{c_p}{R} \frac{1}{M^2} \frac{dT}{T} + \frac{dc}{c} = 0$$

y como, $\frac{c_p}{R} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$, se obtiene,

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{1}{M^2} \frac{dT}{T} + \frac{dc}{c} = 0 \quad ; \quad \frac{dT}{T} = - M^2 (\gamma - 1) \frac{dc}{c}$$

Diferenciando la ecuación, $c = \sqrt{\gamma R T} M$, y dividiéndola por c^2 resulta,

$$2 c dc = 2 \gamma R T M dM + \gamma R M^2 dT \quad ; \quad 2 \frac{dc}{c} = 2 \frac{dM}{M} + \frac{dT}{T} = 2 \frac{dM}{M} - M^2 (\gamma - 1) \frac{dc}{c}$$

$$\frac{dc}{c} = \frac{\frac{dM}{M}}{1 + M^2 \frac{\gamma - 1}{2}} \quad ; \quad \frac{c}{\rho} dc = M^2 \frac{dc}{\rho} = \frac{M dM}{1 + M^2 \frac{\gamma - 1}{2}}$$

Como, $p = \gamma R T$, y $G = \gamma c$, se obtiene,

$$\frac{p}{G} = \frac{R T}{c} \quad ; \quad p c = G R T \quad ; \quad \frac{dp}{p} + \frac{dc}{c} = \frac{dT}{T}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} - \frac{dc}{c} = - M^2 (\gamma - 1) \frac{dc}{c} - \frac{dc}{c} = - \frac{dc}{c} \{M^2 (\gamma - 1) + 1\} = \frac{M^2 (\gamma - 1) + 1}{M^2 \frac{\gamma - 1}{2} + 1} \frac{dM}{M}$$

La ecuación,

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho} dx + \frac{c}{\rho} dc = 0$$

se puede poner en la forma,

$$\frac{M^2(-1) + 1}{M^2 \frac{-1}{2} + 1} \frac{dM}{M} + \frac{1}{2} \frac{dx}{d} M^2 + \frac{M dM}{M^2 \frac{-1}{2} + 1} = 0$$

es decir,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d} &= \frac{dM}{M^2 \frac{-1}{2} + 1} \left\{ \frac{M^2(-1) + 1}{M} - M \right\} \frac{2}{M^2} = \frac{2(1 - M^2) dM}{M^3 (M^2 \frac{-1}{2} + 1)} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \frac{2(1 - M^2) dM}{M^3 (M^2 \frac{-1}{2} + 1)} = \frac{A}{M^3} - \frac{\frac{B}{M}}{1 + M^2 \frac{-1}{2}} \\ A = 2 ; B = \frac{-1}{2} \end{array} \right| = \frac{2 dM}{M^3} - \frac{+1}{M} \frac{dM}{M^2 \frac{-1}{2} + 1} \end{aligned}$$

que integrada entre los límites, $x = 0, M = M_0$, resulta,
 $x = L, M = M$

$$\frac{L}{d} = \frac{-1}{M^2} \Big|_{M_0}^M - \frac{+1}{2} \ln \frac{M^2}{\frac{-1}{2} M^2 + 1} \Big|_{M_0}^M = \frac{1}{M_0^2} \left(\frac{1}{M_0^2} - \frac{1}{M^2} \right) + \frac{+1}{2} \ln \left\{ \left(\frac{M_0}{M} \right)^2 \frac{(-1)M^2 + 2}{(-1)M_0^2 + 2} \right\}$$

Para, $\gamma = 1,4$ se tiene,

$$\frac{L}{d} = \frac{5}{7} \left(\frac{1}{M_0^2} - \frac{1}{M^2} \right) + \frac{6}{7} \ln \left\{ \left(\frac{M_0}{M} \right)^2 \frac{M^2 + 5}{M_0^2 + 5} \right\}$$

Si, $M_0 > 1$, M no puede ser menor que 1

Si, $M_0 < 1$, M no puede ser mayor que 1

Para obtener la longitud máxima del tubo; para $M = 1$ y $\gamma = 1,4$, se tiene,

$$L_{\text{máx}} = \frac{d}{7} \left\{ \frac{5}{7} \left(\frac{1}{M_0^2} - 1 \right) + \frac{6}{7} \ln \left(\frac{6 M_0^2}{M_0^2 + 5} \right) \right\} = L^*$$

Esta longitud es la necesaria para alcanzar el punto sónico desde la condiciones iniciales. En algunos problemas referidos a conductos cortos en lo que el flujo nunca se hace sónico, se pueden utilizar diferencias entre longitudes máximas o sónicas tabuladas, entre longitudes.

Los datos disponibles sobre fricción en conductos con flujo compresible muestran una buena concordancia con el diagrama de Moody en flujo subsónico, pero en el supersónico los valores son hasta un 50% menores que los dados por el citado diagrama.

XII.9.- BLOQUEO DEBIDO A LA FRICCIÓN

La teoría expuesta predice que en un flujo adiabático, con fricción, en un conducto de sección constante, el flujo aguas abajo tiende hacia el punto sónico, cualquiera sea el número Mach a la entrada M_0 existiendo una cierta longitud para la que el número Mach de salida se hace exactamente igual a la unidad.

El problema surge cuando la longitud del conducto es mayor que el máximo calculado anteriormente; en estas circunstancias, las condiciones del flujo se modifican, como exponemos a continuación,

Si la entrada del fluido en el conducto es subsónica, al ser la longitud L mayor que la L^* correspondiente a $M = 1$, el gasto debe disminuir hasta que se alcance un número Mach en la entrada, tal, que a la salida del conducto de longitud L se tengan condiciones sónicas; el gasto se ha reducido por *bloqueo de fricción*. Si se aumenta la longitud L , el número Mach a la entrada tiene que seguir disminuyendo para que a la salida se tengan condiciones sónicas.

Si la entrada del fluido es supersónica y la longitud L del tubo es superior a la correspondiente a condiciones sónicas, aparecerá una onda de choque normal en el lugar preciso para que el flujo a la salida sea sónico.

Al aumentar la longitud, la onda se sitúa más aguas arriba hasta llegar a la entrada. Si L continúa aumentando, la onda de choque se desplazará más aguas arriba, hacia la tobera supersónica que alimenta el conducto.

El gasto sigue siendo el mismo que para el conducto corto, por cuanto al alcanzarse en la garganta de la tobera condiciones sónicas, el gasto tiene que ser constante. En algunos casos, un conducto muy largo puede provocar el bloqueo de la garganta de la tobera de alimentación, reduciéndose entonces el gasto.

La fricción supersónica, en consecuencia, modifica la configuración del flujo si, $L > L^*$, pero no bloquea el flujo hasta que L sea mucho mayor que L^* . La presión, velocidad, volumen y temperatura se pueden expresar en función de las condiciones correspondientes a $M = 1$, distinguiéndolas mediante el símbolo (*); así se tiene que,

$$\frac{p^*}{p_0} = M_0 \sqrt{\frac{(\gamma - 1)M_0^2 + 2}{\gamma + 1}}$$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{(\gamma - 1)M_0^2 + 2}{\gamma + 1}$$

Para los volúmenes partimos de la ecuación,

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{M} \frac{dM}{1 + M^2 \frac{\gamma - 1}{2}} = \left| \frac{2}{M(2 + M^2(\gamma - 1))} = \frac{A}{M} + \frac{B M}{2 + M^2(\gamma - 1)} \right| = \frac{dM}{M} + \frac{(1 - \gamma) M dM}{2 + M^2(\gamma - 1)}$$

$$v = \frac{M}{\sqrt{2 + M^2 (\gamma - 1)}}$$

$$\frac{v^*}{v_0} = \frac{1}{M_0} \sqrt{\frac{2 + M_0^2 (\gamma - 1)}{\gamma + 1}} = \frac{c^*}{c_0}$$

El comportamiento de las propiedades del flujo se puede seguir también mediante Tablas y gráficas relacionadas con las ecuaciones examinadas y deducidas anteriormente, como las que presentamos a continuación, que permiten un tratamiento muy rápido del problema de flujo compresible.

XII.10.- FLUJO SIN ROZAMIENTO POR EL INTERIOR DE CONDUCTOS CON TRANSFERENCIA DE CALOR

Vamos a considerar un gas perfecto en flujo permanente por el interior de un tubería de sección constante; el rozamiento se desprecia y no se realiza ningún trabajo sobre o por el fluido. Las ecuaciones a utilizar son

$$\text{Continuidad, } G = \frac{c}{v} = c \rho \quad ; \quad a = \text{Cte}$$

$$\text{Cantidad de movimiento, } p + \rho c^2 = \text{Cte} \quad ; \quad p + \rho M^2 = \text{Cte}$$

$$\text{Ecuación energética, } i_2 - i_1 + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} = c_p (T_2 - T_1) + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} = c_p (T_{02} - T_{01})$$

en donde T_{01} y T_{02} son las temperaturas isentrópicas de estancamiento, es decir, las temperaturas que se alcanzan en una sección al pasar el flujo de una situación isentrópica al reposo.

Cuando las *pérdidas por rozamiento son nulas*, la entropía sólo puede aumentar cuando se aporta calor del exterior; las propiedades del gas varían a lo largo de la curva de Rayleigh, desplazándose, al aportar calor, hacia el punto de entropía máxima; si en este punto se produce una pequeña variación de la entalpía, la entropía no varía, y se pueden aplicar condiciones isentrópicas, siendo la velocidad del sonido c_s de la forma,

$$c_s = \sqrt{\frac{dp}{d}}$$

Este flujo se puede estudiar mediante la línea de Rayleigh, obtenida a partir de las ecuaciones de la cantidad de movimiento y continuidad para una sección recta constante, sin rozamiento. Eliminando c y diferenciando, se obtiene,

$$p + \frac{G^2}{d} = \text{Cte} \quad ; \quad \frac{dp}{d} = \frac{G^2}{2} = c^2$$

En el punto de máxima entropía de la línea de Rayleigh,

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d}}$$

prevalece, $M = 1$, por lo que se tienen condiciones sónicas. Al aportar calor al flujo supersónico se logra que el número de Mach del flujo descienda hacia, $M = 1$, y si se aporta la cantidad de calor precisa, $M = 1$. Si se aporta más calor, se produce estrangulamiento y se modifican las condiciones en el extremo aguas arriba (bloqueo a la entrada), tendiendo a reducirse el flujo másico.

Al aportar calor al flujo subsónico se logra un aumento en el número de Mach hacia valores, $M = 1$; un exceso de calor origina un estrangulamiento, y se produce un reajuste con disminución del flujo másico aguas arriba.

De la ecuación de la energía se observa que una medida de la cantidad del calor aportado, es el aumento de la presión isentrópica de estancamiento; teniendo en cuenta las ecuaciones,

$$c^2 = R T M^2 \quad ; \quad p = R T \quad ; \quad G = \frac{c}{v} \quad ; \quad p c = G R T \quad ; \quad c^2 = p M^2$$

De la ecuación de la cantidad de movimiento, $p + p M^2 = Cte$, se obtiene:

$$p_1 + p_1 M_1^2 = p_2 + p_2 M_2^2 \quad ; \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{1 + M_2^2}{1 + M_1^2}$$

que para el caso límite, $p_2 = p^*$, cuando, $M_2 = 1$, queda en la forma,

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1 + M^2}{2}$$

siendo p la presión en un punto cualquiera del conducto y M el número de Mach correspondiente.

Para régimen subsónico, si M aumenta hacia la derecha, p debe disminuir, y para régimen supersónico, si M disminuye hacia la derecha, p tiene que aumentar.

Para obtener las relaciones entre temperaturas, se parte de la ecuación de la energía,

$$c_p T_0 = \frac{R}{\gamma - 1} T_0 = \frac{R}{\gamma - 1} T + \frac{c^2}{2}$$

en la que T_0 es la temperatura isentrópica de estancamiento y T es la temperatura de la corriente libre en la misma sección; aplicándolo a las secciones 1 y 2, y dividiendo por,

$$\frac{R T_1}{\gamma - 1}$$

se tiene,

$$\frac{T_{01}}{T_1} = 1 + (\gamma - 1) \frac{M_1^2}{2} \quad \frac{T_{01}}{T_{02}} = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2} \frac{T_1}{T_2}$$

$$\frac{T_{02}}{T_2} = 1 + (\gamma - 1) \frac{M_2^2}{2}$$

La relación $\frac{T_1}{T_2}$ se puede determinar en función del número de Mach teniendo en cuenta las ecuaciones,

Gases perfectos, $\frac{T_1}{T_2} = \frac{P_1}{P_2} \frac{v_1}{v_2}$

Ecuación de continuidad, $\frac{v_1}{v_2} = \frac{c_2}{c_1}$

$$M_1 = \frac{c_1}{\sqrt{\gamma R T_1}} \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \frac{2}{1}$$

$$M_2 = \frac{c_2}{\sqrt{\gamma R T_2}}$$

Asimismo,

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \quad ; \quad \frac{2}{1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \frac{M_1}{M_2} \right)^2$$

$$\frac{T_{01}}{T_{02}} = \left(\frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \frac{M_1}{M_2} \right)^2 \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2}$$

Al aplicar esta ecuación a la sección aguas abajo donde, $T_{02} = T_0^*$, y, $M_2 = 1$, resulta para la sección aguas arriba,

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{(\gamma + 1) M^2 \{2 + (\gamma - 1) M^2\}}{(1 + \gamma M^2)^2}$$

La cantidad de calor q intercambiada por unidad de masa para, $M=1$, a la salida, es,

$$q = c_p (T_0^* - T_0)$$

FLUJO ISOTÉRMICO PERMANENTE EN TUBERÍAS LARGAS.- En el análisis del flujo isotérmico de un gas perfecto a través de tuberías largas, no se pueden aplicar las ecuaciones de las líneas de Fanno (que se aplican al flujo adiabático), ni las de Rayleigh, (que se aplican al flujo sin rozamiento), por lo que hay que desarrollar un método que permita encontrar el sentido de la variación de las propiedades con el número de Mach. Las ecuaciones adecuadas son,

Cantidad de movimiento, $\frac{dp}{p} + \frac{c^2}{2d} \frac{dx}{p} + \frac{c}{p} dc = 0$

Ecuación de estado, $pV = Cte$; $\frac{p}{\rho} = Cte$; $\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho}$

Ecuación de continuidad, $\rho c = Cte$; $\frac{dp}{p} = - \frac{dc}{c}$

Ecuación de la energía, $T_0 = T (1 + \frac{1}{2} M^2)$

Presión de estancamiento, $p_0 = p (1 + \frac{1}{2} M^2)^{-1}$

siendo,

T_0 la temperatura isentrópica de estancamiento en la sección donde la temperatura constante de la corriente libre es T y el número de Mach es M

p_0 la presión en la sección de p y M , reduciendo isentrópicamente a cero la velocidad.

De todo ello se deduce que,

$$c = c_s M = \sqrt{RT} M \quad ; \quad \frac{dc}{c} = \frac{dM}{M} = \frac{dM^2}{2M^2}$$

$$\frac{c dc}{p} = \frac{c dc}{RT} = \frac{c_s^2}{RT} M dM = M dM \quad ; \quad \frac{c^2}{p} = \frac{c^2 M^2}{RT} = M^2$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} = - \frac{dc}{c} = - \frac{dM^2}{2M^2} = \frac{M^2}{1 - M^2} \frac{dx}{2d}$$

Como dx es positivo en la dirección aguas abajo, se saca la conclusión que las propiedades varían según que M sea menor o mayor que $\sqrt{1/2}$

Para, $M < \sqrt{1/2}$, la presión y la densidad disminuyen, y la velocidad y el número de Mach aumentan.

Para, $M > \sqrt{1/2}$, se invierten los sentidos, por lo que el número de Mach tiende siempre a $\sqrt{1/2}$ en lugar de a la unidad, que es el valor a que tiende en el flujo isotérmico en tuberías.

Para determinar la dirección del intercambio térmico, se diferencia respecto T_0 la ecuación,

$$T_0 = T (1 + \frac{1}{2} M^2)$$

y se divide por ella misma, teniendo en cuenta que T es constante, obteniéndose,

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{-1}{2 + (1/2) M^2} dM^2 = \frac{-(1/2) M^4}{(1 - M^2)(2 + (1/2) M^2)} \frac{dx}{d}$$

que muestra que la temperatura isentrópica de estancamiento aumenta cuando $M < \sqrt{1/\gamma}$ lo cual indica que el calor se transfiere al fluido.

Cuando $M > \sqrt{1/\gamma}$, el intercambio de calor es desde el fluido

Teniendo en cuenta las ecuaciones,

$$p_0 = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} ; \quad \frac{dp}{p} = \frac{M^2}{1 - M^2} \frac{dx}{d}$$

se obtiene,

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{2 - (\gamma + 1) M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2} \frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{dx}{d}$$

$$\int_0^{L_{\text{máx}}} \frac{dx}{d} = - \frac{1}{M} \int_M^{1/\sqrt{\gamma}} \frac{1 - M^2}{M^2} dM^2 ; \quad \frac{L_{\text{máx}}}{d} = \frac{1 - M^2}{M^2} + \ln (M^2)$$

en la que $L_{\text{máx}}$ representa la longitud máxima del tubería; para longitudes mayores se produce estrangulamiento y disminuye el flujo másico.

La variación de presión es,

$$\int_0^{p^{*t}} \frac{dp}{p} = - \frac{1}{2} \int_M^{1/\sqrt{\gamma}} \frac{dM^2}{M^2} ; \quad \frac{p^{*t}}{p} = M \sqrt{\gamma}$$

en las que el superíndice (* t) indica las condiciones en $M = \sqrt{1/\gamma}$

M y p representan los valores en cualquier otra sección aguas arriba.

XII.11.- AERODINÁMICA COMPRESIBLE SUBSÓNICA Y TRANSÓNICA.

El parámetro fundamental que caracteriza este campo es el número de Mach. En el campo comprendido entre, $0,6 < M < 1$. los valores de c y c_s son variables de un punto a otro.

Supongamos que en una partícula infinitesimal o foco puntual de perturbación P se produce una perturbación, que se puede originar, por ejemplo, cuando una partícula material aumenta repentinamente de volumen, creando una compresión a su alrededor. Los casos que se pueden dar son los siguientes,

a) El foco de perturbación P se mantiene fijo, $c = 0$, Fig XII.17.a; si un manantial puntiforme de perturbaciones es estable, la perturbación se propaga en forma de una onda esférica; los diferentes frentes de onda constituyen esferas concéntricas.

b) El foco de perturbación se mueve con velocidad menor que la velocidad del sonido, régimen subsónico, $c < c_s$, $M < 1$, o lo que es lo mismo, con velocidad menor que la velocidad de propagación de la onda de perturbación que se origina, Fig XII.17.b; si el manantial se mueve a velocidad

subsónica, no se dan esferas concéntricas, sino esferas desplazadas porque la perturbación se aleja del manantial en la dirección del movimiento, con una velocidad que es la diferencia entre la velocidad del sonido y la velocidad del manantial, dando así lugar a ondas que se espesan por una parte.

El foco de perturbación P se mueve con velocidad c ; al cabo de un tiempo t ha recorrido un espacio, $(PP') = c t$. En la Fig XII.17.b se ha dividido el intervalo t en cuatro intervalos iguales $t/4$. En el instante $t/4$ el foco de perturbación ha recorrido una distancia, $ct/4$. La perturbación se propaga desde cada posición que ocupa el foco con la velocidad c_s , de manera que el frente de onda al transcurrir un tiempo se halla en una esfera de centro P y radio, $c_s t$. Las restantes perturbaciones se iniciaron en tiempos, $t/4$, $t/2$ y $3t/4$, más tarde, y sus ondas respectivas se encuentran en el interior de esferas de radios, $c_s t/4$, $c_s t/2$ y $3 c_s t/4$, respectivamente. En este caso la perturbación llega al punto P' antes de que llegue al mismo punto el foco que la produce.

Por lo tanto, en el caso de velocidades subsónicas, $c < c_s$, la partícula anuncia su llegada por medio de una onda de presión, que llega antes que ella, por lo que el fluido que se encuentra aguas abajo se puede adaptar, al menos parcialmente, al movimiento de la partícula.

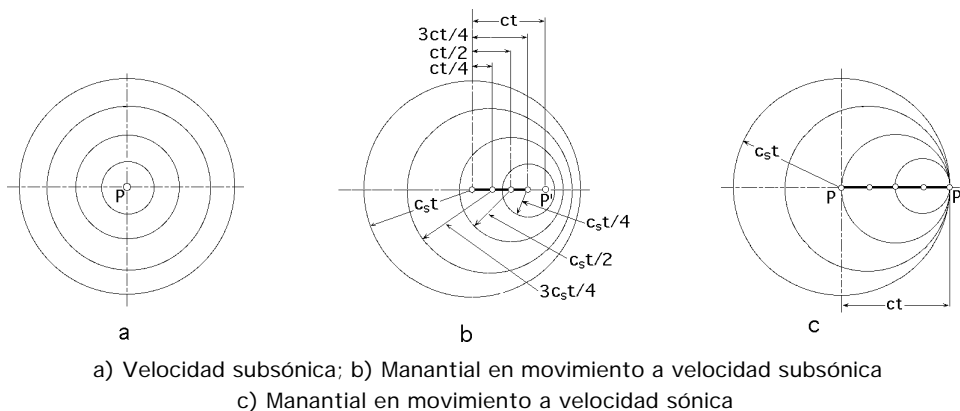


Fig XII.17.- Propagación de las perturbaciones para diversas velocidades del manantial perturbador en régimen subsónico

c) El foco de perturbación se mueve con velocidad igual a la del sonido, régimen transónico, $c = c_s$, $M = 1$, Fig XII.17c; si el manantial se mueve a velocidad sónica, las distintas esferas se tocan.

El foco puntual de perturbación llega al punto P' al mismo tiempo que la perturbación. El frente de onda es siempre tangente a un plano normal a la dirección del movimiento, llegando simultáneamente a este plano las perturbaciones originales en los diferentes puntos de la trayectoria (PP').

El teorema de Bernoulli se puede aplicar al estudio de la aerodinámica subsónica y transónica; si se supone el movimiento isentrópico se tiene que, $p = k$, y se puede deducir que el salto de presiones, entre la presión local y la no perturbada, es,

$$p = \frac{c^2}{2} \left\{ 1 + \frac{M^2}{4} + \frac{2 - M^2}{24} M^4 + \dots \right\}$$

de lo que resulta que en los puntos de parada la presión es mayor que la presión dinámica y es tanto mayor cuanto más crece M; algunos valores de p respecto de M son,

M	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9
p	1,01	1,04	1,095	1,172	1,22

Ecuación de Laplace.- La ecuación de Laplace se puede aplicar al campo de la aerodinámica, pero se transforma en una ecuación muy compleja, en derivadas parciales de segundo orden, no lineal, porque los coeficientes de las incógnitas contienen en sí mismos la incógnita.

La solución se consigue, por ejemplo, con la simplificación de linealización, en la que,

a) Hay que aplicar una transformación de coordenadas de manera que la ecuación resulte lineal en las nuevas variables.

b) Hay que admitir que las velocidades incrementales provocadas por el cuerpo en la corriente sean muy pequeñas en relación a, c y c_s (hipótesis del cuerpo delgado, poco arqueado, con un ángulo de incidencia a pequeño; método de las pequeñas perturbaciones).

Supongamos un ala de perfil biconvexo y de borde agudo, colocada en el seno de una corriente, cuya velocidad aumenta progresivamente. Mientras el flujo es lento, el fluido se comporta como si fuese incompresible, con un coeficiente de sustentación C_{w0} , pero cuando el flujo aumenta la velocidad de tal manera que el valor del número de Mach se acerca a, $M = 1$, se hace sentir la influencia de la compresibilidad, sin que, no obstante, en ningún punto del campo la velocidad sea supersónica.

La zona transónica se define como la zona del número de Mach de la aproximación en la que alrededor del perfil de ala se produce flujo subsónico y supersónico, es decir, en estas condiciones el flujo sobre el cuerpo acelera su velocidad, como sabemos, hasta alcanzar el valor sónico, $M = 1$, a pesar de que la velocidad por delante del cuerpo sea todavía subsónica, dando lugar a una representación que se consigue visualizar Fig XII.18, formándose ondas de Mach antes de que se alcance el espesor máximo del perfil; en el interior del contorno delimitado por la línea de puntos la velocidad es supersónica.

Después de haber superado la zona de máximo espesor, el flujo se hace más lento y la velocidad tiende de improviso a hacerse subsónica, en medio de una onda de choque. El número de Mach mínimo por delante del cuerpo, necesario para que aparezca una zona supersónica es el número de Mach crítico, M_{crit} , y es netamente inferior a 1.

