

CAPÍTULO 1. ELASTICIDAD

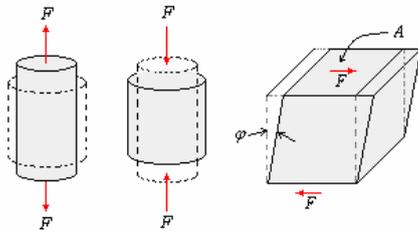
INTRODUCCIÓN

Hasta ahora en nuestro estudio de mecánica hemos asumido que los cuerpos son indeformables; esto no es cierto, aunque se justifica cuando los efectos de las deformaciones carecen de importancia.

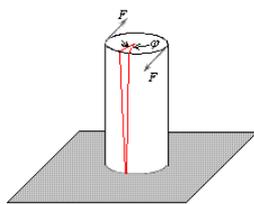
En este capítulo trataremos sobre los cambios de forma producidos en un cuerpo cuando está bajo la acción de una fuerza, esto es, en el sentido del comportamiento de los materiales bajo la acción de diversos esfuerzos, iniciándonos en la técnica del diseño.

PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES

Muchos materiales cuando están en servicio están sujetos a fuerzas o cargas. En tales condiciones es necesario conocer las características del material para diseñar el instrumento donde va a usarse de tal forma que los esfuerzos a los que vaya a estar sometido no sean excesivos y el material no se fracture. El comportamiento mecánico de un material es el reflejo de la relación entre su respuesta o deformación ante una fuerza o carga aplicada. Hay tres formas principales en las cuales podemos aplicar cargas: Tensión, Compresión y Cizalladura.



Además en ingeniería muchas cargas son torsionales en lugar de sólo cizalladura.



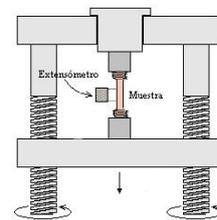
ENSAYO DE TENSIÓN Y DIAGRAMA DE ESFUERZO – DEFORMACIÓN. El ensayo de tensión se utiliza para evaluar varias propiedades mecánicas de los materiales que son importantes en el diseño, dentro de las cuales se destaca la resistencia, en particular, de metales y aleaciones.

En este ensayo la muestra se deforma usualmente hasta la fractura incrementando gradualmente una tensión que se aplica uniaxialmente a lo largo del eje longitudinal de la muestra. Las muestras normalmente tienen sección transversal circular, aunque también se usan especímenes rectangulares.



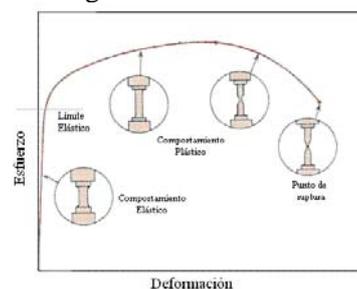
Muestra típica de sección circular para el ensayo de tensión - deformación

Durante la tensión, la deformación se concentra en la región central más estrecha, la cual tiene una sección transversal uniforme a lo largo de su longitud. La muestra se sostiene por sus extremos en la máquina por medio de soportes o mordazas que a su vez someten la muestra a tensión a una velocidad constante. La máquina al mismo tiempo mide la carga aplicada instantáneamente y la elongación resultante (usando un extensómetro). Un ensayo de tensión normalmente dura pocos minutos y es un ensayo destructivo, ya que la muestra es deformada permanentemente y usualmente fracturada.



Ensayo tensión – deformación

Sobre un papel de registro, se consignan los datos de la fuerza (carga) aplicada a la muestra que está siendo ensayada así como la deformación que se puede obtener a partir de la señal de un extensómetro. Los datos de la fuerza pueden convertirse en datos de esfuerzo y así construirse una gráfica tensión – deformación.



Gráfica típica tensión vs deformación

DEFORMACIÓN ELÁSTICA Y PLÁSTICA

Cuando una pieza se somete a una fuerza de tensión uniaxial, se produce una deformación del material. Si el material vuelve a sus dimensiones originales cuando la fuerza cesa se dice que el material ha sufrido una DEFORMACIÓN ELÁSTICA. El número de deformaciones elásticas en un material es limitado ya que aquí los átomos del material son desplazados de su posición original, pero no hasta el extremo de que tomen nuevas posiciones fijas. Así cuando la fuerza cesa, los átomos vuelven a sus posiciones originales y el material adquiere su forma original.

Si el material es deformado hasta el punto que los átomos no pueden recuperar sus posiciones originales, se dice que ha experimentado una DEFORMACIÓN PLÁSTICA.

DIFERENCIA ENTRE LOS CUERPOS ELÁSTICOS Y LOS INELÁSTICOS.

Los cuerpos elásticos son los cuerpos que después de aplicarles una fuerza vuelven a su forma normal mientras que los inelásticos tienen su grado de elasticidad muy bajo y si los deforman no vuelven a su forma original.

LEY DE HOOKE.

En la parte de comportamiento elástico se cumple la Ley de Hooke. Robert Hooke fue el primero en enunciar esta relación con su invento de un volante de resorte para un reloj. En términos generales, encontró que una fuerza que actúa sobre un resorte produce un alargamiento o elongación que es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza.

$$F = -k\Delta\ell$$

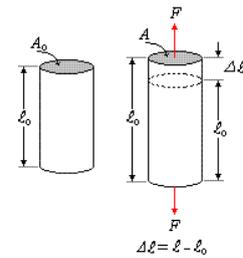
El signo menos es porque la fuerza es en oposición a la deformación.

La constante de la proporcionalidad k varía mucho de acuerdo al tipo de material y recibe el nombre de constante del resorte o coeficiente de rigidez.

$$k = \frac{F}{\Delta\ell}, \text{ sus unidades son } \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

ESFUERZO Y DEFORMACIÓN UNITARIA.

Esfuerzo. Consideremos una varilla cilíndrica de longitud ℓ_0 y una sección transversal de área A_0 sometida a una fuerza de tensión uniaxial F que alarga la barra de longitud ℓ_0 a ℓ , como se muestra en la figura.



Por definición, El esfuerzo S en la barra es igual al cociente entre la fuerza de tensión uniaxial media F y la sección transversal original A_0 de la barra.

$$S = \frac{F}{A_0}, \text{ sus unidades son } \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Deformación unitaria: Por definición, la deformación unitaria originada por la acción de una fuerza de tensión uniaxial sobre una muestra metálica, es el cociente entre el cambio de longitud de la muestra en la dirección de la fuerza y la longitud original.

$$\delta = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \frac{\Delta\ell}{\ell_0}, \text{ la deformación unitaria es}$$

una magnitud adimensional

En la práctica, es común convertir la deformación unitaria en un porcentaje de deformación o porcentaje de elongación

$$\% \text{ deformación} = \text{deformación} \times 100 \% = \% \text{ elongación}$$

MÓDULO ELÁSTICO O DE ELASTICIDAD.

A la constante de proporcionalidad, podemos escribir la ley de Hooke en su forma general.

$$\text{Módulo Elástico} = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}}$$

Para el caso de Deformación por tracción o compresión longitudinal

El esfuerzo es $S = \frac{F}{A}$, la deformación unitaria

$$\text{es } \delta = \frac{\Delta\ell}{\ell_0}$$

El módulo elástico es conocido como el MÓDULO DE YOUNG.

$$Y = \frac{F/A}{\Delta\ell/\ell_0} = \frac{S}{\delta}$$

TABLA I

Módulo de elasticidad o módulo de Young.

Nombre	Módulo de elasticidad Y 10^{10} N/m^2

Aluminio	6,8
Cobre	10,8
Oro	7,6
Hierro, fundido	7,8
Plomo	1,7
Nickel	20,6
Platino	16,7
Plata	7,4
Latón	4,6
Acero	20,0

Ejemplo 1. Los ortodoncistas usan alambres de bajo módulo de Young y alto límite elástico para corregir la posición de los dientes mediante arcos tensores. ¿Por qué?

Solución.

Bajo módulo de Young para que sea relativamente fácil deformarlo elásticamente para montar los arcos en los dientes. La tensión deberá ser menor que la tensión de fluencia del material, de ahí que el límite elástico tenga que ser alto, ya que si el arco se deforma plásticamente, su deformación es irreversible y por lo tanto, no estará tensionando los dientes para corregir su posición transversal se convierte en un paralelogramo.

Ejemplo 2. Una barra de sección uniforme A , al ser sometida a tracción por la fuerza F_1 adquiere la longitud L_1 y la ser sometida a tracción a la fuerza F_2 adquiere la longitud L_2 .

- a) Calcular la longitud original de la barra
- b) ¿Cuál es módulo de elasticidad de la barra?

Solución.



$$S = \frac{F}{A} = Y \frac{\Delta L}{L}$$

Con F_1

$$\frac{F_1}{A} = Y \frac{L_1 - L_0}{L_0} \quad (1)$$

Con F_2

$$\frac{F_2}{A} = Y \frac{L_2 - L_0}{L_0} \quad (2)$$

a) Dividiendo (1) : (2)

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{L_1 - L_0}{L_2 - L_0} \Rightarrow F_1 L_2 - F_2 L_0 = F_2 L_1 - F_2 L_0 \Rightarrow$$

$$F_1 L_0 + F_2 L_0 = F_2 L_1 - F_1 L_2$$

$$\Rightarrow L_0 = \frac{F_2 L_1 - F_1 L_2}{F_1 + F_2}$$

b) Reemplazando L_0 en (1)

$$\frac{F_1}{A} = Y \frac{L_1 - L_0}{L_0}$$

$$= Y \left(\frac{L_1}{L_0} - 1 \right) = Y \left[\frac{(F_1 + F_2)L_1}{(F_2 L_1 - F_1 L_2)} - 1 \right]$$

$$= Y \left[\frac{(F_1 + F_2)L_1 - (F_2 L_1 - F_1 L_2)}{(F_2 L_1 - F_1 L_2)} \right]$$

$$= Y \left(\frac{F_1 L_1 + F_1 L_2}{F_2 L_1 - F_1 L_2} \right)$$

$$\Rightarrow Y = \frac{F_1 (F_2 L_1 - F_1 L_2)}{A (F_1 L_1 + F_1 L_2)} = \frac{(F_2 L_1 - F_1 L_2)}{A (L_1 + L_2)}$$

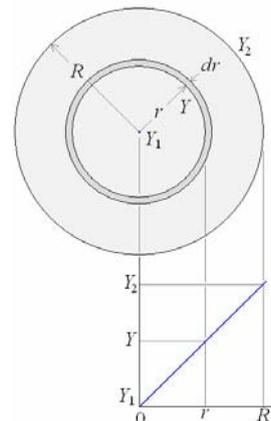
Ejemplo 3. Un alambre de radio R , sometido a tracción, tiene en el eje un módulo de Young Y_1 , este módulo crece linealmente hacia la periferia, donde alcanza el valor Y_2 .

Determinar la fuerza de tracción que puede soportar el alambre con la debida seguridad, es decir, de modo que ningún punto rebese el esfuerzo admisible por tracción $S_{m\acute{a}x}$.

Solución.



Sea r la distancia de un punto eje
La ley lineal de variación de Y



$$Y = \frac{S}{\varepsilon} \Rightarrow S = Y\varepsilon$$

$$\frac{Y - Y_1}{r} = \frac{Y_2 - Y_1}{R} \Rightarrow Y = (Y_2 - Y_1)\frac{r}{R} + Y_1$$

El esfuerzo máximo se alcanza primeramente en el borde

$$S_{\text{máx}} = Y_2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{S_{\text{máx}}}{Y_2}$$

La deformación unitaria ε debido a la fuerza F es igual en todos los puntos; por lo tanto el esfuerzo $S = Y\varepsilon$ es variable

$$dF = S dA = Y\varepsilon dA$$

$$= \left[(Y_2 - Y_1)\frac{r}{R} + Y_1 \right] \frac{S_{\text{máx}}}{Y_2} 2\pi r dr$$

Integrando:

$$F = \int S dA = \int Y\varepsilon dA$$

$$= \int_0^R \left[(Y_2 - Y_1)\frac{r}{R} + Y_1 \right] \frac{S_{\text{máx}}}{Y_2} 2\pi r dr$$

$$= 2\pi \frac{S_{\text{máx}}}{Y_2} \left[(Y_2 - Y_1)\frac{R^2}{2} + Y_1 \frac{R^2}{3} \right]$$

$$= \pi R^2 \frac{S_{\text{máx}}}{3} \left(2 + \frac{Y_1}{Y_2} \right)$$

Ejemplo 4. De un alambre de cobre de 1,5 m de longitud y 2 mm de diámetro se cuelga un peso de 8 kg. Se pregunta:

- ¿Hemos rebasado el límite de elasticidad?
- ¿Se romperá el alambre?
- En caso de ser negativas las preguntas anteriores, ¿cuál es su alargamiento?

Módulo de Young = $12 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$

Límite de elasticidad de 3×10^7 a $12 \times 10^7 \text{ N/m}^2$

Límite de ruptura de 20×10^7 a $50 \times 10^7 \text{ N/m}^2$

Solución.

a) y b) La sección del alambre es:

$$A = \pi r^2 = 3,14 \text{ mm}^2 = 3,14 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

La fuerza que corresponde a cada m^2 de sección es:

$$\frac{F}{A} = \frac{Mg}{A} = \frac{8 \times 9,8}{3,14 \times 10^{-6}}$$

$$= 2,49 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Que no llega ni al límite inferior de elasticidad ni al de ruptura.

$$c) \Delta l = \frac{Fl}{YA} = \frac{8 \times 9,8 \times 1,5}{12 \times 10^{10} \times 3,14 \times 10^{-6}}$$

$$= 0,0003 \text{ m}$$

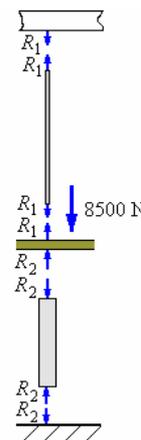
$$= 0,3 \text{ mm}$$

Ejemplo 5. Una pasarela peatonal se suspende en numerosos puntos a lo largo de sus bordes por un cable vertical por encima de cada punto y se apoya sobre columnas verticales. El cable de acero es 1,27 cm de diámetro y 5,75 m de largo antes de cargarlo. La columna de aluminio es un cilindro hueco con un diámetro interior de 16,14 cm, un diámetro exterior de 16,24 cm, y su longitud sin carga es 3,25 m. Si la pasarela ejerce una fuerza de carga de 8500 N sobre cada uno de los puntos de apoyo, ¿cuánto desciende el punto?

$Y_{\text{acero}} = 20 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $Y_{\text{aluminio}} = 7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$



Solución.



Parte de la fuerza de la carga extiende al cable y parte comprime a la columna la misma longitud Δl :

$$\text{Para el cable } \Delta l = \frac{R_1 L_1}{Y_1 A_1} \Rightarrow R_1 = \frac{Y_1 A_1}{L_1} \Delta l$$

$$\text{Para la columna } \Delta l = \frac{R_2 L_2}{Y_2 A_2} \Rightarrow R_2 = \frac{Y_2 A_2}{L_2} \Delta l$$

$$\text{Como } R_1 + R_2 = 8500$$

$$8500 = \left(\frac{Y_1 A_1}{L_1} + \frac{Y_2 A_2}{L_2} \right) \Delta \ell \Rightarrow$$

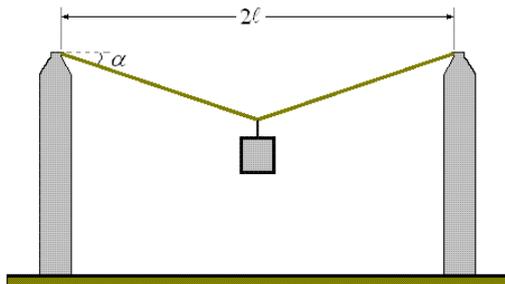
$$\Delta \ell = \frac{8500}{\left(\frac{Y_1 A_1}{L_1} + \frac{Y_2 A_2}{L_2} \right)}$$

$$= \frac{8500}{\frac{20 \times 10^{10} \pi (0,0127^2)}{4(5,75)} + \frac{7 \times 10^{10} \pi (0,1624^2 - 0,612^2)}{4(3,25)}}$$

$$= 8,60 \times 10^{-4} \text{ m}$$

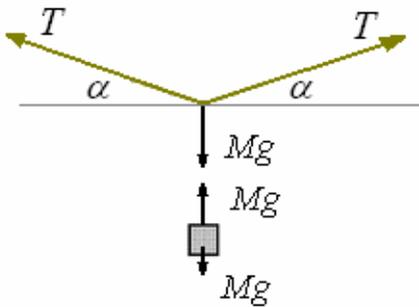
El punto desciende $8,60 \times 10^{-4} \text{ m}$

Ejemplo 6. Entre dos columnas fue tendido un alambre de longitud 2ℓ . En el alambre, exactamente en el centro, fue colgado un farol de masa M . El área de la sección transversal del alambre es A , el módulo de elasticidad es Y . Determinar el Angulo α , de pandeo del alambre, considerándolo pequeño.



Solución.

Para encontrar la tensión del hilo.
Por condición de equilibrio:



Suma de fuerzas verticales:

$$\sum F_y = 0$$

$$2T \text{sen} \alpha - Mg = 0 \Rightarrow$$

$$T = \frac{Mg}{2 \text{sen} \alpha}$$

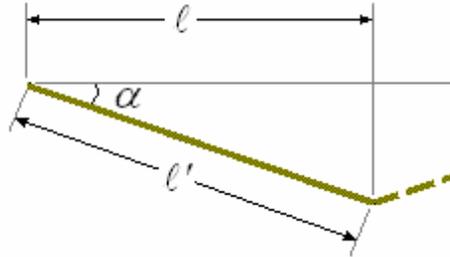
Por la ley de Hooke deducimos que

$$T = \left(\frac{\Delta \ell}{\ell} \right) YA$$

Igualando:

$$\left(\frac{\Delta \ell}{\ell} \right) YA = \frac{Mg}{2 \text{sen} \alpha}$$

De la figura siguiente:



$$\ell' = \frac{\ell}{\cos \alpha} \text{ y } \ell' = \ell + \Delta \ell$$

De aquí:

$$\frac{\ell}{\cos \alpha} = \ell + \Delta \ell \Rightarrow \Delta \ell = \ell \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{1}{\cos \alpha} - 1$$

Luego

$$\left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) YA = \frac{Mg}{2 \text{sen} \alpha}$$

Para ángulos pequeños tenemos que $\text{sen} \alpha \approx \alpha$ y

$$\cos \alpha = 1 - 2 \text{sen}^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

Reemplazando obtenemos

$$\left(\frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{2}} - 1 \right) YA = \frac{Mg}{2\alpha}$$

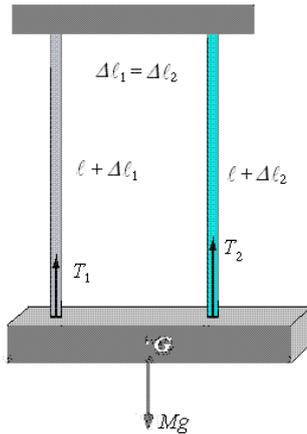
$$\Rightarrow \left[\left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) - 1 \right] YA = \frac{Mg}{2\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{2} YA = \frac{Mg}{2\alpha} \Rightarrow \alpha^3 = \frac{Mg}{YA}$$

Finalmente

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{Mg}{YA}}$$

Ejemplo 7. Se cuelga una viga de 2000 kg de dos cables de la misma sección, uno de aluminio y otro de acero. Al suspenderla, ambos cables se estiran lo mismo. Calcular la tensión que soporta cada uno. Módulos de Young: acero = $20 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, aluminio = $7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$



Solución.

Si los cables inicialmente tienen igual longitud y la viga finalmente está horizontal, ambos cables han experimentado el mismo alargamiento:

$$\text{Como } \Delta l = \frac{F\ell}{YA} \Rightarrow \frac{\ell T_1}{Y_1 A} = \frac{\ell T_2}{Y_2 A}$$

$$\text{De aquí } \frac{T_1}{7} = \frac{T_2}{20}$$

Donde el subíndice 1 se refiere al aluminio y el 2 al acero.

Por estar el sistema en equilibrio:

$$T_1 + T_2 = Mg = 2\,000 \times 9,8 \text{ N}$$

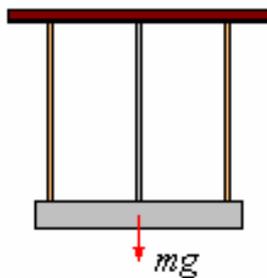
De ambas

$$T_1 = 5\,081,5 \text{ N} \quad T_2 = 14\,517,5 \text{ N}$$

Ejemplo 8. Una barra homogénea, de masa $m = 100 \text{ kg}$, está suspendida de tres alambres verticales de la misma longitud situados simétricamente.

Determinar la tensión de los alambres, si el alambre del medio es de acero y los otros dos son de cobre. El área de la sección transversal de todos los alambres es igual.

El módulo de Young del acero es dos veces mayor que el del cobre.



Solución.

Partiendo de los conceptos de simetría, es evidente que el alargamiento de los hilos será igual. Designemos este alargamiento por Δl . De acuerdo con la ley de Hooke, la tensión del hilo de acero es

$$F_a = \frac{AY_a}{\ell} \Delta l \text{ y la del hilo de cobre, es}$$

$$F_c = \frac{AY_c}{\ell} \Delta l$$

De donde concluimos que la relación de las tensiones es igual a la relación de los módulos de elasticidad correspondientes:

$$\frac{F_c}{F_a} = \frac{Y_c}{Y_a} = \frac{1}{2}$$

En equilibrio

$$2F_c + F_a = mg.$$

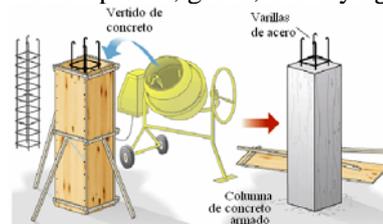
Por consiguiente,

$$F_c = \frac{mg}{4} = 250 \text{ N y } F_a = 2F_c = 500 \text{ N.}$$

Ejemplo 9. Una columna de concreto armado se comprime con una fuerza P . Considerando que el módulo de Young del hormigón Y_c , es 1/10 del módulo de Young del acero Y_a y que el área de la sección transversal del hierro es 1/20 que la del hormigón armado, encontrar qué parte de la carga recae sobre el concreto.

Nota. La técnica constructiva del concreto armado consiste en la utilización de concreto reforzado con barras o mallas de acero, llamadas armaduras.

El concreto, es el material resultante de la mezcla de cemento con piedra, grava, arena y agua.



Solución.

La carga P se reparte entre el concreto y las varillas de acero.

Concreto

soporta P_c

Sección transversal A_c

Módulo elástico Y_c

Varillas de acero

Soporta P_a

Sección transversal A_a

Módulo elástico Y_a

Por la ley de Hooke

$$P_c = \left(\frac{\Delta l}{\ell}\right) A_c Y_c \quad (1)$$

$$P_a = \left(\frac{\Delta l}{\ell}\right) A_a Y_a \quad (2)$$

Dividiendo (1) entre (2):

$$\frac{P_c}{P_a} = \frac{\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)A_c Y_c}{\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)A_a Y_a} = \frac{A_c}{A_a} \times \frac{Y_c}{Y_a} = \frac{20}{1} \times \frac{1}{10} = 2$$

$$= \frac{A_c}{A_a} \times \frac{Y_c}{Y_a}$$

Como $\frac{A_c}{A_a} = \frac{20}{1}$ y $\frac{Y_c}{Y_a} = \frac{1}{10}$

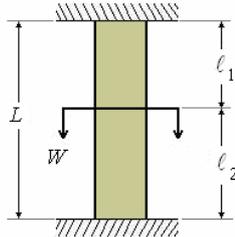
Tenemos

$$\frac{P_c}{P_a} = \frac{20}{1} \times \frac{1}{10} = 2$$

De este modo, 2/3 del peso recae sobre el hormigón armado y 1/3, sobre el hierro.

