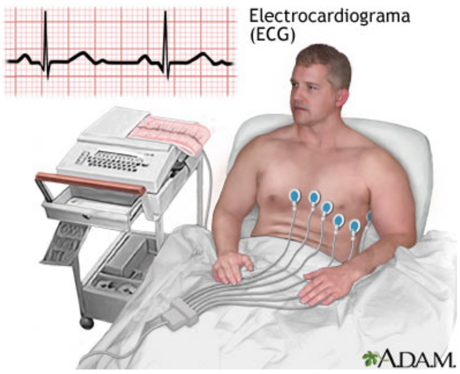
CAPÍTULO 2. MOVIMIENTO OSCILATORIO

INTRODUCCIÓN

Las vibraciones u oscilaciones de los sistemas mecánicos constituyen uno de los campos de estudio más importantes de toda la física. Virtualmente todo sistema posee una capacidad de vibración y la mayoría de los sistemas pueden vibrar libremente de muchas maneras diferentes. En general, las vibraciones naturales predominantes de objetos pequeños suelen ser rápidas, mientras que las de objetos más grandes suelen ser lentas. Las alas de un mosquito, por ejemplo, vibran centenares de veces por segundo y producen una nota audible. La Tierra completa, después de haber sido sacudida por un terremoto, puede continuar vibrando a un ritmo del una oscilación por hora aproximadamente. El mismo cuerpo humano es un fabuloso recipiente de fenómenos vibratorios; nuestros corazones laten, nuestros pulmones oscilan, tiritamos cuando tenemos frío, a veces roncamos, podemos oír y hablar gracias a que vibran nuestros tímpanos y laringes. Las ondas luminosas que nos permiten ver son ocasionadas por vibraciones. Nos movemos porque hacemos oscilar las piernas. Ni siquiera podremos decir correctamente "vibración" sin que oscile la punta de nuestra lengua. Incluso los átomos que componen nuestro cuerpo vibran.

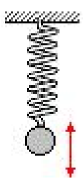
La traza de un electrocardiograma, mostrada en la figura, registra la actividad eléctrica rítmica que acompaña el latido de nuestros corazones.



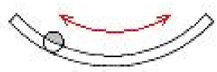
MOVIMIENTO OSCILATORIO

Definición y características

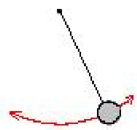
¿Qué es un movimiento oscilatorio? ¡Es un movimiento de vaivén! ¿Podemos hacer una descripción científica? Si estudiamos el movimiento de un número de objetos podemos quizás contestar a la pregunta. Si una masa se suspende a partir de un resorte, se tira hacia abajo y después se suelta, se producen las oscilaciones



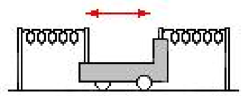
El balanceo de una bolita en una pista curvada, la bolita oscila hacia delante y atrás de su posición de reposo.



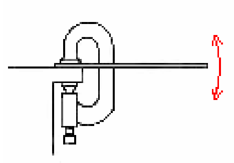
Una masa suspendida del extremo de una cuerda (un péndulo simple), cuando la masa se desplaza de su posición de reposo y se la suelta se producen las oscilaciones.



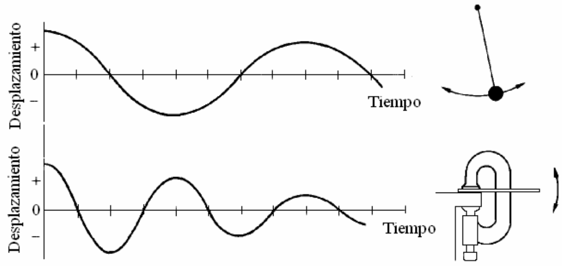
Un carrito atado entre dos soportes en un plano horizontal por medio de resortes oscilará cuando el carrito se desplaza de su posición de reposo y después se suelta.



Una regla afianzada con abrazadera en un extremo a un banco oscilará cuando se presiona y después se suelta el extremo libre.



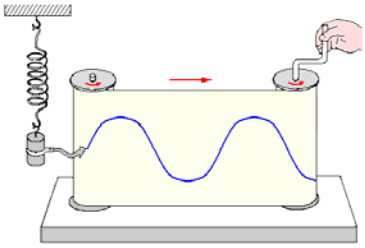
¿Qué hacemos en éstos y otros ejemplos, para conseguir las oscilaciones? Las masas se sacan de su posición de reposo y después se sueltan. Una fuerza restauradora tira de ellas y parecen ir más allá de la posición de reposo. Esta fuerza restauradora debe existir de otra manera ellas no se moverían cuando son soltadas. Porque hay una fuerza entonces debemos tener una aceleración. La fuerza de restauración se dirige siempre hacia la posición de equilibrio central -- la aceleración se dirige así siempre hacia la posición de equilibrio central.



Podemos determinar el gráfico distancia - tiempo para un objeto oscilante tomando una fotografía estroboscópica para un péndulo o usando el Sonic Ranger del laboratorio. Se obtiene su desplazamiento máximo a un lado y otro de la posición de reposo.

La figura arriba muestra los gráficos distancia – tiempo. Algunas oscilaciones parecen tener la misma característica a la tomada al mismo tiempo para cada oscilación completa. Tales osciladores se conocen como isócronas, y mantienen esta característica constante del tiempo sin importar los cambios de la amplitud debido al amortiguamiento**.**

Con un experimento simple como el mostrado en la figura a continuación, también se puede obtener el gráfico desplazamiento - tiempo para el movimiento oscilatorio de un sistema masa resorte, al que se le ha atado un plumón que deja una traza en un rollo de papel que se gira a velocidad constante. Esto produce una "hoja" que muestra que el movimiento de la masa tiene la forma sinusoidal.



Oscilaciones Sinusoidales

Concentraremos preferentemente nuestra atención sobre las oscilaciones sinusoidales. La razón física consiste en que realmente se presentan oscilaciones puramente sinusoidales en una gran variedad de sistemas mecánicos, siendo originadas por fuerzas restauradoras que son proporcionales a los desplazamientos respecto al equilibrio. Este tipo de movimiento es posible casi siempre si el desplazamiento es suficientemente pequeño. Si, por ejemplo, tenemos un cuerpo sujeto a un resorte, la fuerza ejercida sobre el mismo cuando el desplazamiento respecto al equilibrio es x puede describirse en la forma

$F(x) = -\left(k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \ldots\right)$, donde k_1, k_2, k_3, etc., son una serie de constantes, y siempre podremos encontrar un margen de valores de x dentro del cual sea despreciable la suma de términos correspondientes a x^2, x^3, etc., de acuerdo con cierto criterio previo (por ejemplo, hasta 1 en 10^3 o 1 en 10^6) en comparación con el término - $k_1 x$, a no ser que el mismo. k_1 sea nulo. Si el cuerpo tiene masa m y la masa del resorte es despreciable, la ecuación del movimiento del cuerpo se reduce entonces a

$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k_1 x$, o bien $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k_1}{m}x = 0$

Si por definición hacemos $\omega_0^2 = \dfrac{k_1}{m}$, la ecuación anterior se transforma en:

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$, que en notación corta es $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

La solución a dicha ecuación diferencial puede expresarse en cualquiera de las formas:

$x(t) = A\,\text{sen}(\omega_0 t - \varphi)$, $x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi)$,

donde las fases iniciales , φ y ϕ difieren en $\pi/2$. Fácilmente se advierte que A representa el desplazamiento máximo, esto es la amplitud.

Las ecuaciones $x(t) = A\,\text{sen}(\omega_0 t - \varphi)$, $x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi)$, describen el movimiento armónico simple. A es la **amplitud,** ω_0 es la **frecuencia angular**, en radianes por segundo, φ es la **constante de fase**. La cantidad en paréntesis $(\omega t + \varphi)$ es la fase de la oscilación. A y φ se determinan por las condiciones iniciales del problema.

También $\omega_0 = 2\pi f$, f es la **frecuencia** en oscilaciones por segundo. Una oscilación por segundo se llama 1 hertz (Hz).

Todos estos términos son muy importantes

Ejemplo 1. Demostrar que las ecuaciones $x(t) = A\,\text{sen}(\omega_0 t - \varphi)$, $x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi)$ satisfacen la ecuación $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

Solución.

$x = A\,\text{sen}(\omega_0 t - \varphi)$,

$\dfrac{dx}{dt} = \dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t - \varphi)$,

$\dfrac{dx^2}{dt^2} = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \text{sen}(\omega_0 t - \varphi)$

Reemplazando x y $\ddot{x}$ en la ecuación:

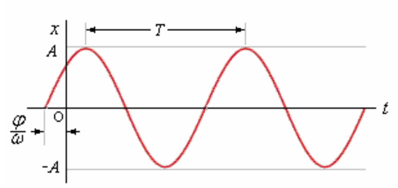
$-A\omega_0^2 \text{sen}(\omega_0 t - \varphi) + \omega_0^2 A\,\text{sen}(\omega_0 t - \varphi) = 0$,

con lo que queda demostrado.

De igual manera sucede con $x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi)$.

DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Un movimiento del tipo descrito en la ecuación $x(t) = A\,\text{sen}(\omega_0 t - \varphi)$, es conocido como movimiento armónico simple (MAS), se representa en un gráfico x - t de la forma indicada en la figura. Destaquemos las características más importantes de esta perturbación sinusoidal:



Movimiento armónico simple de período T y amplitud A.

l. Está confinada dentro de los límites $x = \pm A$. La magnitud positiva A se denomina *amplitud* del movimiento.

2. El movimiento tiene un **período** T igual al tiempo transcurrido entre máximos sucesivos o más generalmente entre dos momentos sucesivos en se repitan tanto el desplazamiento x como la velocidad dx/dt.

T es la inversa de la frecuencia f,

$T = \dfrac{1}{f}$.

Dada la ecuación básica $x = A\text{sen}(\omega t + \varphi_0)$, el período debe corresponder a un aumento de 2π en el argumento de la función sinusoidal. Así pues, se tiene

$\omega(t+T) + \varphi_0 = (\omega t + \varphi_0) + 2\pi$, de aquí se tiene $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ y $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

La situación en $t = 0$ (o en cualquier otro instante señalado) queda completamente especificada si se establecen los valores de x y dx/dt en dicho momento. En el instante particular t = 0, llamaremos a estas magnitudes x_0 y v_0, respectivamente. Entonces se tienen las identidades siguientes:

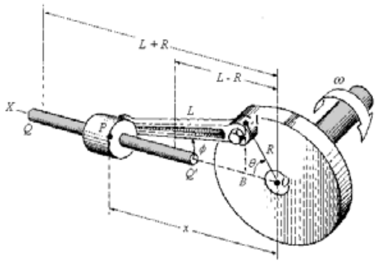
$x_0 = A\text{sen}\varphi_0$

Estas dos relaciones $v_0 = \omega A\cos\varphi_0$ pueden utilizarse para calcular la amplitud A y el ángulo φ_0 (ángulo de fase inicial del movimiento):

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \quad \varphi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right)$$

El valor de la frecuencia angular, ω del movimiento se supone conocido por otros medios.

Ejemplo 2. Determinar si P en el mecanismo ilustrado en la figura se mueve con MAS. En este mecanismo, QQ' es una barra sobre la cual puede deslizarse el cilindro P; está conectada por una varilla L al borde de una rueda de radio R que gira con velocidad angular constante (Este mecanismo, encontrado en muchas máquinas de vapor, transforma el movimiento oscilatorio del pistón en el movimiento rotacional de la rueda).



El movimiento de P *es oscilante pero no armónico simple.*

Solución.