En el campo subsónico la ecuación de Laplace es,

$$\{1 - M^2\} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

con, $1 - M^2$, positivo (ecuación de tipo elíptico, con solución regular en todo el campo) mientras en el campo transónico el segundo miembro de la ecuación no es ya igual a 0 sino que toma el valor,

$$\frac{M^2 (\quad + 1)}{c} \quad \frac{2}{x} \quad \frac{2}{x^2}$$

y no es despreciable.

La ley de semejanza de Prandtl-Glauert permite pasar de un perfil de ala delgado en una corriente incompresible (o a un determinado valor subsónico de M), a las presiones y sustentación del mismo perfil, pero para otro valor subsónico de M , considerando en una corriente compresible

un perfil cuyo espesor se ha aumentado en, $\frac{1}{\sqrt{1 - M^2}}$, por lo que,

$$C_w = \frac{C_{w0}}{\sqrt{1 - M^2}}$$

en la que M es el número de Mach de la velocidad de aproximación relativa al perfil de ala, por lo que el coeficiente C_w de sustentación aumenta cuando aumenta el número Mach hasta la zona transónica; el coeficiente de arrastre aumenta grandemente en esa zona; incluso las presiones y los coeficientes C quedan multiplicados por la misma relación. C_{w0} es el coeficiente de sustentación en flujo incompresible.

La experimentación en condiciones reales demuestra que los valores teóricos de las presiones, a partir de, $0,5 < M < 0,6$, son más elevados que los valores reales, porque se desprecia el influjo de la compresibilidad.

Más acordes resultan otras teorías, como la de von Kàrmàn-Tsien, según la cual el coeficiente de presiones en régimen compresible C_w es,

$$C_{w(0)} = \frac{C_w}{\sqrt{1 - M^2} + \frac{M^2}{1 + \sqrt{1 - M^2}} \frac{C_w}{2}}$$

En cambio, la ley de semejanzas de Gothert es exacta, mediante la cual, al variar M se pasa de un mismo cuerpo en régimen incompresible a cuerpos distintos en régimen compresible.

En el caso de alas finitas, se pasa a otras alas más delgadas, de envergadura menor y de alargamiento reducido en

$$\sqrt{1 - M^2}$$

el valor del coeficiente C_w aumenta en, $1 - M^2$, mientras la incidencia se reduce en,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - M^2}}$$

De cualquier modo, por encima de un determinado valor de M , los resultados experimentales y los teóricos son netamente divergentes, porque en los primeros la presión y el coeficiente C_w

caen bruscamente; por otra parte la teoría ignora la resistencia, es decir, se produce el fenómeno denominado crisis de la compresibilidad, que se manifiesta para valores de M tanto menores cuanto mayor es el valor local del gradiente de presión adverso y cuanto mayores son el espesor del perfil y su incidencia.

Para velocidades de aproximación grandes en la zona transónica se forma una onda de choque separada delante del perfil del ala, con flujo subsónico entre ella y la parte delantera del perfil; para M mayor, la onda de choque separada se aproxima al borde frontal del perfil; cuando llega a tocar dicho borde el flujo es supersónico en todas partes.

Si el ala tiene el borde inclinado (ala en flecha o ala delta) actúa sobre la formación de la depresión sólo la componente, $c \cos \alpha$, siendo α el ángulo de flecha del lugar de los puntos situados en el 25% de la cuerda alar, mientras, $c \sin \alpha$, da lugar solamente a una ulterior resistencia de rozamiento a lo largo de la abertura.

La crisis de la compresibilidad es prácticamente insignificante para cuerpos en forma de huso, mientras que en la interferencia recíproca entre ala (o cola) y fuselaje se nota considerablemente; por lo tanto es necesario dar al fuselaje una forma delgada en relación al acoplamiento del ala de la cola o de la cabina, de manera que en su conjunto, la forma del fuselaje no presente salientes.

XII.12.- AERODINÁMICA SUPERSÓNICA

El parámetro fundamental es el número de Mach; en régimen supersónico, $c > c_s$, $M > 1$.

Más allá de $M = 5$, se entra en la aerodinámica hipersónica. La velocidad del sonido, $c_s = dp/d\rho$, es como sabemos, la velocidad de propagación en un fluido de densidad ρ , de pequeñas perturbaciones de presión.

Si un manantial de perturbaciones se mueve a la velocidad \vec{c} supersónica, la perturbación no puede adelantarla y queda limitada en una corriente plana formada por dos ondas de Mach, al interior del cono de Mach, Fig XII.18, que tiene el vértice en el manantial y un ángulo de semiapertura, cuyo seno es,

$$\frac{1}{M} = \frac{c_s}{c}$$

por lo que, una corriente supersónica tiene la propiedad de que las perturbaciones de presión no se transmiten a la misma por delante de los puntos que las crean; una fuente de perturbación sólo puede afectar a los puntos contenidos en su cono de Mach y sólo puede ser afectada por los puntos contenidos en su anticono de Mach, obtenido prolongando las generatrices del cono más allá del vértice.

En régimen supersónico, la velocidad c del foco es mayor que la velocidad c_s del sonido; cuando el foco se encuentra en P se origina una onda esférica de presión, pero en el tiempo t que invierte el cuerpo en llegar al punto P' la partícula ha recorrido una distancia mayor que el radio de la esfera de centro P y radio $c_s t$. Al pasar el foco de perturbación por los puntos intermedios entre P y P' se originan ondas esféricas, cuyos frentes de onda en el instante t se hallan dibuja-

dos en la figura con radios $3c_s t/4$, $c_s t/2$ y $c_s t/4$ respectivamente. Así se origina un frente de onda cónico con vértice en P', Fig XII.18.

El semiángulo de este cono es,

$$= \text{arc sen } \frac{c_s t}{c t} = \text{arc sen } \frac{c_s}{c} = \text{arc sen } \frac{1}{M c_s}$$

se conoce con el nombre de ángulo de Mach, y la generatriz del mismo cono se denomina línea de Mach.

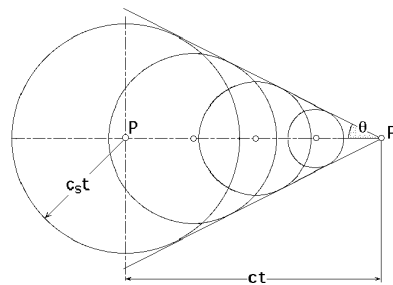


Fig XII.18.- Propagación de las perturbaciones del manantial perturbador en régimen supersónico

En la corriente supersónica la perturbación queda concentrada en el interior de este cono, llamado cono de perturbación, y no se transmite al exterior del mismo.

Mientras que en el movimiento permanente de un cuerpo en régimen subsónico se establece una distribución continua de presión y velocidad, en régimen supersónico el cono de perturbación constituye una superficie de discontinuidad. Además, las perturbaciones no se amortiguan al aumentar la distancia a los puntos que las originan.

El factor, $1 - M^2$, de la ecuación de Laplace que hemos aplicado en aerodinámica subsónica y transónica, es de valor negativo; matemáticamente esto da lugar a soluciones que presentan una discontinuidad (representada físicamente por el cono de Mach), que separa la región en la que la solución es imaginaria, de aquella en la que es real.

Supongamos que la presión en un punto de una corriente supersónica se modifica progresivamente mediante sucesivas variaciones de valor iguales a p_c . Las variaciones de presión, a velocidad supersónica se propagan en el fluido por medio de ondas de Mach. Si la presión en un punto disminuye, en él se origina una onda de expansión, M_1 , que forma el ángulo de Mach μ_1 , con la dirección de la corriente.

Un ulterior p produce análogos efectos, por lo que se tiene finalmente un abanico de ondas de expansión M_2, M_3, \dots , Fig XII.19.a.

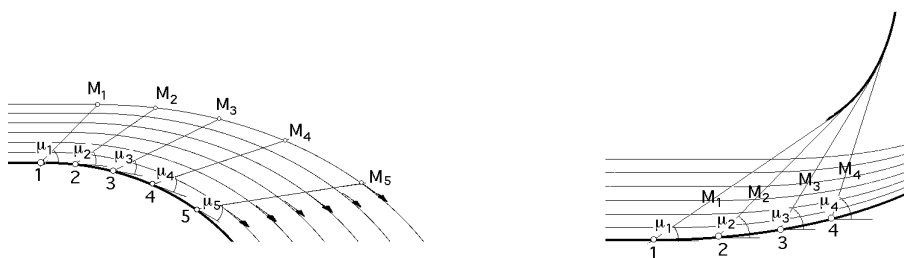


Fig XII.19.- Ondas de Mach, a) En una corriente supersónica en la que la velocidad aumenta b) En una corriente supersónica en la que la velocidad disminuye, formándose una onda de choque

En cambio, si la presión aumenta se origina una onda de compresión que forma un ángulo μ_1 , con la dirección de la corriente y la zona de la corriente estará limitada anteriormente por dicha onda. Como M disminuye, al producirse el siguiente incremento de presión p , la onda de Mach, inclinada un ángulo, $\mu_2 > \mu_1$, se desplaza hacia adelante con relación a la onda precedente y así sucesivamente. Por ello, las sucesivas ondas de compresión tienden a superponerse y a situarse según una dirección límite, menos inclinada que la primitiva onda de Mach, en la dirección de la corriente y en correspondencia con la cual se forma una onda de choque; por consiguiente, no se trata de un fenómeno gradual como en el caso anterior, sino discontinuo, Fig XII.19.b, con un brusco salto de presión, temperatura y densidad Fig XII.20.

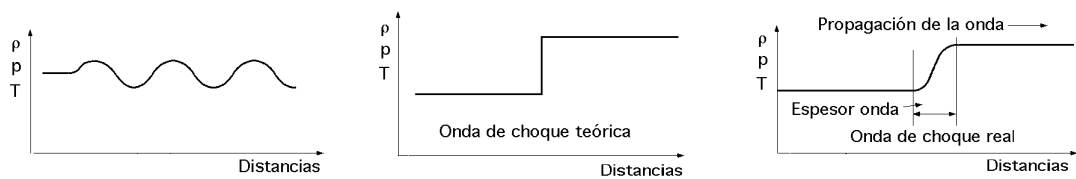
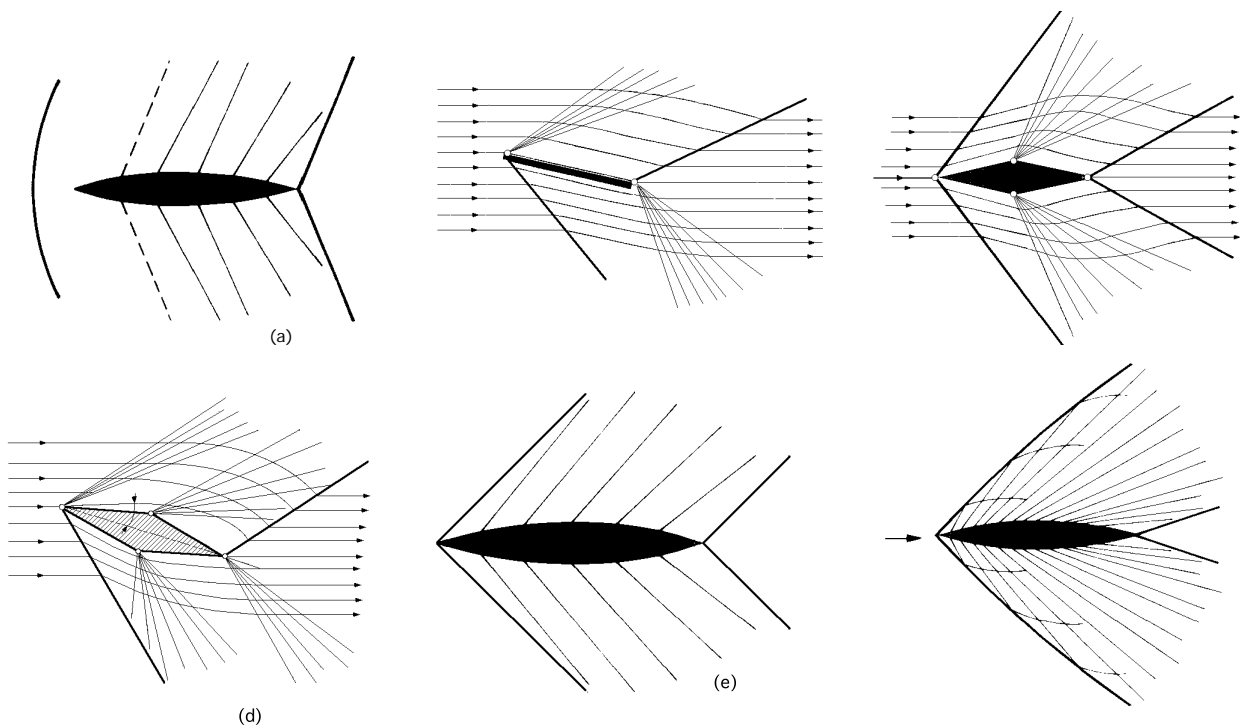


Fig XII.20.- Variación de la presión, temperatura y densidad en la formación de la onda de choque



a) Onda de choque separada, en el caso de un cuerpo de perfil no agudo; b) Perfil plano inclinado (onda de choque con línea continua, ondas de expansión con línea de trazos); c) Perfil de doble diedro con ángulo de incidencia nulo; d) Perfil de doble diedro con ángulo de incidencia mayor que el semiángulo del anterior; e) Perfil curvo (Forma teórica de la onda inicial de choque y de las ondas de expansión); f) Perfil curvo (Forma real de la onda inicial de choque y de las ondas de expansión)

Fig XII.21.- Aerodinámica supersónica

En el interior de la onda de choque, el aire se comprime y se calienta; el calor (absorbido a baja temperatura) es devuelto a temperatura más alta, por lo que, según el Segundo Principio de la Termodinámica, tiene lugar una pérdida de energía mecánica que se disipa en forma de

calor con aumento de entropía y aparición de una resistencia debida al choque (resistencia de choque) que es máxima para la onda de choque normal, es decir, perpendicular a la dirección de la velocidad.

La disipación no se podría efectuar si en la onda de choque, a causa del fuerte gradiente de velocidad, no se manifestara un rozamiento considerable.

Las relaciones entre algunas magnitudes antes y después de la onda de choque se pueden obtener no sólo analíticamente, sino también por medio de la construcción gráfica de la polar de choque (Busemann).

La onda de choque no sólo puede ser normal sino también inclinada; si el cuerpo no es agudo, la onda se separa (onda de choque separada Fig XII.21.a); en el centro se hace normal, y detrás de la misma la velocidad es subsónica.

No obstante, a velocidades supersónicas elevadas, a veces es necesario renunciar al borde agudo y admitir la fuerte resistencia de onda, con el fin de evitar calentamientos excesivos a causa del rozamiento.

Si consideramos un perfil plano inclinado, en el borde de ataque se forman, por un lado un abanico de ondas de expansión y por el otro una onda de choque, mientras que en el de salida sucede lo contrario Fig XII.21.b; si el perfil es de doble diedro con un ángulo de incidencia nulo se forman dos ondas de choque en el borde de ataque, ondas de expansión en las aristas intermedias y dos ondas de choque en el borde de salida, Fig XII.21.c; si el ángulo de incidencia es mayor que el semiángulo del diedro anterior se obtienen resultados análogos, Fig XII.21.d, al caso del perfil plano inclinado.

Si el perfil es curvo, en la realidad no se obtiene la onda rectilínea de la Fig XII.21.e, sino una onda curvada Fig XII.21.f, a causa de la interferencia entre la onda de choque inicial con las de expansión.

La teoría de Busemann basada en las teorías de la onda de choque y de la corriente en expansión permite un cálculo preciso (rozamiento aparte) de las presiones que actúan sobre el perfil supersónico cuando todo el campo es supersónico, por lo que, por integración, permite obtener los coeficientes de sustentación y de resistencia (resistencia de onda y resistencia de choque).

En cuanto a los cuerpos cónicos, presentan la característica de que todas las magnitudes de la corriente son constantes a lo largo de cada radio que parte del centro del campo, por lo que, cortando el cono normalmente al eje, el campo aerodinámico anterior al corte no se ve afectado en corriente supersónica por las variaciones que se producen en la parte posterior al corte.

El campo cónico se puede estudiar con el método de la hodógrafa (Busemann).

En el caso de cuerpos de revolución, la onda de choque que se forma en la punta se suele considerar, inicialmente, cónica con la inclinación debida al ángulo de desviación inicial (es decir, se sustituye en una cierta longitud el perfil del cuerpo por su tangente en la punta); en correspondencia el campo entre onda y cuerpo es cónico.

Para cada radio se definen las componentes de la velocidad y el número de Mach, de manera que puede trazarse la característica que parte del cuerpo en el punto en el que la generatriz deja de ser cónica, hasta el encuentro con la onda de choque. A partir de ella se empieza la construc-

ción de toda la red de características.

La aproximación del resultado se puede aumentar haciendo las mallas más pequeñas.

XII.13.- AERODINÁMICA HIPERSÓNICA

A velocidades supersónicas elevadas, $M > 5$, los fenómenos fluidodinámicos se modifican parcialmente a causa de la aparición de nuevos fenómenos físicos y químicos debidos a la transformación de la energía contenida en el gas, los cuales difieren de las transformaciones termodinámicas que tienen lugar en el fluido compresible.

El estudio de estos fenómenos presenta mayores dificultades por los siguientes motivos,

a) *No puede linealizarse la ecuación del movimiento*

b) *A causa de la fuerte curvatura de las ondas de choque, los elevados gradientes de entropía impiden suponer que el movimiento sea isentrópico*

c) *La interacción entre la capa límite y la corriente exterior es muy importante*

Los fenómenos físicos y químicos dependen de las temperaturas elevadas que se alcanzan detrás de la onda de choque y en la capa límite, las cuales excitan los grados de libertad y vibración de las moléculas en átomos y producen la ionización de ambos y también la formación de nuevos compuestos que no se encuentran a baja temperatura, pasándose a una nueva disciplina denominada aerotermoquímica.

Si se desprecian la conducción de calor (flujo adiabático), la temperatura de un punto de estancamiento T_0 es,

$$T_0 = T + \frac{c^2}{2 c_p} = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

donde T es la temperatura estática de la corriente libre del fluido a la velocidad \bar{c} respecto a un cuerpo inmerso en el fluido. Para el aire, $\gamma = 1,4$, se tiene,

$$T_0 = T (1 + 0,2 M^2)$$

Para $M = 5$, la temperatura de estancamiento es 6 veces la temperatura estática de la corriente fluida.

Por otra parte, los diferentes grupos moleculares y atómicos que se forman con elevados gradientes de concentración, temperatura y presión, dan lugar a procesos de difusión que se deben estudiar con los métodos de la gasodinámica de las mezclas, por lo que se deben aplicar los conceptos de la teoría cinética de los gases, aún en el caso de que el medio sea continuo.

Si a los grados de libertad de traslación y rotación de las moléculas también se añade el de vibración, con las consiguientes disociaciones e ionizaciones, varían los calores específicos y la relación entre los mismos.

Las transferencias de energía para obtener la disociación, recomposición, ionización o su anulación requieren cierto tiempo (tiempo de reacción), del que depende el estado de equilibrio termodinámico (cuasi equilibrio o no equilibrio) del gas.

La forma de las corrientes hipersónicas se distingue de la que presentan las supersónicas por la mayor proximidad de la onda de choque al cuerpo; el espacio comprendido entre ambos es la capa de choque.

Si el cuerpo no es suficientemente agudo la onda está separada y detrás de ella la velocidad es subsónica.

La fuerte curvatura del choque da lugar a un fuerte gradiente transversal de entropía y, por lo tanto, a una corriente rotacional; esta estela entrópica, más ancha cuando la onda está separada, contiene en su interior la estela viscosa debida a la separación de la corriente.

Si los tiempos de reacción son suficientemente pequeños o las correspondientes velocidades suficientemente grandes, el estado del gas es muy parecido al que corresponde al equilibrio termodinámico y la mayor parte de la transferencia de energía tiene lugar en la onda de choque, después de la cual el gas puede considerarse en equilibrio.

Si los tiempos son muy grandes o las correspondientes velocidades muy pequeñas, la transferencia de energía sólo tiene lugar en una pequeña parte en la onda de choque, y continúa en el fluido posterior a la misma, pero la energía transferida en todas partes es pequeña y, por consiguiente despreciable, el gas se encuentra en estado estacionario y su comportamiento obedece a la ecuación de estado,

$$p v = (1 + A) R T$$

con un porcentaje A de moléculas disociadas que se mantiene constante mientras el proceso es estacionario.

Para valores de M grandes, la corriente también se congela, en el sentido de que su forma y los coeficientes de presión, como se confirma experimentalmente, se hacen independientes de M.

Por lo que se refiere a los métodos de cálculo debe observarse que, como en el caso de corriente transónica, el sistema de linealizar la ecuación del movimiento en la hipótesis de pequeñas perturbaciones no puede aplicarse, ya que los términos térmicos en M (que es grande) del segundo miembro, no son despreciables. No obstante, es posible deducir leyes de semejanza (Tsien) que, conocido un resultado para un caso particular, permiten determinar a partir de él otro resultado para otro caso, a igualdad de valor de los parámetros de semejanza.

Dado que los cuerpos utilizados a velocidades hipersónicas son más o menos romos por su parte anterior, para evitar su deterioro por el aumento de temperatura debido al calentamiento aerodinámico, se hace uso frecuentemente de teorías distintas de la de las pequeñas perturbaciones, una de las cuales es la newtoniana, basada en la hipótesis de la capa de choque muy delgada.

Newton supuso para el fluido una constitución corpuscular y estudió el caso de la placa plana inclinada un ángulo α , admitiendo que el choque fuera inelástico y manteniendo la velocidad sin perturbar; con estas hipótesis, la presión que actúa sobre la placa se expresa por,

$$p = \rho u_0^2 \sin^2 \alpha$$

relación que resulta errónea en el caso de velocidades normales; sin embargo está muy próxima

a la realidad para valores elevados de M y para una capa de choque delgada y no viscosa, cuando la superficie de choque tiene aproximadamente la misma inclinación que la del cuerpo.

En el caso de velocidades hipersónicas, dada la baja densidad y la elevada temperatura, la capa límite es muy gruesa, dando lugar a una modificación del perfil del cuerpo, lo que origina la formación de una onda de choque, aun en el caso de una placa plana aguda de incidencia nula.

Entre esta onda de choque y la capa límite existe una zona en la que tiene lugar una interferencia entre la capa límite y la corriente exterior que modifica la curva de presiones sobre el cuerpo, en este caso, la placa plana; así, en lugar de una presión constante p , presenta un fuerte gradiente de presión (interacción hipersónica), definido por el parámetro,

$$\frac{P_w}{P} = 1 + 0,48 x \quad ; \quad x < 10$$

$$x = \sqrt{\frac{C}{Re}} M^3 \quad ; \quad C = \frac{T}{T_0} - 1 \quad ; \quad \frac{T_0}{T} = 1 + 0,198 (x - 1) M^2$$

siendo μ la viscosidad dinámica, γ el coeficiente adiabático y T_0 condiciones de estancamiento.

En un fluido real, debido a la presencia de la viscosidad, el calor desarrollado en la capa límite por rozamiento produce un calentamiento aerodinámico que predomina en el diseño de aviones avanzados.