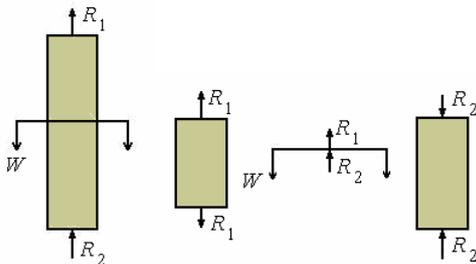
Ejemplo 10. Un peso W se encuentra sujeto entre dos barras de peso despreciable, de las mismas características pero de diferente longitud y como se muestra en la figura. Los extremos de las barras están ligados al peso y a los apoyos, los cuales son indeformables.

Encontrar las reacciones que se producen en los apoyos.



Solución.

Diagramas del cuerpo libre del conjunto y de las partes:



Por equilibrio estático, $\sum F_y = 0$:

$$R_1 + R_2 - W = 0 \quad (1)$$

Geoméricamente, tiene que cumplirse que los alargamientos sean iguales:

$$\Delta\ell_1 = \Delta\ell_2$$

Por elasticidad

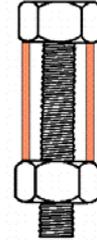
$$\frac{R_1 \ell_1}{AY} = \frac{R_2 \ell_2}{AY} \Rightarrow$$

$$R_1 \ell_1 = R_2 \ell_2 \quad (2)$$

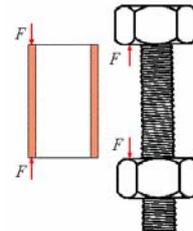
Resolviendo las ecuaciones (1) y (2), obtenemos:

$$R_1 = \frac{\ell_2}{L} W \quad \text{y} \quad R_2 = \frac{\ell_1}{L} W$$

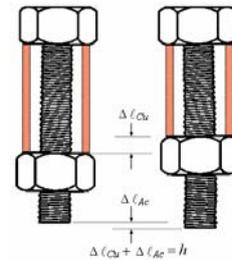
Ejemplo 11. Un perno de acero se enrosca en un tubo de cobre como muestra la figura. Encontrar las fuerzas que surgen en el perno y en el tubo debido al hacer la tuerca una vuelta, si la longitud del tubo es ℓ , el paso de rosca del perno es h y las áreas de la sección transversal del perno y del tubo son iguales a A_a , y A_c respectivamente



Solución.



Bajo la acción de la fuerza de compresión F , el tubo disminuye en $F\ell / AY$. y bajo la acción de la fuerza de extensión F , el perno se alarga en el valor $F\ell / A_a Y_a$.



La suma $\frac{F\ell}{A_a Y_a} + \frac{F\ell}{A_c Y_c}$ es igual al

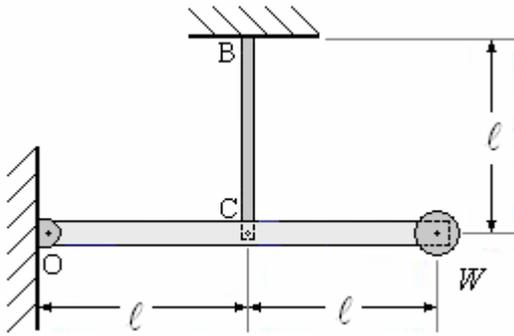
desplazamiento de la tuerca a lo largo del perno:

$$\frac{F\ell}{A_a Y_a} + \frac{F\ell}{A_c Y_c} = h, \text{ de donde:}$$

$$F = \frac{h}{\ell} \left(\frac{A_a Y_a A_c Y_c}{A_a Y_a + A_c Y_c} \right).$$

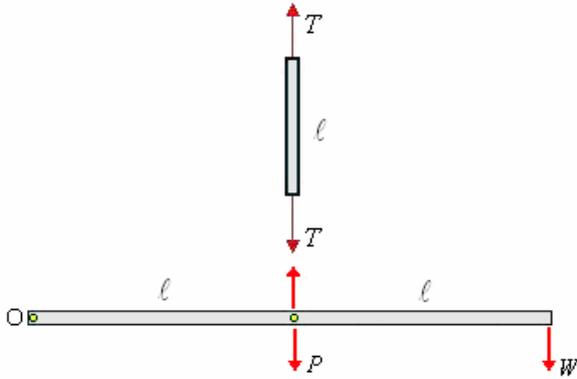
Ejemplo 12. Viga horizontal sostenida mediante un tirante. En el sistema mostrado en la figura, ¿cuánto bajará el peso W respecto a la

posición en la cual el tensor no estaba deformado?



La barra es indeformable y de peso P . El tensor BC es de peso despreciable, área A y módulo de elasticidad Y .

Solución.

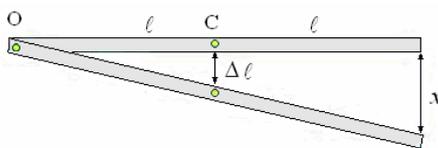


Por equilibrio estático, $\sum \tau_o = 0$

$$Tl - Pl - W2l = 0$$

$$T - P - 2W = 0$$

$$T = P + 2W \quad (1)$$



Geoméricamente, considerando que el giro que se produce es pequeño, podemos escribir:

$$x = 2\Delta l$$

Por elasticidad, el estiramiento Δl del tensor es:

$$\Delta l = \frac{Tl}{AY}$$

Luego,

$$x = \frac{2Tl}{AY} \quad (2)$$

Reemplazando la expresión (1) en (2):

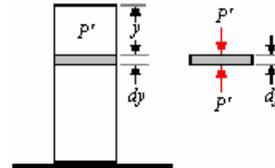
$$x = \frac{2(P + 2W)l}{AY}$$

Ejemplo 13. Deformaciones no uniformes por peso propio.

Determinar la deformación producida en una barra debido a su peso propio de una barra del largo L , sección A , módulo de elasticidad Y y densidad ρ .

Solución.

El elemento diferencial dy soporta el peso P' de la porción de barra de longitud y que está sobre él.



$$P' = m'g = \rho V'g = \rho Ayg$$

Siendo la longitud de la barra L , su deformación será ΔL , la deformación del elemento diferencial dy debido al peso P' , será $d(\Delta L)$.

$$\begin{aligned} d(\Delta L) &= \frac{P' dy}{YA} = \frac{\rho Ag}{YA} ydy \\ &= \frac{\rho g}{Y} ydy \end{aligned}$$

Luego

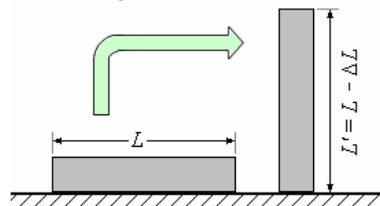
$$\begin{aligned} \Delta L &= \int d(\Delta L) = \frac{\rho g}{Y} \int_0^L ydy \\ &= \frac{1}{2} \frac{\rho g L^2}{Y} = \frac{1}{2} \frac{(\rho g AL)L}{AY} \\ \text{o } \Delta L &= \frac{1}{2} \frac{(\text{Peso Total}) \times L}{AY} \end{aligned}$$

Observamos que esta deformación es igual a la mitad de la deformación que se produciría, como sí, el peso estuviera concentrado en el extremo superior.

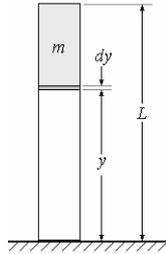
Ejemplo 14. Una barra de masa M , módulo Y , sección A y altura L está sobre el piso.

Determine la deformación que sufre la altura de la barra por peso propio. Considere que la densidad lineal de la barra varía según $\rho_\ell = \kappa y$, (κ es constante e y la altura medida desde el piso).

Datos: M, Y, A, L y κ .



Solución.



El elemento de columna dy es deformado por el peso de la masa m .

$$d(\Delta L) = \frac{mg dy}{YA}$$

Cálculo de m .

$$dm = \rho_t A dy = \kappa y A dy \Rightarrow$$

$$m = \int_y^L \kappa A y dy = \kappa A \frac{y^2}{2} \Big|_y^L$$

$$= \frac{\kappa A}{2} (L^2 - y^2)$$

Luego:

$$d(\Delta L) = \frac{\kappa A g}{2YA} (L^2 - y^2) dy$$

Integrando

$$\Delta L = \int_0^L d(\Delta L) = \frac{\kappa A g}{2YA} \int_0^L (L^2 - y^2) dy$$

$$\begin{aligned} \Delta L &= \frac{\kappa A g}{2YA} \left(L^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^L \\ &= \frac{\kappa A g}{2YA} \left(L^3 - \frac{L^3}{3} \right) = \frac{\kappa A g L^3}{3YA} \end{aligned}$$

Como la masa total es

$$M = \int_0^L dm = \int_0^L \kappa A y dy = \kappa A \frac{y^2}{2} \Big|_0^L$$

$$= \kappa A \frac{L^2}{2}$$

$$\Delta L = \frac{2M}{\kappa A L^2} \frac{\kappa A g L^3}{3YA} = \frac{2MgL}{3YA}$$

Ejemplo 15. Hállese la longitud que ha de tener un hilo de alambre, de densidad 8,93 y módulo de rotura 1020,4 kg/cm² para que se rompa por su propio peso.

Solución.

$$1020,4 \text{ kg/cm}^2 = 1020,4 \times 9,8 \text{ N/cm}^2 = 10^8 \text{ N/m}^2;$$

$$\rho = 8930 \text{ kg/m}^3.$$

Para que el hilo se rompa, su peso ha de ser por lo menos de $10^8 A$ N, siendo A la sección.

O sea:

$$P = mg = A \ell \rho g = 10^8 A$$

Es decir:

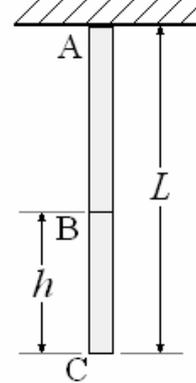
$$\ell = \frac{10^8 A}{A \rho g} = \frac{10^8}{8930 \times 9,8} = 1143,6 \text{ m}$$

Ejemplo 16. La barra prismática homogénea AB de longitud L , área transversal A , peso W y módulo de Young Y cuelga verticalmente bajo su propio peso (ver figura).

a) Deduzca una fórmula para calcular el desplazamiento hacia abajo del punto C , ubicado a una distancia h del extremo inferior de la barra.

b) ¿Cuál es el incremento de longitud de toda la barra?

c) Sea ΔL_1 el alargamiento de la mitad superior de la barra y ΔL_2 el alargamiento de la mitad inferior de la barra. Hallar $\Delta L_1 / \Delta L_2$.



Solución.

a) El punto se desplaza debido al peso propio de la parte AC al peso de la parte CB .

Por el peso propio de la parte AC

$$W_{AC} = \frac{(L-h)}{L} W$$

$$\Delta L_{AC} = \frac{1}{2} \frac{W_{AC} (L-h)}{YA} = \frac{1}{2} \frac{W (L-h)^2}{YAL}$$

Por el peso de la parte CB .

$$W_{CB} = \frac{h}{L} W$$

$$\Delta L_{CB} = \frac{W_{CB} (L-h)}{YA} = \frac{Wh(L-h)}{YAL}$$

El punto C se desplaza hacia abajo

$$\begin{aligned} \Delta L_1 &= \frac{1}{2} \frac{W (L-h)^2}{YAL} + \frac{Wh(L-h)}{YAL} \\ &= \frac{W}{2YAL} (L^2 - h^2) \end{aligned}$$

b)

$$\Delta L = \frac{1}{2} \frac{WL}{YA}$$

c)

$$\Delta L_1 = \frac{W}{2YAL}(L^2 - h^2)$$

$$\Delta L_2 = \frac{1}{2} \frac{W_{CB}h}{YA} = \frac{1}{2} \frac{Wh^2}{YAL}$$

$$\frac{\Delta L_1}{\Delta L_2} = \frac{\frac{W}{2YAL}(L^2 - h^2)}{\frac{1}{2} \frac{Wh^2}{YAL}} = \frac{(L^2 - h^2)}{h^2} = \left(\frac{L^2}{h^2} - 1\right)$$

Nota: Otra manera de calcular ΔL_1

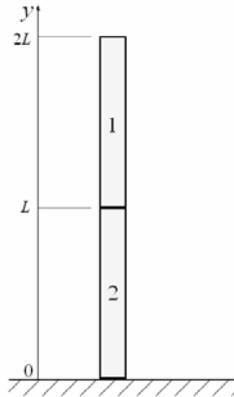
Como $\Delta L_1 = \Delta L - \Delta L_2$:

$$\Delta L_1 = \frac{1}{2} \frac{WL}{YA} - \frac{1}{2} \frac{Wh^2}{YAL} = \frac{1}{2} \frac{W(L^2 - h^2)}{YAL}$$

Ejemplo 17. El conjunto siguiente está formado por dos barras de longitud L , sección A y del mismo material de módulo de Young Y . la barra 2 tiene una masa M_2 y la barra 1 es de densidad variable $\lambda = 2y$ según el sistema mostrado.

Determinar:

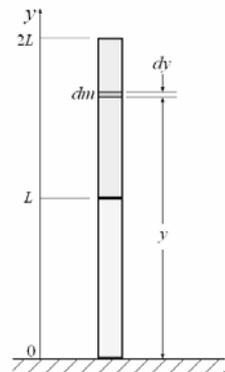
- La masa de la barra 1.
- La deformación total de la barra 2.
- La deformación total de la barra 1.



Solución.

a) Cálculo de M_1

Tomemos un diferencial de masa dm a la altura y



$$dm_1 = \lambda dy = 2ydy$$

Integrando de $y = L$ a $y = 2L$ obtendremos la masa M_1 de la barra 1.

$$M_1 = \int dm_1 = \int_L^{2L} 2ydy = y^2 \Big|_L^{2L}$$

$$= (2L)^2 - L^2 = 3L^2$$

b) Para encontrar la deformación de la barra 2 tenemos que considerar la deformación debido al peso de M_1 de la barra 1 y a la deformación debido al peso propio de la barra 2.

Deformación debido a M_1

$$\Delta L_{21} = \frac{M_1 g}{YA} = \frac{3L^2 g}{YA}$$

Deformación debido al peso propio $M_2 g$

$$\Delta L_{22} = \frac{1}{2} \frac{M_2 g}{YA}$$

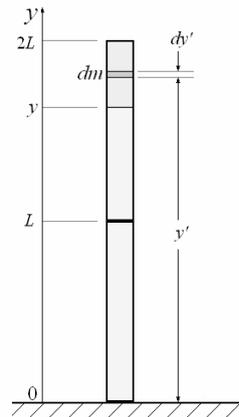
La deformación total es

$$\Delta L_2 = \Delta L_{21} + \Delta L_{22} = \frac{3L^2 g}{YA} + \frac{1}{2} \frac{M_2 g}{YA}$$

$$= \frac{gL}{YA} \left(3L^2 + \frac{M_2}{2} \right)$$

c) Deformación por el peso propio

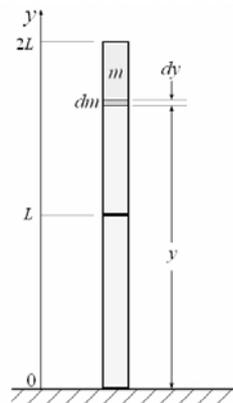
Calculo de la masa m sobre la altura y



$$m = \int dm = \int_{y'=y}^{y'=2L} 2y'dy' = y'^2 \Big|_y^{2L}$$

$$= (2L)^2 - y^2 = 4L^2 - y^2$$

Cálculo de la deformación de la barra 1.



Deformación del elemento diferencial debido al peso de la masa m situada a la altura y sobre el nivel 0.

$$d\Delta L_1 = \frac{mgdy}{YA} = \frac{(4L^2 - y^2)gdy}{YA}$$

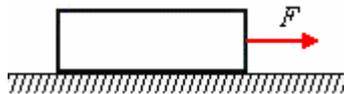
Integrando $d\Delta L_1$ de L a $2L$ encontraremos la deformación de la barra 1 debido a su propio peso.

$$\begin{aligned} \Delta L_1 &= \int d\Delta L_1 = \frac{g}{YA} \int_L^{2L} (4L^2 - y^2) dy \\ &= \frac{g}{YA} \left(4L^2 y - \frac{y^3}{3} \right)_L^{2L} \\ &= \frac{g}{YA} \left(8L^3 - \frac{8L^3}{3} - 4L^3 + \frac{L^3}{3} \right) \\ &= \frac{g}{YA} \left(4L^3 - \frac{7L^3}{3} \right) \\ &= \frac{5gL^3}{3YA} \end{aligned}$$

Ejemplo 18. Deformaciones por aceleración

Una barra uniforme de acero (Longitud L , área de sección recta A densidad ρ , módulo de young Y) se halla sobre un plano horizontal exento de rozamiento y se tira de ella con una fuerza constante F .

¿Cuál es el alargamiento total de la barra a consecuencia de la aceleración?

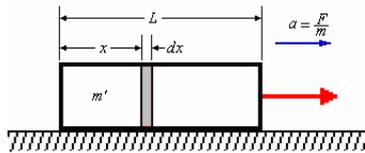


Solución.

a) Sea m la masa total de la barra
 $m = \rho AL$

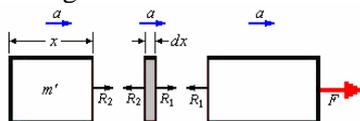
Tomemos un elemento diferencial dx , cuya masa es dm

$$dm = \rho A dx$$



Hagamos los diagramas del cuerpo libre de los tres sectores.

La fuerza sobre cada uno de los tres sectores se indica en las figura a continuación



El elemento diferencial dm se mueve con aceleración a debido a la fuerza $(R_1 - R_2)$

Y la fuerza que lo estira es R_2 . Por lo tanto su deformación será un diferencial de ΔL esto es $d(\Delta L)$:

$$d(\Delta L) = \frac{R_2 dx}{YA} \text{ y } \Delta L = \int_0^L d(\Delta L)$$

Como $R_2 = m'a$, $m' = \rho Ax$ y

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F}{\rho AL}, \text{ tenemos:}$$

$$R_2 = (\rho Ax) \left(\frac{F}{\rho AL} \right) = F \frac{x}{L}$$

$$d(\Delta L) = \frac{F}{YAL} x dx, \text{ y}$$

$$\Delta L = \int d(\Delta L) = \int_{x=0}^{x=L} \frac{F}{YAL} x dx$$

$$\text{De donde } \Delta L = \frac{1}{2} \frac{FL}{YA}$$

Ejemplo 19. Se tiene una columna de largo L , sección transversal A , densidad ρ , módulo de elasticidad Y . Se jala sobre un piso liso de la manera como se muestra en la figura.

- a) Calcule cuanto estira el cuerpo.
- b) Si no se tomara en cuenta la masa del cuerpo, ¿cuál sería el estiramiento de la columna?



Solución.

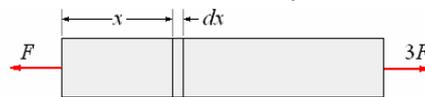
a)

Primer método.

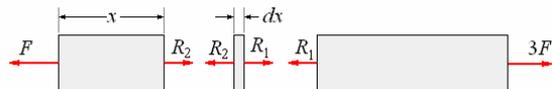
Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F = ma$$

$$3F - F = ma \Rightarrow a = \frac{2F}{m} = \frac{2F}{\rho AL}$$



Haciendo el diagrama del cuerpo libre



El elemento diferencial es estirado por la fuerza R_2 .

$$d(\Delta L) = \frac{R_2 dx}{AY}$$

Cálculo de R_2 :

$$R_2 - F = m'a \Rightarrow$$

$$R_2 = F + m'a = F + \rho Ax \frac{2F}{\rho AL}$$

$$= F + 2F \frac{x}{L}$$

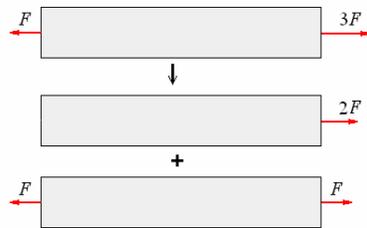
$$d(\Delta L) = \frac{F}{AY} \left(1 + \frac{2x}{L} \right) dx$$

$$\Delta L = \frac{F}{AY} \int_0^L \left(1 + \frac{2x}{L} \right) dx = \frac{F}{AY} \left(x + \frac{x^2}{L} \right) \Big|_0^L$$

$$= \frac{2FL}{AY}$$

Segundo método.

El sistema de fuerzas puede ser desdoblado en dos partes cuyas deformaciones parciales sumadas hacen el efecto total, tal como se muestra en la figura siguiente:



La primera parte es la deformación de un cuerpo jalado que se mueve con aceleración por la fuerza $ma = 2F$:

$$\Delta L_1 = \frac{1}{2} \frac{(2F)L}{YA} = \frac{FL}{YA}$$

La segunda parte es la deformación de un cuerpo sujeto a la tensión F :

$$\Delta L_2 = \frac{FL}{YA}$$

La deformación total es la suma de las deformaciones parciales:

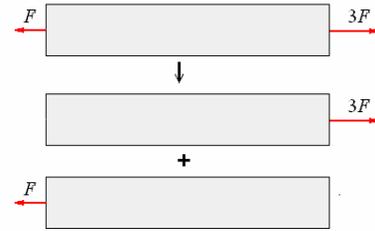
$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = \frac{FL}{YA} + \frac{FL}{YA}$$

$$= \frac{2FL}{AY}$$

Nota: $a = \frac{2F}{m}$

Tercer método.

El sistema de fuerzas puede ser desdoblado en dos partes cuyas deformaciones parciales sumadas hacen el efecto total, tal como se muestra en la figura siguiente:



La primera parte es la deformación de un cuerpo jalado hacia la derecha por la fuerza $ma_1 = 3F$:

$$\Delta L_1 = \frac{1}{2} \frac{(3F)L}{YA} = \frac{3FL}{2YA}$$

La segunda parte es la deformación de un cuerpo jalado hacia la izquierda por la fuerza $ma_2 = F$.

$$\Delta L_2 = \frac{1}{2} \frac{FL}{YA}$$

La deformación total es la suma de las deformaciones parciales:

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = \frac{3FL}{2YA} + \frac{1}{2} \frac{FL}{YA}$$

$$= \frac{2FL}{AY}$$

Nota: $(a_1 + a_2 = a)$, $a = \frac{3F}{m} - \frac{F}{m} = \frac{2F}{m}$

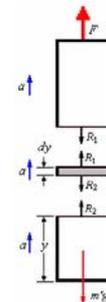
b) Como el sistema tiene masa considerada como despreciable la deformación es solamente por tensión F .



$$\Delta L = \frac{FL}{YA}$$

Ejemplo 20. Si la barra se jala hacia arriba con una fuerza F ($F > mg$). ¿Cuál es el alargamiento total de la barra?

Solución.