De la figura podemos ver fácilmente que P oscila desde una posición a una distancia (L + R) a partir de O hasta una posición (L – R) a partir de O. Para determinar si el movimiento es armónico simple, debemos encontrar si el desplazamiento de P satisface la ecuación $x = A\text{sen}(\omega t + \varphi)$.

De la geometría de la figura tenemos que $x = R\cos\theta + L\cos\phi$ y $L\text{sen}\phi = R\text{sen}\theta$, de modo que

$$\text{sen}\phi = \left(\frac{R}{L}\right)\text{sen}\theta$$

$$\cos\phi = \left(1 - \text{sen}^2\phi\right)^{1/2} = \frac{1}{L}\left(L^2 - R^2\text{sen}^2\theta\right)^{1/2}.$$

Por consiguiente

$$x = R\cos\theta + \left(L^2 - R^2\text{sen}^2\theta\right)^{1/2},$$

Con $\theta = \omega t$ da

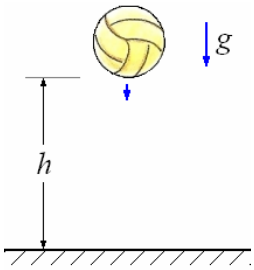
$$x = R\cos\omega t + \left(L^2 - R^2\text{sen}^2\theta\right)^{1/2}$$

Esta expresión da el desplazamiento de P en función del tiempo. Cuando comparamos esta ecuación con la ecuación $x = A\text{sen}(\omega t + \varphi)$, vemos que el primer término, $R\cos\omega t$, corresponde al movimiento armónico simple con $\varphi = \pi/2$, pero el segundo no. Así, aunque el movimiento de P es oscilatorio, no es armónico simple

Un ingeniero mecánico al diseñar un mecanismo como el de la figura tiene que pensar cómo aplicar la fuerza correcta en P de modo que el desplazamiento x esté dado por la ecuación expresada líneas arriba, de modo que la rueda se mueve con movimiento circular uniforme. Cuando P está unido al pistón de una máquina de vapor, esto se lleva a cabo regulando la admisión de vapor.

Ejemplo 3. Una pelota que se ha dejado caer desde una altura h choca con el suelo con una colisión perfectamente elástica. Suponiendo que

no se pierde energía debido a la resistencia del aire.
a) demuestre que el movimiento es periódico.
b) Determine el periodo del movimiento.
c) ¿Es éste un movimiento armónico simple?



Solución.
a) Consideremos el momento inmediatamente posterior a un rebote en el suelo. En ese momento la pelota se encuentra en $y = 0$ y posee una velocidad hacia arriba v_0. La pelota sube y baja por acción de la gravedad y, si no hay rozamiento con el aire, cuando vuelve a tocar el suelo, su velocidad es $-v_0$. Si el rebote es elástico, la velocidad tras el rebote es la misma pero cambiada de signo, esto es, de nuevo $+v_0$. Por tanto, justo después del rebote vuelve a estar en $y = 0$ con velocidad $+v_0$, con lo que el proceso se vuelve a repetir y el movimiento resultante es periódico.
b) El periodo de este movimiento lo da el intervalo entre dos choques sucesivos 8despreciando el tiempo de la colisión).
El movimiento que sigue la partícula es uniformemente acelerado

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

La pelota vuelve a tocar el suelo cuando $y = 0$ de nuevo

$$0 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{2v_0}{g} \end{array}$$

El tiempo de subir y bajar al mismo lugar de inicio es un periodo, luego

$$T = \frac{2v_0}{g}$$

Como por conservación de energía

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$$

Luego

$$T = \frac{2\sqrt{2gh}}{g} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

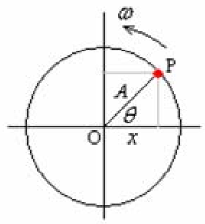
c) Este movimiento no es armónico, porque lo que define al movimiento armónico simple es que la aceleración es proporcional a la elongación, y en este caso es constante en cada periodo

$$a = -g \neq -ky$$

En el cálculo del periodo habría que calcular el tiempo de la colisión, pues una pelota no rebota instantáneamente, sino que requiere un tiempo para comprimirse (durante el cual la energía cinética se almacena como energía potencial elástica) y volverse a dilatar (transformándose la energía de nuevo en cinética, pero ahora con la velocidad opuesta). Suponemos que este tiempo es mucho más pequeño que el que se tarda entre colisiones.

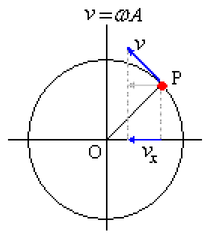
EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE Y EL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME.

La posición.
El movimiento armónico simple (MAS) se puede relacionar con el movimiento circular de la manera siguiente. Imagine una clavija P unida a una rueda orientada con su eje perpendicular al plano de la figura siguiente. La clavija está una distancia A del eje, y la rueda rota con velocidad angular constante ω. Se proyecta la clavija sobre el eje horizontal (el eje de x en la figura).

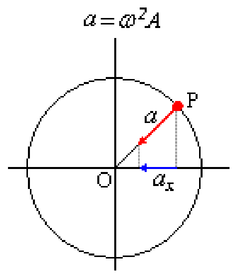


En $t = 0$, la clavija en toda la trayectoria está a la derecha y la proyección está en $x = A$.
La posición de la proyección es
$x = A\cos\theta = A\cos\omega t$.

La velocidad.
La velocidad tangencial de la clavija tiene una magnitud $A\omega$, y su proyección en el eje x es $v = -A\omega \operatorname{sen}\omega t$ como se muestra en la figura siguiente.



La aceleración.
La aceleración de la clavija (centrípeta) es $A\omega^2$ dirigida como se muestra en la figura siguiente.



La proyección de la aceleración en el eje de x es $a=-A\omega^2\cos\omega t$. Así vemos que la posición en el eje x exhibe el movimiento armónico simple desde que las ecuaciones para x, v, y a son iguales a lo obtenido arriba. Si en vez de fijar t = 0 cuando la proyección estaba toda a la derecha, nosotros hubiésemos elegido otro punto de partida con $\omega t=0$, nuestras ecuaciones habrían incluido el ángulo de la fase φ.

De la discusión anterior se puede ver porque se designa con la letra ω a la velocidad angular, así como también a la frecuencia angular.

Ejemplo 4. Un punto material de 2,5 kg experimenta un movimiento armónico simple de 3 Hz de frecuencia. Hallar:

a) Su frecuencia.

b) Su aceleración cuando la elongación es de 5 cm.

c) El valor de la fuerza recuperadora para esa elongación.

Solución.

La pulsación se relaciona con la frecuencia mediante la expresión:

a) $\omega = 2\pi f = 2\pi 3 = 6\pi$ rad.

b) $a = \omega^2 s = (6\pi)^2$ x 0,05 = 17,8 m/s^2.

c) $F = ma$ = 2,5 x17,8 = 44,4 N.

Se prescinde del signo menos (-) en la expresión de la aceleración pues tal signo únicamente indica que el sentido de esta magnitud es contrario al de la elongación.

Ejemplo 5. Una partícula vibra con una velocidad máxima de 40 m/s y una amplitud de 5 cm. Calcula:

a) La frecuencia con que vibra la partícula.

b) La aceleración máxima.

c) La velocidad de la partícula cuando se encuentra a 2 cm de la posición de equilibrio.

Solución

a) La velocidad del movimiento armónico

$$v=\frac{dx}{dt}=A\omega\cos(\omega t+\varphi)$$

La velocidad máxima de una partícula $v_m = A\omega$,

$$\Rightarrow \omega=\frac{v_m}{A}=\frac{40\text{ m/s}}{5\times10^{-2}\text{ m}}=800\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

De $\omega = 2\pi f$ obtenemos el valor de la frecuencia:

$$\Rightarrow f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{800}{2\pi}=127{,}32\text{ Hz}$$

b) La aceleración del movimiento armónico

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-A\omega^2\text{sen}(\omega t+\varphi)$$

La aceleración máxima de una partícula

$$a_m=A\omega^2=\left(5\times10^{-2}\right)(800)^2$$
$$=32000\text{ m/s}^2$$

c) $x = A\text{sen}(\omega t+\varphi)$

Como la partícula comienza en x = 0, φ = 0

$$x=A(\text{sen}\,\omega t+\varphi)$$

$$\Rightarrow \text{sen}(\omega t+\varphi)=\frac{x}{A}$$

$$\Rightarrow \cos(\omega t+\varphi)=\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}$$

Luego

$$v=A\omega\cos(\omega t+\varphi)=A\omega\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}$$
$$=\omega\sqrt{A^2-x^2}=800\sqrt{5^2-2^2}$$
$$=8\sqrt{21}\text{ m/s}$$

Ejemplo 6. La amplitud de un móvil que describe un MAS, viene dada, en función del tiempo, por la expresión: $y=2\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$ (SI). Determinar:

a) Amplitud, frecuencia y periodo del movimiento.

b) Fase del movimiento en t = 2s.

c) Velocidad y aceleración del móvil en función del tiempo.

d) Posición, velocidad y aceleración del móvil en t = 1 s.

e) Velocidad y aceleración máximas del móvil.

f) Desplazamiento experimentado por el móvil entre t = 0 y t = 1 s.

Solución.

a) Por comparación con la ecuación general $y=A\cos(\omega t+\varphi_0)$ se deduce que:

A = 2 m

$\omega = \pi$ y como $\omega = 2\pi f$; $\pi = 2\pi f$; f = 0,5 s^{-1}

$T = 1/f = 1/0{,}5$ = 2s.

b) La fase viene dada, en este caso por
$\phi = \pi t + \pi/4$; $\phi = 2\pi + \pi/4 = 9\pi/4\,\text{rad}$
c) Derivando la ecuación de la elongación respecto a la variable *t* tenemos la ecuación de la velocidad:

$$v = \frac{dy}{dt} = -2\pi \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ (SI)}$$

d) Derivando de nuevo respecto a la variable *t* obtenemos la ecuación de la aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt} = -2\pi^2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ (SI)}$$

Sustituyendo en las ecuaciones correspondientes:
y = -1,4142 m. ; v = 4,44 m/s. ; a = 13,96 m/s^2
e) La velocidad máxima se adquiere cuando el seno del ángulo vale 1;

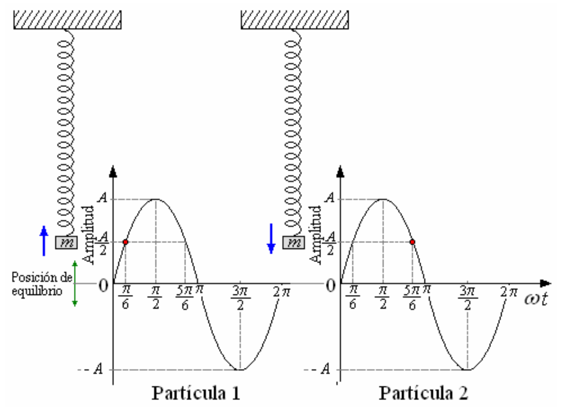
$$v_{máx} = \pm 6{,}29\,\text{m/s}$$

y la aceleración máxima cuando el coseno del ángulo vale 1;

$$a_{máx} = \pm 19{,}72\,\text{m/s}^2$$

f) El desplazamiento Δy viene dado por la diferencia entre y para t = 1 e y para t = 0.
El valor de y para t = 1 es y_1 = - 1,4142 m,
y para t = 0 es y_0 = 2cos π/4 = 1,4142m ;
Δy = -1,4142 -1,4142 = -2,83 m