Este problema se puede resolver por algunos métodos, como,

a) *Sumidero de calor, que emplea una masa refrigerante que absorbe el calor generado sin llegar a sobrepasar la temperatura de los materiales.*

b) *Método de ablación, que consiste en fabricar los bordes exteriores delanteros con materiales malos conductores del calor (aislantes), de forma que fundan o sublimen mientras la superficie interior, a proteger, permanezca fría.*

LINEA DE RAYLEIGH

Flujo compresible unidimensional sin fricción ($\gamma=1,0$) Flujo compresible unidimensional sin fricción ($\gamma=1,1$)

M	$\frac{T_0}{T} = \frac{T}{T^*}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{p_0}{p_0^*}$	$\frac{V}{V^*}$	M	$\frac{T_0}{T_0^*}$	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{p_0}{p_0^*}$	$\frac{V}{V^*}$
0,00	0	2	1,213	0	0,00	0	0	2,1	1,228	0
0,05	0,00995	1,995	1,212	0,0050	0,05	0,01044	0,0109	2,094	1,226	0,00524
0,10	0,03921	1,980	1,207	0,0198	0,10	0,04111	0,0432	2,077	1,221	0,02077
0,15	0,03603	1,956	1,200	0,0440	0,15	0,09009	0,0945	2,049	1,213	0,04611
0,20	0,14793	1,923	1,190	0,0769	0,20	0,15444	0,1618	2,011	1,203	0,03046
0,25	0,2215	1,882	1,178	0,1176	0,25	0,2305	0,2413	1,965	1,190	0,1228
0,30	0,3030	1,835	1,164	0,1651	0,30	0,3144	0,3286	1,911	1,174	0,1720
0,35	0,3839	1,782	1,149	0,2183	0,35	0,4020	0,4195	1,851	1,157	0,2267
0,40	0,4756	1,724	1,133	0,2758	0,40	0,4898	0,5102	1,786	1,140	0,2857
0,45	0,5602	1,663	1,116	0,3363	0,45	0,5746	0,5973	1,717	1,122	0,3478
0,50	0,6400	1,600	1,0997	0,4000	0,50	0,6540	0,6782	1,647	1,104	0,4118
0,55	0,7132	1,536	1,0334	0,4645	0,55	0,7261	0,7510	1,576	1,0367	0,4766
0,60	0,7735	1,471	1,0679	0,5294	0,60	0,7898	0,8147	1,504	1,0702	0,5416
0,65	0,8352	1,406	1,0534	0,5940	0,65	0,8446	0,8634	1,434	1,0550	0,6057
0,70	0,8823	1,342	1,0402	0,6577	0,70	0,8902	0,9123	1,365	1,0412	0,6686
0,75	0,9216	1,280	1,0285	0,7200	0,75	0,9270	0,9467	1,297	1,0291	0,7297
0,80	0,9518	1,220	1,0186	0,7805	0,80	0,9554	0,9720	1,232	1,0189	0,7887
0,85	0,9740	1,161	1,0107	0,8389	0,85	0,9761	0,9892	1,170	1,0109	0,8453
0,90	0,9890	1,105	1,0048	0,8950	0,90	0,9899	0,9989	1,111	1,0050	0,8995
0,95	0,9974	1,0512	1,0012	0,9488	0,95	0,9976	1,0073	1,0538	1,0013	0,9511
1,00	1	1	1	1	1,00	1	1	1	1	1
1,05	0,9976	0,9512	1,0013	1,0488	1,05	0,9979	0,9930	0,9490	1,0013	1,0463
1,10	0,9910	0,9049	1,0052	1,0951	1,10	0,9919	0,9821	0,9009	1,0051	1,0901
1,15	0,9807	0,8611	1,0118	1,1389	1,15	0,9827	0,9679	0,8555	1,0116	1,1314
1,20	0,9675	0,8197	1,0214	1,1802	1,20	0,9710	0,9511	0,8127	1,0209	1,1703
1,25	0,9518	0,7805	1,034	1,220	1,25	0,9572	0,9322	0,7724	1,0331	1,207
1,30	0,9342	0,7435	1,050	1,257	1,30	0,9418	0,9118	0,7345	1,0483	1,241
1,35	0,9151	0,7086	1,069	1,291	1,35	0,9251	0,8902	0,6989	1,0665	1,273
1,40	0,8948	0,6757	1,092	1,324	1,40	0,9074	0,8678	0,6654	1,088	1,304
1,45	0,8737	0,6447	1,119	1,355	1,45	0,8892	0,8449	0,6339	1,113	1,333
1,50	0,8521	0,6154	1,150	1,384	1,50	0,8706	0,8217	0,6043	1,141	1,360
1,55	0,8301	0,5878	1,186	1,412	1,55	0,8518	0,7984	0,5765	1,173	1,385
1,60	0,8030	0,5618	1,226	1,438	1,60	0,8329	0,7753	0,5503	1,210	1,409
1,65	0,7859	0,5373	1,271	1,463	1,65	0,8141	0,7524	0,5257	1,251	1,431
1,70	0,7639	0,5141	1,323	1,486	1,70	0,7955	0,7298	0,5025	1,297	1,452
1,75	0,7422	0,4923	1,381	1,508	1,75	0,7771	0,7076	0,4807	1,347	1,472
1,80	0,7209	0,4717	1,446	1,528	1,80	0,7591	0,6859	0,4601	1,403	1,491
1,85	0,7000	0,4522	1,519	1,547	1,85	0,7415	0,6648	0,4407	1,465	1,508
1,90	0,6795	0,4338	1,600	1,560	1,90	0,7243	0,6443	0,4224	1,532	1,525
1,95	0,6595	0,4164	1,691	1,584	1,95	0,7076	0,6243	0,4052	1,607	1,541
2,00	0,6400	0,4000	1,793	1,601	2,00	0,6914	0,6049	0,3889	1,639	1,556
2,05	0,6211	0,3844	1,907	1,601	2,05	0,6756	0,5562	0,3735	1,780	1,570
2,10	0,6027	0,3697	2,034	1,630	2,10	0,6603	0,5681	0,3589	1,879	1,583
2,15	0,5849	0,3557	2,176	1,644	2,15	0,6456	0,5506	0,3451	1,987	1,595
2,20	0,5677	0,3425	2,336	1,657	2,20	0,6313	0,5337	0,3321	2,106	1,607
2,25	0,5510	0,3299	2,515	1,670	2,25	0,6172	0,5174	0,3197	2,237	1,618
2,30	0,5348	0,3179	2,716	1,682	2,30	0,6042	0,5017	0,3097	2,380	1,629
2,35	0,5192	0,3066	2,942	1,682	2,35	0,5914	0,4866	0,2968	2,537	1,639
2,40	0,5042	0,2959	3,197	1,704	2,40	0,5750	0,4720	0,2863	2,709	1,649
2,45	0,4397	0,2857	3,484	1,714	2,45	0,5671	0,4550	0,2763	2,897	1,658
2,50	0,4757	0,2759	3,808	1,724	2,50	0,5556	0,4444	0,2667	3,104	1,667
2,55	0,4621	0,2666	4,175	1,733	2,55	0,5445	0,4314	0,2576	3,332	1,675
2,60	0,4490	0,2577	4,591	1,742	2,60	0,5335	0,4189	0,2489	3,551	1,683
2,65	0,4364	0,2493	5,064	1,751	2,65	0,5235	0,4068	0,2406	3,555	1,690
2,70	0,4243	0,2413	5,602	1,759	2,70	0,5136	0,3552	0,2328	4,156	1,697
2,75	0,4126	0,2336	6,215	1,768	2,75	0,5041	0,3840	0,2253	4,487	1,704
2,80	0,4013	0,2262	6,916	1,774	2,80	0,4949	0,3733	0,2182	4,551	1,711
2,85	0,3904	0,2192	7,719	1,781	2,85	0,4860	0,3629	0,2114	5,251	1,717
2,90	0,3799	0,2125	8,640	1,787	2,90	0,4775	0,3525	0,2049	5,652	1,723
2,95	0,3698	0,2061	9,699	1,794	2,95	0,4693	0,3433	0,1986	6,176	1,729
3,00	0,3600	0,2000	10,920	1,800	3,00	0,4613	0,3341	0,1927	6,71	1,734
3,50	0,2791	0,1509	41,850	1,849	3,50	0,3960	0,2575	0,1451	16,26	1,777
4,00	0,2215	0,1176	212,71	1,882	4,00	0,3496	0,2040	0,1129	42,42	1,806
4,50	0,1794	0,0941	1425	1,906	4,50	0,3160	0,1648	0,0902	115,7	1,827
5	0,1479	0,0769	12519	1,923	5	0,2909	0,1357	0,0737	322,33	1,842
6	0,1052	0,0541	2150000	1,946	6	0,2565	0,0963	0,0517	2508	1,862
7	0,0784	0,0400	1,06e+9	1,960	7	0,2356	0,07169	0,03525	18430	1,874
8	0,06099	0,03077	1,47e+12	1,969	8	0,2215	0,05536	0,02941	123000	1,882
9	0,04818	0,02439	5,74e+14	1,976	9	0,2116	0,04400	0,02331	743000	1,888
10	0,03921	0,0198	6,23e+19	1,980	10	0,2045	0,03575	0,01892	4010000	1,892
	0	0		2		0,1736	0	0		1,909

LINEA DE RAYLEIGH

Flujo compresible unidimensional sin fricción
($\gamma=1,2$)

Flujo compresible unidimensional sin fricción
($\gamma=1,3$)

M	T_0/T_0^*	T/T^*	p/p^*	ρ/ρ_0^*	V/V^*	M	T_0/T_0^*	T/T^*	p/p^*	ρ/ρ_0^*	V/V^*
0,00	0	0	2,2	1,242	0	0,00	0	0	2,3	1,255	0
0,05	0,0109	0,01203	2,193	1,239	0,0054	0,05	0,0114	0,0131	2,293	1,253	0,00573
0,10	0,0430	0,04726	2,173	1,234	0,0217	0,10	0,0449	0,0515	2,270	1,247	0,02270
0,15	0,0941	0,10325	2,141	1,226	0,0482	0,15	0,0980	0,1124	2,234	1,237	0,05028
0,20	0,1609	0,17627	2,099	1,214	0,0839	0,20	0,1673	0,1912	2,186	1,224	0,08745
0,25	0,2395	0,2618	2,047	1,199	0,1279	0,25	0,2482	0,2828	2,127	1,209	0,1329
0,30	0,3255	0,3548	1,986	1,183	0,1787	0,30	0,3363	0,3816	2,059	1,191	0,1853
0,35	0,4147	0,4507	1,918	1,165	0,235	0,35	0,4270	0,4822	1,984	1,172	0,2430
0,40	0,5034	0,5450	1,846	1,146	0,2953	0,40	0,5165	0,5800	1,904	1,152	0,3046
0,45	0,5884	0,6343	1,770	1,127	0,3584	0,45	0,6015	0,6713	1,821	1,131	0,3687
0,50	0,6672	0,7160	1,692	1,1078	0,4231	0,50	0,6796	0,7533	1,736	1,112	0,4340
0,55	0,7381	0,7881	1,614	1,0895	0,4884	0,55	0,7494	0,8244	1,651	1,0919	0,4994
0,60	0,8003	0,8497	1,536	1,0722	0,5531	0,60	0,8099	0,8837	1,567	1,0739	0,5640
0,65	0,8531	0,9004	1,460	1,0563	0,6168	0,65	0,8611	0,9312	1,485	1,0574	0,6272
0,70	0,8969	0,9405	1,385	1,0420	0,6788	0,70	0,9029	0,9673	1,405	1,0426	0,6885
0,75	0,9318	0,9704	1,313	1,0296	0,7388	0,75	0,9361	0,9928	1,328	1,0299	0,7473
0,80	0,9585	0,9910	1,244	1,0191	0,7964	0,80	0,9614	1,0088	1,255	1,0193	0,8035
0,85	0,9779	1,0032	1,178	1,0109	0,8514	0,85	0,9795	1,0163	1,186	1,0109	0,8569
0,90	0,9907	1,0081	1,115	1,0049	0,9037	0,90	0,9914	1,0166	1,120	1,0049	0,9075
0,95	0,9978	1,0067	1,0562	1,0012	0,9532	0,95	0,9980	1,0108	1,0583	1,0012	0,9552
1,00	1,0000	1	1	1	1	1,00	1,0000	1	1	1	1
1,05	0,9981	0,9888	0,9471	1,0013	1,0441	1,05	0,9982	0,9851	0,9452	1,0012	1,0421
1,10	0,9927	0,9741	0,8972	1,0050	1,0856	1,10	0,9933	0,9669	0,8939	1,0049	1,0816
1,15	0,9845	0,9564	0,8504	1,0114	1,247	1,15	0,9859	0,9461	0,8458	1,0111	1,1186
1,20	0,9740	0,9365	0,8065	1,0204	1,163	1,20	0,9765	0,9235	0,8008	1,0199	1,1532
1,25	0,9617	0,9149	0,7653	1,0322	1,196	1,25	0,9656	0,8996	0,7588	1,0312	1,186
1,30	0,9481	0,8921	0,7266	1,0467	1,228	1,30	0,9534	0,8747	0,7194	1,0451	1,216
1,35	0,9334	0,8685	0,6903	1,0640	1,258	1,35	0,9404	0,8493	0,6826	1,0617	1,244
1,40	0,9180	0,8443	0,6563	1,0843	1,286	1,40	0,9268	0,8237	0,6483	1,0809	1,27
1,45	0,9021	0,8199	0,6245	1,1077	1,313	1,45	0,9128	0,7980	0,6161	1,1028	1,295
1,50	0,8859	0,7955	0,5946	1,134	1,338	1,50	0,8986	0,7726	0,5860	1,128	1,318
1,55	0,8695	0,7712	0,5666	1,164	1,361	1,55	0,8843	0,7475	0,5578	1,155	1,340
1,60	0,8532	0,7473	0,5403	1,197	1,383	1,60	0,8701	0,7230	0,5314	1,185	1,360
1,65	0,8370	0,7237	0,5156	1,234	1,404	1,65	0,8560	0,6990	0,5067	1,219	1,379
1,70	0,8211	0,7007	0,4924	1,275	1,423	1,70	0,8421	0,6756	0,4835	1,256	1,397
1,75	0,8054	0,6782	0,4706	1,320	1,441	1,75	0,8285	0,6529	0,4617	1,296	1,414
1,80	0,7900	0,6563	0,4501	1,369	1,458	1,80	0,8153	0,6309	0,4413	1,340	1,430
1,85	0,7750	0,6351	0,4308	1,422	1,474	1,85	0,8024	0,6097	0,4221	1,387	1,445
1,90	0,7604	0,6146	0,4126	1,480	1,490	1,90	0,7898	0,5882	0,4040	1,438	1,459
1,95	0,7462	0,5947	0,3955	1,543	1,504	1,95	0,7776	0,5695	0,3870	1,493	1,472
2,00	0,7325	0,5755	0,3793	1,612	1,517	2,00	0,7655	0,5505	0,3710	1,552	1,484
2,05	0,7192	0,557	0,3641	1,687	1,530	2,05	0,7545	0,5322	0,3559	1,615	1,495
2,10	0,7063	0,5391	0,3497	1,767	1,542	2,10	0,7435	0,5146	0,3416	1,683	1,506
2,15	0,6939	0,5219	0,336	1,854	1,553	2,15	0,7329	0,4977	0,3281	1,755	1,517
2,20	0,6819	0,5054	0,3231	1,948	1,564	2,20	0,7227	0,4815	0,3154	1,832	1,527
2,25	0,6703	0,4895	0,3109	2,050	1,574	2,25	0,7129	0,4659	0,3034	1,915	1,536
2,30	0,6591	0,4742	0,2994	2,159	1,584	2,30	0,7034	0,4510	0,2920	2,003	1,545
2,35	0,6484	0,4595	0,2884	2,277	1,593	2,35	0,6943	0,4367	0,2812	2,097	1,553
2,40	0,6381	0,4453	0,278	2,405	1,602	2,40	0,6855	0,4229	0,2710	2,197	1,561
2,45	0,6281	0,4317	0,2682	2,542	1,610	2,45	0,6771	0,4097	0,2613	2,303	1,568
2,50	0,6185	0,4187	0,2588	2,690	1,618	2,50	0,6690	0,3971	0,2521	2,416	1,575
2,55	0,6093	0,4062	0,2499	2,849	1,625	2,55	0,6612	0,3850	0,2433	2,536	1,582
2,60	0,6004	0,3941	0,2414	3,021	1,632	2,60	0,6537	0,3733	0,2350	2,664	1,588
2,65	0,5918	0,3825	0,2334	3,205	1,639	2,65	0,6465	0,3621	0,2271	2,800	1,594
2,70	0,5836	0,3713	0,2257	3,403	1,645	2,70	0,6396	0,3511	0,2195	2,944	1,600
2,75	0,5757	0,3606	0,2184	3,617	1,651	2,75	0,6329	0,3410	0,2123	3,056	1,606
2,80	0,5681	0,3503	0,2114	3,847	1,657	2,80	0,6265	0,3311	0,2055	3,258	1,611
2,85	0,5603	0,3404	0,2047	4,094	1,663	2,85	0,6203	0,3216	0,199	3,429	1,616
2,90	0,5537	0,3309	0,1932	4,359	1,668	2,90	0,6144	0,3124	0,1928	3,611	1,621
2,95	0,5469	0,3217	0,1923	4,644	1,673	2,95	0,6087	0,3036	0,1868	3,804	1,626
3,00	0,5404	0,3128	0,1864	4,951	1,678	3,00	0,6032	0,2952	0,1811	4,007	1,63
3,50	0,4865	0,2405	0,1401	9,59	1,717	3,50	0,5582	0,2262	0,1359	6,806	1,665
4,00	0,4436	0,1898	0,1089	18,99	1,743	4,00	0,5265	0,1781	0,1055	11,57	1,688
4,50	0,4211	0,1531	0,08696	37,61	1,761	4,50	0,5037	0,1435	0,08417	19,44	1,704
5	0,4006	0,1259	0,07097	73,64	1,774	5	0,4867	0,1178	0,06866	32,06	1,716
6	0,3730	0,8919	0,04977	266,2	1,792	6	0,4639	0,08335	0,04812	76,97	1,732
7	0,3557	0,6632	0,03679	875,9	1,803	7	0,4496	0,06192	0,03555	191,3	1,742
8	0,3443	0,05118	0,02828	2621	1,810	8	0,4402	0,04775	0,02732	413,4	1,748
9	0,3363	0,04065	0,02240	7181	1,815	9	0,4336	0,03792	0,02164	833,4	1,753
10	0,3306	0,03306	0,01818	18182	1,818	10	0,4289	0,03032	0,01756	1582	1,756
	0,3056	0	0		1,833		0,4083	0	0		1,769

LINEA DE RAYLEIGH.- Flujo compresible unidimensional sin fricción ($\gamma=1,67$)

M	T_0/T_0^*	T/T^*	p/p^*	p_0/p_0^*	V/V^*	M	T_0/T_0^*	T/T^*	p/p^*	p_0/p_0^*
0,00	0	0	2,67	1,299	0	1,75	0,8862	0,5840	0,4367	1,235
0,05	0,01325	0,01767	2,659	1,297	0,00665	1,80	0,8779	0,5620	0,4165	1,266
0,10	0,05183	0,06896	2,626	1,289	0,02626	1,85	0,8699	0,5410	0,3976	1,299
0,15	0,11243	0,1490	2,573	1,276	0,05790	1,90	0,8621	0,5209	0,3799	1,334
0,20	0,1902	0,2506	2,503	1,259	0,10011	1,95	0,8546	0,5018	0,3633	1,370
0,25	0,2794	0,3653	2,419	1,239	0,1511	2,00	0,8474	0,4835	0,3477	1,408
0,30	0,3742	0,4849	2,321	1,216	0,2089	2,05	0,8405	0,4660	0,3330	1,448
0,35	0,4693	0,6018	2,216	1,192	0,2715	2,10	0,8338	0,4493	0,3192	1,490
0,40	0,5606	0,7103	2,107	1,168	0,3371	2,15	0,8274	0,4334	0,3062	1,534
0,45	0,6448	0,8062	1,995	1,144	0,4040	2,20	0,8213	0,4183	0,2940	1,580
0,50	0,7201	0,8870	1,884	1,120	0,4709	2,25	0,8154	0,4038	0,2824	1,628
0,55	0,7853	0,9519	1,774	1,0981	0,5366	2,30	0,8097	0,3899	0,2715	1,678
0,60	0,8402	1,0010	1,667	1,0778	0,6003	2,35	0,8043	0,3767	0,2612	1,729
0,65	0,8853	1,0354	1,565	1,0597	0,6614	2,40	0,7991	0,3641	0,2514	1,783
0,70	0,9213	1,0565	1,468	1,0438	0,7195	2,45	0,7941	0,3521	0,2422	1,839
0,75	0,9491	1,0662	1,377	1,0303	0,7744	2,50	0,7893	0,3406	0,2334	1,897
0,80	0,9697	1,0660	1,291	1,0193	0,8260	2,55	0,7847	0,3296	0,2251	1,956
0,85	0,9842	1,0578	1,210	1,0108	0,8742	2,60	0,7803	0,3191	0,2173	2,018
0,90	0,9935	1,0432	1,135	1,0048	0,9192	2,65	0,7761	0,309	0,2098	2,082
0,95	0,9985	1,0235	1,0649	1,0012	0,9611	2,70	0,7721	0,2994	0,2027	2,148
1,00	1	1	1	1	1	2,75	0,7682	0,2902	0,1959	2,216
1,05	0,9987	0,9736	0,9398	1,0012	1,0361	2,80	0,7644	0,2814	0,1895	2,287
1,10	0,9952	0,9454	0,8839	1,0046	1,0695	2,85	0,7608	0,273	0,1834	2,360
1,15	0,9899	0,9158	0,8321	1,0103	1,1005	2,90	0,7574	0,2649	0,1775	2,435
1,20	0,9833	0,8855	0,7842	1,0181	1,1292	2,95	0,7541	0,2571	0,1719	2,512
1,25	0,9757	0,8550	0,7397	1,028	1,156	3	0,7509	0,2497	0,1666	2,587
1,30	0,9674	0,8246	0,6985	1,040	1,181	3,5	0,7251	0,1897	0,1244	3,521
1,35	0,9586	0,7946	0,6603	1,054	1,204	4	0,7072	0,1484	0,09632	4,716
1,40	0,9195	0,7652	0,6249	1,070	1,225	4,5	0,6943	0,1191	0,07669	6,213
1,45	0,9403	0,7365	0,5919	1,088	1,245	5	0,6848	0,0975	0,06246	8,044
1,60	0,931	0,7087	0,5612	1,108	1,263	6	0,6721	0,0687	0,04368	12,86
1,65	0,9217	0,6818	0,5327	1,130	1,280	7	0,6642	0,05092	0,03224	19,44
1,60	0,9125	0,6559	0,5062	1,154	1,296	8	0,659	0,0392	0,02475	28,07
1,65	0,9035	0,6309	0,4814	1,179	1,311	9	0,6553	0,0311	0,01959	39,05
1,70	0,8947	0,6069	0,4583	1,206	1,324	10	0,6528	0,02526	0,01589	52,66
							0,6414	0	0	

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 + \frac{-1}{2} M^2\right]^{-(1-\gamma)} ; \quad \frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{1+\gamma}{2 \left[1 + \frac{-1}{2} M^2\right]}} ; \quad \frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 \left[1 + \frac{-1}{2} M^2\right]}{1+\gamma}\right]^{(1-\gamma)/2}$$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{-1}{2} M^2} ; \quad \frac{T}{T^*} = \frac{1+\gamma}{2 \left(1 + \frac{-1}{2} M^2\right)}$$

$$M^* = \frac{V}{V^*} = M \sqrt{\frac{1+\gamma}{2 \left(1 + \frac{-1}{2} M^2\right)}}$$

Las temperaturas de las Tablas vienen dadas en (°F) absolutos: (°K) = {(°F) x 0,56} + 255,37

ONDA DE CHOQUE EN FLUJO MONODIMENSIONAL ($\gamma = 1,40$)

Mx	My	Py/Px	y/ x	Ty/Tx	Poy/Pox	Poy/Px
2,60	0,50387	7,7200	3,4489	2,2383	0,46012	9,1813
2,61	0,50301	7,7808	3,4602	2,2486	0,45636	9,2481
2,62	0,50216	7,8418	3,4714	2,2589	0,45262	9,3154
2,63	0,50132	7,9030	3,4825	2,2693	0,44891	9,3829
2,64	0,50048	7,9645	3,4936	2,2797	0,44522	9,4507
2,65	0,49965	8,0262	3,5047	2,2901	0,44155	9,5187
2,66	0,49883	8,0882	3,5157	2,3006	0,43791	9,5869
2,67	0,49802	8,1504	3,5266	2,3111	0,43429	9,6553
2,68	0,49722	8,2128	3,5374	2,3217	0,43070	9,7241
2,69	0,49642	8,2754	3,5482	2,3323	0,42713	9,7932
2,70	0,49563	8,3383	3,5590	2,3429	0,42359	9,8625
2,71	0,49485	8,4014	3,5697	2,3536	0,42007	9,932
2,72	0,49408	8,4648	3,5803	2,3643	0,41657	10,002
2,73	0,49332	8,5284	3,5909	2,3750	0,41310	10,072
2,74	0,49256	8,5922	3,6014	2,3858	0,40965	10,142
2,75	0,49181	8,6562	3,6119	2,3966	0,40622	10,212
2,76	0,49107	8,7205	3,6224	2,4074	0,40282	10,283
2,77	0,49033	8,7850	3,6328	2,4183	0,39945	10,354
2,78	0,48960	8,8497	3,6431	2,4292	0,39610	10,426
2,79	0,48888	8,9147	3,6533	2,4402	0,39276	10,498
2,80	0,48817	8,9800	3,6635	2,4512	0,38946	10,569
2,81	0,48746	9,0454	3,6737	2,4622	0,38618	10,641
2,82	0,48676	9,1111	3,6838	2,4733	0,38293	10,714
2,83	0,48607	9,1770	3,6939	2,4844	0,37970	10,787
2,84	0,48538	9,2432	3,7039	2,4955	0,37649	10,860
2,85	0,48470	9,3096	3,7139	2,5067	0,37330	10,933
2,86	0,48402	9,3762	3,7238	2,5179	0,37013	11,006
2,87	0,48334	9,4431	3,7336	2,5292	0,36700	11,080
2,88	0,48268	9,5102	3,7434	2,5405	0,36389	11,154
2,89	0,48203	9,5775	3,7532	2,5518	0,36080	11,228
2,90	0,48138	9,6450	3,7629	2,5632	0,35773	11,302
2,91	0,48074	9,7127	3,7725	2,5746	0,35469	11,377
2,92	0,48010	9,7808	3,7821	2,5860	0,35167	11,452
2,93	0,47946	9,8491	3,7917	2,5975	0,34867	11,527
2,94	0,47883	9,9176	3,8012	2,6090	0,34570	11,603
2,95	0,47821	9,9860	3,8106	2,6206	0,34275	11,679
2,96	0,47760	10,0550	3,8200	2,6322	0,33982	11,755
2,97	0,47699	10,1240	3,8294	2,6438	0,33692	11,831
2,98	0,47638	10,1940	3,8387	2,6555	0,33404	11,907
2,99	0,47578	10,2630	3,8479	2,6672	0,33118	11,984
3	0,47519	10,3330	3,8571	2,6790	0,32834	12,061
3,5	0,45115	14,1250	4,2608	3,3150	0,21295	16,242
4	0,43496	18,5000	4,5714	4,0469	0,13876	21,068
4,5	0,42355	23,4580	4,8119	4,8751	0,09170	26,539
5	0,41523	29,0000	5,0000	5,8000	0,06172	32,654
6	0,40416	41,8330	5,2683	7,9410	0,02965	46,815
7	0,39736	57,0000	5,4444	10,4690	0,01535	63,552
8	0,39289	74,5000	5,5652	13,3870	0,00849	82,865
9	0,38980	94,3330	5,6512	16,6930	0,00496	104,753
10	0,38757	116,5000	5,7143	20,3880	0,00304	129,217
	0,37796		6		0	

$$M_y^2 = \frac{M_x^2 + \frac{2}{\gamma - 1}}{\frac{2}{\gamma - 1} M_x^2 - 1}$$

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{\{1 + M_x^2 \frac{\gamma - 1}{2}\} \{M_x^2 \frac{2}{\gamma - 1} - 1\}}{\frac{(\gamma + 1)^2}{2(\gamma - 1)} M_x^2}$$