El elemento diferencial dm se mueve con aceleración a debido a la fuerza $(R_1 - R_2)$

Y la fuerza que lo estira es R_2 . Por lo tanto su deformación será un diferencial de ΔL esto es $d(\Delta L)$:

$$d(\Delta L) = \frac{R_2 dy}{YA} \text{ y } \Delta L = \int_0^L d(\Delta L)$$

Como

$$R_2 - m'g = m'a \Rightarrow R_2 = m'(g + a),$$

$$m' = \rho Ay \text{ y } a = \frac{F - mg}{m} = \left(\frac{F}{\rho AL} - g \right),$$

Tenemos:

$$R_2 = (\rho Ay) \left(\frac{F}{\rho AL} \right) = F \frac{y}{L}$$

$$d(\Delta L) = \frac{F}{YAL} y dy, \text{ y}$$

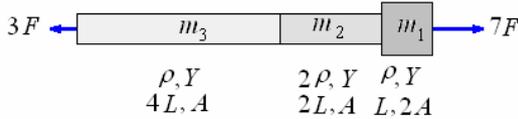
$$\Delta L = \int d(\Delta L) = \frac{F}{YAL} \int_0^L y dy$$

De donde

$$\Delta L = \frac{1}{2} \frac{FL}{YA}$$

Ejemplo 21. Para la barra compuesta mostrada determine:

- Su aceleración.
- La deformación de cada una de sus tres partes y su deformación total.



Solución.

a) $m_1 = 2\rho LA$, $m_2 = 4\rho LA$ y $m_3 = 4\rho LA$

Aplicando la segunda ley de Newton:

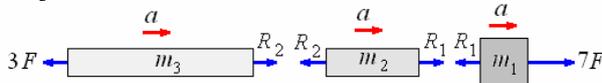
$$\sum F = ma \Rightarrow 7F - 3F = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

$$\Rightarrow 4F = 10\rho LAa$$

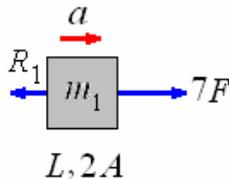
$$\Rightarrow a = \frac{0,4F}{\rho LA}$$

El conjunto se mueve hacia la derecha.

b) La figura siguiente muestra los diagramas del cuerpo libre de cada uno de los elementos del conjunto.



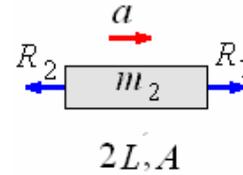
Aplicando la segunda ley de Newton a la masa m_1 :



$$7F - R_1 = m_1 a \Rightarrow R_1 = 7F - m_1 a$$

$$\Rightarrow R_1 = 7F - (2\rho LA) \frac{0,4F}{\rho LA} = 6,2F$$

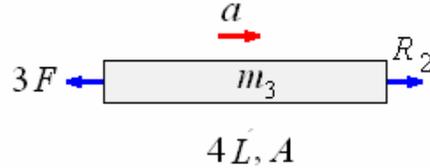
Aplicando la segunda ley de Newton a la masa m_2 :



$$R_1 - R_2 = m_2 a \Rightarrow R_2 = R_1 - m_2 a$$

$$\Rightarrow R_2 = 6,2F - (4\rho LA) \frac{0,4F}{\rho LA} = 4,6F$$

Aplicando la segunda ley de Newton a la masa m_3 :



$$R_2 - 3F = m_3 a \Rightarrow R_2 = 3F + m_3 a$$

$$\Rightarrow R_2 = 3F + (4\rho LA) \frac{0,4F}{\rho LA} = 4,6F$$

Resultado igual que el encontrado previamente.

Cálculo de las deformaciones

Deformación de 1.

La deformación por fuerza es debido a R_1 :

$$\Delta L_1 = \frac{R_1 L}{Y2A} = 3,1 \frac{FL}{YA}$$

La deformación por desplazamiento es debido a ser jalado por la fuerza $7F - 6,2F = 0,8F$

$$\Delta L'_1 = \frac{1}{2} \frac{0,8FL}{YA} = 0,4 \frac{FL}{YA}$$

Deformación total de 1:

$$\Delta L_{1Total} = 3,1 \frac{FL}{YA} + 0,4 \frac{FL}{YA} = 3,5 \frac{FL}{YA}$$

Deformación de 2.

La deformación por fuerza es debido a R_2 :

$$\Delta L_2 = \frac{R_2 L}{Y2A} = 4,6 \frac{FL}{YA}$$

La deformación por desplazamiento es debido a ser jalado por la fuerza

$$R_1 - R_2 = 6,2F - 4,6F = 1,6F$$

$$\Delta L'_2 = \frac{1}{2} \frac{1,6F2L}{YA} = 1,6 \frac{FL}{YA}$$

Deformación total de 2:

$$\Delta L_{2Total} = 4,6 \frac{FL}{YA} + 1,6 \frac{FL}{YA} = 6,2 \frac{FL}{YA}$$

Deformación de 3.

La deformación por fuerza es debido a $3F$:

$$\Delta L_3 = \frac{3F4L}{YA} = 12 \frac{FL}{YA}$$

La deformación por desplazamiento es debido a ser jalado por la fuerza

$$R_2 - 3F = 4,6F - 3F = 1,6F$$

$$\Delta L'_3 = \frac{1}{2} \frac{1,6F4L}{YA} = 3,2 \frac{FL}{YA}$$

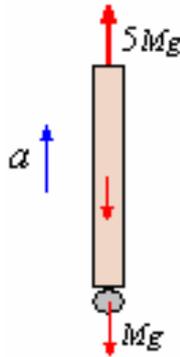
Deformación total de 3:

$$\Delta L_{3Total} = 12 \frac{FL}{YA} + 1,6 \frac{FL}{YA} = 13,6 \frac{FL}{YA}$$

Deformación total del conjunto.

$$\begin{aligned} \Delta L_{Total} &= 3,5 \frac{FL}{YA} + 6,2 \frac{FL}{YA} + 15,2 \frac{FL}{YA} \\ &= 24,9 \frac{FL}{YA} \end{aligned}$$

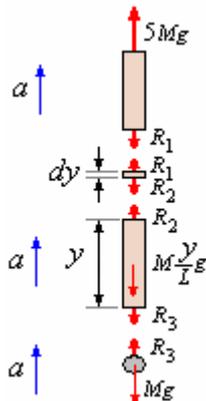
Ejemplo 22. Una barra vertical de longitud L , masa M , sección transversal A y módulo de Young Y , tiene soldada en su extremo inferior una masa puntual M . Si la barra se eleva verticalmente mediante una fuerza vertical $5Mg$ ($g =$ gravedad), aplicada en el extremo superior de la barra. Hallar la deformación longitudinal de la barra.



Solución.

Para calcular la aceleración de la barra aplicamos: $\sum F_y = ma_y$

$$5Mg - Mg - Mg = 2Ma \Rightarrow a = \frac{3}{2}g$$



Tomemos un elemento diferencial de la barra dy

Aplicando la segunda ley de Newton al elemento de longitud x :

$$R_2 - R_3 - \left(M \frac{y}{L}\right)g = \left(M \frac{y}{L}\right)a$$

$$R_2 - R_3 = M \frac{y}{L}(g + a)$$

$$R_2 - R_3 = M \frac{y}{L} \left(g + \frac{3}{2}g\right) = \frac{5Mg}{2L}y \quad (1)$$

Aplicando la segunda ley de Newton a la masa puntual:

$$R_3 - Mg = Ma = M \frac{3}{2}g \Rightarrow$$

$$R_3 = Mg + M \frac{3}{2}g = \frac{5}{2}Mg \quad (2)$$

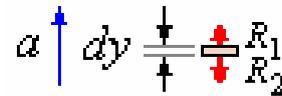
Reemplazando (2) en (1):

$$R_2 - \frac{5Mg}{2} = \frac{5Mg}{2L}y$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{5}{2}Mg \left(1 + \frac{y}{L}\right)$$

Primer método.

Comenzando con la deformación del elemento diferencial y luego integrar para toda la longitud.



El elemento diferencial se deforma $d(\Delta L)$ debido a la reacción R_2 , $(R_1 - R_2)$ le da la

aceleración $a = \frac{3}{2}g$, luego:

$$\begin{aligned} d(\Delta L) &= \frac{R_2 dy}{YA} = \frac{\frac{5}{2}Mg \left(1 + \frac{y}{L}\right) dy}{YA} \\ &= \frac{5Mg}{2YA} \left(1 + \frac{y}{L}\right) dy \end{aligned}$$

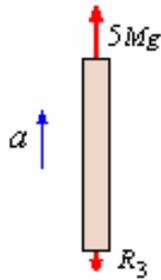
Integrando:

$$\begin{aligned} \Delta L &= \frac{5Mg}{2YA} \int_0^L \left(1 + \frac{y}{L}\right) dy = \frac{5Mg}{2YA} \left(L + \frac{L^2}{2L}\right) \\ &= \frac{15MgL}{4YA} \end{aligned}$$

Aquí no se considera el efecto del peso propio por separado, porque en el cálculo de R_2 ya está considerado.

Segundo método.

Comenzando con la deformación la los efectos de las fuerzas en los extremos de la barra.



Deformación de la barra por $5Mg$:

$$\Delta L_1 = \frac{1}{2} \frac{5MgL}{YA} = \frac{5MgL}{2YA}$$

Deformación de la barra por R_3 :

$$\Delta L_2 = \frac{1}{2} \frac{5MgL}{2YA} = \frac{5MgL}{4YA}$$

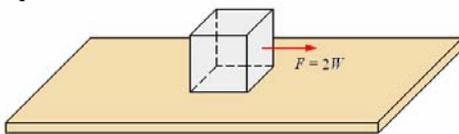
Deformación total: $\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2$

$$\begin{aligned} \Delta L &= \frac{5MgL}{2YA} + \frac{5MgL}{4YA} \\ &= \frac{15MgL}{4YA} \end{aligned}$$

Nota: En R_3 ya está considerado el peso de la masa puntual M colocada en el extremo inferior de la barra.

Ejemplo 23. Un cubo como se muestra en la figura de peso “ W ” arista “ L ” módulo de Young “ Y ” es arrastrado sobre un plano liso, con una fuerza $F = 2W$.

- Hallar la deformación longitudinal unitaria cuando el plano es horizontal.
- Hallar la deformación de la dimensión paralela al plano, cuando el bloque sube sobre el plano que esta inclinado 37° .



Solución.

a)

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{2} \frac{2W}{YL^2} = \frac{W}{YL^2}$$

b)

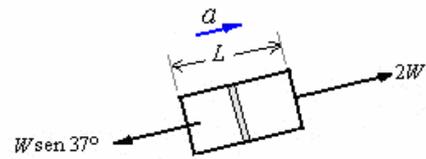
Resuelto por integración.

Calculo de la aceleración.

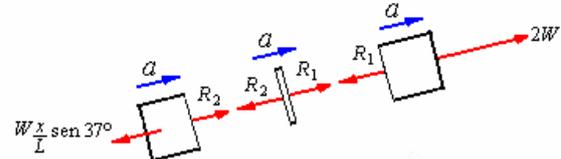
$$\sum F = ma \Rightarrow$$

$$2W - W \text{sen} 37^\circ = \frac{W}{g} a \Rightarrow 2W - 0,6W = \frac{W}{g} a$$

$$\Rightarrow a = 1,4g$$



El diagrama del cuerpo libre



Cálculo de R_2 :

$$R_2 - W \frac{x}{L} \text{sen} 37^\circ = \frac{W}{g} \frac{x}{L} a \Rightarrow$$

$$R_2 = W \frac{0,6x}{L} + \frac{W}{g} \frac{x}{L} 1,4g = 2W \frac{x}{L}$$

El elemento diferencial se deforma $d\Delta L$:

$$d\Delta L = \frac{R_2 dx}{YL^2} = \frac{2W}{YL^3} x dx$$

Para hallar ΔL integramos desde $x = 0$ hasta $x = L$.

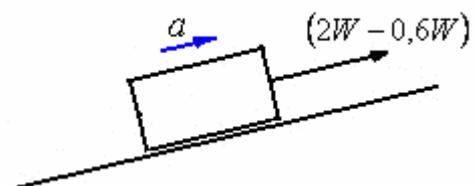
$$\Delta L = \int d\Delta L = \frac{2W}{YL^3} \int_0^L x dx = \frac{W}{YL}$$

La deformación es:

$$\Delta L = \frac{W}{YL}$$

Resuelto directamente usando resultados conocidos.

Estiramiento debido a la aceleración:



Calculo de la aceleración.

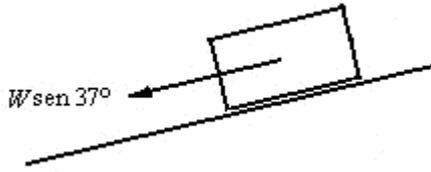
$$\sum F = ma \Rightarrow$$

$$2W - W \text{sen} 37^\circ = \frac{W}{g} a \Rightarrow 2W - 0,6W = \frac{W}{g} a$$

$$\Rightarrow a = 1,4g$$

$$\Delta L_a = \frac{1}{2} \frac{(2W - 0,6W)L}{YL^2} = \frac{0,7W}{YL}$$

Estiramiento debido al peso:



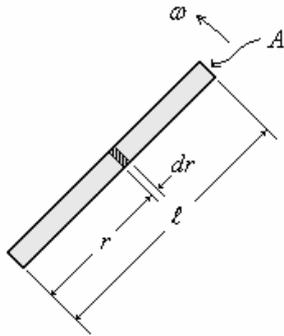
$$\Delta L_p = \frac{1}{2} \frac{0,6WL}{YL^2} = \frac{0,3W}{YL}$$

Estiramiento total:

$$\Delta L = \frac{0,7}{YL} + \frac{0,3W}{YL} = \frac{W}{YL}$$

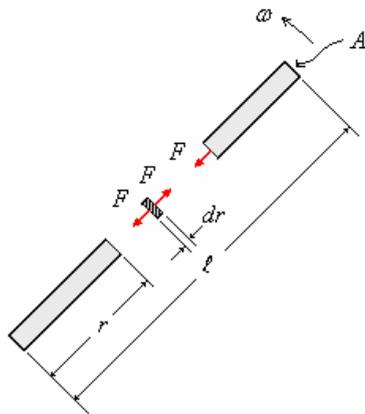
Ejemplo 24. Deformación debido a la rotación

Una barra de longitud ℓ , área A , densidad ρ y módulo de Young Y gira con velocidad angular ω constante sobre una mesa horizontal sin fricción y pivotado en uno de sus extremos. Determinar el alargamiento producido. ¿Cuál será el esfuerzo máximo?

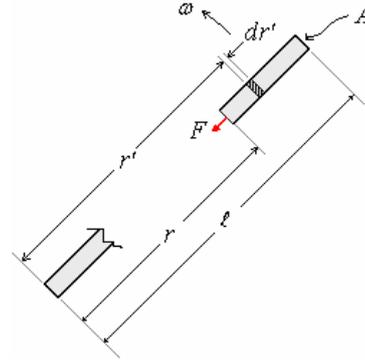


Solución.

El elemento diferencial se alarga $d(\Delta\ell)$, debido a la fuerza centrípeta producida por la masa restante hacia el extremo opuesto al pivote.



Parte 1: Cálculo de la fuerza total sobre una sección transversal a la distancia r del pivote.



Debido a la aceleración centrípeta el elemento diferencial $dm = \rho A dr'$ una fuerza dF :

$$dF = (dm)a_c = (dm)\omega^2 r'$$

$$dm = \rho A dr'$$

$$dF = (\rho A dr')\omega^2 r' = \rho A \omega^2 r' dr'$$

Para encontrar F integramos de r a ℓ :

$$F = \int_r^\ell \rho A \omega^2 r' dr' = \rho A \omega^2 \int_r^\ell r' dr'$$

$$F = \frac{1}{2} \rho A \omega^2 (\ell^2 - r^2)$$

Parte 2: Cálculo del alargamiento

El alargamiento del elemento dr es:

$$d(\Delta\ell) = \frac{F dr}{YA}$$

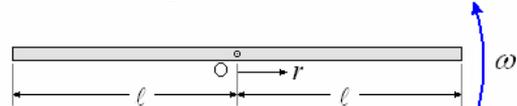
Y el alargamiento total será:

$$\Delta\ell = \int_r^\ell \frac{F dr}{YA} = \frac{\rho A \omega^2}{2YA} \int_r^\ell (\ell^2 - r^2) dr$$

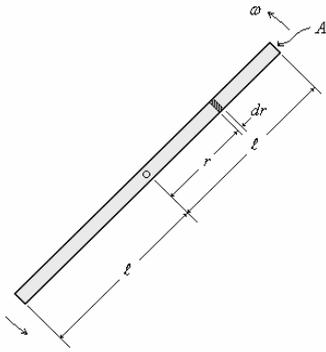
$$\Delta\ell = \frac{\rho \omega^2}{2Y} \left(\ell^3 - \frac{\ell^3}{3} \right) = \frac{1}{3} \frac{\rho \omega^2 \ell^3}{Y}$$

Ejemplo 25. Una varilla ABC , de sección transversal circular A , longitud 2ℓ gira en torno a un eje que pasa por el punto medio O , con velocidad angular constante ω . El material de la barra tiene densidad constante ρ .

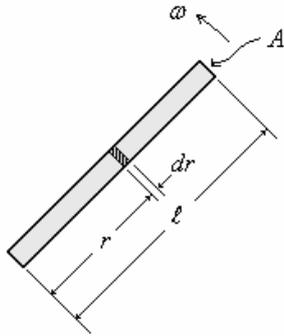
- Deduzca una fórmula para determinar el esfuerzo de tensión en la barra, en función de la distancia r al punto medio.
- ¿Cuál es el esfuerzo máximo de tensión?
- Calcule el alargamiento total de la barra.



Solución.

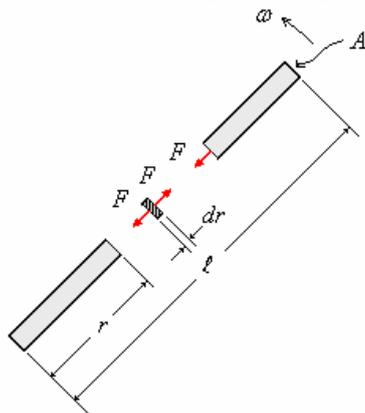


Una barra de longitud ℓ , área A , densidad ρ y módulo de Young Y gira con velocidad angular ω constante sobre una mesa horizontal sin fricción y pivotado en uno de sus extremos. Determinar el alargamiento producido. ¿Cuál será el esfuerzo máximo?

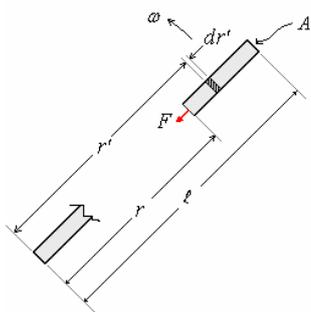


Solución.

El elemento diferencial se alarga $d(\Delta\ell)$, debido a la fuerza centrípeta producida por la masa restante hacia el extremo opuesto al pivote.



a) Cálculo de la fuerza total sobre una sección transversal a la distancia r del pivote.



Debido a la aceleración centrípeta el elemento diferencial $dm = \rho A dr'$ una fuerza dF :

$$dF = (dm)a_c = (dm)\omega^2 r'$$

$$dm = \rho A dr'$$

$$dF = (\rho A dr')\omega^2 r' = \rho A \omega^2 r' dr'$$

Para encontrar F integramos de r a ℓ :

$$F = \int_r^\ell \rho A \omega^2 r' dr' = \rho A \omega^2 \int_r^\ell r dr'$$

$$F = \frac{1}{2} \rho A \omega^2 (\ell^2 - r^2)$$

b) El esfuerzo máximo de tensión es cuando $r = 0$.

$$F = \frac{1}{2} \rho A \omega^2 \ell^2$$

c) Cálculo del alargamiento

El alargamiento del elemento dr es:

$$d(\Delta\ell) = \frac{F dr}{YA}$$

Y el alargamiento total será:

$$\Delta\ell = 2 \int_r^\ell \frac{F dr}{YA} = \frac{\rho A \omega^2}{YA} \int_r^\ell (\ell^2 - r^2) dr$$

$$\Delta\ell = \frac{\rho \omega^2}{Y} \left(\ell^3 - \frac{\ell^3}{3} \right) = \frac{2}{3} \frac{\rho \omega^2 \ell^3}{Y}$$

Ejemplo 26. Una barra de hierro de 100 mm^2 de sección y 50 cm de longitud gira alrededor de uno de sus extremos con una velocidad angular uniforme de ω radianes por segundo. Se pide cuál debe ser esta velocidad para que la barra se rompa por la tracción que origina la fuerza centrífuga, sabiendo que el material de que está hecha se rompe por tracción cuando se le carga con 30 kg por mm^2 .

Solución.

Se romperá cuando

$$F_c = (30 \times 9,8) \times 100 = 29400 \text{ N.}$$

Llamando dm a un elemento de masa situado a la distancia x del eje de giro, será:

$$dF_c = dm \omega^2 x = \rho dV \omega^2 x = \rho \omega^2 A x dx$$

Integrando:

$$F_c = \int_0^{0,5} \rho \omega^2 A x dx = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A x^2$$

$$= \frac{1}{2} (7800) \omega^2 (100 \times 10^{-6}) (0,5^2)$$

Luego:

$$\frac{1}{2} (7800) \omega^2 (100 \times 10^{-6}) (0,5^2) = 29400$$

Por tanto:

$$\omega^2 = \frac{2 \times 29400}{1950 \times 10^{-4}} = 301538 \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{301538} = 549 \text{ rad/s.}$$

Ejemplo 27. Determinar el máximo valor admisible de la velocidad lineal de rotación de un anillo fino de plomo, si la resistencia del plomo tiene el límite de rotura $P = 2000 \text{ N/cm}^2$ y la densidad $\rho = 11,3 \text{ g/cm}$.

Solución.

Durante la rotación del anillo, en éste surge una tensión $T = mv^2/2\pi r$. Para el anillo fino $m = 2\pi r S \rho$, donde S es la sección transversal del anillo. Por lo tanto, $T/S = \rho v^2$.

De allí el valor de la velocidad máxima es

$$v = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \approx 41 \text{ m/s.}$$

Ejemplo 28. Una barra homogénea de cobre de 1 m de longitud gira uniformemente alrededor de un eje vertical que pasa por uno de sus extremos. ¿A qué velocidad de rotación se romperá la barra?

Densidad del cobre $\rho = 8600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, Esfuerzo de rotura del cobre $S_r = 2,45 \times 10^8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$

Solución.

La fuerza centrífuga que actúa sobre la barra en este caso es

$$F = \int_0^\ell r \omega^2 dm$$

Donde ℓ es la longitud de la barra, ω es la velocidad angular de la rotación; r , la distancia que hay desde el elemento de masa dm hasta el eje de rotación. Para una barra homogénea $dm = \rho A dr$, siendo ρ la densidad de la sustancia que forma la barra y A , su sección. Integrando, obtenemos

$$F = \frac{\rho A \omega^2 \ell^2}{2}$$

De donde el número límite de revoluciones por segundo será

$$S_r = \frac{F}{A} = \frac{\rho \omega^2 \ell^2}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2S_r}{\rho \ell^2}},$$

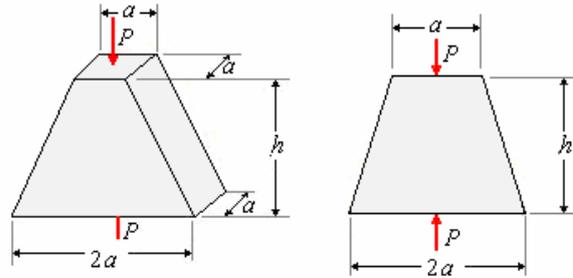
reemplazando valores;

$$\omega = \sqrt{\frac{2(2,45 \cdot 10^8)}{(8600)(1)^2}} = 239 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\text{o } \frac{239}{2\pi} = 38 \text{ rev/s}$$

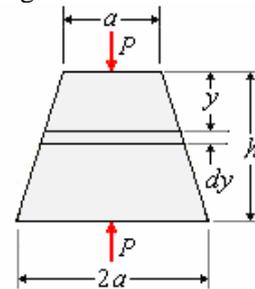
Deformaciones no uniformes por área variable.