Ejemplo 7. Dos partículas ejecutan movimientos armónicos simples de la misma amplitud y frecuencia a lo largo de la misma recta y con el mismo origen. Cuando pasan una junto a la otra van en direcciones opuestas y su elongación en ese instante es la mitad de su amplitud. Hallar la diferencia de fase entre ambas.
Solución.



$$x = A(\operatorname{sen}\omega t + \varphi)$$

$$x = \frac{A}{2}$$

Para t = 0, x = 0

Luego $\varphi = 0$ y $x = A\operatorname{sen}\omega t \Rightarrow$

$$\operatorname{sen}\omega t = \frac{x}{A} \quad \operatorname{sen}\omega t = \frac{x}{A}$$

Partícula 1

Posición: $\dfrac{A}{2}$, subiendo

$$\frac{A}{2} = A\operatorname{sen}\omega t_1 \Rightarrow \operatorname{sen}\omega t_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega t_1 = \frac{\pi}{6}$$

Partícula 2

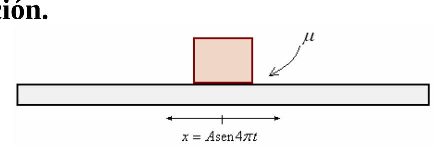
Posición: $\dfrac{A}{2}$, bajando

$$\frac{A}{2} = A\operatorname{sen}\omega t_2 \Rightarrow \operatorname{sen}\omega t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega t_2 = \frac{5\pi}{6}$$

La diferencia de fase entre la partícula 2 y la partícula 1 es

$$\Delta\varphi = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}\,\text{rad}$$

Ejemplo 8. Un bloque descansa sobre una superficie horizontal.
a) Si la superficie se encuentra en movimiento armónico simple en dirección paralela al piso, realizando dos oscilaciones por segundo. El coeficiente estático de rozamiento entre el bloque y la superficie es 0,5. ¿Qué magnitud debe tener la amplitud de cada oscilación para que no haya deslizamiento entre el bloque y la superficie?
b) Si la plataforma horizontal vibra verticalmente con movimiento armónico simple de amplitud 25 mm. ¿Cuál es la frecuencia mínima para que el bloque deje de tener contacto con la plataforma?
Solución.



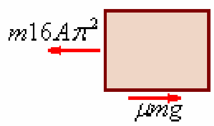
f = 2 c/s $\Rightarrow$ $\omega = 2\pi f = 4\pi$

$x = A\operatorname{sen}\omega t \quad x = A\operatorname{sen}4\pi t$

Su aceleración es:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A16\pi^2 \operatorname{sen}\omega t \Rightarrow a_{máx} = 16A\pi^2$$

El bloque dejará de tener contacto con la superficie cuando la fuerza de fricción que la sostiene fija al piso sea menor que la fuerza de inercia, eso sucede cuando $ma_{máx} = F_f$



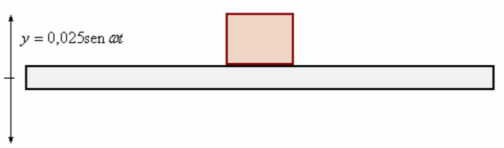
$m16A\pi^2 = \mu mg \Rightarrow A = \dfrac{\mu g}{16\pi^2}$

Reemplazando valores

$A = \dfrac{(0,5)(9,8)}{16\pi^2}$ = 0,031 m

A = 31 mm

b)



$y = 0,025\text{sen}\omega t$

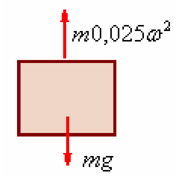
Su aceleración es:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -0,025\omega^2\text{sen}\omega t$$

$\Rightarrow a_{máx} = 0,025\omega^2$

El bloque dejará de tener contacto con la superficie cuando la fuerza de de vibración sea mayor que el peso del objeto, eso sucede cuando

$ma_{máx} = mg$

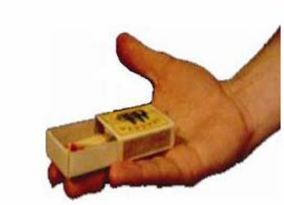


$$m0,025\omega^2 = mg \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{0,025}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{0,025}} = 19,8 \text{ rad/s}$$

$\Rightarrow f$ = 3,15 c/s

Ejemplo 9. Sostengo con la palma de la mano abierta una caja de fósforos. De repente comienzo a mover la mano verticalmente con un movimiento armónico simple de 5 cm amplitud y frecuencia progresivamente creciente. ¿Para qué frecuencia dejará la caja de fósforos de estar en contacto con la mano?



Solución.

Cuando baja la palma de la mano, la caja de fósforos, a partir de la posición de equilibrio, se encuentra sometida a la aceleración de la gravedad, g, constante en todo momento, y dirigida verticalmente hacia abajo, y a la aceleración correspondiente al movimiento armónico simple: $\omega^2 y = 4\pi^2 f^2 y$, dirigida hacia arriba y que alcanza el valor máximo en el extremo de la trayectoria: $a_{máx} = 4\pi^2 f^2 A\ a_{max}$.

Cuando esta última aceleración iguale o supere a la de la gravedad la caja de fósforos dejará de estar en contacto con la mano. Eso sucederá cuando:

$4\pi^2 f^2 A = g \Rightarrow f = 2,23\ \text{s}^{-1}$

Ejemplo 10. Si la Tierra fuese homogénea y se hiciese un conducto recto de polo a polo, al dejar caer por él un cuerpo desde uno de los polos.

a) Demostrar que adquirirla un movimiento armónico simple (MAS).

b) Calcular el período de este movimiento.

Solución.

a) La ley de la gravitación universal nos dice:

$$\vec{F} = -G\frac{M'm}{r^2}\hat{r}$$

En módulo: $F = -G\dfrac{M'm}{x^2}$

El signo menos nos indica que F va dirigida hacia O. En nuestro problema M' la masa encerrada dentro del círculo de puntos de la figura. Si llamamos ρ a la densidad de la Tierra, tendremos:

$$M' = V\rho = \frac{4}{3}\pi x^3\rho$$

Por la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$F = -G\frac{M'm}{x^2} = m\ddot{x}$$

Luego: $F = -\dfrac{4\pi\rho Gm}{3}x = -kx$

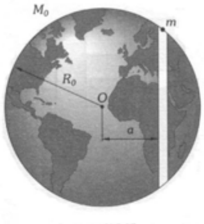
De aquí $k = \dfrac{4\pi\rho Gm}{3}$

El movimiento es, por tanto, vibratorio armónico simple.

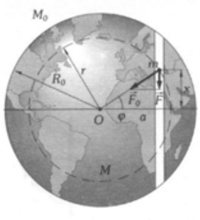
b) de período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi\rho G}}$$

Ejemplo 11. Si la Tierra fuese homogénea y se hiciese en conducto recto como se indica en la figura, al dejar caer por él un cuerpo de masa m
a) demostrar que adquiriría un movimiento oscilatorio armónico simple.
b) Calcular el período de ese movimiento.
Suponer que no existen rozamientos entre el cuerpo y las paredes del conducto.



Solución.
a) Llamando M a la masa de Tierra encerrada en la esfera de radio r, obtenemos para valor del módulo de la fuerza F_0 que representamos en la figura:



$$F_0 = G\frac{Mm}{r^2}$$

Como: $\rho = \dfrac{dm}{dV} = \dfrac{M}{V} = \dfrac{M_0}{V_0}$

$$M = \frac{r^3}{R_0^3}M_0$$

Sustituyendo, teniendo en cuenta que

$$G\frac{M_0 m}{R_0^2} = mg_0 \Rightarrow GM_0 = g_0 R_0^2,$$

Obtenemos: $F_0 = \dfrac{mg_0 r}{R_0}$

La fuerza responsable del movimiento es:

$$F = -\frac{mg_0 r}{R_0}\operatorname{sen}\varphi, \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{x}{r}$$

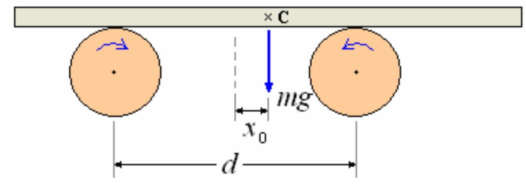
De aquí

$$F = -\frac{mg_0}{R_0}x = -kx$$

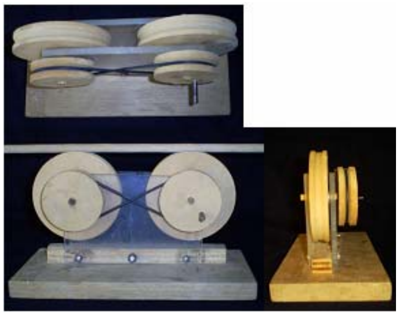
El signo menos nos indica que va dirigida hacia abajo. El movimiento es oscilatorio armónico simple.
b) de período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_0}{g_0}} = 84 \ \text{min}$$

Ejemplo 12. Una barra pesada uniforme de masa *m* reposa sobre dos discos iguales que son girados continuamente en sentidos opuestos, como se muestra. Los centros de los discos esta separados una distancia d. El coeficiente fricción entre las barras y la superficie de los discos es μ, constante independiente de la velocidad relativa de las superficies.
Inicialmente la barra se mantiene en reposo con su centro a una distancia x_0 del punto equidistante de los discos. Al tiempo $t = 0$ se suelta. Encontrar el movimiento subsiguiente de la barra.



Solución.
Aparato



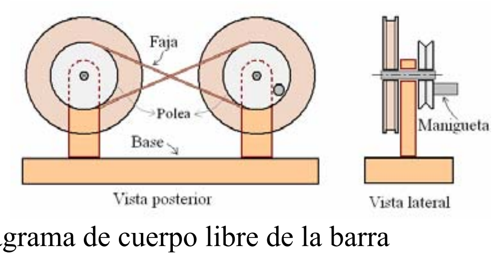
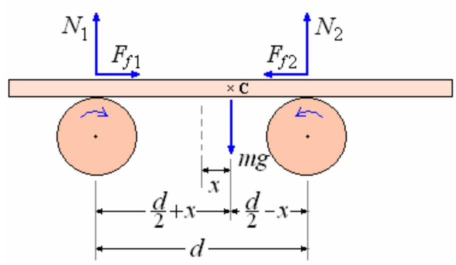


Diagrama de cuerpo libre de la barra
Las fuerzas actuantes sobre la viga se muestran en dibujo siguiente. Los centros de los discos están separados una distancia *d*. Las fuerzas de rozamiento son en sentidos opuestos.



Aplicando la segunda ley de Newton:

$F_y = 0$:

$$N_1 + N_2 - mg = 0 \qquad (1)$$

$\tau_C = 0$:

$$-N_1\left(\frac{d}{2}+x\right)+N_2\left(\frac{d}{2}-x\right)=0 \qquad (2)$$

La ecuación de momentos (2) se escribe con respecto al centro de gravedad C de la barra, Despejando N_1 y N_2 de (1) y (2), obtenemos

$$N_1 = \frac{1}{2}mg\left(\frac{d}{2}-x\right), \quad N_2 = \frac{1}{2}mg\left(\frac{d}{2}+x\right)$$

Como $\sum F = ma$, para la barra, obtenemos:

$$F_{f1} - F_{f2} = m\ddot{x} \Rightarrow \mu N_1 - \mu N_2 = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\mu mg\left[\left(\frac{d}{2}-x\right)-\left(\frac{d}{2}+x\right)\right] = m\ddot{x}$$

Simplificando:

$$\ddot{x}+\left(\frac{2\mu g}{d}\right)x = 0 .$$

Ecuación correspondiente al movimiento armónico simple, cuya frecuencia natural es ω_o es

$$\omega_o = \sqrt{\frac{2\mu g}{d}} \text{ rad/s}$$

La ecuación del movimiento de la barra.

$$x = x_0 \cos\omega_0 t$$

La barra se mantiene un moviendo oscilatorio armónico simple sobre los discos que giran en sentidos opuestos.