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{2}{\gamma + 1} M_x^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad ; \quad \frac{P_{0y}}{P_{0x}} = \left[\frac{\gamma + 1}{2} M_x^2 \right]^{-(\gamma - 1)} \left[\frac{2}{\gamma + 1} M_x^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right]^{1/(\gamma - 1)}$$

$$\frac{P_{0y}}{P_x} = \left[\frac{\gamma + 1}{2} M_x^2 \right]^{-(\gamma - 1)} \left[\frac{2}{\gamma + 1} M_x^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right]^{1/(\gamma - 1)}$$

LINEA DE FANNO

Para flujo compresible unidimensional de un gas perfecto ($\gamma = 1,67$)

M	T/T*	p/p*	p ₀ /p ₀ *	V/V*	F/F*	4 L _{máx} /D	M	T/T*	p/p*	p ₀ /p ₀ *	V/V*	F/F*
0,00	1,335			0			1,76	0,6590	0,4639	1,312	1,421	1,0623
0,05	1,334	23,099	11,265	5,7e-2	8,687	234,36	1,80	0,6402	0,4445	1,351	1,440	1,0673
0,10	1,331	11,535	5,661	0,1154	4,392	55,53	1,85	0,6219	0,4263	1,392	1,459	1,0722
0,15	1,325	7,674	3,505	0,1727	2,982	23,21	1,90	0,6042	0,4091	1,436	1,477	1,0770
0,20	1,317	5,735	2,887	0,2296	2,293	12,11	1,95	0,5871	0,3929	1,482	1,494	1,0817
0,25	1,303	4,574	2,344	0,2555	1,892	6,98	2,00	0,5705	0,3776	1,530	1,510	1,0863
0,30	1,296	3,755	1,989	0,3415	1,635	4,337	2,05	0,5544	0,3632	1,580	1,526	1,0908
0,35	1,282	3,235	1,741	0,3963	1,460	2,810	2,10	0,5388	0,3496	1,632	1,541	1,0952
0,40	1,267	2,814	1,560	0,4502	1,336	1,868	2,15	0,5238	0,3367	1,687	1,556	1,0994
0,45	1,250	2,455	1,424	0,5031	1,245	1,260	2,20	0,5093	0,3244	1,744	1,570	1,1035
0,50	1,232	2,220	1,320	0,5549	1,178	0,8545	2,25	0,4952	0,3128	1,803	1,583	1,107
0,55	1,212	2,002	1,239	0,6056	1,128	0,5757	2,30	0,4816	0,3017	1,865	1,596	1,111
0,60	1,151	1,819	1,176	0,6545	1,0909	0,3877	2,35	0,4684	0,2912	1,929	1,608	1,115
0,65	1,169	1,664	1,126	0,7029	1,0628	0,2545	2,40	0,4557	0,2813	1,995	1,620	1,119
0,70	1,146	1,530	1,0874	0,7496	1,0418	0,1625	2,45	0,4434	0,2718	2,064	1,631	1,122
0,75	1,1233	1,413	1,0576	0,7949	1,0265	0,0987	2,50	0,4315	0,2628	2,135	1,642	1,126
0,80	1,0993	1,311	1,0351	0,8388	1,0155	0,05576	2,55	0,4200	0,2542	2,209	1,653	1,129
0,85	1,0748	1,220	1,0189	0,8812	1,0080	0,02780	2,60	0,4089	0,2460	2,285	1,663	1,132
0,90	1,0501	1,139	1,0081	0,9222	1,0033	0,01106	2,65	0,3982	0,2381	2,364	1,672	1,135
0,95	1,0251	1,0657	1,0019	0,9618	1,0008	0,00248	2,70	0,3878	0,2306	2,445	1,682	1,138
1,00	1	1	1	1	1	0	2,75	0,3778	0,2235	2,529	1,691	1,141
1,05	0,9749	0,9404	1,0018	1,0368	1,0006	0,00203	2,80	0,3681	0,2167	2,616	1,699	1,144
1,10	0,9499	0,8860	1,0070	1,0721	1,0024	0,00740	2,85	0,3587	0,2102	2,705	1,707	1,146
1,15	0,9251	0,8364	1,0154	1,1061	1,0051	0,01522	2,90	0,3497	0,2039	2,797	1,715	1,149
1,20	0,9006	0,7908	1,0266	1,1388	1,0084	0,02481	2,95	0,3410	0,1979	2,892	1,723	1,152
1,25	0,8763	0,7489	1,0406	1,170	1,0124	0,03564	3	0,3325	0,1922	2,990	1,730	1,154
1,30	0,8524	0,7100	1,0573	1,200	1,0167	0,04733	3,5	0,2616	0,1461	4,134	1,790	1,174
1,35	0,8289	0,6744	1,0765	1,229	1,0213	0,05957	4	0,2099	0,1145	5,608	1,833	1,189
1,40	0,8059	0,6412	1,0981	1,257	1,0262	0,07212	4,5	0,1715	0,0920	7,456	1,864	1,200
1,45	0,7833	0,6104	1,122	1,284	1,0313	0,08481	5	0,1424	0,0755	9,721	1,887	1,208
1,50	0,7612	0,5817	1,148	1,309	1,0364	0,09749	6	0,1022	0,0533	15,68	1,918	1,220
1,55	0,7397	0,5545	1,176	1,333	1,0416	0,11010	7	0,0767	0,0396	23,85	1,938	1,227
1,60	0,7187	0,5255	1,207	1,356	1,0468	0,12250	8	0,0595	0,0305	34,58	1,951	1,232
1,65	0,6982	0,5054	1,240	1,378	1,0520	0,13460	9	0,0474	0,0242	48,24	1,960	1,735
1,70	0,6783	0,4845	1,275	1,400	1,0572	0,14650	10	0,0387	0,0200	65,18	1,967	1,238
								0	0		1,996	1,249

$$\frac{T}{T^*} = \frac{+1}{2 \left(1 + \frac{-1}{2} M^2\right)}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 + \frac{-1}{2} M^2\right]^{-(1-\gamma)} ; \quad \frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{+1}{2 \left[1 + \frac{-1}{2} M^2\right]}} ; \quad \frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 \left[1 + \frac{-1}{2} M^2\right]}{+1}\right]^{(+1)/2(-1)}$$

$$\frac{F}{F^*} = \frac{1}{M} \frac{1 + M^2}{\sqrt{2 \left(1 + \frac{-1}{2} M^2\right)}}$$

$$M^* = \frac{V}{V^*} = M \sqrt{\frac{1 + \frac{-1}{2} M^2}{2 \left(1 + \frac{-1}{2} M^2\right)}}$$

$$\frac{4 L_{\text{máx}}}{D} = \frac{1 - M^2}{M^2} + \frac{+1}{2} \ln \frac{\left(1 + \frac{-1}{2} M^2\right)}{2 \left[1 + \frac{-1}{2} M^2\right]}$$

FUNCIONES PARA EL FLUJO ISENTROPICO COMPRESIBLE UNIDIMENSIONAL
($\gamma = 1,40$) (Final)

M	M*	A/A*	p/p ₀	ρ/ρ_0	T/T ₀	F/F*
2,90	1,93980	3,8498	0,03165	0,08489	0,37286	1,2277
2,91	1,94230	3,8866	0,03118	0,08398	0,37125	1,2286
2,92	1,94480	3,9238	0,03071	0,08308	0,36965	1,2295
2,93	1,94720	3,9614	0,03025	0,08218	0,36806	1,2304
2,94	1,94970	3,9993	0,02980	0,08130	0,36648	1,2313
2,95	1,95210	4,0376	0,02935	0,08043	0,36490	1,2322
2,96	1,95450	4,0763	0,02891	0,07957	0,36333	1,2331
2,97	1,95690	4,1153	0,02848	0,07872	0,36177	1,2340
2,98	1,95930	4,1547	0,02805	0,07788	0,36022	1,2348
2,99	1,96160	4,1944	0,02764	0,07705	0,35868	1,2357
3	1,96400	4,2346	0,02722	0,07623	0,35714	1,2366
3,1	1,98660	4,6573	0,02345	0,06852	0,34223	1,2450
3,2	2,00790	5,1210	0,02023	0,06165	0,32808	1,2530
3,3	2,02790	5,6287	0,01748	0,05554	0,31466	1,2605
3,4	2,04660	6,1837	0,01512	0,05009	0,30193	1,2676
3,5	2,06420	6,7896	0,01311	0,04523	0,28986	1,2743
3,6	2,08080	7,4501	0,01138	0,04089	0,27840	1,2807
3,7	2,09640	8,1691	0,00990	0,03702	0,26752	1,2867
3,8	2,11110	8,9506	0,00863	0,03355	0,25720	1,2924
3,9	2,12500	9,7990	0,00753	0,03044	0,24740	1,2978
4	2,13810	10,7190	0,00658	0,02766	0,23810	1,3029
4,1	2,15050	11,7150	0,00577	0,02516	0,22925	1,3077
4,2	2,16220	12,7920	0,00506	0,02292	0,22085	1,3123
4,3	2,17320	13,9550	0,00445	0,02090	0,21286	1,3167
4,4	2,18370	15,2100	0,00392	0,01909	0,20525	1,3208
4,5	2,19360	16,5620	0,00346	0,01745	0,19802	1,3247
4,6	2,20300	18,0180	0,00305	0,01597	0,19113	1,3284
4,7	2,21190	19,5830	0,00270	0,01463	0,18457	1,3320
4,8	2,22040	21,2640	0,00240	0,01343	0,17832	1,3354
4,9	2,22840	23,0670	0,00213	0,01233	0,17235	1,3386
5	2,23610	25,0000	0,00189	0,01134	0,16667	1,3416
6	2,29530	53,1800	0,000633	0,00519	0,12195	1,3655
7	2,33330	104,143	0,000242	0,00261	0,09259	1,3810
8	2,35910	190,109	0,000102	0,00141	0,07246	1,3915
9	2,37720	327,189	0,0000474	0,000815	0,05814	1,3989
10	2,39040	535,938	0,0000236	0,000495	0,04762	1,4044
	2,44950		0	0	0	1,4289

$$M^* = \frac{V}{V^*} = M \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{2 (1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)}}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 (1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right]^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}$$

$$F = p A (1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2) \quad ; \quad \frac{F}{F^*} = \frac{1}{M} \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{\sqrt{2 (1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)}}$$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \quad ; \quad \frac{T}{T^*} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{2 (1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{-\gamma/(\gamma-1)} \quad ; \quad \frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{2 (1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)}} \quad ; \quad \frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 (1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right]^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}$$

XIII.- ORIFICIOS Y VERTEDEROS

XIII.1.- CLASIFICACIÓN

Orificio es toda abertura realizada o existente en un depósito, por debajo del nivel superior del líquido, ya sea en la pared lateral o en el fondo.

Para hacer una clasificación de los orificios se pueden tener en cuenta algunas características importantes de los mismos, como,

- a) Según el espesor de la pared,
- Orificios en pared delgada
 - Orificios en pared gruesa

El espesor de la pared, para los primeros, tiene que ser menor que la mitad de la mínima dimensión del orificio, no debiendo exceder su espesor de 4 a 5 cm.

También se considerarán orificios en pared delgada, aquellos que estén tallados a bisel.

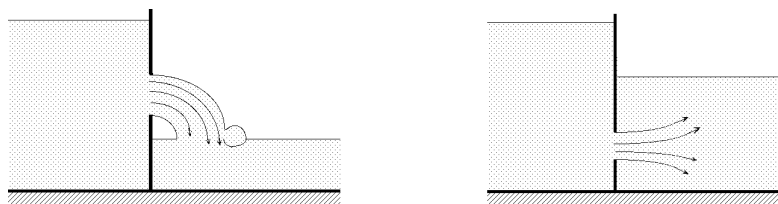


Fig XIII.1.- Orificios según el nivel del agua, aguas abajo

- b) Según el nivel de la superficie libre,
- Orificios de nivel constante
 - Orificios de nivel variable
- c) Según el nivel del agua, aguas abajo,
- Orificios libres
 - Orificios sumergidos

XIII.2.- COEFICIENTE DE GASTO

El caudal teórico Q_T que sale a través de un orificio, viene determinado, Fig XIII.2, por,

$$Q_T = S v_T = S \sqrt{2 g h}$$

comprobándose experimentalmente que el caudal real Q_R es menor que el calculado, por lo que la expresión del caudal vendrá afectada por un coeficiente de gasto, $\mu < 1$, es decir,

$$Q_R = \mu Q_T = \mu S \sqrt{2 g h}$$

estando el valor de μ comprendido en el intervalo, $0,57 < \mu < 0,70$, tomándose como valor medio $\mu = 0,62$; en pared gruesa se toma, $\mu = 0,83$.

En las Tablas XIII.1-2-3 se dan los valores de μ para orificios en pared delgada, de sección cuadrada, rectangular y circular respectivamente.

Para orificios practicados en el fondo de paredes inclinadas se tiene,

$$\mu = 0,6385 + 0,21207 \cos^3 + 0,10640 \cos^4$$

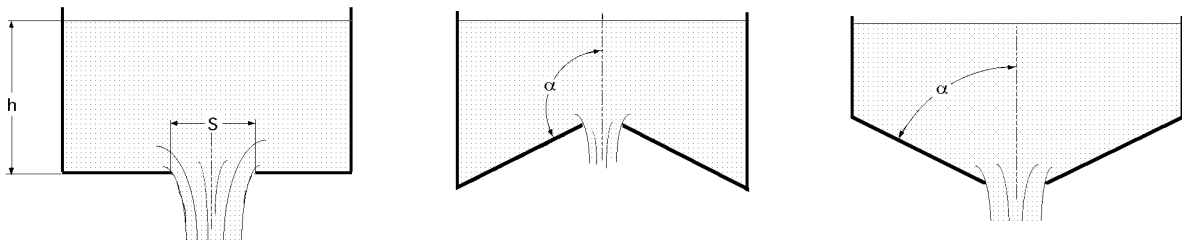


Fig XIII.2.- Orificios practicados en el fondo

Tabla XIII.1.- Valores de μ para orificios cuadrados en pared delgada

Carga sobre el centro del orificio (metros)	ORIFICIOS CUADRADOS EN PARED DELGADA VERTICAL					
	Lado del cuadrado en metros					
	0,006	0,015	0,03	0,06	0,18	0,30
0,12		0,637	0,621			
0,15		0,633	0,619	0,605	0,597	
0,16	0,660	0,630	0,617	0,605	0,598	
0,21	0,656	0,628	0,616	0,605	0,599	0,596
0,24	0,652	0,625	0,615	0,605	0,600	0,597
0,27	0,650	0,623	0,614	0,605	0,601	0,598
0,30	0,648	0,622	0,613	0,605	0,601	0,599
0,40	0,642	0,618	0,610	0,605	0,602	0,601
0,60	0,637	0,615	0,608	0,605	0,604	0,602
0,90	0,632	0,612	0,607	0,605	0,604	0,603
1,20	0,628	0,610	0,606	0,605	0,603	0,602
1,80	0,623	0,609	0,605	0,604	0,603	0,602
2,40	0,619	0,608	0,605	0,604	0,603	0,602
3,00	0,616	0,606	0,604	0,603	0,602	0,601
6,00	0,606	0,603	0,602	0,602	0,601	0,600
30,00	0,599	0,598	0,598	0,598	0,598	0,598

Tabla XIII.2.- Valores de μ para orificios rectangulares en pared delgada vertical

Carga sobre el centro del orificio (metros)	ORIFICIOS RECTANGULARES EN PARED PLANA VERTICAL					
	Anchura 0,20 metros y altura del orificio en metros					
	> 0,2	0,1	0,05	0,03	0,02	0,01
0,005						0,705
0,100			0,607	0,630	0,660	0,701
0,015		0,593	0,612	0,632	0,660	0,697
0,02	0,572	0,596	0,615	0,634	0,659	0,694
0,03	0,578	0,600	0,620	0,638	0,659	0,688
0,04	0,582	0,603	0,623	0,640	0,658	0,683
0,05	0,585	0,605	0,625	0,640	0,658	0,679
0,06	0,587	0,607	0,627	0,640	0,657	0,676
0,07	0,588	0,609	0,628	0,639	0,656	0,673
0,08	0,589	0,610	0,613	0,638	0,656	0,670
0,09	0,590	0,610	0,629	0,637	0,655	0,668
0,10	0,592	0,611	0,630	0,637	0,654	0,666
0,12	0,593	0,612	0,630	0,636	0,653	0,663
0,14	0,595	0,613	0,630	0,635	0,651	0,660
0,16	0,596	0,614	0,631	0,634	0,650	0,658
0,18	0,597	0,615	0,630	0,634	0,649	0,657
0,20	0,598	0,615	0,630	0,633	0,648	0,655
0,25	0,599	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653
0,30	0,600	0,616	0,629	0,632	0,644	0,650
0,40	0,602	0,617	0,628	0,630	0,642	0,655
0,50	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644
0,60	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,642
0,70	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640
0,80	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637
0,90	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635
1,00	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632
1,10	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629
1,20	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626
1,30	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622
1,40	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618
1,50	0,602	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615
1,60	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613
1,70	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612
1,80	0,601	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612

XIII.3.- ORIFICIO EN PARED DELGADA

Se puede suponer que la lámina líquida que sale, toca a la pared sólo en una arista. Debido a la viscosidad y al rozamiento existente en la proximidad de las paredes, la velocidad de salida es menor que la calculada teóricamente es decir,

$$v_R = \mu v_T$$

en la que μ es un coeficiente de reducción de velocidad, comprendido entre, $0,96 < \mu < 0,99$; ésto supone que la velocidad de salida real puede ponerse en función de una altura h_1 , en la forma,

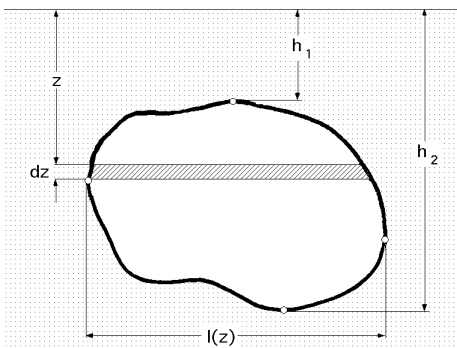


Fig XIII.3.- Orificio en pared delgada

Tabla XIII.3.- Valores de μ para orificios circulares en pared delgada vertical

Carga sobre el centro del orificio (metros)	ORIFICIOS CIRCULARES EN PARED DELGADA VERTICAL					
	Diámetro del orificio en metros					
	0,006	0,015	0,03	0,05	0,18	0,3
0,12		0,631	0,618			
0,15		0,627	0,615	0,600	0,592	
0,16	0,650	0,624	0,613	0,601	0,593	0,590
0,21	0,651	0,622	0,611	0,601	0,594	0,590
0,24	0,648	0,620	0,610	0,601	0,594	0,591
0,27	0,646	0,618	0,609	0,601	0,595	0,591
0,30	0,644	0,617	0,608	0,600	0,595	0,591
0,40	0,638	0,613	0,605	0,600	0,596	0,593
0,60	0,632	0,610	0,604	0,599	0,597	0,595
0,90	0,627	0,606	0,603	0,599	0,597	0,597
1,20	0,623	0,611	0,602	0,599	0,598	0,596
1,80	0,618	0,604	0,600	0,598	0,597	0,596
2,40	0,614	0,603	0,600	0,598	0,596	0,595
3,00	0,611	0,601	0,598	0,597	0,596	0,595
6,00	0,601	0,598	0,596	0,596	0,596	0,594
30,00	0,593	0,592	0,592	0,592	0,592	0,592

$$v_R = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gh_1} \quad ; \quad 2gh = v_R^2 = 2gh_1 \quad ; \quad h_1 = \frac{v_R^2}{2g}$$

La diferencia entre h_1 y h determina la altura correspondiente a la pérdida de carga del orificio, es decir,

$$h_p = h - h_1 = h - \frac{v_R^2}{2g} = h \left(1 - \frac{v_R^2}{2gh} \right) = h \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} h$$

en la que, $\frac{1}{2} = 0,065$, es el coeficiente de pérdida de carga.

Rendimiento de un orificio.- La altura que se aprovecha para transformar en energía cinética es h_1 y no la disponible, por lo que se define el rendimiento de un orificio, como la relación entre la altura realmente transformada y la totalmente disponible,

$$\eta = \frac{h_1}{h} = \frac{\frac{v_R^2}{2g}}{h} = \frac{v_R^2}{2gh} = \left(\frac{v_R}{v_T} \right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Contracción de la vena líquida.- Los filetes de la vena líquida son convergentes hasta una sección situada a una cierta distancia de la pared, a partir de la cual comienza a circular paralelamente. A esta sección se la llama sección contraída.

La relación entre ambas secciones se denomina coeficiente de contracción y de valor, $C_c = \frac{A_c}{A}$, siendo, $C_c < 1$; es un valor que viene dado experimentalmente, y depende de las dimensiones, forma, carga del orificio y proximidad de éste a las paredes del depósito.

Cuando exista una causa que vaya en contra de la libertad de la contracción de la vena, dire-

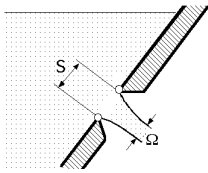


Fig XIII.4.- Contracción de la vena

mos que la contracción es incompleta, siendo el valor de μ mayor que en el caso de contracción completa.

La contracción será completa, cuando la distancia de los bordes del orificio a las paredes laterales, o al fondo, sea igual o mayor que el doble de la mínima dimensión del orificio.

La relación existente entre los coeficientes de gasto, reducción de velocidad y de contracción de la vena líquida, puede deducirse de la siguiente forma,

$$Q_R = v_R = S \quad v_T = S \quad v_T = Q_T \quad ; \quad Q_R = \mu Q_T$$

luego, $\mu = \mu$, es la relación buscada.

Característica de un orificio.- El valor de h se despeja de la ecuación, $Q_R = \mu S \sqrt{2 g h}$

$$h = \frac{Q_R^2}{2 g \mu^2 S^2}$$

que se puede representar conociendo un solo punto de funcionamiento A en coordenadas (Q_R, h) .

XIII.3.- GRANDES ORIFICIOS EN PARED DELGADA

En grandes orificios, la velocidad varía en los diferentes puntos de la sección del orificio con la altura z , a no ser que el orificio esté situado en el fondo del depósito.