Ejemplo 29. Calcular cuánto se comprime el bloque mostrado en la figura, cuando se le aplica una fuerza P . Módulo de elasticidad Y .



Solución.

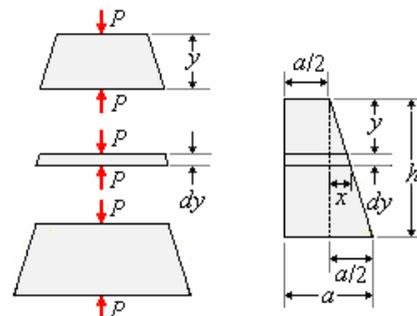
Tomemos un elemento diferencial dy tal como se muestra en la figura.



Según muestra el diagrama del cuerpo libre del elemento diferencial, es comprimido por la fuerza P .

Este elemento disminuye su longitud $d(\Delta h)$, siendo Δh la disminución de longitud de h debido a la fuerza P .

$$d(\Delta h) = \frac{P dy}{YA}$$



Usando las figuras anteriores

$$A = a(a + 2x) \text{ y } x = \frac{a}{2h} y \text{ y reemplazando}$$

obtenemos;

$$d(\Delta h) = \frac{P dy}{Ya(a + \frac{a}{h} y)} \text{ o } d(\Delta h) = \frac{Ph dy}{Ya^2(h + y)}$$

Luego, como

$$\Delta h = \int_0^h d(\Delta h) = \int_0^h \frac{Phdy}{Ya^2(h+y)}$$

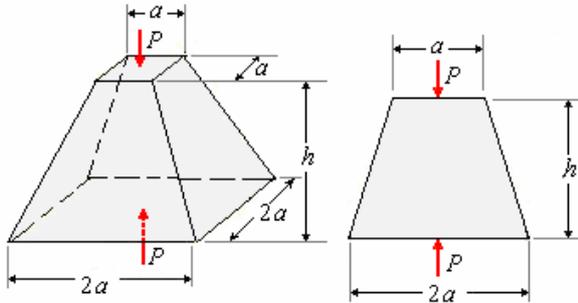
Integrando

$$\Delta h = \frac{Ph}{Ya^2} \ln(h+y)_0^h = \frac{Ph}{Ya^2} \ln 2$$

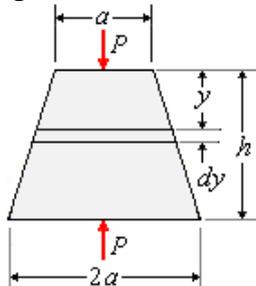
El bloque se comprime $\Delta h = 0,692 \frac{Ph}{Ya^2}$

Ejemplo 30. Una pirámide truncada de bases cuadradas de lados "a" y "2a" respectivamente de altura h y modulo elástico Y se somete en la dirección axial a una fuerza de compresión P, Determine la deformación que sufre la altura por acción de la fuerza P.

Solución.



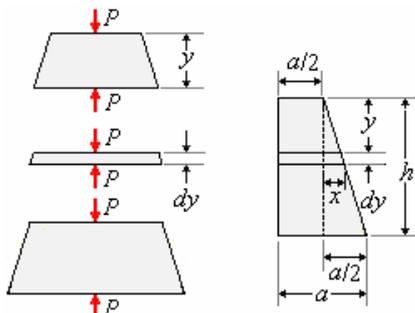
Tomemos un elemento diferencial dy tal como se muestra en la figura.



Según muestra el diagrama del cuerpo libre del elemento diferencial, es comprimido por la fuerza P.

Este elemento disminuye su longitud d(Δh), siendo Δh la disminución de longitud de h debido a la fuerza P.

$$d(\Delta h) = \frac{Pdy}{YA}$$



Usando las figuras anteriores

$$A = (a + 2x)^2 \text{ y } x = \frac{a}{2h} y \text{ y reemplazando}$$

obtenemos;

$$d(\Delta h) = \frac{Ph^2 dy}{Ya^2(h+y)^2}$$

Luego, como

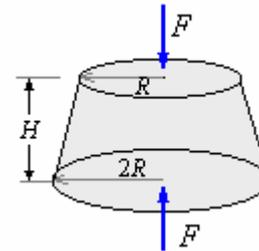
$$\Delta h = \int_0^h d(\Delta h) = \int_0^h \frac{Ph^2 dy}{Ya^2(h+y)^2}$$

Integrando

$$\Delta h = \frac{Ph}{2Ya^2}$$

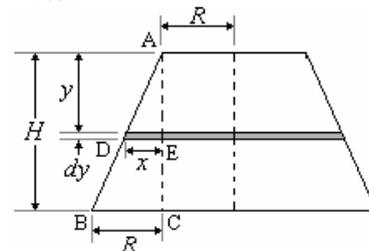
El bloque se comprime $\Delta h = \frac{1}{2} \frac{Ph}{Ya^2}$

Ejemplo 31. Determine la deformación debido a la fuerza F, sin considerar el peso. El sólido mostrado de modulo elástico Y tiene altura H y bases circulares de radios R y 2R



Solución.

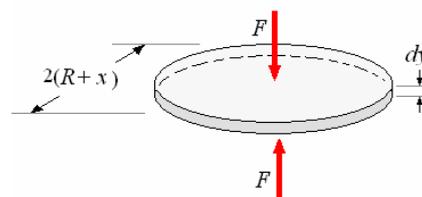
$$d(\Delta H) = \frac{Fdy}{Y\pi r^2}, \text{ r } = R + x$$



En los triángulos ABC y ADE:

$$\frac{y}{R} = \frac{x}{H} \Rightarrow y = \frac{R}{H}x, \text{ dy } = \frac{R}{H}dx$$

La deformación del disco radio (R + x) y espesor dy:



$$d(\Delta H) = \frac{Fdy}{Y\pi(R+x)^2} = \frac{FR}{\pi YH} \frac{dx}{(R+x)^2}$$

$$= \frac{FR}{\pi YH} (R+x)^{-2} dx$$

Integrando desde $x = 0$ a $x = R$:

$$\Delta H = \int \Delta H = \frac{FR}{\pi YH} (R+x)^{-2} dx$$

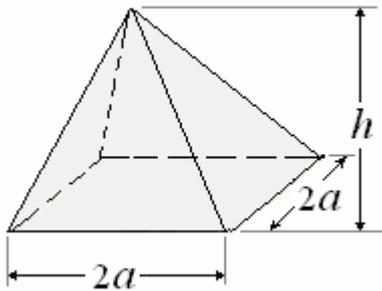
$$= \frac{FR}{\pi R^2 Y} \left[\frac{(R+x)^{-1}}{-1} \right]_{x=0}^{x=R}$$

$$\Delta H = \frac{FR}{\pi YH} \left[-\frac{1}{2R} + \frac{1}{R} \right] = \frac{F}{2\pi YH}$$

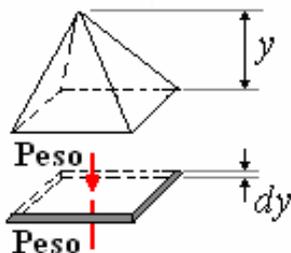
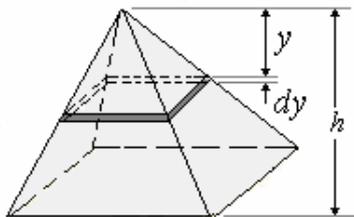
Deformaciones no uniformes por peso propio y área variable.

Ejemplo 32. Determine la deformación que sufre la altura de la Gran pirámide de Keops en Egipto debido a su propio peso, sabiendo que posee una altura de 147 m, su base es cuadrada de lado 230 m y que fue construida con bloques de piedra caliza y granito con módulo de Young $= 35 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ y densidad $= 2400 \text{ kg/m}^3$.

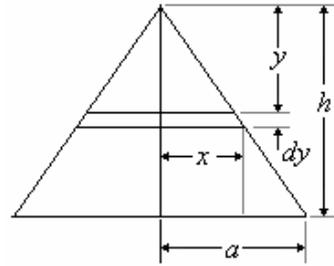
Solución.



Tomemos un elemento diferencial dy , tal como de indica en la figura



Este elemento sufre una acortamiento $d(\Delta h)$, debido al peso de la porción de pirámide que soporta (de altura y , radio base de lado $2x$).



El peso que soporta es: $\text{Peso} = \rho g \left(\frac{1}{3} 4x^2 y \right)$ el

área de su base es: $A_x = 4x^2$

$$d(\Delta h) = \frac{\rho g 4x^2 y dy}{3Y 4x^2} = \frac{\rho g}{3Y} y dy$$

Integrando desde $y = 0$ hasta $y = h$

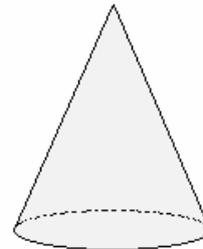
$$\Delta h = \int_0^h \frac{\rho g}{3Y} y dy = \frac{\rho g}{3Y} \frac{y^2}{2} \Big|_0^h = \frac{1}{2} \frac{\rho g h^2}{3Y}$$

Como el Peso total es $\frac{\rho g A h}{3}$, obtenemos:

$$\Delta h = \frac{1}{2} \frac{(\text{Peso total})h}{Y(\text{Area base})}$$

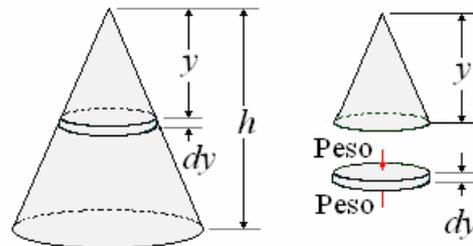
Ejemplo 33. Encontrar cuanto se comprime el cono de altura h y base de área A debido a su propio peso.

El cono esta hecho de un material de densidad ρ y módulo de elasticidad Y .

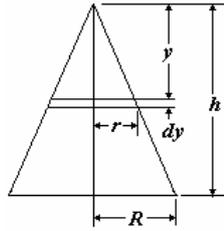


Solución.

Tomemos un elemento diferencial dy , tal como de indica en la figura



Este elemento sufre una acortamiento $d(\Delta h)$, debido al peso de la porción de cono que soporta (de altura y , radio de la base r).



El peso que soporta es: $\text{peso} = \rho g \left(\frac{1}{3} \pi r^2 y\right)$ el

área de su base es: $A = \pi r^2$

$$d(\Delta h) = \frac{\rho g \pi r^2 y dy}{3Y \pi r^2} = \frac{\rho g}{3Y} y dy$$

Integrando desde $y = 0$ hasta $y = h$

$$\Delta h = \int_0^h \frac{\rho g}{3Y} y dy = \frac{\rho g}{3Y} \frac{y^2}{2} \Big|_0^h = \frac{1}{2} \frac{\rho g h^2}{3Y}$$

Como el Peso total es $\rho g Ah/3$, obtenemos:

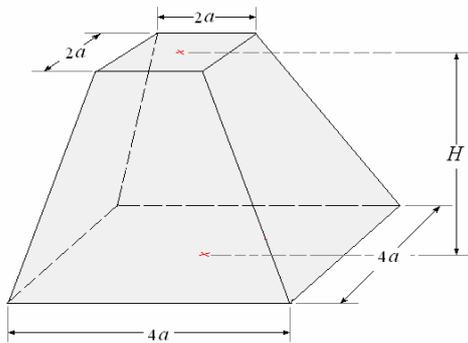
$$\Delta h = \frac{1}{2} \frac{(\text{Peso total})h}{Y(\text{Area base})}$$

Ejemplo 34. En la figura se muestra un tronco recto de pirámide regular de base cuadrada. Determinar cuánto se comprime el sólido homogéneo debido a su peso propio.

Datos: Densidad = ρ , gravedad = g , módulo de Young = Y

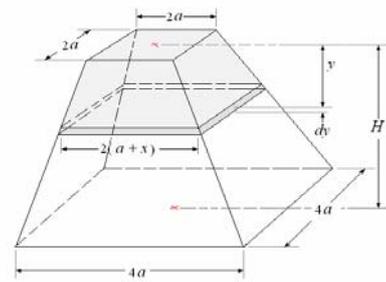
Lado de la base menor = $2a$; lado de la base mayor = $4a$

Altura del tronco de pirámide regular = H

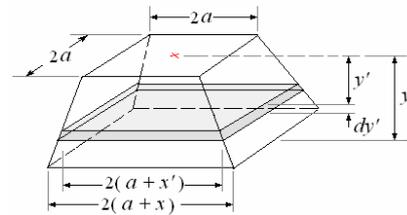


Solución.

Para determinar cuánto se comprime el sólido tomamos un elemento diferencial dy y vemos cuanto se comprime por efecto del peso de la parte tronco de pirámide que está sobre él (la parte de altura y en el dibujo).



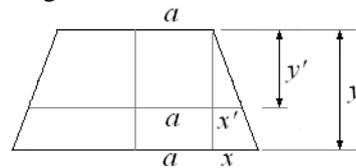
Cálculo del peso de la de la parte tronco de pirámide que está sobre el elemento diferencial. Para esto tomamos un elemento diferencial de altura dy' y lo integramos desde $x = 0$ hasta $x = x'$.



El peso del elemento diferencial es:

$$dP = \rho g dV = \rho g 4(a + x')^2 dy'$$

Del dibujo siguiente:



Obtenemos:

$$y' = \frac{y}{x} x' \text{ y } dy' = \frac{y}{x} dx'$$

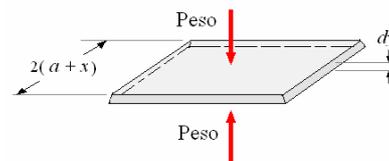
$$dP = 4\rho g \frac{y}{x} (a + x')^2 dx'$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = x'$:

$$\begin{aligned} P &= \int dP = 4\rho g \frac{y}{x} \int_0^{x'} (a + x')^2 dx' \\ &= 4\rho g \frac{y}{x} \frac{(a + x')^3}{3} \Big|_0^{x'} \\ &= \frac{4\rho g y}{3x} [(a + x)^3 - a^3] \end{aligned}$$

El elemento diferencial se comprime:

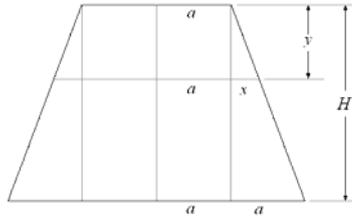
$$d(\Delta H) = \frac{P dy}{YA}, \quad A = (2a + 2x)^2 = 4(a + x)^2$$



Reemplazando:

$$d(\Delta H) = \frac{4\rho g y}{3Yx} \frac{[(a + x)^3 - a^3]}{4(a + x)^2} dy$$

Del dibujo siguiente:



Obtenemos:

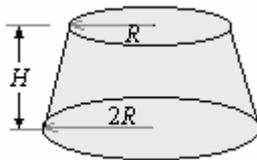
$$y = \frac{H}{a} x, \quad dy = \frac{H}{a} dx :$$

$$\begin{aligned} d(\Delta H) &= \frac{\rho g}{3Y} \frac{H^2}{a^2} \left[(a+x)^3 - a^3 \right] dx \\ &= \frac{\rho g}{3Y} \frac{H^2}{a^2} \left[a+x - a^3(a+x)^{-2} \right] dx \end{aligned}$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = a$:

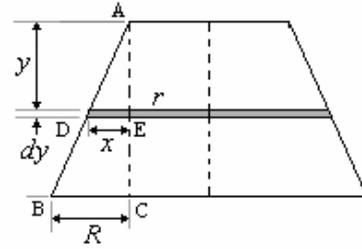
$$\begin{aligned} \Delta H &= \int d(\Delta H) \\ &= \frac{\rho g}{3Y} \frac{H^2}{a^2} \int_0^a \left[a+x - a^3(a+x)^{-2} \right] dx \\ &= \frac{\rho g}{3Y} \frac{H^2}{a^2} \left[ax + \frac{x^2}{2} + \frac{a^3}{(a+x)} \right]_0^a \\ &= \frac{\rho g}{3Y} \frac{H^2}{a^2} \left(a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} - a^2 \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{\rho g H^2}{Y} \end{aligned}$$

Ejemplo 35. Determine la deformación que sufre la altura debido al peso propio. El sólido mostrado tiene peso F , módulo elástico Y , altura H y bases circulares de radios R y $2R$

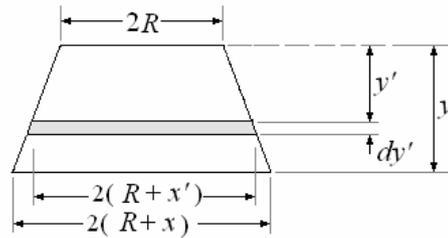


Solución.

Para determinar la deformación que sufre la altura debido al peso propio, primeramente tenemos que calcular cuanto se comprime un volumen de espesor diferencial dy debido al peso de la parte del tronco de cono que está sobre él (la parte de altura y en el dibujo), en segundo lugar calcular la deformación del elemento diferencial, finalmente procede a integrar esta deformación para todo el tronco de cono.



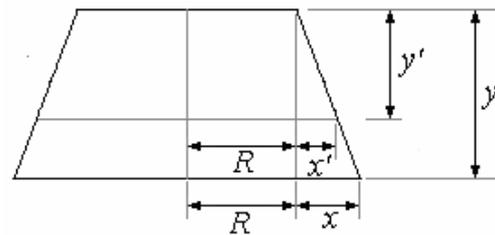
1 - Cálculo del peso P de la de la parte tronco de cono que está sobre el elemento diferencial. Para esto tomamos un elemento diferencial de altura dy' y lo integramos desde $x = 0$ hasta $x = x'$.



El peso del elemento diferencial es:

$$dP = \rho g dV = \rho g \pi (R+x')^2 dy'$$

Del dibujo siguiente:



Obtenemos:

$$y' = \frac{y}{x} x' \quad \text{y} \quad dy' = \frac{y}{x} dx' :$$

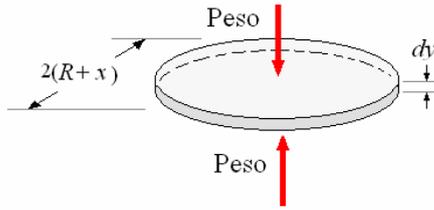
$$dP = \rho g \pi \frac{y}{x} (R+x')^2 dx'$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = x'$:

$$\begin{aligned} P &= \int dP = \rho g \pi \frac{y}{x} \int_0^{x'} (R+x')^2 dx' \\ &= \rho g \pi \frac{y}{x} \frac{(R+x')^3}{3} \Big|_0^{x'} \\ &= \frac{\rho g \pi y}{3x} \left[(R+x)^3 - R^3 \right] \end{aligned}$$

2 - Deformación del elemento diferencial debido al peso que soporta.

$$d(\Delta H) = \frac{P dy}{YA}, \quad A = \pi (R+x)^2$$

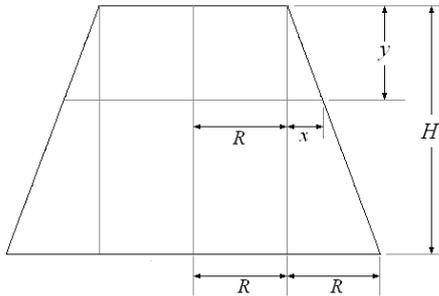


Reemplazando P y A :

$$d(\Delta H) = \frac{\rho g \pi y}{3Yx} \left[\frac{(R+x)^3 - R^3}{\pi(R+x)^2} \right] dy$$

3 – Para calcular la deformación total del tronco de cono debemos de realizar la integración para todo el sólido, para esto tenemos que poner la expresión diferencial en función de una sola variable en este caso en función de x .

De dibujo siguiente:



Obtenemos:

$$y = \frac{H}{R} x, \quad dy = \frac{H}{R} dx :$$

Luego:

$$\begin{aligned} d(\Delta H) &= \frac{\rho g}{3Y} \frac{H^2}{R^2} \left[\frac{(R+x)^3 - R^3}{(R+x)^2} \right] dx \\ &= \frac{\rho g}{3Y} \frac{H^2}{R^2} \left[R+x - R^3(R+x)^{-2} \right] dx \end{aligned}$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = R$:

$$\begin{aligned} \Delta H &= \int d(\Delta H) \\ &= \frac{\rho g}{3Y} \frac{H^2}{R^2} \int_0^R \left[R+x - R^3(R+x)^{-2} \right] dx \\ &= \frac{\rho g}{3Y} \frac{H^2}{R^2} \left[Rx + \frac{x^2}{2} + \frac{R^3}{(R+x)} \right]_0^R \\ &= \frac{\rho g}{3Y} \frac{H^2}{R^2} \left(R^2 + \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} - R^2 \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{\rho g H^2}{Y} \end{aligned}$$

El peso del tronco de cono es:

$$F = \frac{1}{3} \pi (2R)^2 (2H) \rho g - \frac{1}{3} \pi (R)^2 (H) \rho g$$

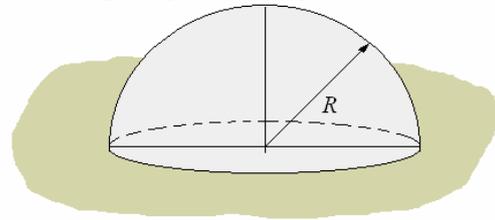
$$= \frac{1}{3} \pi R^2 H \rho g (8 - 1) = \frac{7}{3} \pi R^2 H \rho g$$

Luego

$$\begin{aligned} \Delta H &= \frac{F}{\frac{7}{3} \pi R^2 H \rho g} \frac{1}{3} \frac{\rho g H^2}{Y} \\ &= \frac{FH}{7\pi R^2 Y} \end{aligned}$$

Ejemplo 36. Un hemisferio (mitad de una esfera sólida) de densidad ρ , radio R y modulo de Young Y esta sobre el piso descansando sobre su base circular determine cuanto se deforma por acción de su propio peso.

Sugerencia: Calcule la deformación de una porción diferencial del hemisferio formada por un disco delgado paralelo al piso.



Solución.

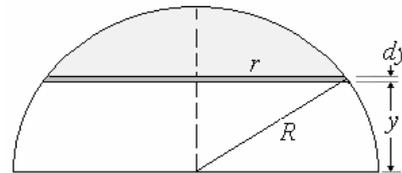
Vamos a considerar un elemento diferencial de área $A = \pi r^2$, altura dy

Donde $r^2 = (R^2 - y^2)$

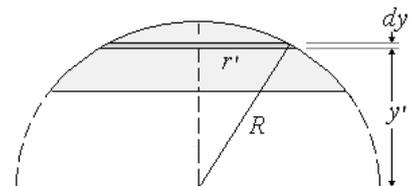
El elemento diferencial soporta el peso P de la parte de hemisferio que está sobre él.