ENERGÍA EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Como oscilador armónico simple es un sistema conservativo, la fuerza se puede derivar de la función energía potencial.

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

Como $F = -kx$, tenemos: $\frac{dU}{dx} = kx$

$$U = \int dU = \int kx dx = \frac{1}{2}kx^2$$

La energía potencial del oscilador armónico simple es $U = \frac{1}{2}kx^2$

Como hemos visto es la energía de deformación elástica del resorte.

Como

$x = A\,\text{sen}(\omega t - \varphi)$, y $x_{max} = A$

Se tiene

$$U_{max} = \frac{1}{2}kA^2$$

Por otra parte la energía cinética del oscilador armónico simple es

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2$$

Como

$$\dot{x} = A\cos(\omega t - \varphi),$$

Con

$\dot{x}_{max} = A\omega$, se tiene

$$K_{max} = \frac{1}{2}m\dot{x}_{max}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

La Energía mecánica total es:

$$E = K + U$$

$$= \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos(\omega t - \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\cos(\omega t - \varphi)$$

Como

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t - \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\text{sen}^2(\omega t - \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \text{Constante}$$

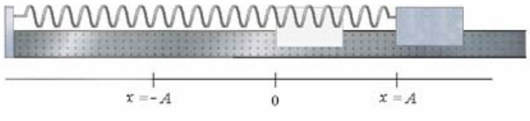
O sea que

$$E = K + U = K_{max} = U_{max}$$

PROBLEMA BÁSICO MASA – RESORTE

Resorte horizontal.

En nuestra primera referencia a este tipo de sistemas, considerábamos que estaba compuesto por un solo objeto de masa *m* sujeto a un resorte de constante *k* y longitud ℓ o a otro dispositivo equivalente, por ejemplo, un alambre delgado, que proporciona una fuerza restauradora igual al producto de cierta constante *k* por el desplazamiento respecto al equilibrio.



Esto sirve para identificar, en función de un sistema de un tipo particular sencillo, las dos características que son esenciales en el establecimiento de movimientos oscilantes:

1. Una componente inercial, capaz de transportar energía cinética.
2. Una componente elástica, capaz de almacenar energía potencial elástica.

Admitiendo que la ley de Hooke es válida, se obtiene una energía potencial proporcional al cuadrado del desplazamiento del cuerpo respecto al equilibrio igual a $\frac{1}{2}kx^2$. Admitiendo que toda la inercia del sistema está localizada en la masa al final del resorte, se obtiene una energía cinética que es precisamente igual $\frac{1}{2}mv^2$, siendo v la velocidad del objeto. Debe señalarse que ambas hipótesis particularizaciones de las condiciones generales 1 y 2 y que habrá muchos sistemas oscilantes en que no se apliquen estas condiciones especiales. Sin embargo, si un sistema puede considerarse compuesto efectivamente por una masa concentrada al final de un resorte lineal ("lineal" se refiere a su propiedad y no a su forma geométrica), entonces podemos escribir su ecuación del movimiento mediante uno de estos dos procedimientos:

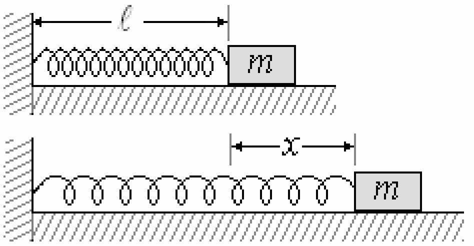
1. Mediante la segunda ley de Newton *(F = ma),*

$$-kx = ma$$

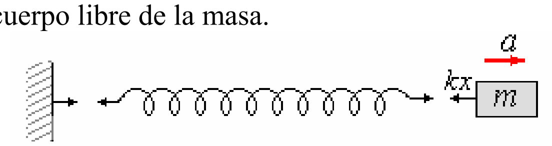
2. Por conservación de la energía mecánica total *(E),*

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

La segunda expresión es, naturalmente, el resultado de integrar la primera respecto al desplazamiento *x,* pero ambas son ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema.
Vamos a aplicar la segunda ley de Newton (*F* = *ma*), en el instante en que el resorte se a estirado una longitud *x*



La figura a continuación muestra el diagrama del cuerpo libre de la masa.



Aplicando la segunda ley de Newton (*F* = *ma*),

$$-kx = ma \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \text{ o } m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

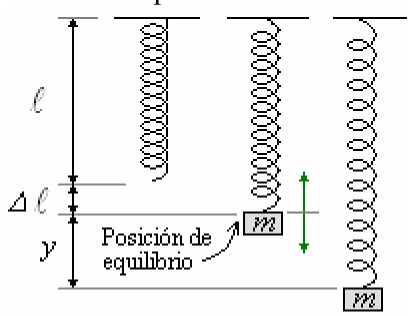
Cuando se vea una ecuación análoga a éstas se puede llegar a la conclusión de que el desplazamiento *x* es una función del tiempo de la forma $x(t) = A\,\text{sen}(\omega t - \varphi)$, en donde

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ siendo k la constante del resorte y m la masa.

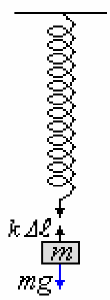
Esta solución seguirá siendo válida, aunque el sistema no sea un objeto aislado sujeto a un resorte carente de masa.
La ecuación contiene otras dos constantes, la amplitud *A* y la fase inicial φ, que proporcionan entre las dos una especificación completa del estado de movimiento del sistema para *t* = 0 (u otro tiempo señalado).

Resorte vertical.

Hasta este punto hemos considerado solamente resortes en posición horizontal, los que se encuentran sin estirar en su posición de equilibrio. En muchos casos, sin embargo, tenemos resortes en posición vertical.

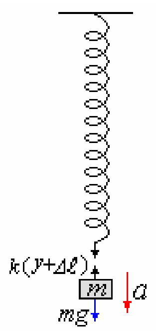


El resorte tiene una longitud original ℓ, cuando se ata una masa *m* a un resorte en posición vertical, el sistema está en equilibrio cuando el resorte ejerce una fuerza hacia arriba igual al peso de la masa. Esto es, el resorte se estira una longitud $\Delta\ell$ dada por



$$k\Delta\ell = mg \quad \Rightarrow \quad \Delta\ell = \frac{mg}{k}$$

Por consiguiente, una masa en un resorte vertical oscila alrededor de la posición de equilibrio.
Aplicando la segunda ley de Newton $(F = ma)$,



$$-k(y + \Delta\ell) + mg = ma$$

$$\Rightarrow -ky - k\Delta\ell + mg = ma$$

Como $k\Delta\ell = mg$:

$$-ky = ma$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0 \text{ o } m\ddot{y} + ky = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0$$

En todos los otros aspectos las oscilaciones son iguales que para el resorte horizontal.

$$y(t) = A\,\text{sen}(\omega t - \varphi)$$

El moviendo es armónico simple y la frecuencia está dada por $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, siendo k la constante del resorte y m la masa.

Ejemplo 13. Para medir la masa de un astronauta en ausencia de gravedad se emplea un aparato medidor de masa corporal. Este aparato consiste, básicamente, en una silla que oscila en contacto con un resorte. El astronauta ha de medir su periodo de oscilación en la silla. En la segunda misión Skylab el resorte empleado tenía una constante $k = 605{,}6$ N/m y el periodo de oscilación de la silla vacía era de 0,90149 s. Calcule la masa de la silla. Con un astronauta en la silla el periodo medido fue 2,08832 s. Calcule la masa del astronauta.

Solución.
El periodo de oscilación de un oscilador armónico es

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

De aquí podemos despejar la masa

$$m = k\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$$

En el primer caso, la masa, que es la de la silla, es igual a

$$m = 605{,}6\left(\frac{0{,}90149}{2\pi}\right)^2 = 12{,}47 \text{ kg}$$

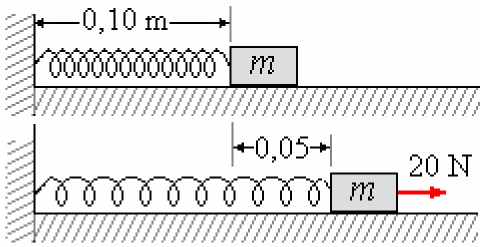
En el segundo caso, la masa total (silla más astronauta) es

$$m + M = 605{,}6\left(\frac{2{,}08832}{2\pi}\right)^2 = 66{,}90 \text{ kg}$$

La masa del astronauta vale
$M = 66{,}90 - 12{,}47 = 54{,}43$ kg

Ejemplo 14. En un sistema masa resorte, el resorte mide 10 cm y descansa en una superficie horizontal sin rozamiento su extremo libre fijo en la pared vertical. Se le aplica una fuerza de 20 N para mantenerlo a una longitud de 15 cm. En esta posición se suelta y oscila libremente con un periodo de 4 s. Calcular:
a) La constante de recuperación del resorte.
b) La ecuación del movimiento vibratorio armónico resultante.
c) Las energías potencial y cinética cuando $x = 2$ cm.
d) Velocidad máxima y aceleración máxima.

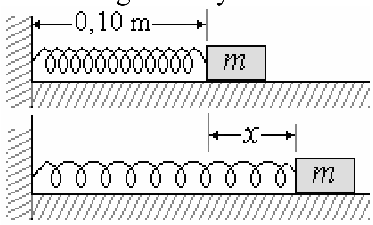
Solución.
a) El resorte con una fuerza de 20 N estira 0,15 – 0,10 = 0,05 m

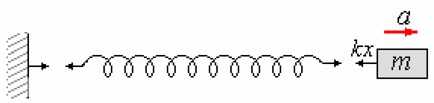


$$F = k\Delta x \Rightarrow$$

$$k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{20}{0{,}05} = 400 \text{ N/m}$$

b) Aplicando la segunda ley de Newton





$$\sum F = ma \Rightarrow -kx = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Cuya solución es:

$$x = A_0 \text{sen}(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v = A_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Para calcular ω_0.
El periodo es $T = 4$s.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$$

Para calcular ω_0 y φ
Las condiciones iniciales son:
Para $t = 0$, $x = 0{,}05$ m, $v = 0$
De la posición

$$0{,}05 = A_0 \text{sen}\varphi \Rightarrow$$

$$A_0 = \frac{0{,}05}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{0{,}05}{\operatorname{sen}\pi/2} = 0{,}05 \text{ m}$$

De la velocidad

$$0 = A_0\omega_0\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{\pi}{2}\ ,$$

Finalmente

$$x = 0{,}05\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}05\cos\frac{\pi}{2}t$$

c) La energía del sistema oscilando es

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(400)\left(0{,}05^2\right) = 0{,}5 \text{ J}$$

En cualquier instante

$$E = K + U$$

Las energías potencial cuando x = 2 cm.