El caudal infinitesimal que circula a través de la sección, $l dz$, es,

$$Q = \mu \int_{h_0}^{h_1} l \sqrt{2 g z} dz = \int_{h_0}^{h_1} l = f(z) = \mu \sqrt{2 g} \int_{h_0}^{h_1} f(z) \sqrt{z} dz$$

Casos particulares

a) **Orificio rectangular.-** El valor del caudal es, Fig XIII.5,

$$Q = \mu \sqrt{2 g} \int_{h_0}^{h_1} b \sqrt{z} dz = \frac{2 \mu b \sqrt{2 g}}{3} (h_1^{3/2} - h_0^{3/2})$$

siendo,

$$h_1 = z_0 + \frac{d}{2} \quad ; \quad h_1^{3/2} = (z_0 + \frac{d}{2})^{3/2} = z_0^{3/2} (1 + \frac{d}{2 z_0})^{3/2}$$

$$h_0 = z_0 - \frac{d}{2} \quad ; \quad h_0^{3/2} = (z_0 - \frac{d}{2})^{3/2} = z_0^{3/2} (1 - \frac{d}{2 z_0})^{3/2}$$

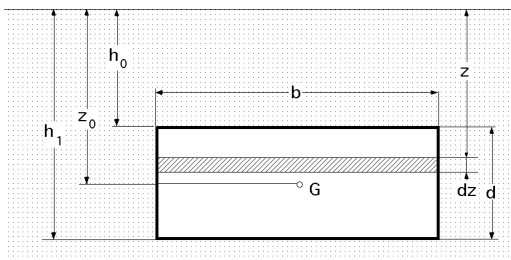


Fig XIII.5.- Orificio rectangular

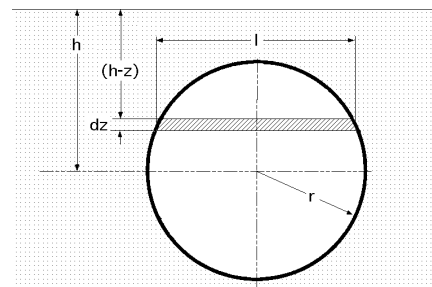


Fig XIII.6.- Orificio circular

Desarrollando en serie de potencias se obtiene,

$$\left(1 + \frac{d}{2z_0}\right)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2} \frac{d}{2z_0} + \frac{3}{2} \left(\frac{d}{2z_0}\right)^2 + \dots = 1 + \frac{3}{2 \cdot 1} \frac{d}{2z_0} + \frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2!} \left(\frac{d}{2z_0}\right)^2 + \dots$$

$$\left(1 - \frac{d}{2z_0}\right)^{3/2} = 1 - \frac{3}{2 \cdot 1} \frac{d}{2z_0} + \frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2!} \left(\frac{d}{2z_0}\right)^2 - \frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{-1}{2} \frac{1}{3!} \left(\frac{d}{2z_0}\right)^3 + \dots$$

$$Q = \frac{2 \mu b \sqrt{2g}}{3} \sqrt{z_0^3} \left\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{d}{z_0} + \frac{3}{8} \left(\frac{d}{2z_0}\right)^2 - \frac{3}{48} \left(\frac{d}{2z_0}\right)^3 + \dots \right.$$

$$\left. \dots - 1 + \frac{3}{4} \frac{d}{z_0} - \frac{3}{8} \left(\frac{d}{2z_0}\right)^2 + \frac{3}{48} \left(\frac{d}{2z_0}\right)^3 + \dots \right\} = \frac{2 \mu b \sqrt{2g}}{3} \sqrt{z_0^3} \left\{ \frac{3}{2} \frac{d}{z_0} - \frac{1}{64} \left(\frac{d}{z_0}\right)^2 + \dots \right\}$$

Tomando sólo el primer término, resulta,

$$Q = \frac{2 \mu b \sqrt{2g}}{3} \sqrt{z_0^3} \frac{3}{2} \frac{d}{z_0} = \mu b d \sqrt{2g z_0}$$

que es de gran utilidad en el cálculo de compuertas de paredes delgadas.

b) Orificio circular.- En este caso se tiene, $l = 2 \sqrt{r^2 - z^2}$, Fig XIII.6, por lo que:

$$Q = \mu \sqrt{2g} \int_{h_0}^{h_1} 2 \sqrt{r^2 - z^2} \sqrt{(h - z)} dz$$

y efectuando la integración y resolviendo como en el caso anterior, se obtiene,

$$Q = \mu \left\{ 1 - \frac{1}{32} \frac{r^2}{h^2} - \frac{5}{1024} \frac{r^4}{h^4} + \dots \right\} r^2 \sqrt{2gh} = \left| \mu_2 = \mu \left\{ 1 - \frac{1}{32} \frac{r^2}{h^2} - \frac{5}{1024} \frac{r^4}{h^4} + \dots \right\} \right| = \mu_2 r^2 \sqrt{2gh}$$

XIII.4.- ORIFICIO SUMERGIDO

Se tiene derrame sumergido, cuando la vena líquida que sale por el orificio queda por debajo del nivel del líquido del depósito en el cual entra, Fig XIII.7.

Se supondrá que en B los filetes del líquido saliente son paralelos y que el desnivel entre ambos depósitos permanece constante; aplicando Bernoulli entre A y B, y tomando como plano de comparación el que pasa por B, se tiene,

$$\frac{v_A^2}{2g} + h + \frac{p_0}{\rho} = \frac{v_B^2}{2g} + 0 + \frac{p_B}{\rho} = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{h_2 + p'_0}{\rho} = \frac{v_B^2}{2g} + h_2 + \frac{p'_0}{\rho}$$

Si las dos superficies libres están a la misma presión, o al aire libre, $p_0 = p'_0 = p_{atm}$; despejan -

do v_B resulta,

$$\frac{v_B^2}{2g} = \frac{v_A^2}{2g} + h - h_2 = \frac{v_A^2}{2g} + h_1 ; \quad v_A = \sqrt{v_A^2 + 2g h_1} ; \quad Q = \mu S \sqrt{v_A^2 + 2g h_1}$$

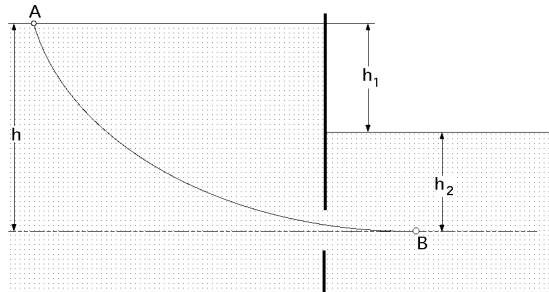


Fig XIII.7.- Orificio sumergido

Tabla XIII.4.- Valores de μ para orificios sumergidos de 0,20 metros de anchura

Carga del orificio (metros)	ORIFICIOS SUMERGIDOS DE 0,2 m DE ANCHURA				
	Altura, 0,2	Altura, 0,1	Altura, 0,05	Altura, 0,03	Altura, 0,01
0,01	0,500	0,511	0,481	0,509	0,578
0,02	0,502	0,522	0,508	0,548	0,614
0,03	0,508	0,528	0,543	0,583	0,640
0,04	0,515	0,538	0,570	0,620	0,659
0,05	0,520	0,552	0,589	0,639	0,668
0,06	0,526	0,561	0,603	0,640	0,673
0,07	0,531	0,573	0,613	0,639	0,675
0,08	0,536	0,580	0,621	0,639	0,675
0,09	0,541	0,584	0,625	0,638	0,674
0,10	0,545	0,588	0,628	0,637	0,673
0,15	0,562	0,600	0,631	0,634	0,668
0,20	0,575	0,607	0,638	0,632	0,665
0,30	0,592	0,613	0,630	0,631	0,658
0,50	0,600	0,615	0,625	0,629	0,648
0,80	0,602	0,615	0,624	0,627	0,637
1,00	0,602	0,614	0,624	0,625	0,630
1,20	0,602	0,614	0,623	0,623	0,625
1,40	0,601	0,613	0,621	0,621	0,620
1,60	0,601	0,611	0,618	0,619	0,617
1,80	0,601	0,609	0,616	0,616	0,614
2,00	0,601	0,607	0,614	0,614	0,613
3,00	0,601	0,603	0,606	0,607	0,609

En la Tabla XIII.4 se dan los valores de μ para orificios sumergidos.

Cuando el orificio esté parcialmente sumergido, la abertura superior se considerará como orificio libre y la inferior como orificio sumergido.

XIII.5.- ORIFICIOS PROLONGADOS EN CANAL

Suponiendo que las velocidades de los puntos A y B son v_A y v_B y considerando, Fig XIII.8, que el punto A está lo suficientemente alejado del orificio como para suponer que su velocidad v_A es constante, aplicando Bernoulli al filete (AB) se tendrá,

$$\frac{v_A^2}{2g} + \frac{h_3 + p_0}{g} + h_4 = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{h_1 + p_0}{g} + h_2$$

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh}$$

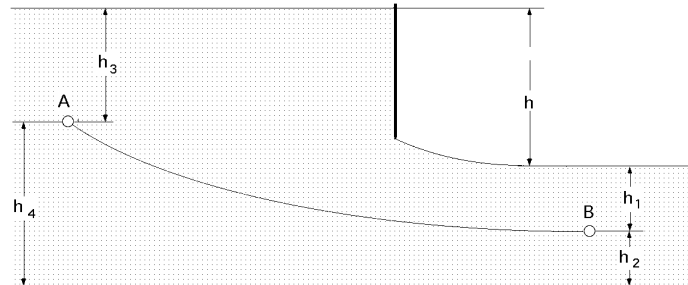


Fig XIII.8.- Orificio prolongado en canal

Si llamamos l a la anchura del orificio, la expresión del caudal es,

$$Q = \mu l (H - h) \sqrt{v_A^2 + 2gh}$$

Para, $v_A = 0$
 $v_B = \sqrt{2gh}$ $Q = \mu l H_1 \sqrt{2gh}$

se tomará, $\mu = 0,675$, y si las aristas son redondeadas, $\mu = 0,7$.

XIII.6.- ORIFICIOS EN PARED GRUESA

Se pueden dar dos casos,

- Que desde el contorno se separe la vena líquida de la pared
- Que la vena líquida quede adherida a la misma

Para el caso *a* se puede utilizar la formulación desarrollada para los orificios en pared delgada, tomando para el coeficiente los dados por la Tabla XIII.5 para orificios rectangulares, y por la XIII.6, para aristas vivas o redondeadas en que hay contracción incompleta.

En general se podrá tomar un valor medio igual a, $\mu = 0,60$, cuando el borde inferior del orificio está más alto que el fondo del recipiente y valores, $0,65 < \mu < 0,70$, para los prolongados en canal en los que el borde inferior del orificio está en el fondo.

Para este último caso, y para números de Reynolds inferiores a un cierto valor, la influencia de la viscosidad es tan grande que la vena se adhiere a la pared, despegándose al aumentar aquellos.

Según experiencias realizadas por Venturi, la velocidad en la sección contraída se puede poner en la forma,

$$v = \sqrt{2g(h + 0,75h)} = 1,3 \sqrt{2gh}$$

que proporciona un caudal Q para un coeficiente de contracción, $C_c = 0,62$, de la forma,

$$Q = 0,62 \times 1,3 \sqrt{2gh} = 0,81 \sqrt{2gh}$$

Tabla XIII.5.- Valores de μ en orificios de 0,6 m de ancho, con espesor de pared 0,05 m, y 0,10 m del fondo

Carga del orificio en metros	Altura		Carga del orificio en metros	Altura	
	0,2	0,4		0,2	0,4
0,03	0,636		0,60	0,677	0,650
0,04	0,641		0,70	0,677	0,646
0,05	0,645	0,624	0,80	0,676	0,643
0,06	0,648	0,627	0,90	0,676	0,639
0,07	0,652	0,629	1,00	0,676	0,636
0,08	0,654	0,631	1,10	0,674	0,633
0,09	0,656	0,633	1,20	0,675	0,630
0,10	0,658	0,635	1,30	0,675	0,628
0,12	0,662	0,639	1,40	0,675	0,626
0,14	0,664	0,642	1,50	0,675	0,624
0,16	0,667	0,644	1,60	0,675	0,622
0,18	0,669	0,646	1,70	0,675	0,621
0,20	0,671	0,648	1,80	0,674	0,620
0,30	0,677	0,654	1,90	0,674	0,618
0,40	0,679	0,654	2,00	0,674	0,617
0,50	0,678	0,653	3,00	0,673	0,617

Tabla XIII.6.- Valores de μ en orificios de 0,20 m de ancho; espesor de pared 0,27 m

Carga del orificio en metros	Aristas vivas (Altura en m)			Aristas redondeadas		
	0,01	0,05	0,2	0,01	0,05	0,2
0,05	0,711	0,719		0,729	0,717	
0,06	0,708	0,716		0,726	0,715	
0,07	0,706	0,714		0,723	0,713	
0,08	0,704	0,712		0,721	0,711	
0,09	0,703	0,710		0,719	0,710	
0,10	0,701	0,709		0,717	0,709	
0,12	0,699	0,708		0,711	0,706	
0,14	0,697	0,703		0,711	0,701	
0,16	0,695	0,700		0,709	0,703	
0,18	0,693	0,698	0,732	0,706	0,701	
0,20	0,692	0,696	0,713	0,704	0,700	
0,30	0,687	0,689	0,688	0,697	0,697	
0,40	0,683	0,685	0,681	0,694	0,695	
0,50	0,681	0,682	0,682	0,693	0,695	0,702
0,60	0,680	0,681	0,682	0,693	0,694	0,701
0,70	0,680	0,680	0,681	0,693	0,694	0,701
0,80	0,680	0,680	0,681	0,694	0,693	0,700
0,90	0,680	0,679	0,681	0,695	0,693	0,700
1,00	0,680	0,679	0,680	0,695	0,692	0,700
1,10	0,679	0,678	0,680	0,695	0,691	0,699
1,20	0,679	0,678	0,680	0,694	0,690	0,699
1,30	0,678	0,678	0,680	0,693	0,690	0,699
1,40	0,677	0,677	0,679	0,693	0,689	0,699
1,50	0,677	0,677	0,679	0,692	0,688	0,699
1,60	0,676	0,677	0,679	0,690	0,687	0,699
1,70	0,675	0,676	0,679	0,690	0,686	0,698
1,80	0,674	0,676	0,679	0,689	0,685	0,698
1,90	0,674	0,675	0,678	0,688	0,685	0,698
2,00	0,673	0,675	0,678	0,688	0,684	0,698
3,00	0,673	0,672	0,676	0,688	0,680	0,696

III.7.- COMPUERTAS

Las compuertas son grandes orificios practicados en muros, para salida de las aguas, que van cerrados por tableros móviles.

Para calcular el caudal en las compuertas de fondo, se emplea la formulación anterior, aunque en realidad, por existir contracción en la arista superior del rectángulo, deberá tomarse un coeficiente μ de contracción incompleta.

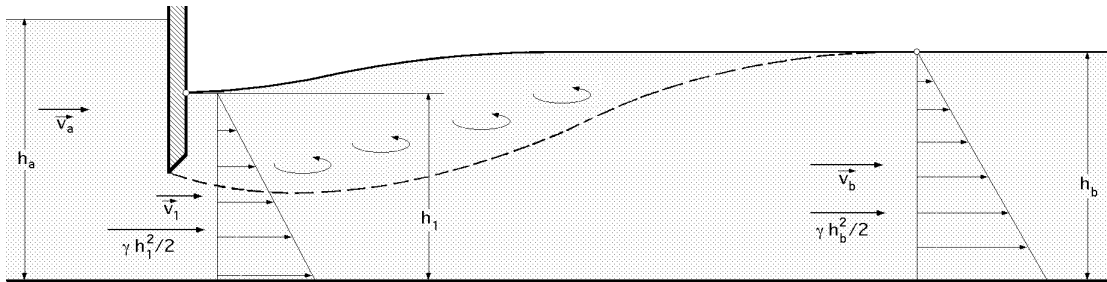


Fig XIII.9

La Tabla XIII.7 proporciona el caudal en litros/segundo para diferentes alturas del orificio y carga en el centro del mismo, por metro de anchura.

En compuertas inclinadas se utiliza la misma formulación que en las de fondo, pero se toman coeficientes μ con los siguientes valores,

Inclinación 1/2, 1 de base y 2 de altura,	$\mu = 0,74$
Inclinación 1/1, 1 de base y 1 de altura,	$\mu = 0,80$
Inclinación 1/1, seguida con canal de pendiente comprendida entre 33 y 38,	$\mu = 1,00$

También se puede calcular multiplicándole por un nuevo coeficiente de reducción μ^* , que varía según el ángulo que forma el plano del orificio con la horizontal, según la Tabla XIII.8.

Para determinar la fuerza por unidad de anchura que se ejerce sobre la misma, de acuerdo con la Fig XIII.9, se tiene,

Ecuación de la cantidad de movimiento, $F t = m v$

y para un canal rectangular, $\frac{h_b^2}{2} - \frac{h_1^2}{2} = g (v_1 - v_b)$

en la que la incógnita es h_1 que, evidentemente, es algo menor que h_b .

Fuerza horizontal F por unidad de anchura que actúa sobre la compuerta,

$$\frac{h_0^2}{2} - \frac{h_1^2}{2} + F = g (v_1 - v_0) \quad ; \quad F = \frac{g}{2} (h_1^2 - h_0^2) + g (v_1 - v_0)$$

para lo que se ha supuesto que,

Tabla XIII.7.- Caudales en litros/seg, en compuertas de fondo, de 1 m de ancho

Carga orificio (metros)	Caudal para las alturas indicadas																		
	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,18	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,50
0,10	44	53	61	69	78	86	94	102	110	119	126	134	150	167					
0,15	54	65	73	83	94	105	115	125	135	145	155	165	188	203	254	307			
0,20	62	75	86	98	109	122	133	145	157	168	179	190	213	235	294	353	415	481	
0,25	70	82	96	110	124	136	149	162	175	188	201	214	239	264	329	395	460	527	661
0,30	76	91	106	120	135	149	161	178	192	206	220	234	262	291	363	434	507	577	711
0,35	82	98	114	130	146	162	177	192	208	223	238	253	284	314	393	471	548	626	773
0,40	88	107	122	139	156	173	189	206	222	238	255	271	304	337	420	504	588	671	836
0,45	93	111	130	148	165	183	201	219	236	253	271	288	321	367	446	536	624	712	898
0,50	98	117	136	155	174	193	212	230	249	267	285	304	340	377	471	562	659	753	940
0,60	107	128	148	170	191	212	230	251	272	292	312	330	370	414	516	624	717	819	1023
0,70	116	139	161	184	208	228	249	272	294	316	338	360	403	447	559	670	759	894	1115
0,80	121	148	172	196	220	246	267	291	314	338	361	385	432	485	598	718	813	957	1194
0,90	131	157	183	207	236	259	284	309	334	359	384	409	459	509	636	762	864	1017	1271
1,00	138	165	192	219	246	272	299	329	352	379	405	432	485	536	670	804	911	1079	1339
1,10	145	175	201	220	257	285	314	341	368	396	421	452	506	562	702	843	955	1124	1405
1,20	151	181	210	240	267	298	327	356	385	414	443	472	529	586	733	880	998	1174	1468
1,30	157	187	218	249	279	310	340	371	401	431	461	491	551	610	762	915	1037	1220	1525
1,40	162	191	226	258	289	321	353	384	416	446	477	509	571	627	798	948	1074	1266	1583
1,50	168	201	233	266	300	332	365	397	429	462	493	526	589	654	818	981	1112	1308	1635
1,60	173	207	241	275	309	342	376	409	443	476	509	542	608	675	843	1010	1147	1351	1690
1,70	177	213	248	283	318	352	387	422	456	491	524	559	627	695	871	1043	1182	1391	1741
1,80	182	218	255	290	326	362	398	434	469	504	532	574	644	715	895	1073	1216	1431	1789
1,90	187	224	261	298	335	371	408	444	480	516	552	588	664	734	917	1100	1247	1468	1834
2,00	191	229	267	305	343	380	418	455	492	530	566	603	677	753	941	1129	1279	1506	1862
2,25	198	235	274	313	352	392	430	470	509	550	587	626	705	783	979	1175	1371	1567	1958
2,50	214	257	293	341	382	424	466	507	549	590	631	673	757	841	1052	1262	1431	1683	2104
3,00	235	281	327	374	420	466	511	557	602	648	693	739	830	922	1152	1383	1568	1843	2305
3,50	242	301	350	400	450	500	550	599	637	697	747	797	896	996	1245	1494	1693	1992	2490
4,00	268	321	374	427	481	533	589	640	693	745	799	852	958	1065	1231	1597	1810	2129	2669

Tabla XIII.8.- Coeficientes de reducción μ^*

	45°	50°	55°	60°	65°	75°
μ	1,14	1,12	1,10	1,07	1,05	1,03

- a) El flujo es permanente
- b) El fluido es incompresible
- c) El flujo es bidimensional en las proximidades de la compuerta
- d) Distribución uniforme de velocidades lejos de la compuerta
- e) Distribución hidrostática de presiones lejos de la compuerta
- f) Tensiones cortantes nulas en la solera del canal

XIII.8.- ORIFICIO DE BORDA

El orificio de Borda consiste en un tubo corto y delgado, de longitud aproximadamente igual a su diámetro, que resalta en el interior de un depósito; la velocidad a lo largo de la pared en todos sus puntos es prácticamente cero, pero en el orificio actúa una fuerza, $F = h S$, en la dirección del eje del tubo, siendo \vec{v} la velocidad de salida del fluido por el mismo.

Suponiendo, $v_A = 0$, el caudal Q saliente por el orificio, es,

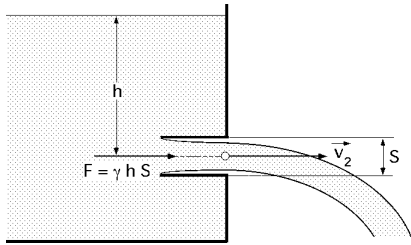


Fig XIII.10.- Orificio de Borda

$$Q = \mu S \sqrt{2 g h} \quad ; \quad v = \sqrt{2 g h}$$

y aplicando el Teorema de la Cantidad de Movimiento a la masa de fluido que atraviesa el agujero, se tiene,

$$F t = m v \quad ; \quad h S (1 \text{ seg}) = V \quad v = \frac{Q}{g} v$$

por cuanto el volumen v en la unidad de tiempo es el caudal, $Q \text{ m}^3/\text{seg}$, luego substituyendo en ésta los valores de Q y \vec{v} anteriormente hallados, se obtiene,

$$h S = \mu S \sqrt{2 g h} \frac{Q}{g} \quad \sqrt{2 g h} = 2 \mu \quad S h$$

de la que se deduce, $2 \mu = 1$, por lo que

$$2 \mu = 1$$

que es la relación entre el coeficiente de reducción de velocidad μ y el coeficiente de contracción de la vena μ_c .

XIII.9.- ORIFICIOS EN TUBERÍAS.- DIAFRAGMAS

Un diafragma es un orificio afilado, tal como se muestra en la Fig XIII.11, que provoca que el chorro se contraiga aguas abajo del orificio.

Para un fluido incompresible, aplicando Bernoulli entre las secciones 1 y 2 se tiene,

$$\frac{v_{1t}^2}{2 g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_{2t}^2}{2 g} + \frac{p_2}{\gamma} \quad ; \quad v_1 = \frac{d_2^2}{4} \quad ; \quad S = \frac{d_0^2}{4}$$

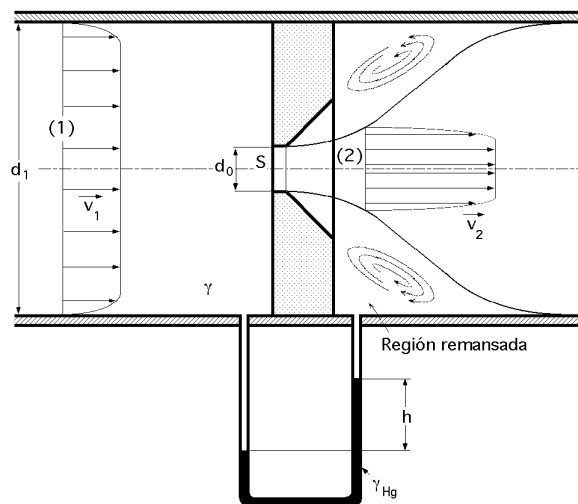


Fig XIII.11.- Diafragma

y como, $\frac{v_1}{S_1} = \frac{v_2}{S_2} = \frac{v_0}{S_0}$, aplicando la ecuación de continuidad, se tiene:

$$S_1 v_{1t} = S v_{0t} = S_2 v_{2t} \quad ; \quad d_1^2 v_{1t} = d_2^2 v_{2t} = d_0^2 v_{0t}$$

y eliminando v_{1t} entre ésta última y la de Bernoulli, se obtiene,

$$v_{1t} = \frac{d_0^2}{d_1^2} v_{2t} \quad ; \quad \frac{(d_0^2 v_{2t})^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho} = \frac{v_{2t}^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho}$$

$$\frac{v_{2t}^2}{2g} \left\{ 1 - \frac{d_0^4}{d_1^4} \right\} = \frac{P_1 - P_2}{\rho} \quad v_{2t} = \sqrt{\frac{2g}{1 - \frac{d_0^4}{d_1^4}} \frac{P_1 - P_2}{\rho}}$$

La velocidad de salida real es,

$$v_{2R} = \mu v_{2t} = \mu \sqrt{\frac{2g}{1 - \frac{d_0^4}{d_1^4}} \frac{P_1 - P_2}{\rho}} = \mu \sqrt{\frac{2}{1 - \frac{d_0^4}{d_1^4}} \frac{P_1 - P_2}{\rho}}$$

y el caudal Q ,

$$Q = v_{2R} S = \mu v_{2t} S = S \mu \sqrt{\frac{2}{1 - \frac{d_0^4}{d_1^4}} \frac{P_1 - P_2}{\rho}} = S \mu \sqrt{\frac{2}{1 - \frac{d_0^4}{d_1^4}} \frac{P_1 - P_2}{\rho}}$$

En el manómetro diferencial se tiene,

$$P_1 = P_2 + \rho_{Hg} h - \rho h = P_2 + h(\rho_{Hg} - \rho)$$

por lo que el valor del caudal Q queda en la forma,

$$Q = S \mu \sqrt{\frac{2g h}{1 - \frac{d_0^4}{d_1^4}} \frac{\rho_{Hg} - \rho}{\rho}} = S \mu \sqrt{\frac{2g h}{1 - \frac{d_0^4}{d_1^4}} \left(\frac{\rho_{Hg}}{\rho} - 1 \right)}$$

en la que hay que conocer los valores de μ y ρ lo que complica el problema.