De tal manera que se deforma:

$$d(\Delta R) = \frac{P_{(y)} dy}{YA}$$



Cálculo de $P_{(y)}$



Peso del elemento diferencial

$$dP_{(y)} = \rho \pi g (R^2 - y'^2) dy'$$

El peso $P_{(y)}$ de la porción de hemisferio es:

$$P_{(y)} = \rho\pi g \int_y^R (R^2 - y'^2) dy' =$$

$$\rho g \pi \left(\frac{2R^3}{3} - R^2 y + \frac{y^3}{3} \right)$$

Ahora la deformación total Integrando

$$d(\Delta R) = \frac{P_{(y)} dy}{YA} :$$

$$d(\Delta R) = \frac{g\pi \left(\frac{2R^3}{3} - R^2 y + \frac{y^3}{3} \right) dy}{Y\pi(R^2 - y^2)}$$

$$\Delta R = \rho g \pi \frac{1}{Y} \int_0^R \left(\frac{2R^3}{3} - R^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \frac{dy}{(R^2 - y^2)}$$

$$= \frac{\rho g}{Y} \int_0^R \frac{\left(\frac{2}{3}R^3 - \frac{2}{3}R^2 y \right) + \left(-\frac{1}{3}R^2 y + \frac{1}{3}y^3 \right)}{(R^2 - y^2)} dy$$

$$= \frac{\rho g}{Y} \int_0^R \frac{\frac{2R^2}{3}(R-y) - \frac{y}{3}(R^2 - y^2)}{(R-y)(R+y)} dy$$

$$= \frac{\rho g}{3Y} \int_0^R \left[\frac{2R^2}{(R+y)} - y \right] dy$$

$$= \frac{\rho g}{3Y} \left[2R^2 \ln(R+y) - \frac{y^2}{2} \right]_0^R$$

$$= \frac{\rho g R^2}{3Y} \left(2 \ln 2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{0,30 \rho g R^2}{Y}$$

La altura del hemisferio disminuye

$$\Delta R = \frac{0,30 \rho g R^2}{Y} \text{ Debido al peso propio}$$

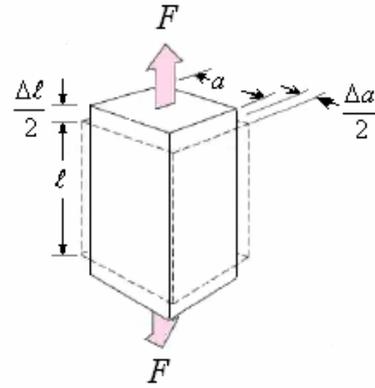
DEFORMACIÓN LATERAL MODULO DE POISSON

Adicionalmente, cuando estiramos un bloque en una dirección éste se contrae en las dimensiones perpendiculares al estiramiento, la contracción de las caras laterales es en la misma proporción para el ancho (a) y el alto (h). Por ejemplo, la contracción Δa en el ancho es proporcional al

ancho a y también a $\frac{\Delta \ell}{\ell}$, lo que resumimos en la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta h}{h} = -\sigma \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

Donde σ es otra constante del material conocida como **el módulo de Poisson**.



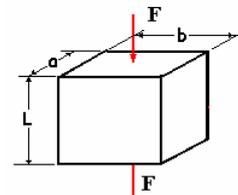
Como valores aproximados para algunos materiales se puede tomar:

0,28 para hierro y acero, 0,5 para caucho y 0,25 para vidrio.

Las dos constantes Y y σ especifican completamente las propiedades de un material homogéneo isotrópico.

Nombre	Módulo de Poisson σ Sin dimensiones
Aluminio	0,34
Acero	0,28
Cobre	0,35
Oro	0,41
Hierro, fundido	0,28
Plomo	0,33
Nickel	0,30
Platino	0,38
Plata	0,37
Latón	0,33

Ejemplo 37. El paralelepípedo de la figura está hecho de un material con módulo de Young Y , y constante poisson σ . ¿Cuál es el valor de $\Delta V/V$?



Solución.

Debido a la compresión ocasionada por la fuerza F :

$$\frac{\Delta L}{L} = -\frac{F}{YA} \text{ y como } \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = -\sigma \frac{\Delta L}{L}$$

$$\text{Obtenemos: } \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = \sigma \frac{F}{YA}$$

$$\text{Como } \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

Reemplazando

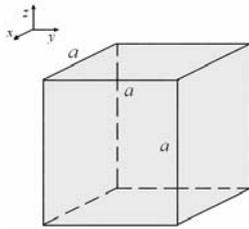
$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{F}{YA} + \sigma \frac{F}{YA} + \sigma \frac{F}{YA}$$

Finalmente:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{F}{YA}(1 - 2\sigma)$$

Ejemplo 38. Al cubo de la figura de lado 50cm se le aplica dos pares de fuerzas $F_x=100$ N y $F_y=50$ N obteniendo como resultado que la longitud en el eje x aumenta en 0,01% y la longitud en el eje y disminuye en 0,006%.

- Determine si el esfuerzo en x,y es de tracción o compresión.
- Determine el módulo de Young y la constante de Poisson.



Solución.

a) Los esfuerzos son:

$$S_x = \frac{100}{(0,5)^2} = 400 \text{ N/m}^2,$$

$$S_y = \frac{50}{(0,5)^2} = 200 \text{ N/m}^2$$

Las deformaciones unitarias son:

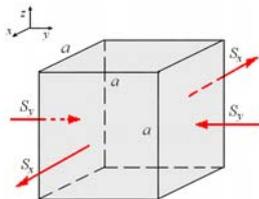
$$\frac{\Delta a_x}{a} = \frac{0,01}{100} = 1 \times 10^{-4},$$

$$\frac{\Delta a_y}{a} = -\frac{0,006}{100} = -6 \times 10^{-5}$$

Haciendo un análisis de los cambios de longitudes:

El esfuerzo en x es mayor y la longitud en x aumenta mientras que en y disminuye, siendo el esfuerzo en y menor, se puede concluir que el esfuerzo en x es de tracción y el esfuerzo en y es de compresión.

b) El paralelepípedo está sujeto a esfuerzo por cuatro caras, como se muestra en la figura siguiente:



Sea S el esfuerzo sobre cada una de las caras laterales.

La deformación del lado horizontal a_x es:

$$\frac{\Delta a_x}{a} = \frac{400}{Y} + \sigma \frac{200}{Y} = 1 \times 10^{-4} \quad (1)$$

La deformación del lado horizontal a_y es:

$$\frac{\Delta a_y}{a} = -\frac{200}{Y} - \sigma \frac{400}{Y} = -0,6 \times 10^{-4} \quad (2)$$

Restando (1) + (2)/2, obtenemos:

$$\frac{400}{Y} - \frac{100}{Y} = 0,7 \times 10^{-4} \Rightarrow \frac{300}{Y} = 0,7 \times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{300}{0,7 \times 10^{-4}} = 4,28 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

Reemplazando el valor de Y en (1):

$$\frac{400}{4,28 \times 10^6} + \sigma \frac{200}{4,28 \times 10^6} = 1 \times 10^{-4} \Rightarrow$$

$$4 + 2\sigma = 4,28$$

$$\Rightarrow \sigma = 0,14$$

Ejemplo 39. a) Calcule la deformación volumétrica durante la extensión elástica de una barra cilíndrica sometida a tracción axial. El material es isótropo y la deformación se supone pequeña.

b) ¿Para qué valor del módulo de Poisson, el alargamiento ocurre sin cambio de volumen?

c) El módulo de Poisson de la mayoría de metales es aproximadamente 0,3. El del corcho, aproximadamente 0,0 y el del caucho cercano a 0,5. ¿Cuáles son las deformaciones volumétricas de esos materiales al someterlos a una compresión elástica $\epsilon < 0$?

Solución.

a) Para la altura $\frac{\Delta h}{h} = \frac{S}{Y}$, para el diámetro

$$\frac{\Delta D}{D} = -\sigma \frac{\Delta h}{h} = -\sigma \frac{S}{Y}$$

El cambio de volumen es $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta h}{h} + 2 \frac{\Delta D}{D} =$

$$\frac{S}{Y} - 2\sigma \frac{S}{Y} = \frac{S}{Y}(1 - 2\sigma), \text{ por lo tanto}$$

$$\Delta V = \frac{S}{Y}(1 - 2\sigma)V = \frac{S}{Y}(1 - 2\sigma) \frac{\pi D^2 h}{4}$$

b) ΔV es igual a cero cuando $(1 - 2\sigma) = 0 \Rightarrow \sigma = 0,5$

c) Para la mayoría de metales con un valor de σ aproximado a 0,3:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{S}{Y}[1 - 2(0,3)] = 0,4 \frac{S}{Y}$$

Para el corcho, con un valor de σ aproximado a 0,0:

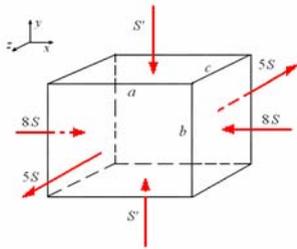
$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{S}{Y} [1 - 2(0,0)] = \frac{S}{Y}$$

Para el caucho, con un valor de σ aproximado a 0,5:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{S}{Y} [1 - 2(0,5)] = 0,0$$

Ejemplo 40. El sólido de la figura está sometido a los esfuerzos de compresión y tracción mostrados en las direcciones x y z , respectivamente. Determine cual será el esfuerzo (S') en la dirección y , tal que la deformación unitaria en esa dirección sea nula.

Datos: S = esfuerzo, Y = módulo de Young, σ = módulo de Poisson.



Solución.

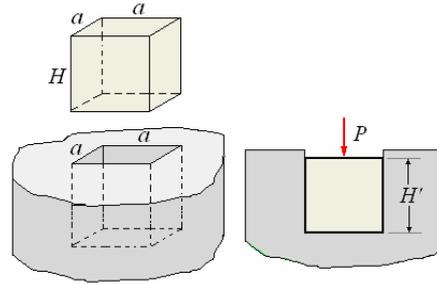
	$\frac{\Delta a}{a}$	$\frac{\Delta b}{b}$	$\frac{\Delta c}{c}$
Por $-8S$ en el eje x	$-\frac{8S}{Y}$	$\frac{\sigma 8S}{Y}$	$\frac{\sigma 8S}{Y}$
por S' en el eje y	$\frac{\sigma S'}{Y}$	$-\frac{S'}{Y}$	$\frac{\sigma S'}{Y}$
Por $-5S$ en el eje z	$-\frac{\sigma 5S}{Y}$	$-\frac{\sigma 5S}{Y}$	$\frac{5S}{Y}$
Deformación total		$\frac{1}{Y}(3\sigma S - S')$	

Para que la deformación unitaria en la dirección y sea nula, se debe cumplir:

$$\frac{1}{Y}(3\sigma S - S') = 0 \Rightarrow 3\sigma S - S' = 0 \Rightarrow S' = 3\sigma S$$

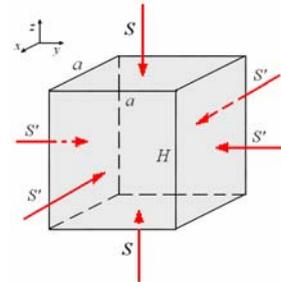
Ejemplo 41. Se tiene el paralelepípedo mostrado en la figura que encaja perfectamente en una caja rígida. Luego de encajo el paralelepípedo se coloca un peso P sobre éste, tal que lo aplasta uniformemente, la caja impide las expansiones laterales.

- ¿Cuál es el esfuerzo sobre las paredes laterales?
- ¿Cuál es el cambio en la altura $\Delta H = H - H'$ del paralelepípedo?



Solución.

El paralelepípedo está sujeto a esfuerzo por sus seis caras, como se muestra en la figura siguiente:



Sea S el esfuerzo sobre la cara superior e inferior y S' el esfuerzo sobre cada una de las caras laterales.

La deformación del lado a es:

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{S}{Y} + \sigma \frac{S'}{Y} + \sigma \frac{S}{Y} \quad (1)$$

La deformación del lado H es:

$$\frac{\Delta H}{H} = -\frac{S}{Y} + 2\sigma \frac{S'}{Y} \quad (2)$$

a) Como la longitud a no cambia, $\Delta a = 0$.

De la ecuación (1):

$$-\frac{S}{Y} + \sigma \frac{S'}{Y} + \sigma \frac{S}{Y} = 0 \Rightarrow S' = \frac{\sigma}{(1-\sigma)} S$$

Siendo $S = \frac{P}{a^2}$

$$\Rightarrow S' = \frac{\sigma P}{(1-\sigma)a^2}$$

b) De la ecuación (2):

$$\frac{\Delta H}{H} = -\frac{S}{Y} + 2\sigma \frac{S'}{Y} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta H}{H} = -\frac{S}{Y} + \frac{2\sigma^2}{(1-\sigma)} \frac{S}{Y} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta H}{H} = -\frac{S}{Y} \left[1 - \frac{2\sigma^2}{(1-\sigma)} \right] \Rightarrow$$

$$\Delta H = -\frac{P}{Ya^2} \left[1 - \frac{2\sigma^2}{(1-\sigma)} \right] H$$

Ejemplo 42. Hallar el valor del módulo de Poisson para el cual el volumen de un alambre no varía al alargarse.

Solución.

$$\frac{\Delta r}{r} = \sigma \frac{\Delta \ell}{\ell}, \text{ de aquí el módulo de Poisson}$$

$$\sigma = \frac{\frac{\Delta r}{r}}{\frac{\Delta \ell}{\ell}}, \text{ siendo } r \text{ el radio del alambre y } \ell \text{ su}$$

longitud. El volumen de dicho alambre antes de estirarlo es $V_1 = \pi r^2 \ell$ y su volumen después de estirado es $V_2 = \pi (r - \Delta r)^2 (\ell + \Delta \ell)$

Si el volumen no varió con el alargamiento, tendremos que $\pi r^2 \ell = \pi (r - \Delta r)^2 (\ell + \Delta \ell)$. Y abriendo los paréntesis y despreciando las magnitudes Δr y $\Delta \ell$ al cuadrado, hallamos que $\pi r^2 \ell = 2\pi r \Delta r \ell \Rightarrow$

$$\frac{\frac{\Delta r}{r}}{\frac{\Delta \ell}{\ell}} = \frac{1}{2} = 0,5, \text{ luego } \sigma = 0,5.$$

Ejemplo 43. Hallar la variación relativa de la densidad de una barra de cobre cilíndrica al ser comprimida por una presión $p = 9810 \text{ Pa}$. Para el cobre tómesese un módulo de Poisson $\sigma = 0,34$.

Solución.

La densidad de la barra antes de ser comprimida es $\rho_1 = \frac{m}{V_1}$ donde $V_1 = \pi r^2 \ell$. La densidad de la

barra después de comprimida será $\rho_2 = \frac{m}{V_2}$,

siendo $V_2 = \pi (r + \Delta r)^2 (\ell - \Delta \ell)$. Por consiguiente la variación de la densidad será

$$\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1 = m \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) = \frac{m \Delta V}{V_2 V_1}$$

Como la compresión no es muy grande, aproximadamente se puede tomar $V_2 V_1 = V_1^2$

Se puede considerar que $\Delta \rho = \frac{m \Delta V}{V_1^2}$.

Entonces la variación relativa de la densidad $\frac{\Delta \rho}{\rho_1} = \frac{\Delta V}{V_1}$. Hallemos pues la variación de

volumen $\Delta V = \pi r^2 \ell - \pi (r + \Delta r)^2 (\ell - \Delta \ell)$. Abriendo los paréntesis y despreciando los cuadrados de las magnitudes Δr y $\Delta \ell$,

obtenemos que $\Delta V = V_1 \left(\frac{\Delta \ell}{\ell} \right) (1 - 2\sigma)$, donde

σ es el módulo de Poisson. Por lo tanto

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_1} = \frac{\Delta V}{V_1} = \frac{\Delta \ell}{\ell} (1 - 2\sigma).$$

de Hooke $\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{p_n}{Y}$, tendremos que en

$$\text{definitiva } \frac{\Delta \rho}{\rho_1} = \frac{p_n}{Y} (1 - 2\sigma).$$

En nuestro caso $p_n = 9,81 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$,

$Y = 1,18 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ y $\sigma = 0,34$. Poniendo estos

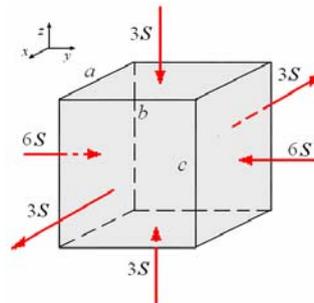
datos obtenemos que $\frac{\Delta \rho}{\rho_1} = \frac{\Delta V}{V_1} = 0,027 \%.$

Ejemplo 44. El sólido de la figura (lados a, b y c) está sometido a los esfuerzos de compresión y tensión mostrados.

Determine la deformación volumétrica unitaria, $\Delta V / V$.

Datos:

S = esfuerzo, Y = módulo de Young, σ = módulo de Poisson.



Solución.

Deformación de cada uno de los lados:

	Deformación de a
Por $3S$ en el eje x	$\frac{\Delta a}{a} = \frac{3S}{Y}$
Por $-6S$ en el eje y	$\frac{\Delta a}{a} = -\sigma \frac{\Delta b}{b} = \sigma \frac{6S}{Y}$
Por $-3S$ en el eje z	$\frac{\Delta a}{a} = -\sigma \frac{\Delta c}{c} = \sigma \frac{3S}{Y}$
Deformación total	$\left(\frac{\Delta a}{a} \right)_{total} = \frac{3S}{Y} (1 + 3\sigma)$

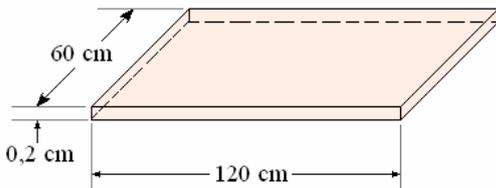
Deformación de b	
Por $3S$ en el eje x	$\frac{\Delta b}{b} = -\sigma \frac{\Delta a}{a} = -\sigma \frac{3S}{Y}$
Por $-6S$ en el eje y	$\frac{\Delta b}{b} = -\frac{6S}{Y}$
Por $-3S$ en el eje y	$\frac{\Delta b}{b} = -\sigma \frac{\Delta c}{c} = \sigma \frac{3S}{Y}$
Deformación total	$\left(\frac{\Delta b}{b}\right)_{total} = -\frac{6S}{Y}$

Deformación de c	
Por $3S$ en el eje x	$\frac{\Delta c}{c} = -\sigma \frac{\Delta a}{a} = -\sigma \frac{3S}{Y}$
Por $-6S$ en el eje y	$\frac{\Delta c}{c} = -\sigma \frac{\Delta b}{b} = \sigma \frac{6S}{Y}$
Por $-3S$ en el eje y	$\frac{\Delta c}{c} = -\frac{3S}{Y}$
Deformación total	$\left(\frac{\Delta c}{c}\right)_{total} = \frac{3S}{Y}(-1 + \sigma)$

$$\frac{\Delta V}{V} = \left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{total} + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)_{total} + \left(\frac{\Delta c}{c}\right)_{total}$$

$$= \frac{3S}{Y}(4\sigma) - \frac{6S}{Y} = \frac{6S}{Y}(2\sigma - 1)$$

Ejemplo 45. Se tiene una lámina de cobre de dimensiones $120 \times 60 \times 0,2$ cm.



- ¿Cuál será su deformación longitudinal cuando se somete a una tracción uniforme de $9,8 \times 10^3$ N en la dirección de la arista mayor?
- ¿Cuál será su deformación del ancho cuando sobre la lámina descansa un peso de 10 toneladas uniformemente distribuido sobre ella?
- En el caso b) dar la variación relativa del volumen.

El módulo de Young para el cobre es 120×10^9 Pa y el módulo de Poisson es 0,352.

Solución.

a) $-4,01 \times 10^{-7}$,



$$\Delta L = \frac{FL}{YA}$$

$$F = 9,8 \times 10^3 \text{ N}$$

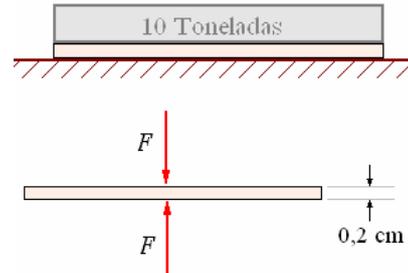
$$A = 0,60 \times 0,002 = 12 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$L = 1,20 \text{ m}$$

$$Y = 120 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$\Delta L = \frac{(9,8 \times 10^3)(1,20)}{(120 \times 10^9)(12 \times 10^{-4})} = 8,17 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Deformación longitudinal $\Delta L = 8,17 \times 10^{-6}$ m.
b)



$$10 \text{ Toneladas} = 10^4 \text{ kg}$$

$$F = 10^4 \times 9,8 \text{ N}$$

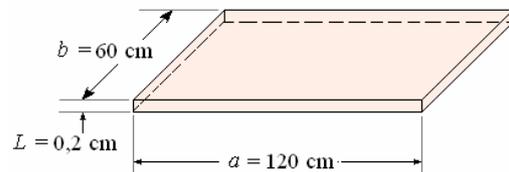
$$A = 1,20 \times 0,60 = 0,72 \text{ m}^2$$

$$L = 0,2 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$Y = 120 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$\Delta L = \frac{(9,8 \times 10^4)(0,2 \times 10^{-2})}{(120 \times 10^9)(0,72)} = -0,02 \times 10^{-7} \text{ m}$$

c)



La variación relativa de volumen es

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

Siendo

$$\frac{\Delta a}{a} = -\sigma \frac{\Delta L}{L} \text{ y } \frac{\Delta b}{b} = -\sigma \frac{\Delta L}{L}$$

Se obtiene

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L}(1 - 2\sigma)$$

Con

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{(9,8 \times 10^4)}{(120 \times 10^9)(0,72)} = 0,11 \times 10^{-5}$$

$$\text{y } \sigma = 0,352$$

Obtenemos

$$\frac{\Delta V}{V} = (-0,11 \times 10^{-5})(1 - 2 \times 0,352)$$

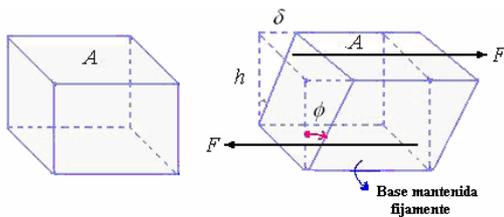
$$= 3,3 \times 10^{-7}$$

DEFORMACIÓN POR CIZALLADURA O CORTE. MÓDULO DE CIZALLADURA O RIGIDEZ.

Deformación por cizalladura

Ya hemos estudiado el módulo de elasticidad Y de un material, es decir, la respuesta del material cuando sobre él actúa una fuerza que cambia su volumen (aumentando su longitud). Ahora, examinaremos la deformación por cizalladura en el que no hay cambio de volumen pero si de forma.

Definimos el esfuerzo como F/A la razón entre la fuerza tangencial al área A de la cara sobre la que se aplica. La deformación por cizalla, se define como la razón $\Delta x/h$, donde Δx es la distancia horizontal que se desplaza la cara sobre la que se aplica la fuerza y h la altura del cuerpo, tal como vemos en la figura.



Cuando la fuerza F que actúa sobre el cuerpo es paralela a una de las caras mientras que la otra cara permanece fija, se presenta otro tipo de deformación denominada de cizalladura en el que no hay cambio de volumen pero si de forma. Si originalmente el cuerpo tiene forma rectangular, bajo un esfuerzo cortante la sección transversal se convierte en un paralelogramo.