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(400)\left(0{,}02^2\right) = 0{,}08 \text{ J}$$

La energía cinética es

$$K = E - U = 0{,}5 - 0{,}08 = 0{,}042 \text{ J}$$

d) Cálculo de la velocidad máxima y de la aceleración máxima.

$$x = 0{,}05\cos\frac{\pi}{2}t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -0{,}05\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}t = 0{,}078\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}t$$

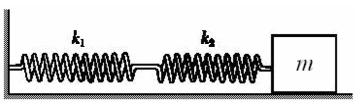
$$v_{máx} = 0{,}078 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{d^2t}{dx^2} = -0{,}05\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos\frac{\pi}{2}t = 0{,}12\cos\frac{\pi}{2}t$$

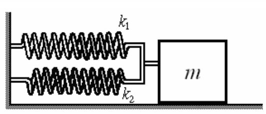
Luego

$$a_{máx} = 0{,}12 \text{ m/s}^2$$

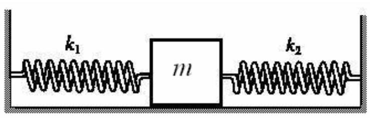
Ejemplo 15. Una masa *m* se conecta a dos resortes de constantes fuerza k_1 y k_2 como en las figuras a , b y c. En cada caso, la masa se mueve sobre una superficie sin fricción al desplazarse del equilibrio y soltarse.
Encuentre el periodo del movimiento en cada caso.



(a)



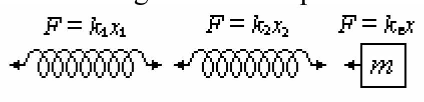
(b)



(c)

Solución.

a) Haciendo el diagrama de cuerpo libre.



Para cada uno de los resortes:

$$\sum F_x = ma_x,\ F = k_1x_1,\ F = k_2x_2$$

Visto en conjunto la masa oscila debido a un resorte equivalente: $F = k_ex$, donde $x = x_1 + x_2$

Luego, podemos escribir.

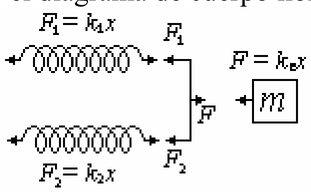
$$\frac{F}{k_e} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2},$$

y $k_e = \dfrac{k_1k_2}{k_1 + k_2}$,

Con esto $\omega = \sqrt{\dfrac{k_1k_2}{m(k_1 + k_2)}}$ y

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1k_2}}$$

b) Haciendo el diagrama de cuerpo libre.



Para cada uno de los resortes:

$$\sum F_x = ma_x,\ F_1 = k_1x,\ F_2 = k_2x$$

Visto en conjunto la masa oscila debido a un resorte equivalente: $F = k_ex$, ahora

$$F = F_1 + F_2$$

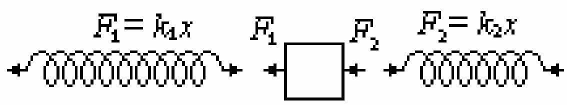
Luego, podemos escribir.

$$k_ex = k_1x + k_2x \;\Rightarrow\; k_e = k_1 + k_2$$

,

Con esto $\omega = \sqrt{\dfrac{(k_1 + k_2)}{m}}$ y $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{(k_1 + k_2)}}$

c) Haciendo el diagrama de cuerpo libre.



Para cada uno de los resortes:

$$\sum F_x = ma_x,\ F_1 = k_1x,\ F_2 = k_2x$$

Visto en conjunto la masa oscila debido a un resorte equivalente: $F = k_ex$, ahora

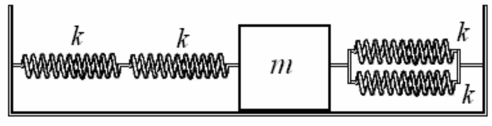
$$F = F_1 + F_2$$

Luego, podemos escribir.

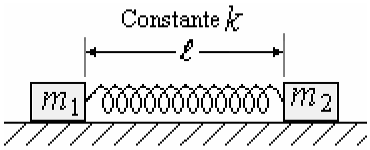
$k_e x = k_1 x + k_2 x \;\Rightarrow\; k_e = k_1 + k_2$,

Con esto $\omega = \sqrt{\dfrac{(k_1 + k_2)}{m}}$ y $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{(k_1 + k_2)}}$

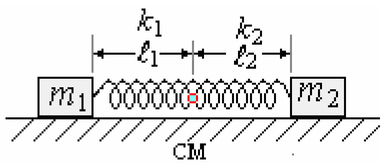
¿Cuál sería el periodo para el caso de la figura siguiente?



Ejemplo 16. Se tienen dos partículas de masas m_1 y m_2 unidas por un resorte de constante k. Inicialmente en reposo, se pone en movimiento lineal a las dos masas, de tal manera que se produce un movimiento oscilatorio.
Encontrar la frecuencia de oscilación del sistema.



Solución.
El sistema oscila alrededor del centro de masa (CM).



Cálculo de las longitudes ℓ_1 y ℓ_2
Como

$$x_{cm} = \frac{m_1\ell_1 + m_2\ell_2}{m_1 + m_2} = 0$$

Tenemos

$$m_1\ell_1 + m_2\ell_2 = 0$$

$$m_1\ell_1 = -m_2\ell_2 \;\Rightarrow\; \ell_2 = -\frac{m_1}{m_2}\ell_1$$

La longitud del resorte es igual a la suma de las longitudes parciales

$$\ell = |\ell_1| + |\ell_2|$$

Reemplazando ℓ_2:

$$\ell_1 + \frac{m_1}{m_2}\ell_1 = \ell$$

$$\ell_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\ell \Rightarrow \frac{\ell}{\ell_1} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_2}$$

Similarmente

$$\ell_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\ell \Rightarrow \frac{\ell}{\ell_2} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1}$$

Cálculo de k_1 y k_2

$$k = \frac{YA}{\ell},\; k_1 = \frac{YA}{\ell_1},\; k_2 = \frac{YA}{\ell_2},$$

$$\frac{k_1}{k} = \frac{\dfrac{YA}{\ell_1}}{\dfrac{YA}{\ell}} = \frac{\ell}{\ell_1} \Rightarrow k_1 = \frac{\ell}{\ell_1}k = \frac{(m_1 + m_2)}{m_2}k$$

$$\frac{k_2}{k} = \frac{\dfrac{YA}{\ell_2}}{\dfrac{YA}{\ell}} = \frac{\ell}{\ell_2} \Rightarrow k_2 = \frac{\ell}{\ell_2}k = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1}k$$

Como los estiramientos son proporcionales a las longitudes, obtenemos:

$$x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}x,\; \dot{x}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{x} \text{ y}$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\ddot{x}$$

$$x_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}x,\; \dot{x}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{x} \text{ y}$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\ddot{x}$$

Resolución aplicando la segunda ley de Newton

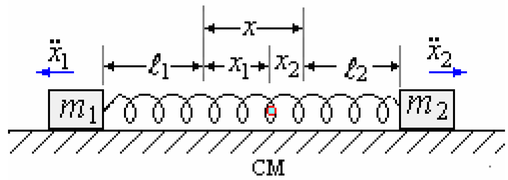
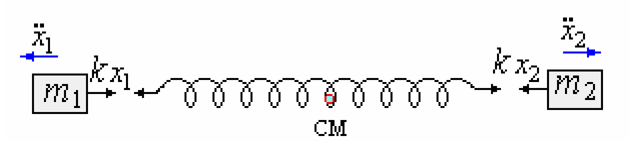


Diagrama del cuerpo libre de los elementos del sistema



Trabajando con la masa m_1

$$-k_1 x_1 = m_1\ddot{x}_1$$

Poniendo en función de x y k:

$$-\frac{(m_1 + m_2)}{m_2}k\frac{m_2}{(m_1 + m_2)}x = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}\ddot{x}$$

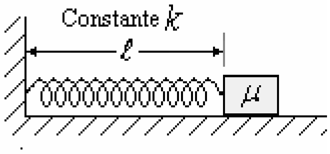
$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}kx = 0$$

Ecuación correspondiente a un movimiento oscilatorio armónico
$x = A\text{sen}(\omega t + \varphi)$, con frecuencia angular

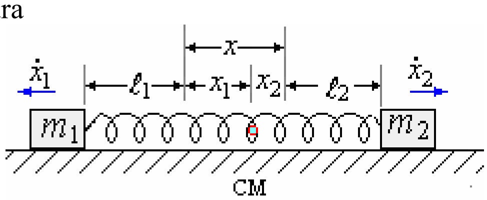
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\dfrac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}}}$$

A un resultado igual se llega trabajando con la masa m_2.

El sistema es equivalente al de una masa $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$, unida a un resorte de constante k.



Resolución aplicando la conservación de la energía.
Sea el sistema en la situación mostrada en la figura



La masa m_1 con velocidad $v_1 = \dot{x}_1$

La masa m_2 con velocidad $v_2 = \dot{x}_2$

El resorte estirado $x = x_1 + x_2$

La energía total es igual a la suma de las energías cinéticas de las masas m_1 y m_2 más la energía potencial elástica del resorte.

$$E = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{x} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{x} \right)^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$= \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$= \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

Siendo un sistema conservativo la energía es constante.
La derivada de una constante es igual a cero.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} 2 \dot{x} \ddot{x} + \frac{1}{2} k 2 x \dot{x}$$

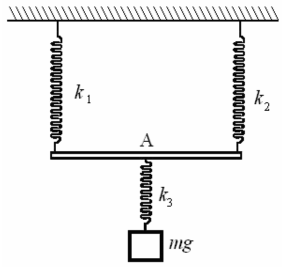
$$= \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \ddot{x} + kx = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} kx = 0$$

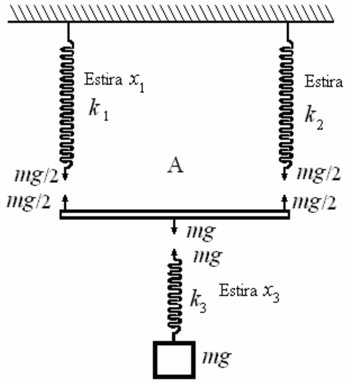
Ecuación correspondiente a un movimiento oscilatorio armónico
$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$, con frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\dfrac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}}}$$

Ejemplo 17. Al suspender un cuerpo de masa m de un resorte de constante k_1, y separarlo ligeramente de su posición de equilibrio, el sistema oscila con una frecuencia f_1. Si ahora este resorte se monta como indica la figura, junto con otros dos, de constantes $k_2 = 2k_1$ y $k_3 = 4k_1$, utilizando una barra de peso despreciable, ¿cuál será la nueva frecuencia propia del sistema con relación a la anterior? A es el punto medio de la barra.



Solución.
Como k_1 es diferente k_2 , los estiramientos de los resortes no son iguales, por lo tanto no podemos considerar la suma de las constantes como la constante equivalente de la parte en paralelo.
En este caso vamos hallar directamente la constante equivalente del conjunto.



El estiramiento del resorte 1 es:

$$x_1 = \frac{mg/2}{k_1} = \frac{mg}{2k_1}$$

El estiramiento del resorte 2 es:

$$x_2 = \frac{mg/2}{k_2} = \frac{mg}{4k_1}$$

El estiramiento del resorte 3 es:

$$x_3 = \frac{mg}{k_3} = \frac{mg}{4k_1}$$

Con el peso *mg* el resorte se estira

$$x = \frac{x_2 + x_2}{2} + x_3$$

Siendo $x = \frac{mg}{k_{eq}}$

Reemplazando x, x_1, x_2 y x_3:

$$\frac{mg}{k_{eq}} = \frac{\frac{mg}{2k_1} + \frac{mg}{4k_1}}{2} + \frac{mg}{4k_1} = \frac{5mg}{8k_1}$$

$$\Rightarrow k_{eq} = \frac{8}{5}k_1$$

La frecuencia del conjunto es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{8k_1}{5m}} = 2\pi f$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8k_1}{5m}}$$

Como la frecuencia del resorte 1 es

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}}$$

Obtenemos:

$$\frac{f}{f_1} = \sqrt{\frac{8}{5}} = 1,26 .$$

Ejemplo 18. Un resorte de 10 cm tiene uno de sus extremos fijo en la pared vertical y descansa en una superficie horizontal sin rozamiento. Se le aplica una fuerza de 20 N para mantenerlo estirado una longitud de 15 cm. En esta posición se suelta y oscila libremente con un periodo de 4 s. Calcular:

a) La constante de recuperación del resorte.

b) La ecuación del movimiento vibratorio armónico resultante.

c) Las energías potencial y cinética cuando x = 2 cm.

d) Velocidad máxima y aceleración máxima.