XIII.10.- MOVIMIENTO NO PERMANENTE EN FORONOMÍA

DESAGÜE DE DEPÓSITOS DE SECCIÓN VARIABLE. - Para el cálculo de los tiempos de vaciado de un depósito de sección variable, lleno de líquido, se iguala el volumen vaciado contado a partir del caudal, y el vaciado a partir del recipiente, en un tiempo dt , Fig XIII.12.

Si en el tiempo t la altura del líquido con respecto al fondo es z , el caudal saliente por el orificio de sección S , situado en el fondo, vale,

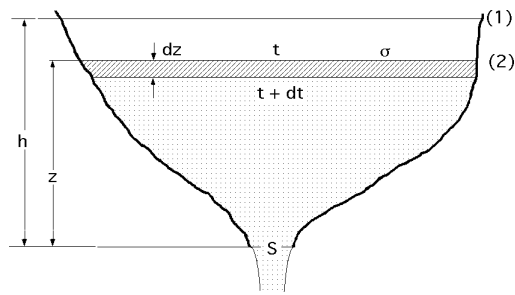


Fig XIII.12.- Depósito de sección variable

$$q = \mu S \sqrt{2 g z}$$

y el volumen de líquido perdido en el recipiente en el tiempo dt, es,

$$dV = q dt = \mu S \sqrt{2 g z} dt$$

Si se toma como sección del líquido a la altura z y siendo dz el descenso de nivel en el mismo tiempo dt, se tiene,

$$dV = - dz ; \quad = f(z)$$

apareciendo el signo (-) por ser decreciente; igualándolas resulta,

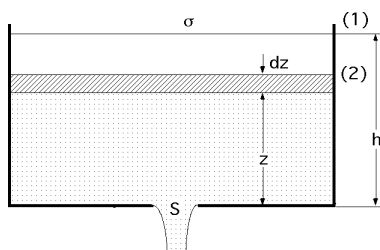
$$\mu S \sqrt{2 g z} dt = - dz ; \quad dt = \frac{- dz}{\mu S \sqrt{2 g z}}$$

El tiempo total de vaciado es,

$$T = \int_0^h \frac{- dz}{\mu S \sqrt{2 g z}} = \frac{1}{\mu S \sqrt{2 g}} \int_0^h \frac{- dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\mu S \sqrt{2 g}} \int_0^h \frac{f(z) dz}{\sqrt{z}}$$

DESAGÜE DE DEPÓSITOS DE SECCIÓN CONSTANTE.- De la expresión anterior, el tiempo de vaciado para este caso particular en que, = Cte, Fig XIII.13, es,

$$T = \frac{1}{\mu S \sqrt{2 g}} \int_0^h \frac{dz}{\sqrt{z}} = \dots = \frac{2 \sqrt{h}}{\mu S \sqrt{2 g}}$$



Para una variación de nivel h, el tiempo correspondiente es,

$$T_1 = \frac{2 (\sqrt{z})_0^h}{\mu S \sqrt{2 g}} = \frac{2 (\sqrt{h_1} - \sqrt{h})}{\mu S \sqrt{2 g}}$$

Fig XIII.13.- Depósitos de sección constante El tiempo necesario para vaciar una cantidad de líquido equivalente a todo el depósito, quedando siempre éste lleno, es decir, con carga constante h, es,

$$h = \mu S \sqrt{2 g h} T' \quad ; \quad T' = \frac{h}{\mu S \sqrt{2 g h}} = \frac{\sqrt{h}}{\mu S \sqrt{2 g}}$$

y dividiéndola por T se obtiene, $T = 2 T'$, lo cual dice que, el tiempo de vaciado de un depósito de sección constante es el doble del necesario para que se derrame la misma cantidad de líquido a carga constante.

DESAGÜE DE DEPÓSITOS ALIMENTADOS.- Supondremos que q_e es el caudal entrante y Q_s el caudal saliente, Fig XIII.14, de la forma,

$$q_e = \mu S \sqrt{2 g h} \quad ; \quad Q_s = \mu \int \sqrt{2 g z} dz$$

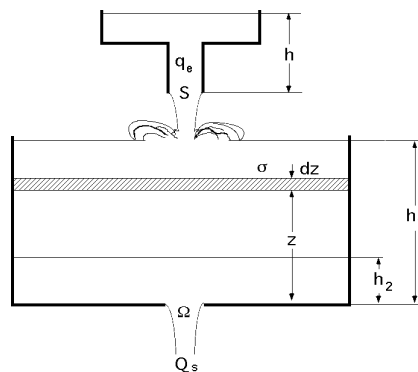


Fig XIII.14.- Desagüe de depósitos alimentados

La variación de volumen en el tiempo dt es,

$$(Q_s - q_e) dt = \text{Volumen que sale} = - dz$$

Despejando el valor de dt,

$$dt = \frac{- dz}{Q_s - q_e} = \frac{- dz}{\mu \int \sqrt{2 g z} dz - \mu S \sqrt{2 g h}} = \frac{- dz}{\mu \sqrt{2 g} (\int \sqrt{z} dz - S \sqrt{h})}$$

Integrando resulta,

$$T = \frac{1}{\mu \sqrt{2 g}} \int_{h_1}^{h_2} \frac{- dz}{\sqrt{z} - S \sqrt{h}}$$

Considerando, $\int \frac{1}{\sqrt{z} - S \sqrt{h}} dz = \text{Cte}$, se obtiene,

$$T = \frac{1}{\mu \sqrt{2 g}} \int_{h_1}^{h_2} \frac{- dz}{\sqrt{z} - S \sqrt{h}} = \dots = \frac{2}{\mu \sqrt{2 g}} \left\{ (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) + S \sqrt{h} \ln \frac{\sqrt{h_1} - S \sqrt{h}}{\sqrt{h_2} - S \sqrt{h}} \right\}$$

y si además se supone que, $S = 1$,

$$T = \frac{2}{\mu \sqrt{2 g}} \left\{ (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) + \sqrt{h} \ln \frac{\sqrt{h_1} - \sqrt{h}}{\sqrt{h_2} - \sqrt{h}} \right\}$$

Si, $h = h_1$, el tiempo de vaciado sería infinito, es decir, no se vaciaría, puesto que entraría la misma cantidad de líquido que saliese por el orificio.

Si, $h > h_1$, el logaritmo es (-) lo que no tiene significado físico.

Si, $h < h_1$, disminuye el nivel del depósito, siendo el tiempo un número real.

Si, $h = 0$, no existe alimentación, y se vuelve al caso de un solo depósito.

DESAGÜE DE ORIFICIOS SUMERGIDOS.- Para calcular el tiempo necesario para pasar desde h a z , Fig XIII.15, se procede en la siguiente forma,

Si x representa el descenso de nivel en el primer depósito e y el ascenso en el segundo, siendo z el desnivel después de la operación, se cumple siempre que,

$$x + y + z = h \quad dx + dy + dz = 0$$

El volumen que pasa a través del orificio es,

$$\begin{aligned} \mu S \sqrt{2gz} dt &= \mu S \sqrt{2gz} dt \\ \frac{dx}{\mu S \sqrt{2gz} dt} &= \frac{dy}{\mu S \sqrt{2gz} dt} \end{aligned}$$

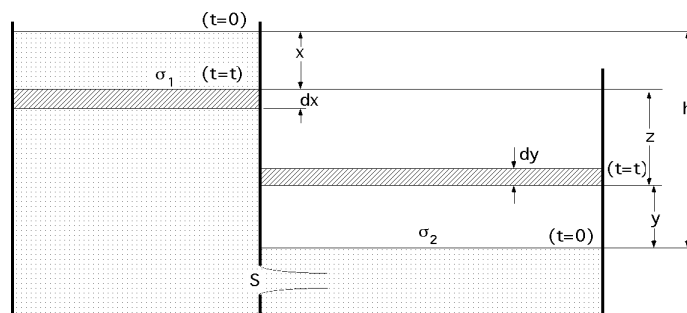


Fig XIII. 15.- Orificio sumergido

y sustituyendo dx y dy , resulta,

$$dx + dy + dz = 0 \quad ; \quad \frac{\mu S \sqrt{2gz} dt}{1} + \frac{\mu S \sqrt{2gz} dt}{2} + dz = 0$$

Despejando dt ,

$$dt = \frac{dz}{\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) \mu S \sqrt{2gz}}$$

e integrándola entre los límites h y z permite calcular el tiempo T de vaciado,

$$T = \frac{2}{\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) \mu S \sqrt{2g}} \int_h^z \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{2}{\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) \mu S \sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{z})$$

Cuando los depósitos igualen sus niveles, $z = 0$,

$$T = \frac{2}{\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) \mu S \sqrt{2g}} \sqrt{\frac{h}{2g}}$$

TUBO ADICIONAL CILÍNDRICO EXTERIOR.- Al colocar un tubo adicional se logra que la vena líquida que salía contraída cuando éste no existía, vuelva a ensancharse y salir con el mismo diámetro del orificio sin tubo, Fig XIII.16; el caudal saliente con tubo es superior al caudal saliente sin tubo.

En efecto, si aplicamos Bernoulli entre los puntos A y B, y Belanger entre B y C, se tiene,

$$\text{Bernoulli, } \frac{P_A}{\rho} + h + 0 = \frac{P_B}{\rho} + h + \frac{v_B^2}{2g}$$

$$\text{Belanger, } \frac{P_B}{\rho} + 0 + \frac{v_B^2}{2g} = \frac{P_C}{\rho} + 0 + \frac{v_C^2}{2g} + \frac{(v_B - v_C)^2}{2g} + k \frac{v_C^2}{2g}$$

y como el segundo miembro de la ecuación de Bernoulli coincide con el primer miembro de la ecuación de Belanger, quedará,

$$\frac{P_A}{\rho} + h = \frac{P_C}{\rho} + \frac{v_C^2}{2g} + \frac{(v_B - v_C)^2}{2g} + k \frac{v_C^2}{2g}$$

A su vez si, $P_A = P_C = P_{atm}$, y teniendo en cuenta que el coeficiente de contracción es,

$$C_c = \frac{v_B}{v_C}$$

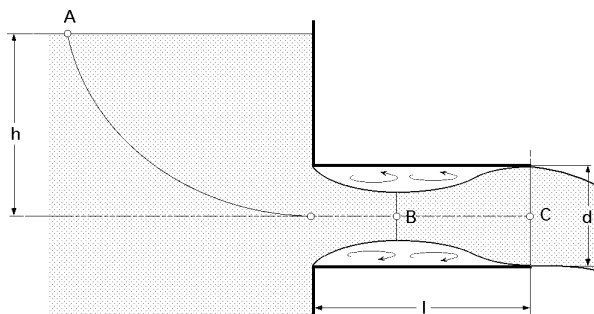


Fig XIII.16.- Tubo adicional

$$h = \frac{v_C^2}{2g} + \frac{(\frac{v_B}{C_c} - v_C)^2}{2g} + k \frac{v_C^2}{2g} = \frac{v_C^2}{2g} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 + k \right\} ; \mu =$$

Despejando v_C resulta,

$$v_C = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right)^2 + k}} = \left| \begin{array}{l} \text{Para, } \mu = 0,62 \\ k = 0,22 \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) = 0,22 \left(\frac{1}{0,62} - 1 \right) \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} v_C = 0,82 \sqrt{2gh} \\ Q = 0,82 C_c \sqrt{2gh} \end{array}$$

que se observa es un valor superior al del orificio libre.

Los valores del coeficiente correspondientes al caudal saliente por tubo adicional, según Weisbach, son función de la relación $\frac{1}{d}$, viniendo dados sus valores en la Tabla XIII.9.

Tabla XIII.9.- Coeficiente de gasto en función de l/d

l/d	1	2 a 3	12	24	36	48	60
Coeficiente de gasto	0,62	0,82	0,77	0,73	0,68	0,63	0,6

Como se puede ver, el mejor valor de la relación l/d se corresponde para, l/d = 2,5, con un valor del coeficiente de gasto igual a 0,82. La superioridad del caudal de los tubos adicionales respecto al caudal con orificio libre, es debido a la disminución de la presión en el punto B, que es menor que la atmosférica; como se tiene que,

$$P_A + h = P_B + \frac{v_B^2}{2g}$$

y ser, $P_A = P_{atm}$; $v_B = \frac{v_C}{\mu}$; $\mu = 0,62$; $v_C = 0,82 \sqrt{2gh}$; μ

combinándolas adecuadamente se obtiene,

$$v_B = \frac{v_C}{\mu} = \frac{0,82 \sqrt{2gh}}{0,62} ; \frac{P_{atm} - P_B}{2g} - h = \left(\frac{0,82}{0,62}\right)^2 h - h = 0,75 h$$

por lo que, $P_{atm} > P_B$, existiendo en B un vacío parcial.

La carga h se reparte de la siguiente forma,

$$v_C^2 = 0,82^2 2gh ; \frac{v_C^2}{2g} = 0,82^2 h = \frac{2}{3} h$$

es decir, 2/3, de la carga h se utiliza para generar energía, mientras que el 1/3 restante se utiliza en vencer la pérdida debida al ensanchamiento de la vena.

La velocidad en el punto B es,

$$v_B = 1,32 \sqrt{2gh}$$

TUBO ADICIONAL DIVERGENTE.- Un tubo divergente conectado a la sección σ_0 con el recipiente, Fig XIII.17, de forma que los codos sean convergentes, dará un caudal aproximado Q de la forma,

$$Q = S \sqrt{2gh}$$

y parece ser que si se alarga el tubo, el caudal podría ser mayor por cuanto $\sqrt{2gh}$ permanece constante y aumenta la sección, es decir,

$$Q = S' \sqrt{2gh}$$

pero ésto es sólo en apariencia, por cuanto a medida que la velocidad v_0 crece, la presión media en la sección σ_0 decrece, apareciendo a partir de una determinada sección el fenómeno de la cavita-

ción; cuando ésto suceda, el líquido dejará de ser homogéneo y no se podrán aplicar las fórmulas halladas anteriormente.

Para evitar la cavitación, la presión deberá ser superior a la equivalente a 4 ó 5 metros de columna de agua, siendo el caudal máximo,

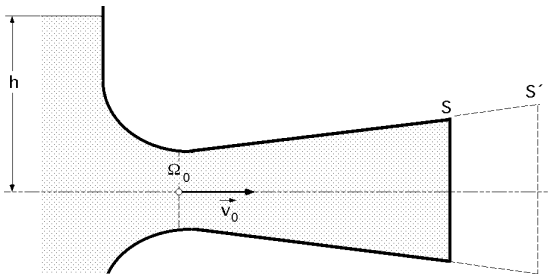


Fig XIII.17.- Tubo adicional divergente

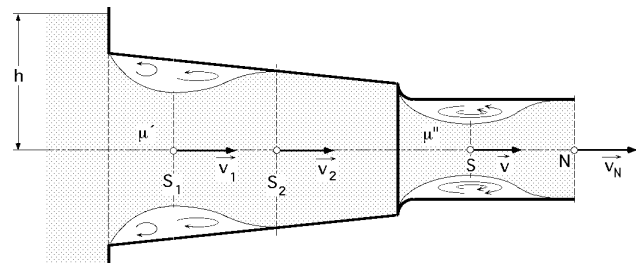


Fig XIII.18.- Tubo adicional convergente

$$Q_{\text{máx}} = 0 \sqrt{2g(h + 5 \div 6)}$$

Interesa que la divergencia sea pequeña para evitar remolinos, zonas muertas, etc., que disminuirían el caudal; cuanto más pulido esté el tubo, las pérdidas por rozamiento serán también menores.

TUBO ADICIONAL CONVERGENTE.- Si en el empalme no hay aristas vivas, apenas habrá pérdidas, pero si existen aristas vivas, la vena se contrae al salir, para en su avance, volver a contraerse a la salida, Fig XIII.18.

Para cada sección se tiene,

$$Q = \mu' S_1 v_1 = S_2 v_2 = \mu'' S v$$

$$v_1 = v \frac{\mu'' S}{\mu' S_1}$$

$$v_2 = v \frac{\mu'' S}{S_2}$$

La altura total h disponible entre M y N, es,

$$z_M + \frac{p_M}{\rho g} + \frac{v_M^2}{2g} = z_N + \frac{p_N}{\rho g} + \frac{v_N^2}{2g} + \text{Pérdidas} = \frac{v_N^2}{2g} + \text{Pérdidas}$$

y como p_M y v_M son cero, resulta,

$$h = z_M = \frac{v_N^2}{2g} + \text{Pérdidas}$$

Además, por Belanguer, sabemos que las pérdidas por ensanchamiento de la vena líquida, sumadas a las continuas, determinan el total; las pérdidas accidentales son,

$$\frac{v_N^2}{2g} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$$

y sustituyendo en ellas v_1 y v_2 , queda,

$$\frac{(v \frac{\mu'' S}{\mu' S_1} - v \frac{\mu'' S}{S_2})^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} = \{(\frac{\mu'' S}{\mu' S_1} - \frac{\mu'' S}{S_2})^2 + \} \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}$$

por lo que,

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} (1 +) ; v = \sqrt{\frac{2g h}{1 + }} = \sqrt{2g h}$$

El caudal es,

$$Q = \mu'' S v = \mu'' S \sqrt{2g h} = \mu S \sqrt{2g h}$$

Las condiciones más favorables se tienen para una relación (longitud del tubo/diámetro de salida) = 2,5, para un ángulo de convergencia de 13,5°, lo cual supone que, $\mu = 0,947$ y, $= 0,09$.

XIII.11.- VERTEDEROS

Un vertedero es una obstrucción en la solera de un canal que debe ser sobrepasado por una corriente; puede interpretarse también, como un orificio descubierto en su parte superior, o como un muro que interrumpiendo una corriente de agua, obliga al líquido a derramarse por el borde del mismo; son pues, orificios incompletos.

Para ciertas geometrías, las más simples y usuales, el caudal Q' se correlaciona con la altura h , aguas arriba del vertedero, pudiéndose interpretar también el vertedero como un medidor elemental, pero efectivo, del caudal en canales abiertos.

Pueden ser, libres y sumergidos, según que el nivel del agua, aguas abajo del vertedero sea inferior o superior, respectivamente, al del umbral.

También pueden ser:

a) *Con contracción completa y perfecta, para lo cual, la longitud del umbral tiene que ser menor que la anchura del canal*

b) *Con contracción incompleta, siendo a longitud del umbral igual a la anchura del canal.*

Por lo que respecta al espesor de la pared, se tienen los vertederos en pared delgada, cuando el borde de la pared sobre la cual vierte es un arista viva, por cuanto el agua o líquido que se derrama tiene que tocar al vertedero sólo en esa arista, mientras que en pared gruesa sucede el caso contrario.

En ambos casos, pared delgada o gruesa, el flujo aguas arriba es subcrítico, acelerándose a crítico cerca de la cima del vertedero y rebosando en forma de lámina supercrítica, chapotea en la corriente aguas abajo. El caudal q por unidad de anchura, es proporcional a, $h^{3/2}$.

La altura o carga h es la distancia existente entre la superficie libre del agua a cierta distancia del vertedero aguas arriba, y el umbral o cresta del mismo. Suele estar entre 2 y 4 metros del vertedero.

La forma más conveniente es la rectangular, aunque existen la triangular, trapecial y circular.

La característica de un vertedero se define como la función, $q = f(h)$.

VERTEDERO EN PARED DELGADA. - Sea el vertedero de la Fig XIII.19; llamamos G_0 y G_1 a los c.d.g. de las secciones 0 y 1. En 0 supondremos que la velocidad puede ser nula o no; el espesor de la capa líquida sobre la cresta es e , y el derrame se verifica al aire.

La carga varía desde h , hasta, $h - e$, siendo, $e < h$.

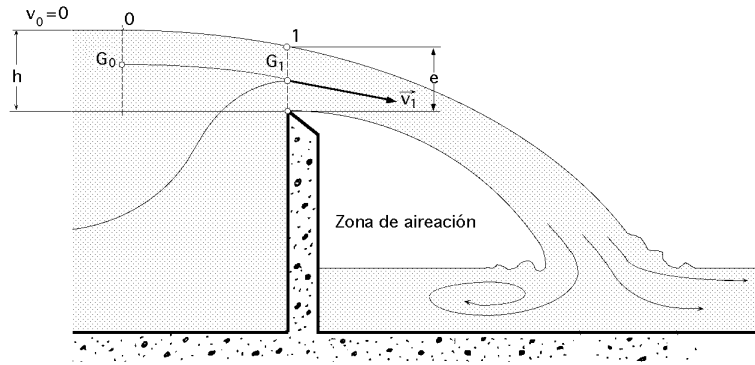


Fig XIII.19.- Vertedero en pared delgada

Aplicando Bernoulli entre 0 y 1 se encuentra, para flujo unidimensional y sin fricción,

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_{0t}^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_{1t}^2}{2g}$$

$$\frac{v_{1t}^2}{2g} = (z_0 - z_1) + \frac{p_0 - p_1}{\rho} + \frac{v_{0t}^2}{2g} = \left| \begin{array}{l} p_0 = p_{atm} + \rho g (h - z_0) \\ p_1 = p_{atm} \end{array} \right| =$$

$$= (z_0 - z_1) + \frac{p_{atm} + \rho g (h - z_0) - p_{atm}}{\rho} + \frac{v_{0t}^2}{2g} = (h - z_1) + \frac{v_{0t}^2}{2g} = h - \frac{e}{2} + \frac{v_{0t}^2}{2g}$$

$$v_{1t} = \sqrt{v_{0t}^2 + 2g \left(h - \frac{e}{2} \right)}$$

en la que e viene dada experimentalmente, oscilando su valor entre, $0,72 h$ e h , por lo que se puede tomar como valor medio, $e = 0,86 h$, quedando el valor de v_{1t} en la forma,

$$v_{1t} = \sqrt{v_{0t}^2 + 2g \left(h - \frac{0,86 h}{2} \right)} = \sqrt{v_{0t}^2 + 11,18 h}$$

Para, $v_{0t} = 0$; $v_{1t} = 3,344\sqrt{h}$, el caudal es,

$$Q = \mu \sqrt{2gz} = \mu (b \times 0,86 h) \sqrt{v_{0t}^2 + 2g \left(h - \frac{e}{2} \right)}$$

$$\text{Para, } \mu = 0,62 ; Q = 1,78 b h^{3/2}$$

$$\text{Para, } \mu = 0,652 ; Q = 1,874 b h^{3/2}$$

Por lo que respecta al vertedero aguas abajo, se puede interpretar que, como la cara superior y la cara inferior de la vena están en contacto con la atmósfera, la presión en toda la sección es aproximadamente la atmosférica.

El remanso que se forma debajo de la vena, Fig XIII.20, tiende a elevar su nivel sobre el de las

aguas, aguas abajo, ya que se ejerce una fuerza hidrostática que equilibra la fuerza creada por la variación de la cantidad de movimiento inherente a la desviación del chorro.

Aplicando el Teorema de la Cantidad de Movimiento, $F t = m v$, se obtiene,

$$F = \frac{h_3^2}{2} - \frac{h_2^2}{2} ; t = 1 \text{ seg} ; m = V = q ; v = v_2 - v_1$$

$$v_3 = v_2 \cos \theta ; v = v_2 - v_2 \cos \theta = v_2 (1 - \cos \theta)$$

luego,

$$\frac{1}{2} (h_3^2 - h_2^2) 1 \text{ seg} = q v_2 (1 - \cos \theta) \quad q = \frac{(h_3^2 - h_2^2)}{2 (1 - \cos \theta) v_2}$$

en la que q es el caudal por unidad de anchura y θ el ángulo de inclinación del chorro al incidir contra la solera del canal.