El módulo de cizalladura o de rigidez G es una propiedad mecánica de cada material

Siendo pequeños los ángulos de desplazamiento podemos escribir

$$\text{Deformación} = \frac{\delta}{h} = \tan \phi \approx \phi$$

$$G = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}} = \frac{F/A}{\delta/h} = \frac{S_t}{\phi}$$

La ley de Hooke para la deformación por cizalladura se puede escribirla de modo siguiente:

$$S_t = G\phi$$

El módulo de cizalladura G es característico de cada material

Nombre	Módulo de rigidez G 10^{10} N/m^2
--------	--

Aluminio	2,5
Cobre	4,3
Oro	3,5
Hierro, fundido	3,2
Plomo	0,6
Nickel	7,4
Acero	7,5
Latón	1,7

Ejemplo 46. Un cubo de gelatina de 30 cm de arista tiene una cara sujeta mientras que a la cara opuesta se le aplica una fuerza tangencial de 1 N. La superficie a la que se aplica la fuerza se desplaza 1 cm.

- a) ¿Cuál es el esfuerzo de corte?
- b) ¿Cuál es la deformación de corte?
- c) ¿Cuál es el módulo de corte?

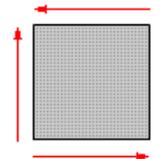
Solución.

$$a) S_t = \frac{F}{A} = \frac{1}{(0,30)^2} = 11,11 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$b) \delta = \frac{\Delta x}{h} = \frac{1}{30} = 0,033$$

$$c) G = \frac{S_t}{\delta} = \frac{11,11}{0,033} = 333,33$$

Ejemplo 47. Un cubo de acero de 5 cm de arista se halla sometido a 4 fuerzas cortantes, de 1200 kg, cada una, aplicadas en sentidos opuestos sobre caras opuestas. Calcule la deformación por cizalladura.



Solución.

$$G_{\text{Acero al carbono}} = 8 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

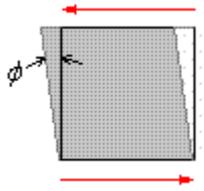
$$G = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}} = \frac{F/A}{\delta/h} = \frac{S_t}{\phi}$$

$$S_t = \frac{F}{A} = \frac{(1200(9,8))}{(0,05)^2} = 4,704 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

Consideremos solamente las fuerzas horizontales, estas producen una deformación ϕ , como se muestra en la figura

$$\phi = \frac{S_t}{G} = \frac{4,704 \times 10^6}{8 \times 10^9} = 0,588 \times 10^{-3}$$

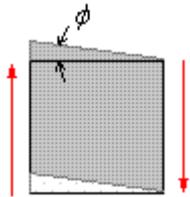
radianes



La cara que se muestra queda como un rombo con ángulos $\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$ y $\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)$

Consideremos ahora solamente las fuerzas verticales, estas producen una deformación también ϕ , como se muestra en la figura

$$\phi = \frac{S_t}{G} = \frac{4,704 \times 10^6}{8 \times 10^9} = 0,588 \times 10^{-3} \text{ radianes}$$



El cubo se deforma en el plano del papel y toma la forma de un rombo con ángulos

$$\left(\frac{\pi}{2} - 2\phi\right) \text{ y } \left(\frac{\pi}{2} + 2\phi\right)$$

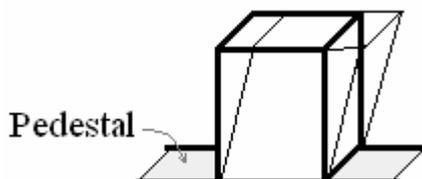
Ejemplo 48. Una estatua se encuentra soldada a un pedestal de latón, que se muestra en la figura. Al producirse un movimiento sísmico se observa un desplazamiento lateral de la cara superior del pedestal de 0,25mm.

Calcular:

- El esfuerzo de corte.
- La magnitud de la fuerza producida por el movimiento sísmico.

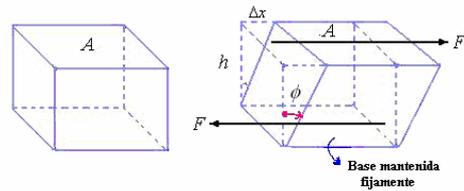
El pedestal de latón tiene una altura de 1m y una sección cuadrada de 0,5m de lado.

El módulo de Young del latón es $3,5 \times 10^{10}$ Pa
Módulo de rigidez G del latón es $1,7 \times 10^{10}$ N/m²



Solución.

Desplazamiento lateral de la cara superior del pedestal de 0,25mm.



a) El esfuerzo de corte.

$$\delta = \frac{\Delta x}{h} = \frac{0,25 \times 10^{-3}}{1,00} = 0,25 \times 10^{-3}$$

$$G = \frac{S_t}{\delta} \Rightarrow$$

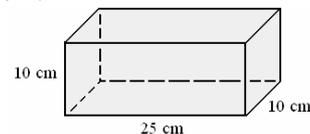
$$S_t = G\delta = (1,7 \times 10^{10})(0,25 \times 10^{-3}) = 0,425 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

b) La magnitud de la fuerza producida por el movimiento sísmico.

$$S_t = \frac{F}{A} \Rightarrow$$

$$F = S_t A = (0,425 \times 10^7)(0,5^2) = 2,65 \times 10^5 \text{ N}$$

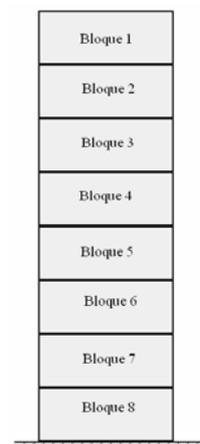
Ejemplo 49. Se tienen 8 bloques iguales de 2 kg cada uno, de dimensiones 10cm x 10 cm x 25 cm cada uno. Se colocan los bloques uno sobre otro, apoyados sobre la base de 10 cm x 25 cm, observándose que el conjunto tiene una altura total de 79 cm.



- Determine el módulo de Young del bloque.
- Calcule el acortamiento del bloque inferior, debido al peso de los 7 bloques que tiene encima.
- A uno de los bloques se lo somete a una fuerza tangencial de 50N, sin que su base inferior se despegue del piso, observándose que su extremo superior se desplaza 8 mm. Determine su módulo de cizalladura.

Solución.

a)



Acortamiento del bloque 2

$$\Delta \ell_2 = \frac{mg\ell}{YA}$$

Acortamiento del bloque 3

$$\Delta \ell_3 = 2 \frac{mg\ell}{YA}$$

.....
.....

Acortamiento del bloque 7

$$\Delta \ell_7 = 6 \frac{mg\ell}{YA}$$

Acortamiento del bloque 8

$$\Delta \ell_8 = 7 \frac{mg\ell}{YA}$$

Acortamiento total de la columna

$$\Delta \ell = \sum_{i=2}^8 \Delta \ell_i = 27 \frac{mg\ell}{YA}$$

Si 27 equivale a $80 - 79 = 1$ cm,

Para el bloque 2, 1 equivaldrá a $\frac{1}{27} = 0,037$ cm.

El módulo de Young del bloque

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L} = \frac{mg}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{2 \times 9,8}{\frac{0,1 \times 0,25}{0,037}} = 21189,19 \frac{N}{m^2}$$

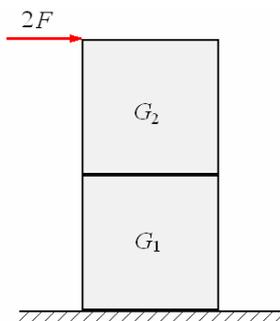
b) Para el bloque 8, 7 equivaldrá a $\frac{7}{27} \times 1 = 0,26$ cm.

El bloque inferior se reduce en 2,6 mm

$$c) G = \frac{F_i/A}{\Delta x/L} = \frac{50/0,1 \times 0,25}{8/100} = 25000 \frac{N}{m^2}$$

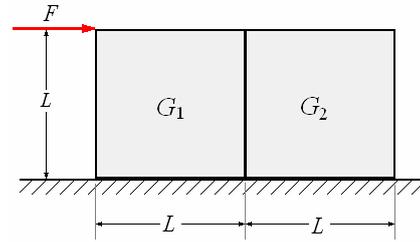
Ejemplo 50. A los bloques cúbicos de lado $L = 25$ cm, se les aplican fuerzas de 80 N tangenciales, sobre cada uno, observándose que el primero presenta un ángulo de corte de 2° mientras que en el segundo hay un desplazamiento lateral de 4 mm en su borde superior.

a)



Para reemplazar los dos bloques por uno solo, ¿cuál debería ser el módulo de cizalladura equivalente del bloque reemplazante?

b)



Si se sueldan uno a continuación de otro, ¿cuál debería ser el módulo de cizalladura equivalente del bloque reemplazante?

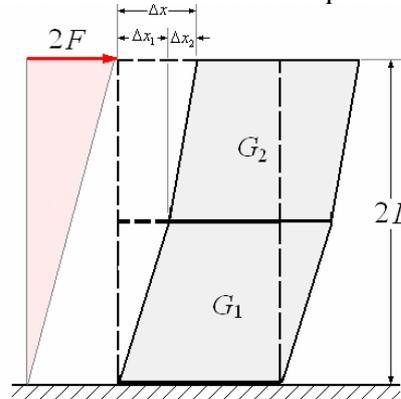
Solución.

a) La deformación de un cubo de arista L y módulo de cizalladura G , debido aun a una fuerza tangencial F sobre la cara superior es:

$$\frac{\Delta x}{L} = \frac{F}{GL^2} \Rightarrow \Delta x = \frac{F}{GL}$$

La fuerza actúa con su valor máximo en la parte superior y va disminuyendo directamente proporcional a la altura hasta ser cero en la base (esto se debe a que el efecto de la fuerza sobre el bloque es el torque que produce).

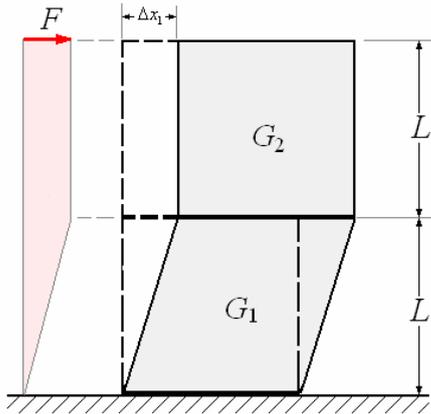
Deformación de los dos bloques unidos.



$$\frac{\Delta x}{2L} = \frac{2F}{GL^2} \Rightarrow \Delta x = \frac{4F}{GL}$$

Deformación del bloque 1.

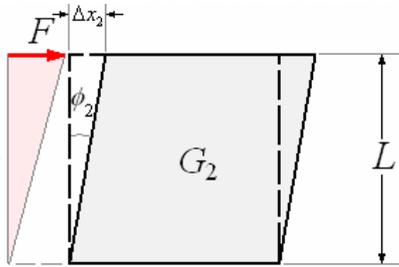
La deformación es equivalente a la que produciría una fuerza F a una altura L .



$$\Delta x_1 = \frac{F}{G_1 L}$$

Deformación del bloque 2.

La deformación es equivalente a la que produciría una fuerza efectiva F a una altura L .



$$\Delta x_2 = \frac{F}{G_2 L}$$

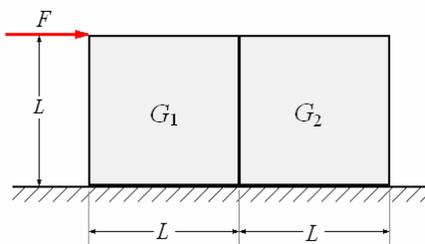
La deformación total es igual a la suma de las deformaciones parciales

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

Luego:

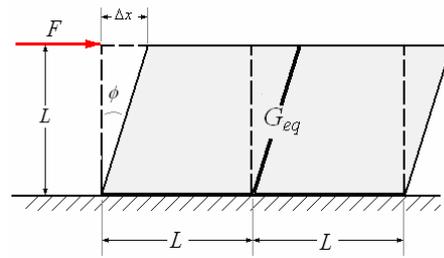
$$\frac{4F}{GL} = \frac{F}{G_1 L} + \frac{F}{G_2 L} \Rightarrow \frac{1}{G} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) \Rightarrow G = 4 \frac{G_1 G_2}{(G_1 + G_2)}$$

b) **En paralelo.** Soldados uno a continuación de otro



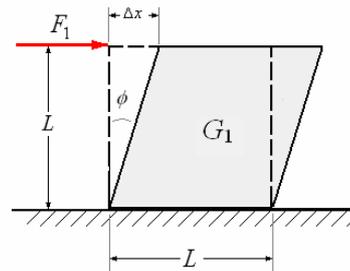
Siendo $G = \frac{S_t}{\phi}$

Para el conjunto:



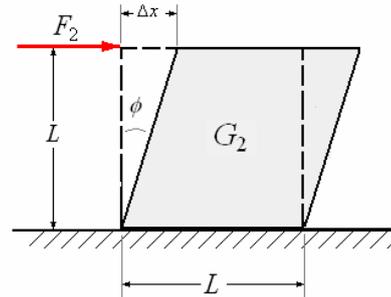
$$G_{eq} = \frac{F}{\phi} = \frac{F}{2\phi L^2} \Rightarrow F = 2\phi G_{eq} L^2 \quad (1)$$

Para el bloque 1:



$$G_1 = \frac{F_1}{\phi} = \frac{F_1}{\phi L^2} \Rightarrow F_1 = \phi G_1 L^2 \quad (2)$$

Para el bloque 2:



$$G_2 = \frac{F_2}{\phi} = \frac{F_2}{\phi L^2} \Rightarrow F_2 = \phi G_2 L^2 \quad (3)$$

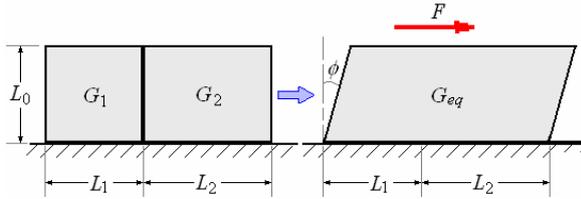
Pero $F = F_1 + F_2 \quad (4)$

Reemplazando (1), (2) y (3) en (4):

$$2\phi G_{eq} L^2 = \phi G_1 L^2 + \phi G_2 L^2$$

$$\Rightarrow G_{eq} = \frac{G_1 + G_2}{2}$$

Ejemplo 51. Dos bloques de bases de lado L_1 y L_2 y de la misma altura L_0 están soldados entre sí y al piso. Una fuerza de corte F actúa sobre la cara superior, desplazando la arista vertical un ángulo ϕ . Los módulos de corte G_1 y G_2 son datos. Determina el módulo de corte equivalente G_{eq} (correspondiente a reemplazar los dos bloques por uno solo).



Solución.

Siendo $G = \frac{S_t}{\phi}$

Para el bloque 1:

$$G_1 = \frac{F_1}{\phi} = \frac{F_1}{\phi L_1^2} \Rightarrow F_1 = \phi G_1 L_1^2 \quad (1)$$

Para el bloque 2:

$$G_2 = \frac{F_2}{\phi} = \frac{F_2}{\phi L_2^2} \Rightarrow F_2 = \phi G_2 L_2^2 \quad (2)$$

Para el conjunto:

$$G_{eq} = \frac{F}{\phi} = \frac{F}{\phi(L_1^2 + L_2^2)} \Rightarrow F = \phi G_{eq} (L_1^2 + L_2^2) \quad (3)$$

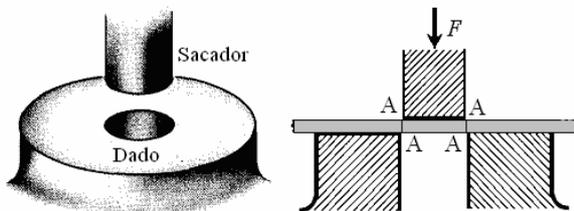
Pero $F = F_1 + F_2 \quad (4)$

Reemplazando (1), (2) y (3) en (4):

$$\phi G_{eq} (L_1^2 + L_2^2) = \phi G_1 L_1^2 + \phi G_2 L_2^2$$

$$\Rightarrow G_{eq} = \frac{G_1 L_1^2 + G_2 L_2^2}{(L_1^2 + L_2^2)}$$

Ejemplo 52. El acero promedio requiere, típicamente, un esfuerzo de $3,45 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ para la ruptura por cizalladura. Determine la fuerza requerida para perforar un agujero del diámetro 2,5 cm en una placa de acero de $\frac{1}{4}$ de pulgada (6,25 mm) de espesor.



Solución.

La circunferencia de un círculo del diámetro $D = 2,5 \text{ cm}$ es $C = \pi D = 7,85 \times 10^{-2} \text{ m}$, El área del borde del disco cortado AAAA es el producto de la circunferencia C por el espesor del material, esto es $(6,25 \times 10^{-3}) (7,85 \times 10^{-2}) = 49,06 \times 10^{-5} \text{ m}^2$.

Una fuerza de la magnitud F se ejerce en el sacador, el esfuerzo de corte (fuerza por unidad de área) a través del borde es $S = \frac{F}{A} \Rightarrow$

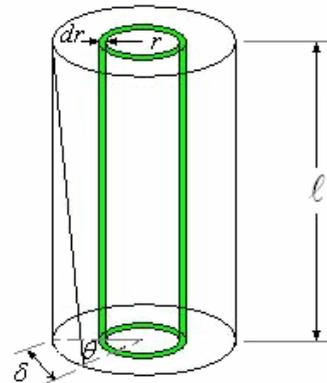
$$F = S.A = (3,45 \times 10^8) (49,06 \times 10^{-5}) = 1,69 \times 10^5 \text{ N}$$

La hoja de acero se corta por cizalladura cuando el esfuerzo llega a ser igual $3,45 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, es decir, cuando $F = 1,69 \times 10^5 \text{ N}$.

Esta es la fuerza de $1,69 \times 10^5 \text{ N}$, equivalente a 17,3 toneladas es requerida para perforar el agujero de 2,5 cm de diámetro. El sacador y los dados son operados por una máquina conocida como prensa; en este caso uno tendría que utilizar una prensa con una capacidad de 20 toneladas o más.

Ejemplo 53. Calcular el módulo de rigidez del material en función a las características geométricas de un alambre (longitud ℓ y radio R) y del torque aplicado.

Manteniendo el extremo superior fijo aplicamos un torque τ que gira al extremo inferior un ángulo θ . Consideremos una capa diferencial cilíndrica de material concéntrica con el eje, de radio interior r y de espesor dr , como se muestra en la figura.



La deformación es

$$\phi = \frac{\delta}{\ell} = \frac{r\theta}{\ell}$$

El esfuerzo cortante es

$$S_t = G\phi = \frac{Gr\theta}{\ell}$$

Como el esfuerzo cortante es la fuerza tangencial por unidad de área, multiplicándolo por el área de la sección transversal de la Capa, $2\pi r dr$, nos dará la fuerza tangencial dF sobre la base de la Capa

$$dF = S_t dA = \left(\frac{Gr\theta}{\ell}\right) (2\pi r dr) = 2\pi G \frac{\theta}{\ell} r^2 dr$$

El torque sobre la base de la Capa cilíndrica es

$$d\tau = r dF = r \left(2\pi G \frac{\theta}{\ell} r^2 dr \right) = 2\pi G \frac{\theta}{\ell} r^3 dr$$

Integrando de 0 a R, el torque total sobre la base del cilindro es

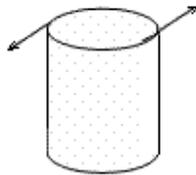
$$\tau = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{\ell} \theta$$

De aquí

$$G = \frac{2\tau\ell}{\pi R^4 \theta}$$

O sea, para determinar G bastará con medir el ángulo θ que se produce al aplicar el torque τ .

Ejemplo 54. Una varilla de cobre de 40 cm de longitud y de 1 cm de diámetro está fija en su base y sometida a un par de 0,049 Nm en torno a su eje longitudinal. ¿Cuántos grados gira la cara superior respecto de la inferior?



Solución.

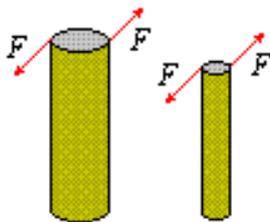
Cobre estirado en frío $G = 48,0 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

$$\tau = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{\ell} \theta \quad \theta = \frac{2\ell\tau}{\pi G R^4}$$

$$\theta = \frac{2(0,4)(0,049)}{\pi(48,0 \times 10^9)(0,5 \times 10^{-2})^4} = 2,08 \times 10^{-4} \text{ radianes}$$

Ejemplo 55. Una varilla que tiene 100 cm de longitud y 1 cm de diámetro está sujeta rígidamente por un extremo y se le somete a torsión por el otro hasta un ángulo de 1°. Si se aplica la misma fuerza a la circunferencia de una varilla del mismo material pero que tiene una longitud de 80 cm y un diámetro de 2 cm, ¿cuál es el ángulo de torsión resultante?

Solución.



$$\tau = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{\ell} \theta \Rightarrow \tau = \frac{\pi}{32} G \frac{D^4}{\ell} \theta,$$

Como $\tau = FD \Rightarrow FD = \frac{\pi}{32} G \frac{D^4}{\ell} \theta$, de aquí

$$\theta = \left(\frac{32F}{\pi G} \right) \left(\frac{\ell}{D^3} \right)$$

Para la varilla de 100 cm y de 80 cm respectivamente son:

$$\theta_1 = \left(\frac{32F}{\pi G} \right) \left(\frac{\ell_1}{D_1^3} \right) \text{ Y } \theta_2 = \left(\frac{32F}{\pi G} \right) \left(\frac{\ell_2}{D_2^3} \right)$$

De estas últimas obtenemos:

$$\theta_2 = \left(\frac{\ell_2}{\ell_1} \right) \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^3 \theta_1 = \left(\frac{80}{100} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^3 1^\circ = 0,1^\circ$$

DEFORMACIÓN VOLUMÉTRICA. MÓDULO DE ELASTICIDAD VOLUMÉTRICO.

Módulo de elasticidad volumétrico.

Consideramos ahora un volumen de material V sujeto a un esfuerzo unitario p_0 (por ejemplo la presión atmosférica) sobre toda la superficie. Cuando el esfuerzo a presión se incrementa a $p = p_0 + \Delta p$ y el volumen sufre una disminución ΔV , la deformación unitaria es $\delta = -\Delta V/V$

El esfuerzo es $\frac{F}{A} = \Delta p$.

La razón del esfuerzo de compresión uniforme a la deformación por compresión uniforme recibe es el módulo de elástico que en este caso se conoce como **módulo de compresibilidad volumétrica o volumétrico (B)**.

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V}$$

Donde la constante de proporcionalidad B, depende solamente del material. El módulo volumétrico tiene las dimensiones de la presión, esto es, fuerza/área y es aplicable tanto para sólidos como líquidos. Pero, los gases tienen un comportamiento diferente que será considerado posteriormente.

Nombre	Módulo volumétrico (B) 10^{10} N/m ²
Aluminio	7,5
Cobre	14
Hierro	16
Plomo	17
Níckel	4,1

Vidrio óptico	5,0
Latón	6,0
Acero	16
Agua	0,21
Mercurio	2,8

Ejemplo 56. ¿Qué incremento de presión se requiere para disminuir el volumen de un metro cúbico de agua en un 0,005 por ciento?

Solución.