Solución.

a) El resorte con una fuerza de 20 N estira 0,15 – 0,10 = 0,05 m

$$F = k\Delta x \Rightarrow$$

$$k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{20}{0,05} = 400 \text{ N/m}$$

b) Aplicando la segunda ley de Newton

$$\sum F = ma \Rightarrow -kx = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Cuya solución es:

$$x = A_0 \text{sen}(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v = A_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Para calcular ω_0.

El periodo es T = 4s.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$$

Para calcular ω_0 y φ

Las condiciones iniciales son:

Para t = 0, x = 0,05 m, v = 0

De la posición

$$0,05 = A_0 \text{sen}\varphi \Rightarrow$$

$$A_0 = \frac{0,05}{\text{sen}\varphi} = \frac{0,05}{\text{sen}\,\pi/2} = 0,05 \text{ m}$$

De la velocidad

$$0 = A_0\omega_0\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} ,$$

Finalmente

$$x = 0,05\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) = 0,05\cos\frac{\pi}{2}t$$

c) Las energías potencial y cinética para x = 2 cm.

La energía potencial del oscilador armónico simple es $U = \frac{1}{2}kx^2$

Para $x = 0,05\cos\frac{\pi}{2}t = 0,02$ m

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}(400)(0,02)^2 = 0,08 \text{ J}$$

Por otra parte la energía cinética del oscilador armónico simple es

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2$$

Cálculo de v

$$v = -0,05\frac{\pi}{2}\text{sen}\frac{\pi}{2}t$$

Cálculo del valor de $\text{sen}\frac{\pi}{2}t$

$$0{,}02 = 0{,}05\cos\frac{\pi}{2}t \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2}t = \frac{0{,}02}{0{,}05} = 0{,}4$$

$$\text{sen}\frac{\pi}{2}t = \sqrt{1-0{,}4^2} = 0{,}92$$

$$v = -0{,}05\frac{\pi}{2}\text{sen}\frac{\pi}{2}t = -0{,}05\frac{\pi}{2}(0{,}92)$$

$= -\,0{,}072$ m/s

Reemplazando valores

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2$$

$$K = \frac{1}{2}(254{,}65)(-0{,}072)^2 = 0{,}66 \text{ J}$$

d) Cálculo de la velocidad máxima y de la aceleración máxima.

$$x = 0{,}05\cos\frac{\pi}{2}t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -0{,}05\frac{\pi}{2}\text{sen}\frac{\pi}{2}t = 0{,}078\text{sen}\frac{\pi}{2}t$$

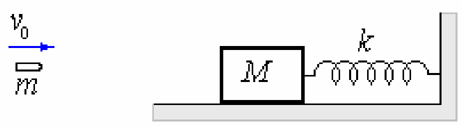
$$v_{máx} = 0{,}078 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{d^2t}{dx^2} = -0{,}05\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos\frac{\pi}{2}t = 0{,}12\cos\frac{\pi}{2}t$$

$$a_{máx} = 0{,}12 \text{ m/s}^2$$

Ejemplo 19. Un pequeño proyectil de masa 10 g que vuela horizontalmente a velocidad 20 m/s impacta plásticamente contra un bloque de madera de masa 190 g unido a un resorte ideal de constante 500 N/m que se halla en posición horizontal. Determine la amplitud y frecuencia de las oscilaciones producidas.

Solución.



Por conservación de cantidad de movimiento:

$$mv_0 = (m+M)v_1$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{m}{(m+M)}v_0$$

$$= \frac{10}{(10+190)}20 = 1\frac{m}{s}$$

Por conservación de energía:

$$\frac{1}{2}(m+M)v_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(0{,}2kg)\left(1\frac{m}{s}\right) = \frac{1}{2}\left(500\frac{N}{m}\right)A^2$$

De aquí: $A = 0{,}02m = 2cm$

La frecuencia se obtiene de

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{(m+M)}} \Rightarrow$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{(m+M)}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{500}{0{,}2}} = \frac{25}{\pi} = 7{,}96Hz$$

Ejemplo 20. Un bloque de masa *M* conectado a un resorte horizontal de constante elástica *k* se encuentra en movimiento armónico en un piso liso con una amplitud máxima de 10 cm en el momento en que la masa pasa por su punto de equilibrio se incrusta en ella una bala de masa *M*/10 que trae una velocidad opuesta a la masa y de magnitud el doble de la que tiene la masa *M*.

a) Hallar la nueva amplitud que tendrá la oscilación.

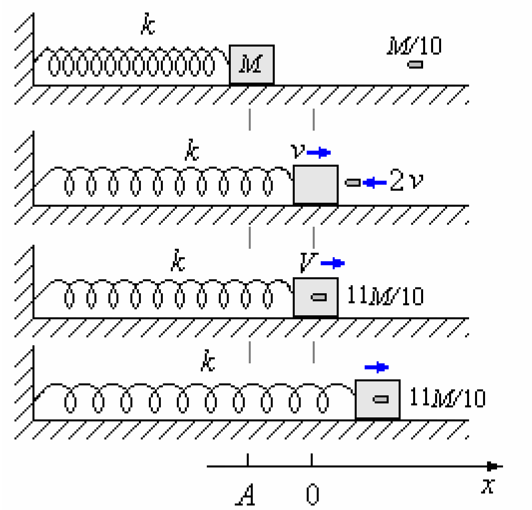
(Sugerencia: en el armónico la suma de energías es una constante)

b) A partir del instante del choque de la bala cuanto tiempo demora en llegar a su máxima amplitud.

Datos: $k = 3200$ N/m, $M = 0{,}2$ kg

Solución.

a)



Ecuación del movimiento inicial de la masa *M*.

$$x = 10\text{sen}\,\omega t$$

Donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$, k la constante del resorte

En el momento del impacto el bloque de masa tiene velocidad *v* y la bala velocidad 2*v*.

Por conservación de la cantidad de movimiento lineal

$$M(v)+\frac{M}{10}(-2v)=\left(M+\frac{M}{10}\right)V$$

$$\frac{8M}{10}v=\frac{11M}{10}V$$

$$V=\frac{8}{11}v=\frac{8}{11}A\sqrt{\frac{k}{M}}$$

Por conservación de energía

$$\frac{1}{2}\frac{11M}{10}\left(\frac{8}{11}A\sqrt{\frac{k}{M}}\right)^2=\frac{1}{2}kA'^2$$

$$A'=\frac{8}{\sqrt{110}}A=0{,}76A$$

$$=0{,}76(10)=7{,}6\text{ cm}$$

b)

$$x'=A'\operatorname{sen}(\omega't-\varphi),\ \omega'=\sqrt{\frac{k}{11M/10}}=\sqrt{\frac{10k}{11M}}$$

$$v'=A'\omega'\cos(\omega't-\varphi)$$

Para $t=0$, $x'=0$ y $v'=-\frac{12}{11}A\sqrt{\frac{k}{M}}$

De la primera condición

$\varphi=0$

$x'=7{,}6\operatorname{sen}\omega't$

El tiempo que demora en llegar a su máxima amplitud es $T'/4$

$$T'=\frac{2\pi}{\omega'}=\frac{2\pi}{\sqrt{10k/11M}}=2\pi\sqrt{\frac{11M}{10k}}$$

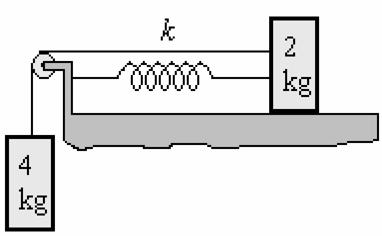
$$t=\frac{T'}{4}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{11M}{10k}}=1{,}65\sqrt{\frac{M}{k}}$$

Con los datos

$$t=1{,}65\sqrt{\frac{0{,}2}{3200}}=0{,}013\text{ s}$$

La oscilación llega a su máxima amplitud a los 13 milisegundos

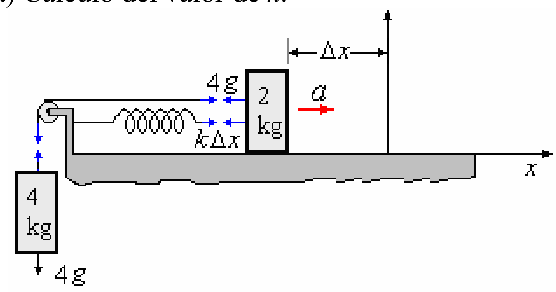
Ejemplo 21. En el diagrama de la figura el resorte tiene masa despreciable y una longitud de 20cm cuando está sin deformar. Un cuerpo de 2kg. Unido al resorte puede moverse sobre una superficie plana horizontal lisa. A dicho cuerpo se le ata un hilo que pasa por una polea sin rozamiento y del cual pende un cuerpo de 4kg. El sistema se halla inicialmente en reposo en la posición representada y la longitud del resorte comprimido es de 15cm. Se corta entonces el hilo y el cuerpo de 2 kg empieza a oscilar con movimiento armónico simple.



a) Hallar el valor de k.
b) Hallar la ecuación diferencial
c) Hallar la amplitud de oscilación y la frecuencia natural del MAS.
d) Hallar la energía mecánica del sistema.

Solución.

a) Cálculo del valor de k.



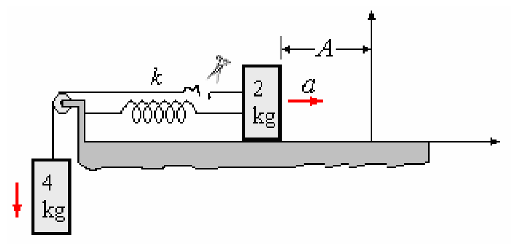
$$\Delta x=0{,}2-0{,}15=0{,}05\text{ m}$$

$$F=k\Delta x$$

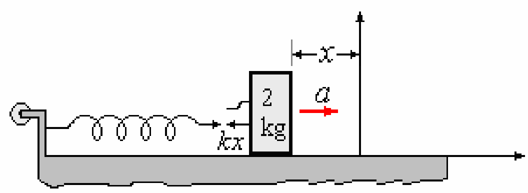
$$\Rightarrow\ k=\frac{F}{\Delta x}=\frac{mg}{\Delta x}=\frac{4(9{,}8)}{0{,}05}=784\text{ N/m}$$

b) Hallar la ecuación diferencial

Al cortar la cuerda



Vamos a aplicar la segunda ley de Newton ($F=ma$) al cuerpo de masa 2 kg en el instante en que el resorte está comprimido una longitud x



$$-kx=ma\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0\ \text{ o }\ m\ddot{x}+kx=0$$

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0\ \Rightarrow\ \ddot{x}+\frac{784}{2}x=0$$

$$\Rightarrow\ \ddot{x}+392x=0$$

c) La amplitud del movimiento es A = 0,05 m, la frecuencia angular es $\omega = \sqrt{392}$ = 19,8 rad/s

La frecuencia es: $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{19,8}{2\pi} = 3,15$ c/s

d) Hallar la energía mecánica del sistema.