El caudal total es, $Q = b q$

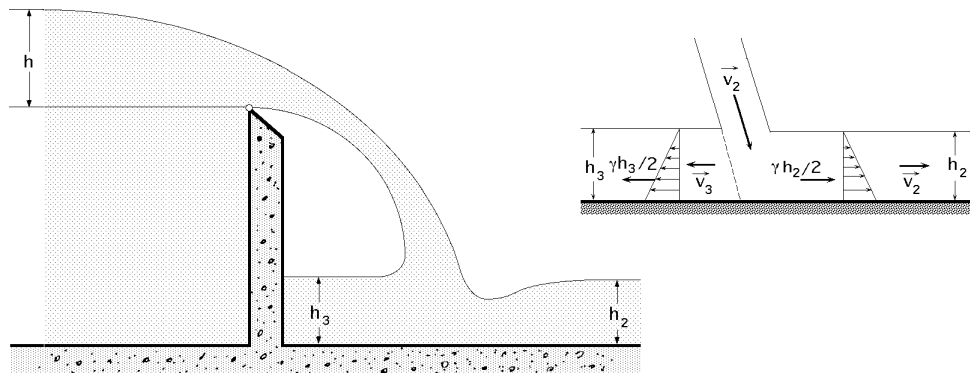


Fig XIII.20

VERTEDEROS EN PARED GRUESA.- En este tipo de vertederos, sobre su parte superior se crea una corriente unidimensional en condiciones próximas a la crítica, Fig XIII.21, pudiéndose interpretar como un orificio prolongado en canal, del que sabemos,

$$v_2 = \sqrt{2 g z} = \sqrt{2 g (h - e)}$$

con, $v_0 = 0$, siendo v_2 la velocidad teórica en la cresta del vertedero, luego,

$$Q = \mu b e \sqrt{2 g (h - e)}$$

Para calcular el caudal máximo partimos de, $dQ/de = 0$

$$\frac{dQ}{de} = \mu b \sqrt{2 g} \left(\sqrt{h - e} - \frac{e}{2 \sqrt{h - e}} \right) = 0 \quad e = \frac{2 h}{3}$$

por lo que el caudal máximo será,

$$Q_{\text{máx}} = \mu b \frac{2h}{3} \sqrt{2g \left(h - \frac{2h}{3} \right)} = \dots = 1,704 \mu b \sqrt{h^3}$$

Cuando, $v_0 = 0$, habrá que incrementar h en la carga debida a la velocidad aguas arriba, que es función de la velocidad que previamente habíamos despreciado y que vendrá afectada de un coeficiente, cuyo valor medio es 1,667.

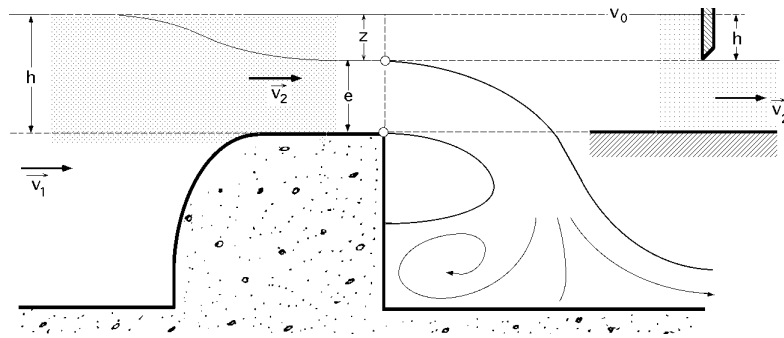


Fig XIII.21

En estas condiciones el gasto toma la forma,

$$Q = \mu b \left(h + \frac{v_0^2}{2g} \right) \sqrt{2g \left(h + \frac{v_0^2}{2g} \right)} = \mu b \sqrt{2g \left(h + \frac{v_0^2}{2g} \right)^3} = \mu b h \sqrt{2gh \left(1 + \frac{v_0^2}{2gh} \right)^3}$$

y desarrollándola por Newton, se obtiene,

$$Q = \mu b h \sqrt{2gh} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{v_0^2}{2gh} + \frac{3}{2} \left(\frac{v_0^2}{2gh} \right)^2 + \dots \right) = \mu b h \sqrt{2gh} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{v_0^2}{2gh} + \dots \right) =$$

$$= \mu b h \sqrt{2gh} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{v_0^2}{2gh} \right)$$

que es análoga a la obtenida en pared delgada, habiendo hecho,

$$= \mu \left(1 + \frac{3}{2} \frac{v_0^2}{2gh} \right)$$

Además, como este vertedero se puede asimilar a un orificio rectangular en que, $h_0 = 0$, se puede aplicar para el caudal, la ecuación deducida para los mismos, haciendo, $h_0 = 0$, es decir,

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \{ \sqrt{(h_1 + z)^3} - \sqrt{z^3} \} = 2,95 \mu b \{ \sqrt{(h_1 + z)^3} - \sqrt{z^3} \}$$

Para vertederos con aristas agudas, $0,63 < \mu < 0,68$
 en la que el valor de μ se toma,

Para vertederos con coronación redondeada, $0,80 < \mu < 0,83$

Formas de la lámina.- La forma de la lámina depende de la disposición del vertedero y del caudal. Cuando la lámina, al pasar por el umbral del vertedero, deje un espacio aireado de forma que el aire circule por debajo de la misma sometido a la presión atmosférica, la lámina se dice libre, y el verte-

dero se puede considerar como de pared delgada, aplicando para la obtención del caudal, la fórmula obtenida anteriormente.

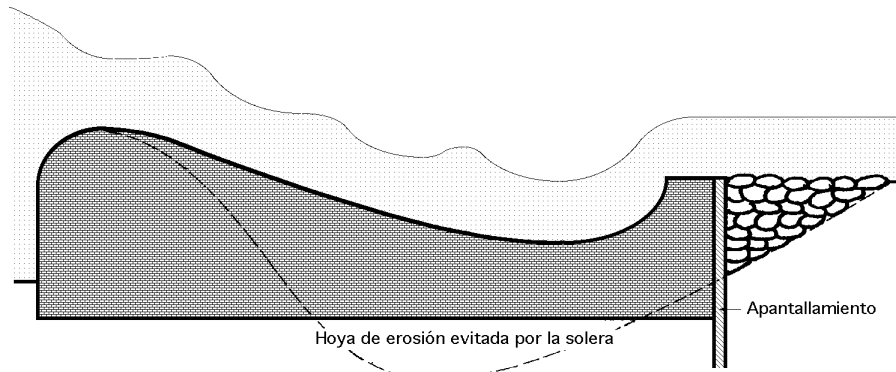


Fig XIII.22

Si por la disposición de las paredes del canal aguas abajo no existe ventilación de la lámina líquida como en el caso anterior, estando el agua en contacto con las paredes aguas arriba y aguas abajo, el aire se enrarecerá, elevándose la corriente líquida aguas abajo, y aproximando la lámina al vertedero, se ocasionará una depresión en la lámina, aumentando el coeficiente de gasto en la expresión del caudal.

Cuando la altura de la lámina respecto del umbral sea pequeña, la corriente sufrirá un resbalamiento, quedando en contacto con el paramento aguas abajo, por lo que la lámina quedará adherida, aumentando el coeficiente de gasto, y estableciéndose este tipo de régimen para cargas pequeñas.

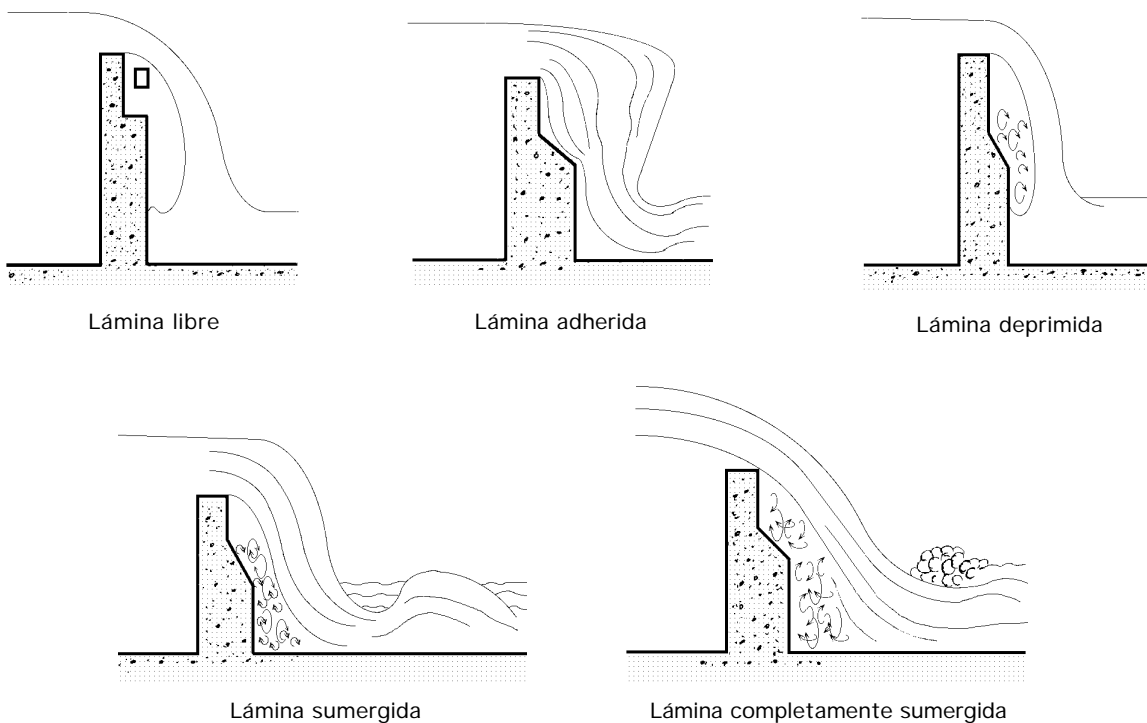


Fig XIII.23.- Diversas formas de la lámina

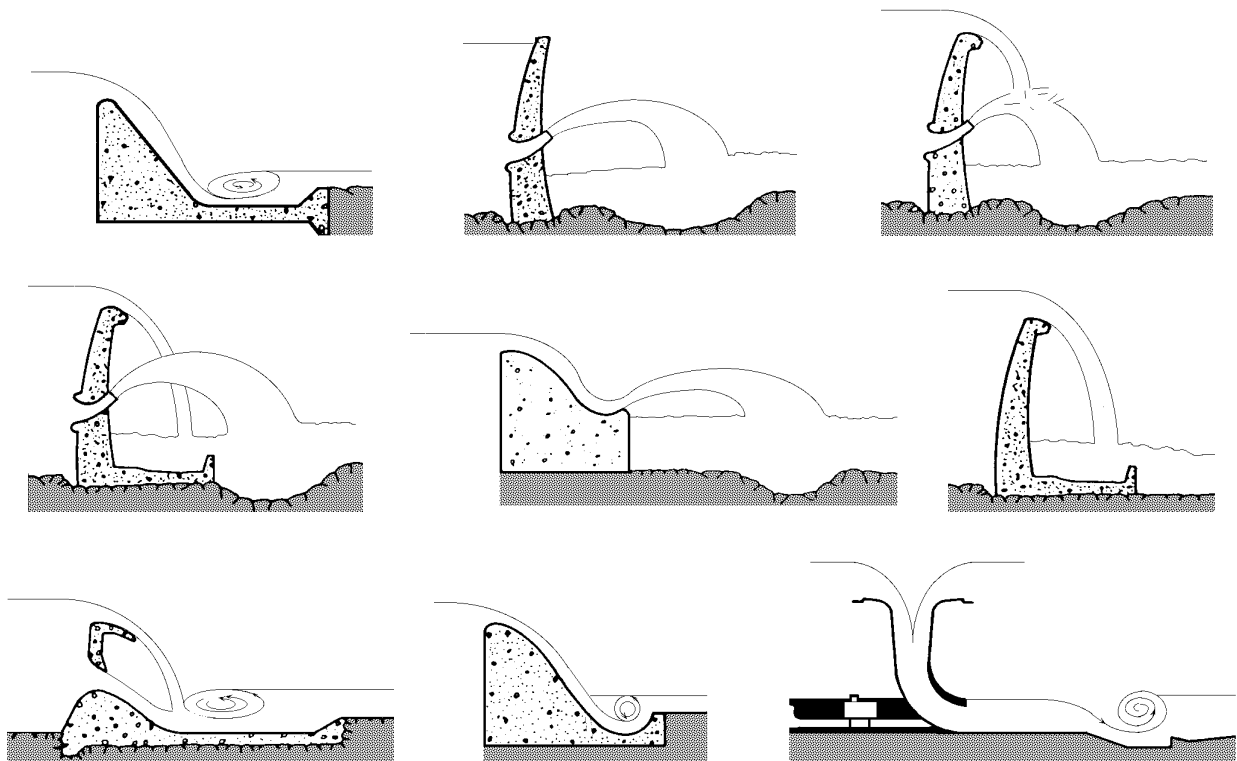


Fig XIII.24.- Otras formas de la lámina

Finalmente, cuando se cumpla que, $0,4 < \frac{p_r}{h} < 2,5$, siendo p_r la profundidad, y por la elevación del nivel aguas abajo la parte inferior quede totalmente anegada, alargándose sin separarse del paramento, (lámina sumergida por debajo), el coeficiente de la formulación del caudal variará según, p_r/h , desde su valor general, hasta 1,12.

Bazin distingue dos casos:

a) Para lámina simplemente sumergida, cuando se cumpla que, $h < 0,4 H$, el coeficiente de gasto es,

$$\mu = 0,47 + 0,0075 \left(\frac{p_r}{h} \right)^2$$

b) Para lámina completamente sumergida, cuando, $h_1 = 0,75 H$,

$$\mu = \mu_1 \left(1,05 + 0,15 \frac{h_1}{p} \right)$$

en la que μ_1 está tabulada, para diversos valores de h y p_r .

VERTEDEROS CON CONTRACCIÓN INCOMPLETA.- Cuando la longitud del vertedero sea menor que la anchura del canal y $b > 4 h$, la sección de la vena líquida experimenta una contracción en una o dos paredes, viniendo expresado el gasto por,

$$\text{Contracción en una pared, } Q = (b - 0,1 h) h \sqrt{2 g h}$$

$$\text{Contracción en dos paredes, } Q = (b - 0,2 h) h \sqrt{2 g h}$$

VERTEDERO SUMERGIDO.- El nivel aguas abajo es superior a la coronación del vertedero, Fig XIII.25. Para determinar el caudal, se aplica una fórmula que se corresponde con la de un orificio parcialmente sumergido, de la forma,

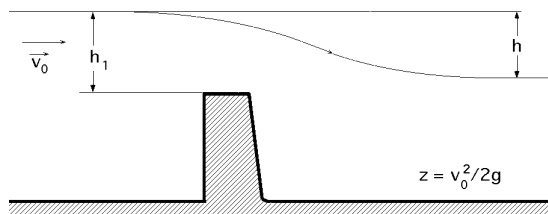


Fig XIII.25.- Vertedero sumergido

$$Q = \mu_1 b (h_1 - h) \sqrt{2 g (h + z)} + \frac{3}{2} \mu_2 b \sqrt{2 g} \{ \sqrt{(h_1 + z)^3} - \sqrt{z^3} \}$$

en la que los valores de μ_1 son los ya expuestos, y los de μ_2 de la forma, $\mu_2 = 0,68$ a $0,83$, según haya o no contracción lateral; la geometría de la coronación del vertedero influye en estos valores, en la forma,

$$\mu_2 = 0,63 \text{ a } 0,68 \text{ para vertederos con aristas agudas}$$

$$\mu_2 = 0,80 \text{ a } 0,83 \text{ para vertederos con coronación redondeada}$$

Si el vertedero está prolongado en canal, desagüe de fondo, se propone, $\mu_1 = \mu_2 = 0,80$,

VERTEDEROS INCLINADOS.- En estos casos se utiliza,

$$Q = b h \sqrt{2 g h}$$

viniendo afectado b por el factor de la Tabla XIII.10.

Tabla XIII.10.-Valores de

Inclinación del vertedero	Aguas arriba	Aguas abajo
1 de altura por 4 de base	-----	1,09
1 de altura por 2 de base	0,93	1,12
1 de altura por 1 de base	0,93	1,10
3 de altura por 2 de base	0,94	1,07
3 de altura por 1 de base	0,95	1,04
1 de altura por 0 de base	1,00	1,00

VERTEDEROS CIRCULARES

El valor del caudal, $Q = \mu w \sqrt{2 g h}$, se calcula teniendo en cuenta la siguiente formulación:

$$\mu = \left(0,35 + \frac{2}{1000 h} \right) \left\{ 1 + \left(\frac{w}{h} \right)^2 \right\}, \text{ Hégly}$$

$$Q = c q_i \sqrt{d^5}, \text{ con, } c = \left(0,558 d^{-0,025} + 0,085 - \frac{\frac{w}{d^2}}{10 \frac{h}{d}} \right) \left\{ 1 + \left(\frac{w}{h} \right)^2 \right\}, \text{ Jorisseau}$$

$$q_i = f \left(\frac{h}{d} \right) = 3,203 \left(\frac{h}{d} \right)^{1,975} - 0,842 \left(\frac{h}{d} \right)^{3,78}, \text{ Staus}$$

VERTEDEROS TRIANGULARES.- En la zona rayada de la Fig XIII.26, se tiene,

$$dQ = \mu x \sqrt{2 g z} dz = \left| \begin{array}{l} \frac{b}{h} = \frac{x}{h-z} \\ x = \frac{h-z}{h} b \end{array} \right| = \mu \frac{h-z}{h} b \sqrt{2 g z} dz$$

$$Q = \mu \frac{b}{h} \int_0^h (h-z) \sqrt{2 g z} dz = \mu \frac{b}{h} \sqrt{2 g} \left(\frac{2 \sqrt{h^5}}{3} - \frac{2 \sqrt{h^5}}{5} \right) = \frac{4 \mu b h \sqrt{2 g h}}{15}$$

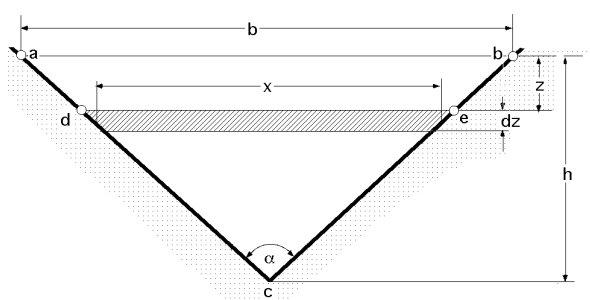


Fig XIII.26.- Vertedero triangular

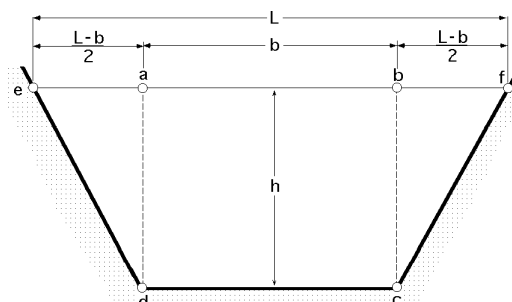


Fig XIII.27.- Vertedero trapezoidal

Para, $\frac{b}{h} = 2$; $\mu = 0,59$; $\alpha = 90^\circ$
 $\frac{b}{h} = 4$; $\mu = 0,62$; $\alpha = 126^\circ 52' 11''$

y como, $b = 2 h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, con, $\alpha = \frac{\alpha}{2}$, sustituyendo en la expresión del caudal se obtiene:

$$Q = \frac{8}{15} \mu \sqrt{2 g h^5} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

VERTEDEROS TRAPECIALES.- Si se supone que la sección transversal del vertedero es un trapecio isósceles, con $L = 2 b$, el caudal es,

$$Q = Q_1 + Q_2 = \begin{array}{l} \text{En la sección (abcd), } Q_1 = \mu b h \sqrt{2 g h} \\ \text{En las secciones (ead) y (fbc), } Q_2 = \frac{4}{15} \mu (L - b) h \sqrt{2 g h} \end{array} = \frac{19}{15} \mu b h \sqrt{2 g h}$$

XIV.- TEOREMA DEL IMPULSO

XIV.1.- REACCIÓN DE UN FLUIDO EN MOVIMIENTO SOBRE UN CANAL GUÍA

El cálculo de la fuerza ejercida por un fluido en movimiento sobre el canal que forman los álabes de una bomba o turbina, se puede realizar aplicando el Teorema de la Cantidad de Movimiento, que dice: *El incremento geométrico diferencial de la cantidad de movimiento de un sistema material es igual al impulso elemental de la resultante de las acciones exteriores que actúan sobre dicho sistema.*

De acuerdo con la Fig XIV.1, supondremos que el canal guía es el (ABCD) por el que va a circular el fluido en movimiento permanente, siendo v_1 la velocidad en la sección 1 y v_2 la velocidad en la sección 2 de dicho canal guía. El fluido es incompresible y las presiones en 1 y 2 tienen por valor p_1 y p_2 respectivamente, siendo G el peso de la vena líquida (ABCD).

Para estudiar el movimiento de la vena fluida (ABCD) como el de un cuerpo libre, la supondremos aislada del resto del fluido en movimiento, sustituyendo las masas fluidas, anterior a la sección 1 y posterior a la sección 2, por sus acciones sobre la vena (ABCD) a través de dichas secciones extremas.

Estas acciones son las presiones p_1 y p_2 , la primera en el sentido del movimiento y la segunda en sentido contrario, aplicadas en 1 y 2 respectivamente; asimismo, el canal guía se puede sustituir por la resultante \vec{R}_1 de sus acciones sobre el fluido.

Designando por \vec{n}_1 y \vec{n}_2 a los vectores unitarios dirigidos en el mismo sentido que las velocidades \vec{v}_1 y \vec{v}_2 respectivamente, la vena fluida (ABCD), como cuerpo libre, quedará sometida a las siguientes acciones, cuya resultante será igual a la de las fuerzas exteriores \vec{F} :

Gravedad.....	\vec{G}
Acción del canal sobre el fluido	\vec{R}_1	
Acción de la presión sobre 1....	\vec{n}_1	p_1
Acción de la presión sobre 2....	\vec{n}_2	p_2

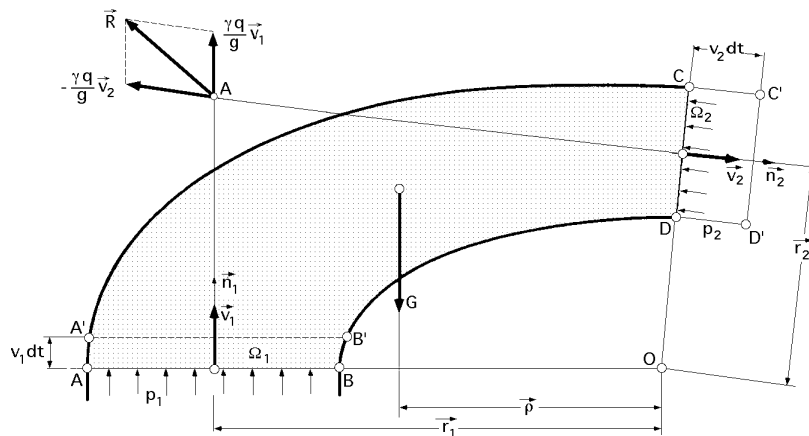


Fig XIV.1

por lo que:

$$\vec{F} = \vec{G} - \vec{R} + \vec{n}_1 \cdot p_1 - \vec{n}_2 \cdot p_2$$

El cálculo de la reacción del fluido sobre el canal guía, $\vec{R} = -\vec{R}_1$, se efectúa aplicando el teorema de la Cantidad de Movimiento; por lo tanto, el impulso elemental de la resultante de las acciones exteriores que actúan sobre el sistema, masa fluida (ABCD), es:

$$\vec{F} dt = \vec{G} dt + \vec{R}_1 dt + \vec{n}_1 \cdot p_1 dt - \vec{n}_2 \cdot p_2 dt$$

Si a continuación se supone que la masa fluida (ABCD) se desplaza en el tiempo dt a la posición (A'B'C'D'), se habrá producido una variación de su cantidad de movimiento. En efecto, como estamos en la hipótesis de movimiento permanente, para las masas de fluido contenidas entre las posiciones (ABCD) y (A'B'C'D'), la cantidad de movimiento no se modifica.

Sin embargo, quedan aún por comprobar las masas (ABA'B') y (CDC'D') en las que sus velocidades respectivas son \vec{v}_1 y \vec{v}_2 y cuyas cantidades de movimiento vamos a calcular:

El volumen (ABA'B') es, $v_1 dt$

El volumen (CDC'D') es, $v_2 dt$

En la hipótesis de fluido incompresible, la ecuación de continuidad es:

$$v_1 = v_2$$

y, por lo tanto, los volúmenes (ABA'B') y (CDC'D') son iguales, de valor:

$$v_1 dt = v_2 dt = q dt$$

siendo q el caudal de fluido que circula por el canal guía.