Por elasticidad volumétrica tenemos:

$$\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V}$$

El módulo de compresibilidad del agua es $2,1 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

$$\Delta p = -2,1 \times 10^9 \left(\frac{-0,00005V}{V} \right) = 1,05 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

Ejemplo 57. Calcule densidad del agua del océano a una profundidad en que la presión es de 3430 N/cm^2 . La densidad en la superficie es 1024 kg/m^3 .

El módulo de compresibilidad del agua es $2,1 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

Solución.

$$p = 3430 \text{ N/cm}^2 = 3,430 \times 10^7 \text{ N/m}^2, \Delta p = 3,430 \times 10^7 - 1,013 \times 10^5 \approx 3,430 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

$$\text{En la superficie } \rho = \frac{m}{V} = 1024 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Cuando cambia el volumen a $V' = (V + \Delta V)$, tenemos:

$$\rho' = \frac{m}{V'} = \frac{m}{V + \Delta V} = \frac{m}{V \left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right)}$$

$$= \frac{\rho}{\left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right)}$$

$$\text{Como } B = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta p}{B}$$

De aquí:

$$\rho' = \frac{\rho}{\left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right)} = \frac{\rho}{\left(1 - \frac{\Delta p}{B} \right)}$$

$$= \frac{1024}{\left(1 - \frac{3,430 \times 10^7}{2,1 \times 10^9} \right)} = 1041 \text{ kg/m}^3$$

Ejemplo 58. Si con aluminio se fabrica un cubo de 10 cm de lado, se quiere saber las deformaciones que experimentará en una compresión uniforme, perpendicular a cada una de sus caras, de una tonelada, y cuándo esta misma fuerza actúa tangencialmente a la superficie de una de sus caras, estando el cubo sólidamente sujeto por la cara opuesta.

Solución.

La presión que soporta, cada cara, en el primer caso, será:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{(100)(9,8)}{0,1^2} = 9,8 \times 10 \text{ Pa}$$

Como el módulo volumétrico del aluminio es $B = 3,5 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{B} = -\frac{9,8 \times 10^5}{3,5 \times 10^{10}} = -2,8 \times 10^{-5}$$

De donde:

$$\Delta V = -2,8 \times 10^{-5} V = -2,8 \times 10^{-5} \times 10^{-3} = -2,8 \times 10^{-8} \text{ m}^3.$$

En cuanto a la deformación, se obtiene a partir de la expresión de la deformación de cizalla, que es:

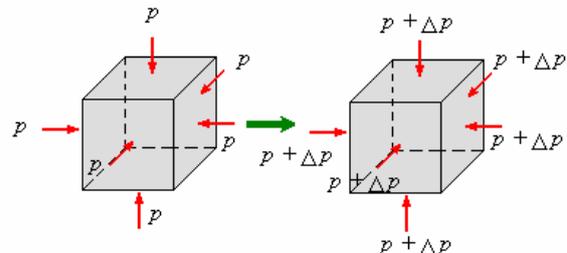
$$\tan \varphi \approx \varphi = \frac{1}{G} \frac{F}{A} = \frac{1}{3 \times 10^{11} \times 10^{-1}} \frac{(10^3)(9,8)}{10^{-2}} = 3,27 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

Ejemplo 59. Un objeto sólido tiene un volumen de 2,5 litros cuando la presión externa es 1 atm. El módulo de compresibilidad del material es $B = 20 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$.

a) ¿Cuál es el cambio en volumen cuando el cuerpo es sometido a una presión de 16 atm?

b) ¿Qué energía adicional se almacenó en el cuerpo?

Solución.



a) El cambio de presión es:

$$\Delta p = 16 - 1 = 15 \text{ atm}$$

El cambio en volumen es:

$$\Delta V = -\frac{\Delta p V_0}{B}$$

$$= - \frac{(15 \times 1,013 \times 10^5)(2,5 \times 10^{-3})}{20 \times 10^{10}}$$

$$= - 1,9 \times 10^{-8} \text{ m}^3$$

El volumen disminuye en $1,9 \times 10^{-5}$ litros

b) El trabajo que se realiza para un cambio de volumen dV es:

$$dW = Fdx = pAdx = pdV$$

Como

$$dV = -\frac{V_0}{B} dp$$

Tenemos:

$$dW = -\frac{V_0}{B} pdp$$

Integrando:

$$W = \int dW = -\frac{V_0}{B} \int_{p_1}^{p_2} pdp$$

$$= -\frac{V_0}{B} \frac{p^2}{2} \Big|_{p_1}^{p_2} = -\frac{V_0}{2B} (p_2^2 - p_1^2)$$

$$= -\frac{2,5 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{10}} \frac{1}{2} (16^2 - 1^2) (1,013 \times 10^5)^2$$

$$= - 16,35 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Energía almacenada por unidad de volumen:

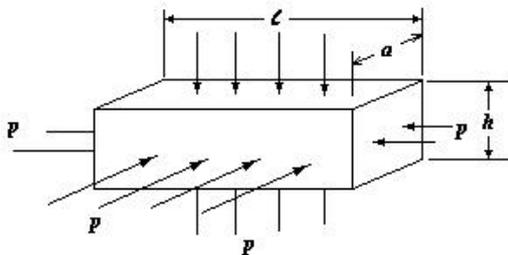
$$\frac{W}{V_0} = \frac{1}{20 \times 10^{10}} \frac{1}{2} (16^2 - 1^2) (1,013 \times 10^5)^2 = - 6,54 \text{ J/m}^3$$

RELACIÓN ENTRE CONSTANTES ELÁSTICAS.

Relación entre B , Y y σ

Muestra sometida a una presión uniforme.

La figura siguiente muestra un bloque bajo presión uniforme en toda su superficie exterior



Como la presión es uniforme, el esfuerzo unitario en cada cara es el mismo.

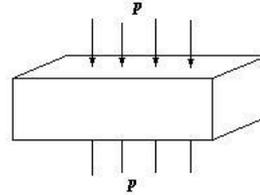
Y las deformaciones de cada una de las dimensiones son:

Dimensión ℓ :



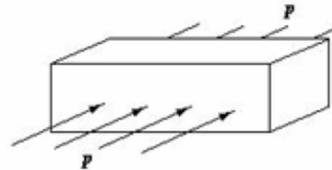
$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = -\frac{p}{Y}$$

Dimensión a :



$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{p}{Y}$$

Dimensión b :



$$\frac{\Delta b}{b} = -\frac{p}{Y}$$

Pero, como la deformación de una dimensión lleva a la deformación de las otras dimensiones, tenemos.

Deformación de ℓ :

- Propia:

$$\frac{\Delta \ell_1}{\ell} = -\frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de a :

$$\frac{\Delta \ell_2}{\ell} = -\sigma \frac{\Delta a}{a} = -\sigma \left(-\frac{p}{Y} \right) = \sigma \frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de b :

$$\frac{\Delta \ell_3}{\ell} = -\sigma \frac{\Delta b}{b} = -\sigma \left(-\frac{p}{Y} \right) = \sigma \frac{p}{Y}$$

Deformación total

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\Delta \ell_1}{\ell} + \frac{\Delta \ell_2}{\ell} + \frac{\Delta \ell_3}{\ell}$$

$$= -\frac{p}{Y} (1 - 2\sigma)$$

Deformación de a :

- Propia:

$$\frac{\Delta a_1}{a} = -\frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de ℓ :

$$\frac{\Delta a_2}{a} = -\sigma \frac{\Delta \ell}{\ell} = -\sigma \left(-\frac{p}{Y} \right) = \sigma \frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de b :

$$\frac{\Delta a_3}{a} = -\sigma \frac{\Delta b}{b} = -\sigma \left(-\frac{p}{Y}\right) = \sigma \frac{p}{Y}$$

Deformación total

$$\begin{aligned} \frac{\Delta a}{a} &= \frac{\Delta a_1}{a} + \frac{\Delta a_2}{a} + \frac{\Delta a_3}{a} \\ &= -\frac{p}{Y}(1-2\sigma) \end{aligned}$$

Deformación de b:

- Propia:

$$\frac{\Delta b_1}{b} = -\frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de a:

$$\frac{\Delta b_2}{b} = -\sigma \frac{\Delta a}{a} = -\sigma \left(-\frac{p}{Y}\right) = \sigma \frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de l:

$$\frac{\Delta b_3}{b} = -\sigma \frac{\Delta l}{l} = -\sigma \left(-\frac{p}{Y}\right) = \sigma \frac{p}{Y}$$

Deformación total

$$\begin{aligned} \frac{\Delta b}{b} &= \frac{\Delta b_1}{b} + \frac{\Delta b_2}{b} + \frac{\Delta b_3}{b} \\ &= -\frac{p}{Y}(1-2\sigma) \end{aligned}$$

El cambio de volumen es:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &= \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \\ &= -\frac{3p}{Y}(1-2\sigma) \end{aligned}$$

Sabemos nosotros que el módulo de compresibilidad es

$$B = -\frac{p}{\Delta V/V}$$

Luego:

$$B = \frac{Y}{3(1-2\sigma)}$$

Expresión que nos relaciona el módulo de Compresibilidad, el módulo de Young y la relación de Poisson

Ejemplo 60. Se somete a una muestra de cobre de forma cúbica con 10 cm de arista a una compresión uniforme, aplicando un esfuerzo de 10^6 N/m^2 perpendicularmente a cada una de sus caras. La variación relativa de volumen que se observa es de $7,25 \times 10^{-6}$.

a) Determinar el módulo de compresibilidad (B) del Cu en el sistema internacional.

b) Determinar el módulo de Poisson sabiendo que el módulo de Young del cobre es $120 \times 10^9 \text{ Pa}$.

Solución.

a) Como:

$$\Delta p = 10^6 \text{ N/m}^2, \quad \frac{\Delta V}{V} = -7,25 \times 10^{-6} \text{ y}$$

$$B = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}} \Rightarrow$$

$$B = -\frac{10^6}{-7,25 \times 10^{-6}} = 137,7 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$\text{b) } B = \frac{Y}{3(1-2\sigma)} \Rightarrow$$

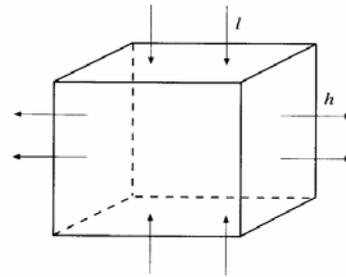
$$(1-2\sigma) = \frac{Y}{3B} \Rightarrow \sigma = \frac{1 - \frac{Y}{3B}}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{1 - \frac{120 \times 10^9}{3(137,7 \times 10^9)}}{2} = 0,35$$

Relación entre G, Y y σ

Muestra sometida a esfuerzo cortante.

Pretendemos analizar la relación entre los esfuerzos cortantes y los esfuerzos de compresión y de tracción. Para ello consideremos primero el caso del bloque de la Figura que está sometido, por una parte, a un esfuerzo de compresión y en la otra dirección a un esfuerzo de tracción. Sea l su longitud en la dirección horizontal y h su altura.



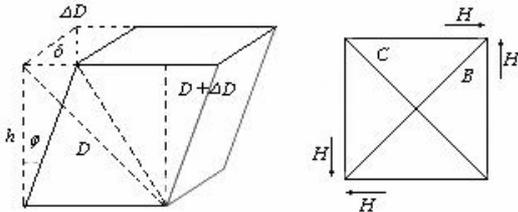
La deformación en la dirección horizontal tiene dos términos: el primero corresponde a la deformación producido por el esfuerzo de tracción, mientras que el segundo corresponde a la dilatación producida por la compresión en la dirección vertical. Por tanto, nos queda,

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{YA} + \sigma \frac{F}{YA} = (1 + \sigma) \frac{F}{YA}$$

Por otra parte, la deformación en la dirección vertical corresponde a las deformaciones causadas por un lado por la fuerza de compresión en la dirección vertical y por otro por la tracción en la dirección horizontal. Por tanto,

$$\frac{\Delta h}{h} = -\frac{F}{YA} - \sigma \frac{F}{YA} = -(1 + \sigma) \frac{F}{YA}$$

Ahora bien, en la Figura abajo representamos la deformación de un bloque sometido a un esfuerzo tangencial detallando lo que le ocurre a las diagonales de sus caras. Si observamos la figura, vemos que los resultados de los esfuerzos tangenciales equivalen a los producidos por las fuerzas H que producen, por una parte, un esfuerzo de tracción sobre el plano C y un esfuerzo de compresión sobre el plano B .



El esfuerzo de compresión sobre el plano B resulta ser

$$S_B = \frac{\sqrt{2}G}{\sqrt{2}A} = \frac{G}{A}$$

A e igualmente el esfuerzo de tracción sobre C

$$S_C = \frac{\sqrt{2}G}{\sqrt{2}A} = \frac{G}{A}$$

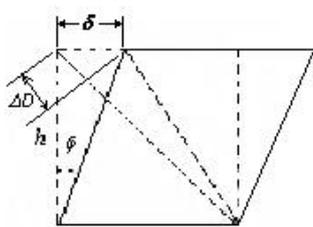
Las deformaciones de las diagonales B y C se escriben entonces

$$\frac{\Delta D_B}{D} = (1 + \sigma) \frac{H}{YA}$$

$$\text{y } \frac{\Delta D_C}{D} = (1 + \sigma) \frac{H}{YA} \quad (1)$$

Si expresamos el esfuerzo tangencial en términos del ángulo ϕ , ya que suponemos que la deformación es pequeña resulta

$$\tan \phi \approx \phi \Rightarrow \phi = \frac{\delta}{h} \approx \frac{\sqrt{2}\Delta D_C}{h} = 2 \frac{\Delta D_C}{D}$$



Donde las dos últimas igualdades surgen a partir de analizar la geometría esbozada en la Figura arriba. En efecto, si el ángulo entre δ y ΔD es de 45 grados se cumple

$$\frac{\delta}{\Delta D_C} = \frac{1}{\text{sen}45^\circ} = \sqrt{2}$$

Y por tanto

$$\phi = \frac{\delta}{h} = \frac{\sqrt{2}\Delta D_C}{D_C \text{sen}45^\circ} = \frac{2\Delta D_C}{D_C}$$

En estas condiciones, si sustituimos en (1) este último resultado nos queda

$$\phi = 2(1 + \sigma) \frac{H}{YA}$$

Esta ecuación, si tenemos en cuenta que ϕ es la deformación tangencial y la comparamos con la ecuación $G = \frac{S}{\phi} = \frac{H/A}{\phi}$, nos permite obtener

$$G = \frac{Y}{2(1 + \sigma)}$$

Expresión que relaciona el módulo de rigidez con el módulo de Young y con el módulo de Poisson

FUERZA ELÁSTICA Y ENERGÍA ELÁSTICA.

Energía de deformación.

La energía necesaria para estirar una cantidad x una muestra de material de constante de rigidez k es

$$\text{Energía} = \int f dx = \int kx dx = \frac{1}{2} kx^2 \text{ o en función de } F$$

$$\text{Energía} = \frac{1}{2} Fx$$

Si la sección transversal de la muestra es A y su longitud ℓ entonces podemos escribir la ecuación como

$$\frac{\text{Energía}}{A\ell} = \frac{1}{2} \frac{Fx}{A\ell} \text{ o } \frac{\text{Energía}}{A\ell} = \frac{1}{2} \left(\frac{F}{A} \right) \left(\frac{x}{\ell} \right)$$

Energía por unidad de volumen

$$= \frac{1}{2} (\text{Esfuerzo})(\text{Deformación unitaria})$$

Esta es la energía necesaria para estirar o comprimir la muestra, teniendo en cuenta el módulo de Young y la energía por unidad de volumen, puede expresarse como

$$\frac{\text{Energía}}{\text{Volumen}} = \frac{1}{2} \frac{(\text{Esfuerzo})^2}{Y}$$

Ejemplo 61. Una carga de 100 kg está colgada de un alambre de acero de 1 m de longitud y 1 mm de radio. ¿A qué es igual el trabajo de tracción del alambre?

Solución.

Por la ley de Hooke

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{F}{YA} \Rightarrow F = \frac{YA}{\ell} \Delta \ell \quad (1)$$

Pero para las fuerzas elásticas $F = k\Delta \ell$ (2)

Comparando (1) y (2) vemos que

$$k = \frac{AY}{\ell} \quad (3)$$

Entonces

$$W = \frac{1}{2} k (\Delta \ell)^2 = \frac{AY(\Delta \ell)^2}{2\ell} \quad (4)$$

Calculando la magnitud $\Delta \ell$ por la fórmula (1) y poniendo todos los datos numéricos en la ecuación (4) obtenemos definitivamente que $W = 0,706 \text{ J}$.

Ejemplo 62. Un alambre de acero de 2m de longitud cuelga de un soporte horizontal rígido.

a) ¿Cuánta energía almacena cuando se suspende en él una carga de 5 kg?

b) ¿Si la carga se aumenta 10 kg, en cuanto aumenta energía almacenada?

$Y = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $A = \text{área de la sección transversal} = 10^{-6} \text{ m}^2$

Solución.

$$\ell = 2 \text{ m}, F_1 = 5 \times 9,8 \text{ N}, F_2 = 10 \times 9,8 \text{ N}$$

$$A = 10^{-6} \text{ m}^2, Y = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$W =$ trabajo realizado por la fuerza $F = kx$ en alargar el alambre una longitud x .

$$W = \frac{1}{2} kx^2, \text{ con } F = kx \Rightarrow x = \frac{F}{k}$$

$$W = \frac{1}{2} k \left(\frac{F}{k} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k}$$

$$\text{Para un alambre } k = \frac{YA}{\ell}$$

Reemplazando:

$$W = \frac{1}{2} \frac{F^2}{YA/\ell}$$

$$= \frac{F^2 \ell}{2AY}$$

$$\text{a) } W_1 = \frac{F_1^2 \ell}{2AY} = \frac{(5 \times 9,8)^2 (2)}{2(10^{-6}) 2 \times 10^{11}} = 0,012 \text{ J}$$

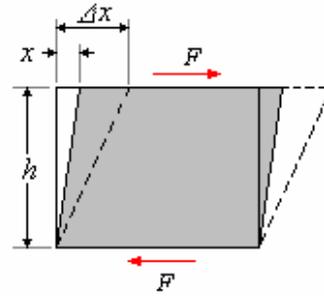
$$\text{b) } W_2 = \frac{F_2^2 \ell}{2AY} = \frac{(10 \times 9,8)^2 (2)}{2(10^{-6}) 2 \times 10^{11}} = 0,048 \text{ J}$$

El incremento en energía almacenada es:

$$\Delta E = W_2 - W_1 = 0,048 - 0,012 = 0,036 \text{ J}.$$

Ejemplo 63. Demostrar que cuando se somete un cuerpo elástico a una tensión de corte pura que no supera el límite elástico de corte para el material, la densidad de energía elástica del cuerpo es igual a la mitad del producto de la tensión de corte por la deformación de corte.

Solución.



La fuerza que deforma por corte o

$$\text{cizalladura es } F = \frac{GA}{h} x$$

El trabajo para deformar un dx es

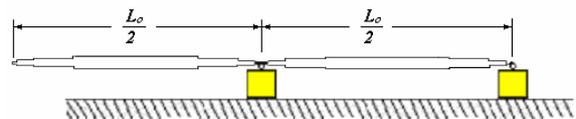
$$W = \int_{x=0}^{x=\Delta x} \frac{GA}{h} x dx$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{GA}{h} (\Delta x)^2 = \frac{1}{2} F \Delta x$$

La densidad de energía es

$$\frac{W}{A} = \frac{1}{2} \left(\frac{F}{A} \right) \Delta x = \frac{1}{2} S_t \Delta x$$

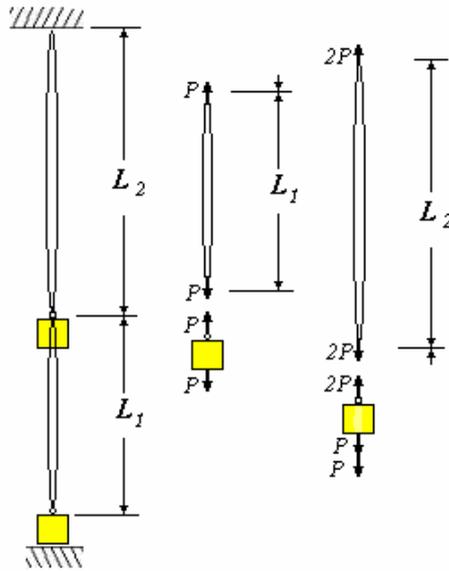
Ejemplo 64. La elasticidad de una banda de goma de longitud L_0 es tal que una fuerza F aplicada a cada extremo produce una deformación longitudinal de una unidad. Se sujetan dos pesos del mismo valor P , uno en un extremo y el otro en la mitad de la banda y a continuación se levanta la banda con los pesos por su extremo libre. ¿Cuál es la mínima cantidad de trabajo que hará elevar ambos pesos del suelo?



Solución.

Como cuando se aplica a cada extremo una fuerza F se produce una deformación longitudinal de una unidad:

$$\Delta L = 1 = \frac{FL_0}{YA}, \text{ luego } YA = FL_0$$



Usando los diagramas del cuerpo libre mostrados en las figuras tenemos:

Para la parte de la liga L_1 : tenemos:

$$\Delta L_1 = \frac{PL_0/2}{YA} = \frac{PL_0/2}{FL_0} = \frac{P}{2F}$$

Para la parte de la liga L_2 , tenemos:

$$\Delta L_2 = \frac{2PL_0/2}{YA} = \frac{2PL_0/2}{FL_0} = \frac{P}{F}$$

La mínima cantidad de trabajo que hará elevar ambos pesos del suelo es:

Trabajo = Energía para estirar ΔL_1 + Energía para estirar ΔL_2 + Energía para elevar un peso P la altura L_1 , el peso inferior no se levanta, solamente se despega del piso.

Energía para estirar una banda elástica es

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

En este caso $k = \frac{YA}{L_0/2} = \frac{FL_0}{L_0/2} = 2F$, y $x = \Delta L_1$,

o ΔL_2 , según corresponda

$$\text{Trabajo} = \frac{1}{2}2F(\Delta L_1)^2 + \frac{1}{2}2F(\Delta L_2)^2 + PL_1$$

Como conocemos ΔL_1 , ΔL_2 y

$$L_1 = \frac{L_0}{2} + \Delta L_1 = \frac{L_0}{2} + \frac{P}{2F}$$

Tenemos

$$\text{Trabajo} = \frac{1}{2}2F\left(\frac{P}{2F}\right)^2 + \frac{1}{2}2F\left(\frac{P}{F}\right)^2 + P\left(\frac{L_0}{2} + \frac{P}{2F}\right)$$

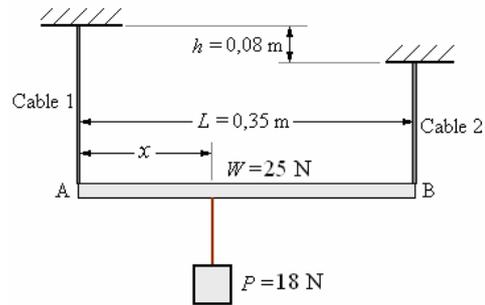
Finalmente

$$\text{Trabajo} = \frac{7}{4}\frac{P^2}{F} + \frac{1}{2}PL_0$$

Ejemplo 65. Una barra rígida uniforme AB de longitud $L = 0,35$ m y peso $W = 25$ N está

soportada por dos cables elásticos de peso despreciable como se muestra en la figura. El cable de la izquierda tiene módulo de Young $Y_1 = 3,0 \times 10^7$ Pa, área transversal $A_1 = 2,5 \text{ mm}^2$ y su longitud natural (sin deformación) es $L_1 = 0,25$ m. Las cantidades correspondientes para el cable de la derecha son $Y_2 = 2,0 \times 10^7$ Pa, $A_2 = 4 \text{ mm}^2$ y $L_2 = 0,2$ m. El cable de la derecha está colgado de un soporte que está a $h = 0,08$ m por debajo del soporte del otro cable.