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}784(0,05)^2 = 0,98 \text{ J}$$

PÉNDULOS

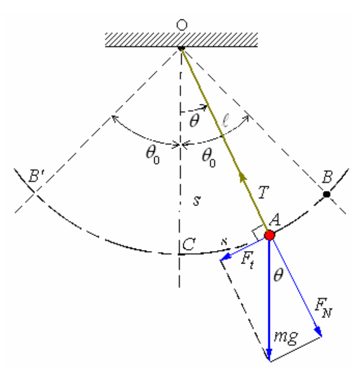
PÉNDULO SIMPLE

Un ejemplo de movimiento armónico simple es el movimiento de un péndulo. Un péndulo simple se define como una partícula de masa m suspendida del punto O por una cuerda de longitud ℓ y de masa despreciable. Si la partícula se lleva a la posición B de modo que la cuerda haga un ángulo θ con la vertical OC, y luego se suelta, el péndulo oscilará entre B y la posición simétrica B'.

Para determinar la naturaleza de las oscilaciones, debemos escribir la ecuación de movimiento de la partícula. La partícula se mueve en un arco de circulo de radio ℓ = OA. Las fuerzas que actúan sobre la partícula son su peso *mg* y la tensión *T* a lo largo de la cuerda. De la figura, se ve que la componente tangencial de la fuerza es $F_t = -mgsen\theta$, donde el signo menos se debe a que se opone al desplazamiento s = CA. La ecuación del movimiento tangencial es $F_t = ma_t$ y, como la partícula se mueve a lo largo de un círculo de radio ℓ, podemos usar la ecuación $a_t = \dfrac{dv}{dt} = R\dfrac{d\omega}{dt} = R\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha$ (reemplazando *R* por ℓ) para expresar la aceleración tangencial.

Esto es $a_t = \ell\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \ell\ddot{\theta}$. La ecuación del movimiento tangencial es por consiguiente

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\text{sen}\theta \quad \text{o} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\text{sen}\theta = 0$$



Movimiento osci1atorio de un péndulo.

Esta ecuación no es del mismo tipo que la ecuación $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ debido a la presencia del $sen\theta$ Sin embargo, si el ángulo θ es pequeño, lo cual es cierto si la amplitud de las oscilaciones es pequeña, podemos usar la aproximación $sen\theta \approx \theta$ y escribir para el movimiento del péndulo

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

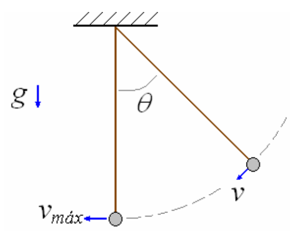
Esta es la ecuación diferencial idéntica a la ecuación $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ si reemplazamos x por θ, esta vez refiriéndonos al movimiento angular y no al movimiento lineal. Por ello podemos llegar a la conclusión que, dentro de nuestra aproximación, el movimiento angular del péndulo es armónico simple con $\omega^2 = \dfrac{g}{\ell}$. El ángulo θ puede así expresarse en la forma $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$, el período de oscilación está dado por la expresión

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Nótese que el período es independiente de la masa del péndulo. Para mayores amplitudes, la aproximación $\text{sen}\theta \approx \theta$ no es válida.

Ejemplo 22. Halle el error relativo cometido al calcular la velocidad para un péndulo en su punto más bajo empleando la aproximación de oscilador armónico, si se suelta en reposo desde un ángulo respecto a la vertical de 1° , 10°, 30°, 60° y 90°.

Solución.



La ecuación de movimiento del péndulo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\text{sen}\theta$$

Siendo θ la inclinación respecto a la vertical (medida en radianes). Cuando θ es pequeño, se puede usar la aproximación $\text{sen}\theta \approx \theta$

Lo que reduce la ecuación del péndulo a la de un oscilador armónico

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\frac{g}{\ell}\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{\ell}\theta=0$$

Cuando parte del reposo, desde una cierta separación θ_0,

$$\theta=\theta_0\cos\omega t$$

La velocidad lineal de la lenteja del péndulo es

$$v=\ell\frac{d\theta}{dt}=-\ell\omega\theta_0\operatorname{sen}\omega t$$

Valor aproximado de la velocidad máxima

La velocidad máxima lo alcanza en el momento en que se encuentra en el punto más bajo

$$v_{máx}(\text{aproximado})=\ell\omega\theta_0=\sqrt{g\ell}\,\theta_0$$

Valor exacto de la velocidad máxima

Esta misma velocidad puede calcularse exactamente, empleando la ley de conservación de la energía mecánica.

La energía inicial, cuando parte del reposo, es puramente potencial. Tomando el origen de alturas en el punto más bajo de la trayectoria

$$E=U_{(0)}=mgh=mg\ell(1-\cos\theta_0)$$

La energía en el punto más bajo es puramente cinética

$$E=K_{(0)}=\frac{1}{2}mv_{exact}^2$$

Igualando estas dos cantidades

$$v_{exact}=\sqrt{2g\ell(1-\cos\theta_0)}=2\sqrt{g\ell}\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}=$$

Comparación

El cociente entre el valor aproximado y el exacto es

$$\frac{v_{aprox}}{v_{exact}}=\frac{\sqrt{g\ell}\,\theta_0}{2\sqrt{g\ell}\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}}=\frac{\theta_0/2}{\operatorname{sen}(\theta_0/2)}$$

Error absoluto cometido en la aproximación

$$e=v_{exac}-v_{aprox}$$

Error relativo cometido en la aproximación

$$\bar{e}=\frac{v_{aprox}-v_{exac}}{v_{exac}}=\frac{\theta_0/2-\operatorname{sen}(\theta_0/2)}{\operatorname{sen}(\theta_0/2)}$$

Aplicando esta fórmula a los ángulos del enunciado

θ_0 (º)	θ_0 (rad)	e (%)
1	$\pi/180$	0,00127
10	$\pi/10$	0,127
30	$\pi/6$	1,15
60	$\pi/3$	4,72
90	$\pi/2$	11,07

Vemos que, en general la aproximación es bastante buena y que incluso para ángulos tan grandes como 60° el error es inferior al 5 %.

Ejemplo 23. Calcular la tensión en la cuerda de un péndulo en función del ángulo que hace la cuerda con la vertical.

Solución.

Para calcular la tensión T, primero obtenemos la fuerza centrípeta sobre la partícula,

$$F_c=T-F_N=T-mg\cos\theta,$$

ya que, de la figura del péndulo simple, F_N está dada por $mg\cos\theta$. Luego igualando esta expresión a la masa multiplicada por la aceleración centrípeta mv^2/ℓ (nótese que ℓ es el radio), con esto obtenemos

$$T-mg\cos\theta=m\frac{v^2}{\ell}$$

Para conseguir la velocidad usamos la conservación de la energía considerando como nivel 0, el punto de suspensión del péndulo:

$$\frac{1}{2}mv^2-mg\ell\cos\theta=-mg\ell\cos\theta_0\ \Rightarrow$$

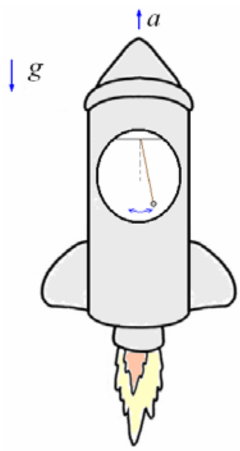
$$\frac{1}{2}mv^2=mg\ell(\cos\theta-\cos\theta_0)$$

Esto es, $v^2=2g\ell(\cos\theta-\cos\theta_0)$

Por lo tanto

$$T=mg(3\cos\theta-2\cos\theta_0)$$

Ejemplo 24. Un cohete acelera hacia arriba a 4,00 m/s^2 desde la plataforma de lanzamiento en la Tierra. En su interior, una esfera pequeña de 1,50 kg cuelga del techo mediante un alambre ligero de 1,10 m. Si la esfera se desplaza un ángulo pequeño respecto a la vertical y se suelta, encuentre el periodo de las oscilaciones de éste péndulo.



Solución.

$$\omega = \sqrt{\frac{(g+a)}{\ell}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\ell}{(g+a)}}$$

Reemplazando valores

$$T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1{,}10}{(9{,}8+4)}} = 0{,}045 \text{ s}$$

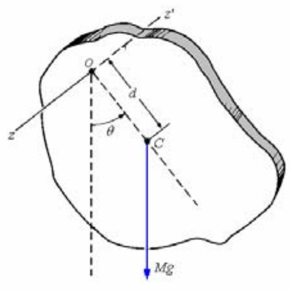
PÉNDULO COMPUESTO

Un péndulo compuesto (o físico) es cualquier cuerpo rígido que puede oscilar libremente alrededor de un eje horizontal bajo la acción de la gravedad. Sea ZZ' el eje horizontal y C el centro de masa del cuerpo. Cuando la línea OC hace un ángulo θ con la vertical, el torque alrededor del eje z actuante sobre el cuerpo es $\tau_z = -Mgd\,\text{sen}\theta$, donde d es la distancia OC entre el eje z y el centro de masa C. Si I es el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje z, y $\alpha = \ddot{\theta}$ es la aceleración angular.

Aplicando la segunda ley de Newton para la rotación $\sum \tau = I\alpha$ obtenemos:

$-Mgd\,\text{sen}\theta = I\ddot{\theta}$. Suponiendo que las oscilaciones son de pequeña amplitud, podemos suponer que $sen\theta \approx \theta$, de modo que la ecuación del movimiento es

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mgd}{I}\theta \quad \text{o} \quad \ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I}\theta = 0$$

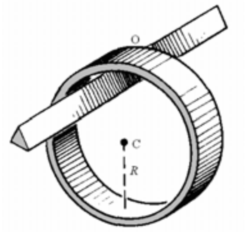


Péndulo compuesto.

Podemos comparar esta ecuación del movimiento comparar con la ecuación $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, demostrando que el movimiento angular oscilatorio es armónico simple, con $\omega^2 = \dfrac{Mgd}{I}$. Por consiguiente, el período de las oscilaciones es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

Ejemplo 25. Un anillo de 0,10 m de radio está suspendido de una varilla, como se ilustra en la figura. Determinar su período de oscilación.



Solución.

Designando el radio del anillo por R, su momento de inercia con respecto a un eje que pasa a través de su centro de masa C es $I_C = mR^2$. Entonces, si aplicamos el teorema de Steiner $\left(I_O = I_C + Md^2\right)$, en este caso $d = R$, el momento de inercia con respecto a un eje que pasa a través del punto de suspensión O es

$I = I_C + MR^2 = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$,

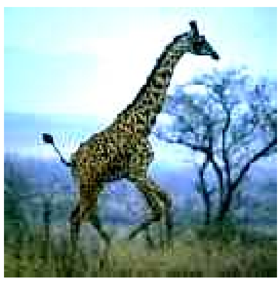
Para un péndulo físico o compuesto

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2MR^2}{MgR}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

Lo cual indica que es equivalente a un péndulo simple de longitud $2R$, o sea el diámetro del anillo. Al reemplazar los valores de $R = 0{,}10$ m y $g = 9{,}8$ m/s^2 obtenemos $T = 0{,}88$ s.

Ejemplo 26. En una caminata normal, las piernas del ser humano o del animal oscilan libremente más o menos como un péndulo físico. Esta observación ha permitido a los científicos estimar la velocidad a la cual las criaturas extintas tales como los dinosaurios viajaban. ¿Si una jirafa tiene una longitud de piernas de 1.8 m, y una longitud del paso de 1 m, qué estimaría usted para el período de la oscilación de la pierna? ¿Cuál sería su velocidad al caminar?