La cantidad de movimiento inicial en la masa fluida es, $\vec{M}_1 = \vec{M}_{A'B'CD} + \frac{q}{g} \vec{n}_1 v_1 dt$

La cantidad de movimiento final en la masa fluida es, $\vec{M}_2 = \vec{M}_{A'B'CD} + \frac{q}{g} \vec{n}_2 v_2 dt$

La variación de la cantidad de movimiento en el tiempo dt , entre las posiciones infinitamente próximas (ABCD) y (A'B'C'D') es:

$$\bar{M}_2 - \bar{M}_1 = \frac{q}{g} (\bar{n}_2 v_2 - \bar{n}_1 v_1) dt$$

Aplicando el teorema de la Cantidad de Movimiento, se tiene:

$$\frac{q}{g} (\bar{n}_2 v_2 - \bar{n}_1 v_1) dt = \bar{G} dt + \bar{R}_1 dt + \bar{n}_1 p_1 dt - \bar{n}_2 p_2 dt$$

de la que se deduce la expresión de la acción \bar{R}_1 de las paredes del canal sobre la vena fluida:

$$\bar{R}_1 = \frac{q}{g} (\bar{n}_2 v_2 - \bar{n}_1 v_1) - \bar{G} + \bar{n}_2 p_2 - \bar{n}_1 p_1$$

y de acuerdo con el Principio de Acción y Reacción el valor de la acción del fluido \bar{R} sobre las paredes del canal guía, se obtiene teniendo en cuenta que, $\bar{R} = -\bar{R}_1$, en la forma:

$$\bar{R} = \frac{q}{g} (\bar{n}_1 v_1 - \bar{n}_2 v_2) + \bar{G} + \bar{n}_1 p_1 - \bar{n}_2 p_2$$

Si llamamos X e Y a las componentes de \bar{R} respecto a los ejes cartesianos de referencia, y

α_1 al ángulo que forman con la dirección (xx') los vectores \vec{v}_1 y $(\bar{n}_1 p_1)$

α_2 al ángulo que forman con la dirección (xx') los vectores \vec{v}_2 y $(\bar{n}_2 p_2)$

α_3 el ángulo que forma \vec{G} con (xx')

se tiene:

$$X = \frac{q}{g} (v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2) + G \cos \alpha_3 + p_1 \cos \alpha_1 - p_2 \cos \alpha_2$$

$$Y = \frac{q}{g} (v_1 \sin \alpha_1 - v_2 \sin \alpha_2) + G \sin \alpha_3 + p_1 \sin \alpha_1 - p_2 \sin \alpha_2$$

y despreciando el peso de la vena, y no teniendo en cuenta las presiones, se llega a:

$$\bar{R} = \frac{q}{g} (\bar{n}_1 v_1 - \bar{n}_2 v_2) = \frac{q}{g} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \quad \begin{aligned} X &= \frac{q}{g} (v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2) \\ Y &= \frac{q}{g} (v_1 \sin \alpha_1 - v_2 \sin \alpha_2) \end{aligned}$$

La construcción gráfica de la reacción es la siguiente: Sobre el punto de intersección de las direcciones \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , punto A de la Fig XIV.1, se construye la diferencia indicada por la fórmula que da el valor de \bar{R} , obteniendo el módulo, dirección y sentido de \bar{R} , en la hipótesis de despreciar el peso G y las presiones p_1 y p_2 .

XIV.2.- MOMENTO CON RELACIÓN A UN PUNTO DE LA ACCIÓN \bar{R}

Si se quiere calcular el momento con relación a un punto de la acción, ejercida por el fluido sobre su canal guía, aplicaremos el teorema del Momento Cinético que dice:

El incremento diferencial experimentado por el momento cinético de un sistema móvil respecto a un punto fijo O, es igual al momento resultante respecto al mismo punto O, de los impulsos elementales de las fuerzas exteriores que solicitan al sistema.

Utilizando la misma notación que para el cálculo de \bar{R} y de acuerdo con la Fig XII.1, se tiene:

$$\text{Momento cinético inicial, } \bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_{A'B'CD} + \frac{q}{g} \bar{n}_1 v_1 dt \bar{r}_1$$

$$\text{Momento cinético final, } \bar{\mu}_2 = \bar{\mu}_{A'B'CD} + \frac{q}{g} \bar{n}_2 v_2 dt \bar{r}_2$$

y la variación experimentada por el momento cinético:

$$\bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_1 = \frac{q}{g} (\bar{n}_2 v_2 \bar{r}_2 - \bar{n}_1 v_1 \bar{r}_1) dt$$

El momento resultante de los impulsos que recibe la vena es:

$$\bar{G} dt + \bar{R}_1 dt + \bar{n}_1 p_1 dt \bar{r}_1 - \bar{n}_2 p_2 dt \bar{r}_2$$

Haciendo $\bar{\mu}' = \bar{R}_1 \bar{r}_1$, que es el momento de las acciones de las paredes respecto a O y aplicando el momento citado, se obtiene:

$$\frac{q}{g} (\bar{n}_2 v_2 \bar{r}_2 - \bar{n}_1 v_1 \bar{r}_1) dt = \bar{G} dt + \bar{\mu}' dt + \bar{n}_1 p_1 dt \bar{r}_1 - \bar{n}_2 p_2 dt \bar{r}_2$$

Dividiéndola por dt:

$$\frac{q}{g} (\bar{n}_2 v_2 \bar{r}_2 - \bar{n}_1 v_1 \bar{r}_1) = \bar{G} + \bar{\mu}' + \bar{n}_1 p_1 \bar{r}_1 - \bar{n}_2 p_2 \bar{r}_2$$

y como $\bar{\mu} = -\bar{\mu}'$ es el momento resultante respecto a O, de las reacciones del fluido sobre el canal guía, se tendrá finalmente:

$$\bar{\mu} = \frac{q}{g} (\bar{n}_1 v_1 \bar{r}_1 - \bar{n}_2 v_2 \bar{r}_2) + \bar{G} + \bar{n}_1 p_1 \bar{r}_1 - \bar{n}_2 p_2 \bar{r}_2$$

XIV.3.- TEOREMAS DE EULER APLICADOS A LAS TURBOMAQUINAS

PRIMER TEOREMA DE EULER.- Sabemos que la reacción de una vena fluida sobre un canal que la conduce es de la forma:

$$\vec{R} = \frac{q}{g} (\vec{n}_0 v_0 - \vec{n}_1 v_1) + \vec{G} + \vec{n}_0 p_0 - \vec{n}_1 p_1$$

y llamando, α_0 y α_1 a los ángulos que forman \vec{v}_0 y \vec{v}_1 con el eje Ox
 β_0 y β_1 a los ángulos que forman \vec{v}_0 y \vec{v}_1 con el eje Oy
 γ_0 y γ_1 a los ángulos que forman \vec{v}_0 y \vec{v}_1 con el eje Oz

y considerando que, p_{0x} , p_{0y} , p_{0z} , son las componentes de (\vec{n}_0, p_0) sobre los ejes Ox, Oy y Oz,
 p_{1x} , p_{1y} , p_{1z}

respectivamente, las componentes \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} , del vector \vec{R} tienen por expresión, despreciando la gravedad por ser su efecto mucho menor que el correspondiente a la velocidad y presión, la siguiente:

$$\bar{X} = \frac{q}{g} (v_0 \cos \alpha_0 - v_1 \cos \alpha_1) + p_{0x} - p_{1x}$$

$$\bar{Y} = \frac{q}{g} (v_0 \cos \beta_0 - v_1 \cos \beta_1) + p_{0y} - p_{1y}$$

$$\bar{Z} = \frac{q}{g} (v_0 \cos \gamma_0 - v_1 \cos \gamma_1) + p_{0z} - p_{1z}$$

igualdades que constituyen el Primer Teorema de Euler.

Cada una de estas expresiones consta de dos términos.

El primero está dado por $\frac{q}{g} (\vec{n}_0 v_0 - \vec{n}_1 v_1)$, y se corresponde con la acción dinámica debida a la variación de la Cantidad de Movimiento de la vena líquida, entre la entrada y la salida de la rueda, Fig XIV.2.

El sumando, $\vec{n}_0 p_0 - \vec{n}_1 p_1$, se corresponde con la acción estática resultante de las distintas presiones existentes en las mismas secciones. Ambas ecuaciones son muy interesantes para la determinación del empuje axial en las turbinas de reacción.

SEGUNDO TEOREMA DE EULER.- El momento de la reacción de una vena sobre el canal guía respecto a un punto O, viene dado por la expresión:

$$\vec{\mu} = \frac{q}{g} (\vec{n}_0 v_0 \vec{r}_0 - \vec{n}_1 v_1 \vec{r}_1) + \vec{n}_0 p_0 \vec{r}_0 - \vec{n}_1 p_1 \vec{r}_1 + \vec{G} \vec{r}_0$$

Determinaremos a continuación las componentes de este vector sobre los ejes coordenados, que tienen su origen en el punto O, respecto al cual se calcula el momento $\vec{\mu}$.

De acuerdo con la Fig XIV.3, se tiene que:

$$\vec{p}_0 = \overline{OA} ; \vec{p}_1 = \overline{OB}$$

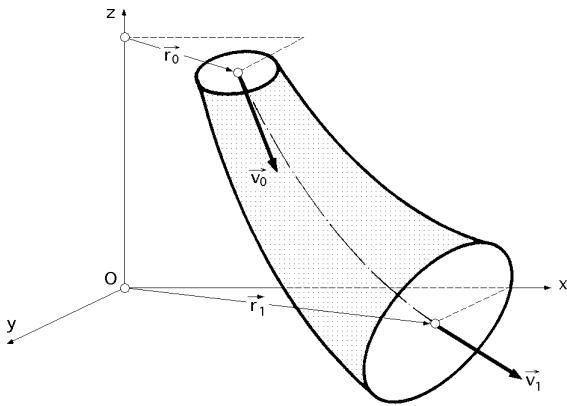


Fig XIV.2

y las velocidades se descomponen según las direcciones axial, tangencial y radial; también se indican las componentes meridianas, \vec{v}_{0m} y \vec{v}_{1m} .

En lo que sigue consideraremos que el momento de un vector respecto a un eje es la proyección respecto a dicho eje del momento del vector respecto a un punto cualquiera de aquel.

De acuerdo con esto se tiene:

$(\vec{n}_0 \cdot \vec{v}_0) \cdot \vec{r}_0$, es la proyección de $(\vec{n}_0 \cdot \vec{v}_0) \cdot \vec{r}_0$, sobre Oz = Momento de \vec{v}_0 respecto a Oz.

Además:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{0n} + \vec{v}_{0r} + \vec{v}_{0z} = \vec{v}_{0n} + \vec{v}_{0m}$$

El momento de \vec{v}_0 respecto a Oz es el momento de \vec{v}_{0n} respecto a Oz, ya que el momento de \vec{v}_{0m} respecto a Oz será nulo, por cortar \vec{v}_{0m} a Oz.

De todo ello se deduce que:

$$(\vec{n}_0 \cdot \vec{v}_0) \cdot \vec{r}_0)_z = v_{0n} r_0 \vec{k}$$

siendo su módulo, $v_{0n} r_0$

En forma análoga:

$$(\vec{n}_1 \cdot \vec{v}_1) \cdot \vec{r}_1)_z = v_{1n} r_1 \vec{k}$$

y su módulo, $v_{1n} r_1$

Si llamamos a_0 y a_1 a los módulos de las componentes tangenciales \vec{v}_{0n} y \vec{v}_{1n} , respectivamente y, M_{0x} , M_{0y} y M_{0z} a las proyecciones sobre Ox, Oy, y Oz, del momento resultante de las presiones estáticas.

$$M_{0x} = (\vec{n}_0 \cdot \vec{p}_0) \cdot \vec{r}_0 - (\vec{n}_1 \cdot \vec{p}_1) \cdot \vec{r}_1)_x$$

$$M_{0y} = (\vec{n}_0 \cdot \vec{p}_0) \cdot \vec{r}_0 - (\vec{n}_1 \cdot \vec{p}_1) \cdot \vec{r}_1)_y$$

$$M_{0z} = (\vec{n}_0 \cdot \vec{p}_0) \cdot \vec{r}_0 - (\vec{n}_1 \cdot \vec{p}_1) \cdot \vec{r}_1)_z$$

$$\mu_x = L = \frac{q}{g} (r_0 \cdot b_0 - r_1 \cdot b_1) + M_{0x}$$

despreciando el peso \vec{G} se puede poner,

$$\mu_y = M = \frac{q}{g} (r_0 \cdot c_0 - r_1 \cdot c_1) + M_{0y}$$

$$\mu_z = N = \frac{q}{g} (r_0 \cdot a_0 - r_1 \cdot a_1) + M_{0z}$$

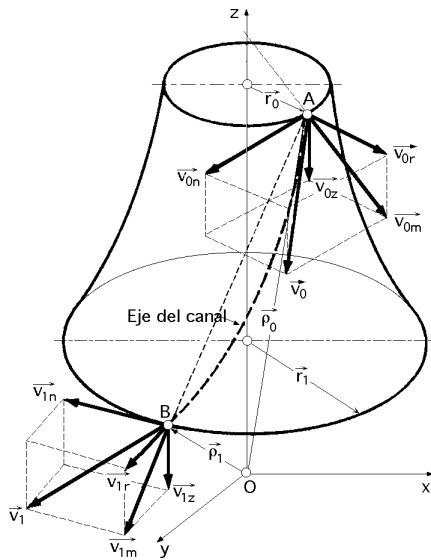


Fig XIV.3

$$C_{m(\text{teórico})} = N = \frac{q}{g} (r_0 a_0 - r_1 a_1) = \begin{vmatrix} a_0 = v_{0n} \\ a_1 = v_{1n} \end{vmatrix} = \frac{q}{g} (r_0 v_{0n} - r_1 v_{1n})$$

que sirve de base a la obtención de la ecuación general de las turbinas hidráulicas y las bombas centrífugas.

en donde r_0 , r_0' y r_0'' son las distancias del punto A a los ejes Oz, Ox y Oy, y r_1 , r_1' y r_1'' las distancias del punto B a los mismos ejes.

En la práctica, los términos M_{0x} , M_{0y} y M_{0z} de estas expresiones son despreciables o nulos, por ser las presiones simétricas, o estar situadas en planos que cortan al eje.

Si el canal guía no puede girar más que alrededor del eje Oz, la expresión del par motor teórico, considerando, $a_0 = v_{0n}$ y $a_1 = v_{1n}$, componentes giratorias, proporciona el Segundo Teorema de Euler aplicado a las turbomáquinas:

INDICE

CAPITULO I.- INTRODUCCION A LOS FLUIDOS

Propiedades de los Fluidos	1
Viscosidad dinámica y cinemática	2
Medidas de la viscosidad	3
Viscosímetro absoluto calibrado	3
Viscosímetro empírico	4
Viscosímetro de cilindros coaxiales	5
Influencia de la presión y temperatura en la viscosidad	7
Indice de viscosidad	9
Tensión superficial y capilaridad	10
Altura alcanzada por un líquido en el interior de un tubo de pequeño diámetro	12

CAPITULO II.- HIDROSTATICA

Teoremas hidrostáticos	13
Ecuaciones diferenciales de equilibrio de una masa líquida	15
Superficies de nivel	16
Equilibrio de líquidos	17
Ecuación de estado	18
Altura piezométrica, plano de carga y carga en un punto	18
Aplicación a líquidos en superficie libre.- Casos particulares	20
Líquidos superpuestos; Teoremas	21
Principio de Pascal	22
Medida de presiones	23
Manómetro de líquido	24
Barómetro de cubeta	24
Barómetro en U	24
Manómetro de líquido para presiones relativas	25
Vacuómetro de líquido para presiones absolutas	25
Manómetro de mercurio en tubería de agua	26
Manómetro diferencial	26
Micromanómetro de líquidos inmiscibles	27

CAPÍTULO III.- EQUILIBRIO Y MOVIMIENTO RELATIVO

Equilibrio relativo de líquidos que se trasladan	29
Equilibrio relativo de líquidos que giran alrededor de un eje vertical	31

Giro alrededor de un eje horizontal	34
Movimiento relativo de líquidos con velocidad tangencial constante sobre un eje vertical	35
Esfuerzo ejercido por un líquido sobre una pared plana sumergida	37
Esfuerzo ejercido por un líquido sobre una superficie alabeada sumergida	39
Principio de Arquímedes	41
Fuerzas hidrostáticas en líquidos estratificados	42
Estabilidad y flotación	43
Condiciones de estabilidad de un flotador	44
Cálculo de la distancia entre el metacentro y el centro de gravedad de un flotador	45
Período de oscilación de un flotador	46

CAPITULO IV.- FLUJO INCOMPRESIBLE NO VISCOSO

Cinemática de fluidos Introducción y definiciones	49
Construcción gráfica de las líneas de corriente y de movimiento	51
Caudal a través de una superficie elemental	53
Ecuación de continuidad; casos particulares	54
Torbellinos cilíndricos	57
Análisis del movimiento de un elemento de volumen	58
Potencial de velocidades para fuentes y sumideros en flujo bidimensional	61
Combinación de un flujo rectilíneo y un manantial	63
Ovalo de Rankine	65
Doblete	66
Combinación de un flujo rectilíneo y un doblete	68
Distribución de velocidades en torno a un cilindro circular	70
Vórtice	70
Combinación de una fuente y un vórtice	71
Flujo en torno a un cilindro con vórtice libre	72
Ejemplos relativos a la resolución analítica de la ecuación de Laplace en el plano	74
Movimiento uniforme de velocidad constante	75
Flujo radial para fuentes y sumideros	75
Flujo en las proximidades de un punto fijo	76
Flujo entre dos paredes que forman un ángulo	76
Linealidad de la ecuación de Laplace	78
Flujo alrededor de un cilindro circular con circulación	79
Representación conforme	79
Transformación de Joukowski	81

CAPITULO V.- DINAMICA DE LOS FLUIDOS PERFECTOS

Ecuaciones de Euler	83
Ecuación fundamental	84
Ecuación de Bernoulli	86
Aplicaciones del Teorema de Bernoulli	88
Tubos piezométricos	88
Tubo Venturi	89
Tubo Pitot	90

Tubo de Prandtl	90
Tubo de Pitot-Darcy	91
Teorema de Torricelli	92
Aplicación del Teorema de Bernoulli a líquidos en movimiento de rotación	92
Dinámica de los fluidos reales	94
Ecuaciones de Navier-Stokes de un fluido viscoso compresible	95
Movimiento turbulento	97
Ecuaciones para un fluido pesado y viscoso	100
Variación de la potencia de una corriente	104

CAPÍTULO VI.- DESARROLLO TEÓRICO DE LA LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

Lubricación hidrodinámica	105
Cálculo de la fuerza total	109
Fuerza de arrastre	110
Coefficiente de rozamiento y potencia absorbida	111

CAPITULO VII.- SEMEJANZA HIDRODINAMICA Y ANALISIS DIMENSIONAL

Semejanza hidrodinámica	113
Números de Froude, Reynolds, Weber y Mach	113
Ley general de Newton	116
Número de Euler	117
Ley de Reech-Froude	119
Semejanza dinámica con predominio de la viscosidad	120
Semejanza dinámica con predominio de la elasticidad	120
Análisis dimensional El Teorema de Buckingham	121
Ecuación de la pérdida de carga en una conducción cilíndrica	123
El método básico de análisis dimensional	124
Aplicación a bombas centrífugas	126

CAPITULO VIII.- TEORIA ELEMENTAL DE LA CAPA LIMITE BIDIMENSIONAL

Capa límite laminar y turbulenta en flujo sobre placa plana	129
Polinomios de Segundo y Tercer grado	130
Espesores y caudales de la capa límite	132
Espesor de desplazamiento de la capa límite	132
Espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite	133
Espesor de energía y caudal de la capa límite	134
Caudal de la capa límite	134
Ecuación integral del impulso de la capa límite laminar,.Caudal de la cantidad de movimiento	135
Fuerza de arrastre	136
Ecuaciones de Prandtl de la capa límite	138
Ecuación clásica de Karman	139
Ecuación integral de la energía en una capa límite laminar	140
Relación entre el coeficiente de arrastre y el de convección en flujo laminar sobre placa plana	145
Capa límite turbulenta para placa plana	146

Desprendimiento de la capa límite	148
Coefficiente de arrastre de cuerpos y perfiles inmersos en una corriente fluida	148
Paradoja de D'Alembert	150
Flujo para un fluido real en torno a un cilindro circular	154
Perfil de ala de avión	157

CAPITULO IX.- FLUJO VISCOSO INCOMPRESIBLE

Flujo en conductos circulares; ecuación de Poiseuille	159
Movimiento turbulento	161
Diagrama de Moody	162
Cálculo del coeficiente de rozamiento mediante fórmulas prácticas: Darcy, Levy, Kutter, Flamant,	164
Cálculo gráfico de la pérdida de carga en baterías de tubos	168
Flujo en conductos no circulares	169
Flujo laminar, incompresible y permanente entre dos placas paralelas	169
Flujo laminar, incompresible entre tubos cilíndricos concéntricos	171
Diámetro hidráulico	173
Resistencia de forma.- Pérdidas accidentales en conductos cerrados	174
Teorema de Belanguer	175
Pérdida de carga en ensanchamiento brusco y gradual	177
Pérdida de carga por contracción brusca de sección	178
Pérdida de carga en curvas y codos	179-180
Pérdidas de carga por bifurcaciones y válvulas	181-182
Ábaco para la determinación de pérdidas de carga en accesorios	183

CAPITULO X.- CALCULO DE TUBERIAS

Cálculo del diámetro de una conducción	185
Cálculo del diámetro más económico de una conducción	185
Pérdida uniforme de caudal a lo largo de una conducción	187
Tubería con toma intermedia	188
Tubería con toma intermedia entre dos depósitos	190
El problema de los tres depósitos	192
Redes ramificadas	194
Redes malladas	195
Tuberías en paralelo.- Método de aproximaciones sucesivas	196
Tuberías en paralelo.- Método iterativo de Hardy-Cross	198

CAPITULO XI.- GOLPE DE ARIETE

Formulación de Micheaud	201
Formulación de Allievi	203
Celeridad	207
Soluciones de las ecuaciones diferenciales de Allievi	208
Casos particulares de las ecuaciones de Allievi	209
Condiciones en los límites	210
Cálculo gráfico del espesor de tuberías	213

Método gráfico de Schnyder-Bergeron	214
Desarrollo del método	216
Ejemplo de construcción gráfica	218
Influencia de las pérdidas de carga	220

CAPITULO XII.- FLUJO COMPRESIBLE EN CONDUCTOS CERRADOS

Relaciones entre el coeficiente adiabático y la velocidad del sonido en un fluido compresible	221
Formulación de Hugoniot	223
Derrame por toberas	226
Condiciones críticas	228
Estudio de una corriente fluida en una tobera Laval	230
Perfil de una tobera por el método gráfico de Kolb	233
Flujo isoentrópico de un gas perfecto	234
Onda de choque normal	237
Líneas de Rayleigh y Fanno	239
Otras expresiones de las líneas de Rayleigh y Fanno en coordenadas (i,S)	244
Flujo adiabático en conductos de sección constante, con fricción	249
Bloqueo debido a la fricción	252
Flujo sin rozamiento por el interior de tubos con transferencia de calor	253
Flujo isotérmico permanente en tuberías largas	256
Aerodinámica compresible subsónica y transónica	258
Ecuación de Laplace	259
Aerodinámica supersónica	262
Aerodinámica hipersónica	265
Tablas de flujo compresible	269

CAPITULO XIII.- ORIFICIOS Y VERTEDEROS

Clasificación de los orificios	285
Coeficiente de gasto	286
Orificio en pared delgada	287
Rendimiento y contracción de la vena líquida	288
Característica de un orificio	289
Grandes orificios en pared delgada	289
Orificio sumergido	291
Orificios prolongados en canal	292
Orificios en pared gruesa	292
Compuertas	294
Orificio de Borda	296
Orificio en tuberías Diafragmas	296
Movimiento no permanente en foronoma	298
Desagüe de depósitos de sección variable	298
Desagüe de depósitos de sección constante	299
Desagüe de depósitos alimentados	299
Desagüe de orificios sumergidos	300

Tubo adicional cilíndrico exterior	301
Tubo adicional divergente	303
Tubo adicional convergente	304
Vertederos	305
Vertedero en pared delgada	307
Vertedero en pared gruesa	307
Formas de la lámina	308
Vertederos con contracción incompleta	310
Vertedero sumergido	310
Vertedero inclinado	311
Vertedero circular	311
Vertedero triangular	312
Vertedero trapecial	312

CAPITULO XIV.- TEOREMA DEL IMPULSO

Reacción del agua en movimiento sobre un canal guía	313
Momento con relación a un punto de la acción	316
Teoremas de Euler aplicados a las turbomáquinas	317
Indice	323