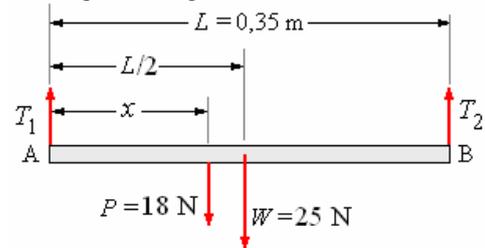
- ¿A qué distancia x del cable de la izquierda se debe colocar un peso $P = 18$ N para que la barra rígida AB quede en posición horizontal?
- ¿Cuál es el esfuerzo en cada cable?
- ¿Cuál es la energía elástica almacenada en cada cable?



Cable	L	Y	A
1	0,25 m.	$3,0 \times 10^7$ Pa	$2,5 \text{ mm}^2$
2	0,2 m.	$2,0 \times 10^7$ Pa,	4 mm^2

Solución.

- ¿A qué distancia x del cable de la izquierda se debe colocar un peso $P = 18$ N para que la barra rígida AB quede en posición horizontal?



Aplicando $\sum F_y = 0 \Rightarrow$

$$T_1 + T_2 - P - W = 0 \Rightarrow$$

$$T_1 + T_2 - 18 - 25 = 0 \Rightarrow$$

$$T_1 + T_2 = 43 \quad (1)$$

Tomando momentos respecto a A

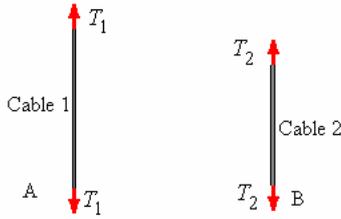
$$\sum \tau_A = 0 \Rightarrow$$

$$-xP - \frac{L}{2}W + LT_2 = 0 \Rightarrow$$

$$-18x - \frac{0,35}{2}(25) + 0,35T_2 = 0 \Rightarrow$$

$$-18x - 4,375 + 0,35T_2 = 0 \quad (2)$$

Caálculo de deformaciones de cada uno de los cables



$$\Delta L_1 = \frac{T_1 L_1}{Y_1 A_1}, \quad \Delta L_2 = \frac{T_2 L_2}{Y_2 A_2}$$

Igualando las longitudes de los cables en la posición mostrada en la figura inicial

$$L_1 + \Delta L_1 = h + L_2 + \Delta L_2$$

Reemplazando las deformaciones

$$L_1 \left(1 + \frac{T_1}{Y_1 A_1} \right) = h + L_2 \left(1 + \frac{T_2}{Y_2 A_2} \right) \Rightarrow$$

$$0,25 \left[1 + \frac{T_1}{(3 \times 10^7)(2,5 \times 10^{-6})} \right]$$

$$= 0,08 + 0,2 \left[1 + \frac{T_2}{(2 \times 10^7)(4 \times 10^{-6})} \right] \Rightarrow$$

$$1,25 \left(1 + \frac{T_1}{75} \right) = 0,4 + \left(1 + \frac{T_2}{80} \right) \quad (3)$$

(1) en (3)

$$1,25 \left(1 + \frac{T_1}{75} \right) = 0,4 + \left(1 + \frac{43 - T_1}{80} \right) \Rightarrow$$

$$1,25 \left(1 + \frac{T_1}{75} \right) = 0,4 + \left(1,54 - \frac{T_1}{80} \right) \Rightarrow$$

$$1,25 + 0,017T_1 = 1,94 - 0,0125T_1 \Rightarrow$$

$$0,0295T_1 = 1,4 + 1,54 - 1,25$$

Obtenemos

$$T_1 = \frac{0,69}{0,0295} = 23,4 \text{ N}$$

Luego

$$T_2 = 43 - 23,4 = 19,6 \text{ N}$$

Cálculo de \$x\$, reemplazando el valor de \$T_2\$ en (2)

$$-18x - \frac{0,35}{2}(25) + 0,35(19,6) = 0 \Rightarrow$$

$$-18x - 4,38 + 6,86 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{2,48}{18} = 0,138 \text{ m}$$

b) Esfuerzo en cada cable

$$S_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{23,4}{2,5 \times 10^{-6}} = 9,36 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$S_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{19,6}{4 \times 10^{-6}} = 4,9 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

c) Energía elástica almacenada en cada cable

En el cable 1

$$U_1 = \frac{1}{2} k_1 (\Delta L_1)^2 = \frac{1}{2} k_1 \left(\frac{F_1}{k_1} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{F_1^2}{k_1}$$

Con

$$k_1 = \frac{Y_1 A_1}{L_1} = \frac{(3 \times 10^7)(2,5 \times 10^{-6})}{0,25} = 300 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Obtenemos

$$U_1 = \frac{1}{2} \frac{23,4^2}{300} = 0,91 \text{ J}$$

En el cable 2

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{F_2^2}{k_2}$$

Con

$$k_2 = \frac{Y_2 A_2}{L_2} = \frac{(2 \times 10^7)(4 \times 10^{-6})}{0,2} = 400 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Obtenemos

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{19,6^2}{400} = 0,48 \text{ J}$$

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. ¿Cuál es el objeto del refuerzo de acero en una viga de concreto?

¿El concreto necesita mayor refuerzo bajo compresión o bajo tensión? ¿Por qué?

2. ¿Cuál es más elástico, caucho o acero? ¿Aire o agua?

3. ¿Qué clase de elasticidad se presenta en un puente colgante? ¿En un eje de dirección

automotriz? ¿En un resorte? ¿En tacos de caucho?

4. Una mujer distribuye su peso de 500 N igualmente sobre los tacones altos de sus zapatos. Cada tacón tiene \$1,25 \text{ cm}^2\$ de área. a) ¿Qué presión ejerce cada tacón sobre el suelo? b) Con la misma presión, ¿cuánto peso podrían soportar 2 sandalias planas cada una con un área de \$200 \text{ cm}^2\$?

5. ¿Cuál debe ser el diámetro mínimo de un cable de acero que se quiere emplear en una grúa diseñada para levantar un peso máximo de 10000 kg. El esfuerzo de ruptura por tracción del acero es de 30×10^7 Pa. Igual pero si se quiere un coeficiente de seguridad de 0,6.

6. Dos alambres del mismo material, y misma longitud ℓ , cuyos diámetros guardan la relación n .

¿Qué diferencia de alargamientos tendrán bajo la misma carga?

7. Un ascensor es suspendido por un cable de acero. Si este cable es reemplazado por dos cables de acero cada uno con la misma longitud que el original pero con la mitad de su diámetro, compare el alargamiento de estos cables con el del cable original.

8. Una cierta fuerza se requiere para romper un alambre. ¿Que fuerza se requiere para romper un alambre del mismo material el cual es

a) del doble de longitud?

b) el doble en diámetro y dé la misma longitud?

9. Un hilo de 80 cm de largo y 0,3 cm de diámetro se estira 0,3 mm mediante una fuerza de 20 N. Si otro hilo del mismo material, temperatura e historia previa tiene una longitud de 180 cm y un diámetro de 0,25 cm. ¿qué fuerza se requerirá para alargarlo hasta una longitud de 180,1 cm?

Respuesta

$$F = 211 \text{ N}$$

10. a) Calcule el cambio de dimensiones de una columna de fundición gris ($Y = 145$ GPa) que tiene dos tramos de 1,5 m cada uno y diámetros de 0,1 m y 0,15 m, al soportar una carga de 500 kN. ¿Está bien dimensionada la columna si el límite elástico de la fundición gris es 260 MPa?

b) Si la columna fuera troncocónica de 3 m de altura, y los diámetros de sus bases variaran entre 0,1 m y 0,15 m.

Respuesta

a) $L_f = 3,001$ m. Sí está bien dimensionada.

b) $L_f = 3,0009$ m

11. Un cable de acero de 2 m de largo tiene una sección transversal de $0,3 \text{ cm}^2$. Se cuelga un torno de 550 kg del cable. Determínese el esfuerzo, la deformación y el alargamiento del cable. Supóngase que el cable se comporta como

una varilla con la misma área transversal. El módulo de Young del acero es 200×10^9 Pa.

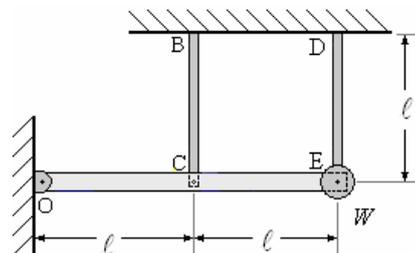
12. Una varilla metálica de 4 m de largo y sección $0,5 \text{ cm}^2$ se estira 0,20 cm al someterse a una tensión de 5000 N. ¿Qué módulo de Young tiene el metal?

13. Una cuerda de Nylon se alarga 1,2 m sometida al peso de 80 kg de un andinista. Si la cuerda tiene 50 m de largo y 7 mm de diámetro, ¿qué módulo de Young tiene el Nylon?

14. Para construir un móvil, un artista cuelga una esfera de aluminio de 5 kg de una alambre vertical de acero de 0,4 m de largo y sección $3 \times 10^{-3} \text{ cm}^2$. En la parte inferior de la esfera sujeta un alambre similar del cual cuelga un cubo de latón de 10 kg. Para cada alambre calcular la deformación por tensión y el alargamiento.

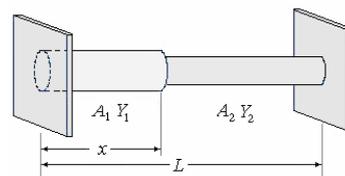
15. En el sistema mostrado en la figura, la barra OE es indeformable y, de peso P ; los tensores AC y DE son de peso despreciable, área A y módulo de elasticidad Y .

Determinar cuánto bajará el peso W respecto a la posición en la cual los tensores no estaban deformados.



16. Dos barras de longitud $(\frac{\ell}{2} + \Delta\ell)$ cada una,

áreas A_1 y A_2 y módulos de elasticidad Y_1 e Y_2 respectivamente, como se muestra en la figura, se comprimen hasta introducir las entre dos paredes rígidas separadas una distancia ℓ . ¿Cuál será la posición x de la unión de ambas barras?



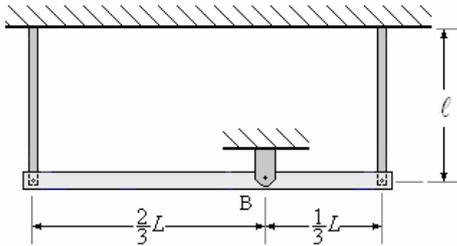
17. Una varilla de 1,05 m de largo y peso despreciable está sostenida en sus extremos por alambres A y B de igual longitud. El área

transversal de A es de 1 mm^2 y la de B 4 mm^2 . El módulo de Young de A es $2,4 \times 10^{11} \text{ Pa}$ y de B $1,2 \times 10^{11}$

Pa. ¿En que punto de la varilla debe colgarse un peso P a fin de producir

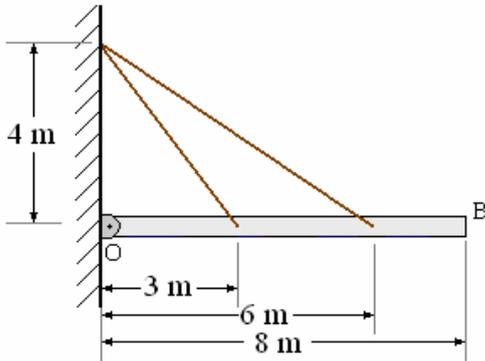
- a) esfuerzos iguales en A y B? y b) ¿deformaciones iguales en A y B?

18. Una barra de longitud L y masa m se encuentra suspendida por un pivote B indeformable y por dos barras en sus extremos como se muestra en la figura estas barras son iguales de área A , longitud ℓ y módulo de elasticidad Y .



19. En el sistema mostrado en la figura, calcular cuánto descende el extremo B de la barra indeformable y de peso despreciable, cuando se le coloca un peso de 10 Ton. en ese extremo.

Los tirantes son de acero y de 2 cm^2 de área cada uno, suponga deformaciones pequeñas de tal manera que se puedan hacer las aproximaciones geométricas apropiadas.



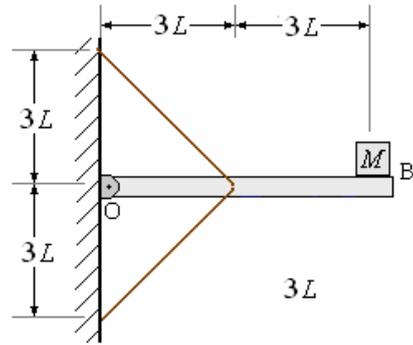
Respuesta

$$\Delta y = 17,1 \times 10^{-3} \text{ m}$$

20. En el sistema mostrado en la figura, calcular cuanto descende el extremo B de la barra horizontal rígida y de peso despreciable, cuando se le coloca una masa M en ese extremo.

Las barras inclinadas son iguales de área A y módulo de elasticidad Y .

Asuma pequeñas deformaciones, o sea, que se pueden hacer las aproximaciones geométricas usuales.



21. Un hilo delgado de longitud ℓ , módulo de Young Y y área de la sección recta A tiene unido a su extremo una masa pesada m . Si la masa está girando en una circunferencia horizontal de radio R con velocidad angular ω , ¿cuál es la deformación del hilo? (Suponer que es despreciable la masa del hilo).

Respuesta

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{m \omega^2 R}{AY}$$

22. Un alambre de cobre de 31 cm de largo y 0,5 mm de diámetro está unido a un alambre de latón estirado de 108 cm de largo y 1 mm de diámetro. Si una determinada fuerza deformadora produce un alargamiento de 0,5 mm al conjunto total y un valor de $Y = 12 \times 10^{10} \text{ Pa}$, ¿cuál es el alargamiento de cada parte?

Respuesta

$$\Delta \ell = 0,27 \text{ mm para el latón.}$$

$$\Delta \ell = 0,23 \text{ mm para el cobre}$$

23. Un alambre de acero dulce de 4 m de largo y 1 mm de diámetro se pasa sobre una polea ligera, uniendo a sus extremos unos pesos de 30 y 40 kg. Los pesos se encuentran sujetos, de modo que el conjunto se encuentra en equilibrio estático. Cuando se dejan en libertad, ¿en cuánto cambiará la longitud del alambre?

Respuesta

$$\Delta \ell = 1,0 \text{ mm}$$

24. Un hilo está formado por un núcleo de acero dulce de 1,3 cm de diámetro, al cual se le ha fusionado una capa exterior de cobre ($Y = 12 \times 10^{10} \text{ Pa}$) de 0,26 cm de gruesa. En cada extremo del hilo compuesto se aplica una fuerza de tracción de 9000 N. Si la deformación resultante es la misma en el acero y en el cobre, ¿cuál es la fuerza que soporta el núcleo de acero?

Respuesta

$$F = 5812 \text{ N}$$

25. Un ascensor cargado con una masa total de 2000 kg está suspendido de un cable de 3,5 cm² de sección. El material del cable tiene un límite elástico de $2,5 \times 10^8$ N/m² y para este material $Y = 2 \times 10^{10}$ N/m². Se especifica que la tensión del cable nunca excederá 0,3 del límite elástico.

- a) Hallar el esfuerzo del cable cuando el ascensor está en reposo.
b) ¿Cuál es la mayor aceleración permisible hacia arriba?

Respuesta

a) $\frac{F}{A} = 5,6 \times 10^7$ N/m², b) $a = 3,33$ m/s²,

26. Volver a resolver el Problema anterior, teniendo en cuenta el peso del cable, cuando tiene su longitud máxima de 150 m. La densidad del material del cable es $7,8 \times 10^3$ kg/m³. Si se supera la carga máxima, ¿por dónde se romperá el cable: cerca de su punto más alto o próximo al ascensor?

Respuesta

a) $\frac{F}{A} = 6,75 \times 10^7$ Pa, b) $a = 1,32$ m/s²,

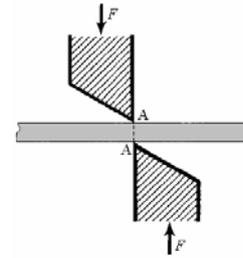
27. Un cable pesado de longitud inicial ℓ_0 y área de sección recta A tiene una densidad uniforme ρ y un módulo de Young Y . El cable cuelga verticalmente y sostiene a una carga F_g en su extremo inferior. La fuerza tensora en un punto cualquiera del cable es evidentemente suma de la carga F_g y del peso de la parte del cable que está debajo de dicho punto. Suponiendo que la fuerza tensora media del cable actúa sobre la longitud total del cable ℓ_0 , hallar el alargamiento resultante.

Respuesta

$$\Delta \ell = \left(\frac{\ell_0}{Y} \right) \left(\frac{F_g}{A} + \frac{1}{2} \rho g \ell_0 \right)$$

28. Demostrar que cuando se somete un cuerpo elástico a una tensión de corte pura que no supera el límite elástico de corte para el material, la densidad de energía elástica del cuerpo es igual a la mitad del producto de la tensión de corte por la deformación de corte.

29. El esfuerzo de la ruptura del cobre rolado para la cizalladura es típicamente $1,5 \times 10^8$. ¿Qué fuerzas F se deben aplicar a las cuchillas de metal mostradas en la figura para cortar una tira de una hoja de cobre de 5 cm de ancho y 1,27 mm de espesor?



Respuesta

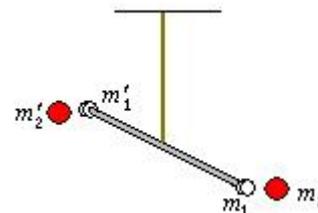
9525 N

30. Una varilla que tiene 100 cm de longitud y 1 cm de diámetro está sujeta rígidamente por un extremo y se le somete a torsión por el otro extremo hasta un ángulo de 1°. Si se aplica la misma fuerza a la circunferencia de una varilla del mismo material pero que tiene una longitud de 80 cm y un diámetro de 2 cm, ¿cuál es el ángulo de torsión resultante?

Respuesta

$\theta = 0,1^\circ$

31. La balanza de torsión de la figura se compone de una barra de 40 cm con bolas de plomo de 2 cm en cada extremo. La barra está colgada por un hilo de plata de 100 cm que tiene un diámetro de 0,5 mm. Cuando se ponen muy de cerca de las bolas de plomo, pero en lados opuestos, dos bolas mayores de plomo de 30 cm de diámetro ($\rho = 11,4$ g/cm³), sus atracciones gravitatorias tienden a hacer girar la barra en el mismo sentido. ¿Cuál será la torsión del hilo de plata?



Respuesta

$\theta = 0,00422^\circ$

32. a) Desarrollar una expresión para la constante de torsión de un cilindro hueco en función de su diámetro interno R_o , su radio externo R_i , su longitud ℓ y su módulo de corte G .

b) ¿Cuál deberá ser el radio de un cilindro macizo de la misma longitud y material y que posee la misma constante de torsión?

c) ¿Cuál deberá ser el ahorro de masa si se utilizase el cilindro hueco en un eje de una máquina en lugar de utilizar el cilindro macizo?

Respuesta

$$a) \tau_0 = \left(\frac{\pi G}{2\ell} \right) (R_1^4 - R_0^4), \quad b) R = (R_1^4 - R_0^4)^{\frac{1}{4}}$$

$$c) \text{Ahorro} = 100 \left[1 - \sqrt{\frac{R_1^2 - R_0^2}{R_1^2 + R_0^2}} \right] \%$$

33. A profundidades oceánicas de unos 10 km la presión se eleva a 1 kilobar, aproximadamente.

a) Si se hunde un trozo de acero dulce hasta esta profundidad, ¿en cuánto variará su densidad?

b) ¿Cuál es la densidad del agua del mar a esta profundidad si la densidad en la superficie vale 1,04 g/cm³?

$$B_{\text{acero}} = 16 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad B_{\text{agua}} = 0,21 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad 1\text{bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

Respuesta

$$a) 0,062 \%, \quad b) \rho = 1,105 \text{ g/cm}^3$$

34. Se somete a una muestra de cobre de forma cúbica con 10 cm de arista a una compresión uniforme, aplicando una tensión equivalente a una tonelada perpendicularmente a cada una de sus caras. La variación relativa de volumen que se observa es de $7,25 \times 10^{-6}$ ($\Delta V/V_0$). Determinar el módulo de compresibilidad del Cu en el sistema internacional, sabiendo que el módulo de Young del cobre es 120×10^9 Pa. Obtener además el módulo de Poisson.

35. Un depósito de acero de 60 litros de capacidad contiene oxígeno a una presión manométrica de 140 Pa. ¿Qué volumen ocupará el oxígeno si se le permite que se expanda a temperatura constante hasta que su presión manométrica es nula? (La presión manométrica es la diferencia entre la presión real en el interior del depósito y la de la atmósfera exterior).

Respuesta

$$V = 889 \text{ litros.}$$

36. En cada extremo de una barra horizontal de 1,5 m de larga, 1,6 cm de ancha y 1 cm de gruesa se aplica una fuerza de tracción de 2 800 N. El módulo de Young y el coeficiente de Poisson del material de la barra son $Y = 2 \times 10^6$ Pa y $\sigma = 0,3$.

a) Hallar la deformación transversal barra.

b) ¿Cuáles son las variaciones relativas de la anchura y altura?

c) ¿Cuál es el aumento de volumen?

d) ¿Cuál es la energía potencial adquirida por la barra?

Respuesta

$$a) \frac{\Delta d}{d_0} = -2,625 \times 10^{-4},$$

$$b) \Delta d = -4,2 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

$$c) \Delta h = -2,625 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

37. a) Demostrar que el coeficiente de Poisson viene dado por

$$\sigma = \frac{3B - 2S}{2(3B + S)}$$

b) Demostrar que a partir de esta ecuación se sigue que el coeficiente de Poisson debe estar

comprendido entre -1 y $\frac{1}{2}$.

c) La experiencia demuestra que las barras sometidas a fuerzas de tracción (valores positivos siempre aumentan de volumen, mientras que si se someten a fuerzas de compresión (valores negativos de F), siempre disminuyen de volumen ¿Apoya esta afirmación el hecho de que no existe

ningún material para el cual $\sigma \geq \frac{1}{2}$?

38. Un manual de materiales relaciona estos

datos para el aluminio en hoja laminada

Módulo de Young, 7×10^{10} Pa

Límite elástico a la tracción, $7,2 \times 10^7$ Pa

Coefficiente de Poisson, 0,33

Tensión de tracción final, 14×10^7 Pa

Tensión de tracción permisible, 0,4 de la tensión de tracción final

La tensión de tracción permisible es la máxima tensión que se considera segura cuando este material se utiliza en estructuras sometidas a de tracción conocidas y constantes. Una tira de este aluminio de 76 cm de larga, 2,5 cm de ancha y 0,8 mm de gruesa se estira gradualmente hasta que la tensión de tracción alcanza su límite permisible. Calcular

a) su variación de longitud,

b) su variación de volumen,

c) el trabajo realizado y

d) la ganancia en la densidad de energía elástica.

Respuesta

$$a) \Delta \ell = 0,688 \text{ mm}, \quad b) \Delta V = 0,0041 \text{ cm}^3,$$

$$c) W = 0,341 \text{ J}, \quad d) \Delta U = 22400 \text{ J/m}^3$$