Solución.

Podemos modelar la pierna de la jirafa como un péndulo físico de longitud L que oscila alrededor de un extremo. Su momento de inercia alrededor del punto de oscilación es $I = \frac{1}{3}mL^2$

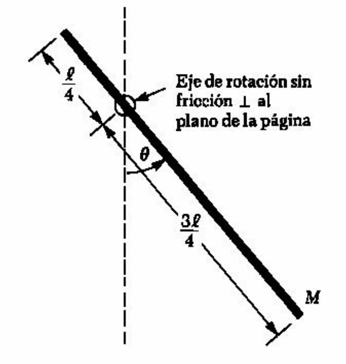
El periodo de un péndulo físico es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg\frac{L}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

$= 2{,}2$ s

$$v = \frac{\text{longitud del paso}}{\text{periodo}} = \frac{1\text{ m}}{2{,}2\text{ s}} = 0{,}46\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 27. Considere una barra delgada con masa $M = 4$ kg y de longitud $L = 1{,}2$ m pivotada en un eje horizontal libre de fricción en el punto $L/4$ desde un extremo, como se muestra en la figura.
a) Encuentre (a partir de la definición) la expresión para el momento de inercia de la barra respecto del pivote.
b) Obtenga una ecuación que dé la aceleración angular α de la barra como función de θ.
c) Determine el periodo para pequeñas amplitudes de oscilación respecto de la vertical.



Solución.
a)

$$I = \int r^2 dM = \int_0^{L/4}\frac{r^2 M}{L}dr = \int_0^{3L/4}\frac{r^2 M}{L}dr$$

$$= \frac{M}{3L}\left[\left(\frac{L}{4}\right)^3 + \left(\frac{3L}{4}\right)^3\right]$$

$$= \frac{M}{3L}\left(\frac{28L^3}{64}\right) = \frac{7ML^2}{48}$$

b) $r = \dfrac{-MgL}{4}\operatorname{sen}\theta = I_0\alpha$

$$\alpha = \frac{MgL}{4I_0}\operatorname{sen}\theta = -\frac{12g}{7L}\theta$$

Para oscilaciones pequeñas,

$$\alpha = -\frac{12g}{7L}\theta$$

c) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_0}{MgL/4}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{7L}{12g}}$

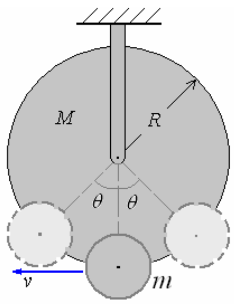
$= 1{,}68$ s

Ejemplo 28. Un disco pequeño delgado de masa *m* y radio *r* se sujeta firmemente a la cara de otro disco delgado de radio *R* y masa *M*, como se muestra en la figura. El centro del disco pequeño se localiza en el borde del disco mayor. El disco mayor se monta por su centro en un eje sin fricción. El dispositivo se gira un ángulo θ y se suelta
a) Demuestre que la rapidez del disco pequeño cuando pasa por la posición de equilibrio es

$$v = 2\sqrt{gR\frac{(1-\cos\theta)}{\left(\frac{M}{m} + \frac{r^2}{R^2} + 2\right)}}$$

b) Demuestre que el periodo del movimiento es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(M+2m)R^2 + mr^2}{2mgR}}$$



Solución.
a) $E = K + U =$ constante, Luego
$K_{arriba} + U_{arriba} = K_{abajo} + U_{abajo}$
Como $K_{arriba} = U_{abajo} = 0$

Obtenemos $mgh = \frac{1}{2}I\omega^2$, pero

$h = R - R\cos\theta = R(1-\cos\theta)$, $\omega = \dfrac{v}{R}$ e

$I = \dfrac{MR^2}{2} + \dfrac{mr^2}{2} + mR^2$. Sustituyendo encontramos

$$mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} + \frac{mR^2}{2} + mR^2\right)\frac{v^2}{R^2}$$

$$mgR(1-\cos\theta) = \left(\frac{M}{4} + \frac{mr^2}{2R^2} + \frac{m}{2}\right)v^2 \text{ y}$$

$$v^2 = 4gR\frac{(1-\cos\theta)}{\left(\frac{M}{m} + \frac{r^2}{R^2} + 2\right)}$$

De aquí

$$v = 2\sqrt{gR\frac{(1-\cos\theta)}{\left(\frac{M}{m}+\frac{r^2}{R^2}+2\right)}}$$

b) Para un péndulo físico

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{M_T gd}}$, aquí $M_T = m + M$;

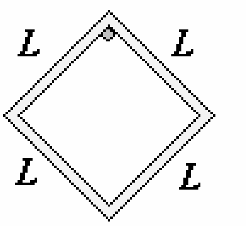
$$d = \frac{mR + M(0)}{m+M} = \frac{mR}{(m+M)}$$

Luego:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{MR^2}{2}+\frac{mr^2}{2}+mR^2\right)}{(m+M)g\left[\frac{mR}{(m+M)}\right]}} \Rightarrow$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(M+2m)R^2 + mr^2}{2mgR}}$$

Ejemplo 29. Un objeto cuadrado de masa *m* se construye con cuatro varillas uniformes idénticas, cada una con una longitud *L*, unidas entre sí. Este objeto se cuelga de su esquina superior en un gancho si se gira ligeramente a la izquierda y luego se suelta, ¿con qué frecuencia oscilará de un lado al otro?



Solución.

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{Mgd}{I_O}}$$

$$M = 4m\ ,\ d = \frac{\sqrt{L^2+L^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}L$$

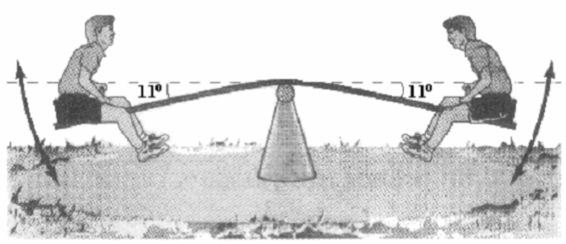
$$I_O = 2\left(\frac{1}{3}mL^2\right) + 2\left[\frac{1}{12}mL^2 + m\left(L^2+\frac{L^2}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{10}{3}mL^2$$

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{4mg\frac{\sqrt{2}}{2}L}{\frac{10}{3}mL^2}} = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{5}\frac{g}{L}}$$

$$\Rightarrow\ f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{5}{3\sqrt{2}}\frac{L}{g}}$$

Ejemplo 30. Problema del sube y baja. Una barra de 4,2 m de longitud, 8,5 kg de masa tiene un doblez de 202º en su centro de tal manera que queda como muestra la figura. El doblez de la barra reposa sobre un apoyo agudo. Los gemelos de masa 44 kg cada uno, sentados en los extremos opuestos de la barra se balancean. ¿Cuál es el periodo del movimiento de este sube y baja modificado?



Solución.

La ecuación del péndulo físico puede encontrarse aplicando la segunda ley de Newton para la rotación:

$$\sum\tau_O = I_O\alpha$$

$$-m_T gd\,\mathrm{sen}\theta = I_O\ddot{\theta}\ ,$$

m_T es la masa total del sistema.,

g la aceleración de la gravedad,

d la distancia del punto de apoyo al centro de masa del sistema.

I_O es el momento de inercia del sistema con respecto al apoyo (centro de oscilación)

y θ es el ángulo que forma la línea que pasa por el punto de apoyo y por el centro con la vertical cuando el sistema está oscilando.

Luego $\ddot{\theta} + \dfrac{m_T gd}{I_O}\mathrm{sen}\theta = 0$, para oscilaciones pequeñas $\ddot{\theta} + \dfrac{m_T gd}{I_O}\theta = 0$,

De aquí $\omega = \sqrt{\dfrac{m_T gd}{I_O}}$

Reemplazando valores:

$M_T = 2(44) + 8{,}5 = 96{,}5$ kg,

$$d = \frac{2(44)(2{,}1)\mathrm{sen}11^0 + 2((4{,}25)(1{,}05)\mathrm{sen}11^0}{96{,}5}$$

$$= 0{,}38\ \mathrm{m}$$

$$I_O = 2(44)(2{,}1)^2 + 2\frac{1}{3}(4{,}25)(2{,}1)^2$$

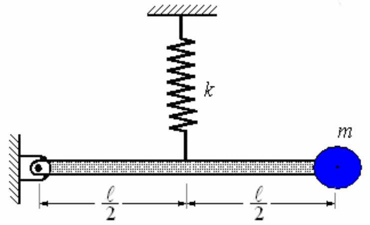
$$= 400{,}56\ \mathrm{kgm}^2$$

Luego:

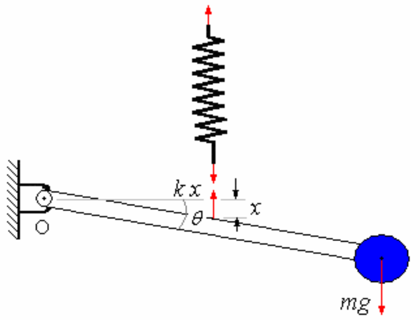
$$\omega = \sqrt{\frac{96,5(9,8)0,38}{400,56}} = 0,95\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

SISTEMAS DE PÉNDULOS Y RESORTES

Ejemplo 31. El sistema mostrado en la figura consiste de una barra de masa despreciable, pivotada en O, Una masa m pequeña en el extremo opuesto a O y un resorte de constante k en la mitad de la barra. En la posición mostrada el sistema se encuentra en equilibrio. Sí se jala la barra hacia abajo un ángulo pequeño y se suelta, ¿cuál es el periodo de las oscilaciones?



Solución.
Supongamos al sistema desviado un ángulo θ:



Aplicando la segunda ley de Newton para la rotación: $\sum \tau_O = I_O \alpha$

El resorte es el único elemento que causa una fuerza recuperativa, el efecto del peso de la masa está compensado por el efecto del estiramiento previo del reste para poner al sistema en posición horizontal.

$$-kx\left(\frac{\ell}{2}\right)\cos\theta = m\ell^2\ddot{\theta}$$

Tenemos que $x = \left(\frac{\ell}{2}\right)\text{sen}\theta$

Para ángulos pequeños:
$\text{sen}\theta \approx \theta$ y $\cos\theta \approx 1$

Así: $-\frac{k\ell^2}{4}\theta = m\ell^2\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{k}{4m}\theta = 0$

Ecuación de moviendo armónico simple con

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{4m}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{4m}{k}}$$

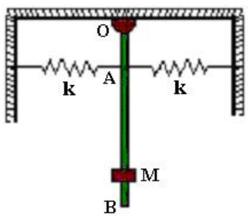
Ejemplo 32. Problema del Metrónomo. El metrónomo es un aparato para medir el tiempo y marcar el compás de la música

La figura muestra un metrónomo y un modelo de metrónomo.

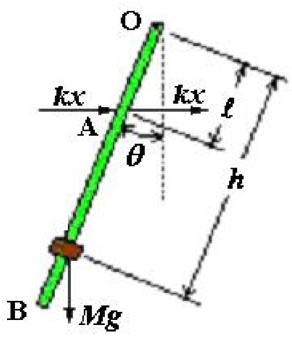
Metrónomo vertical invertido La figura muestra un metrónomo invertido, donde la masa M se puede situar entre los extremos A y B. Despreciar el peso de la barra rígida OAB. OA = ℓ, OB = 10ℓ, la masa de la barra del péndulo se considera despreciable.

a) Encuentre la ecuación diferencial que gobierna el movimiento cuando la masa M está situada a una distancia h del punto O.

b) Cuál es la frecuencia natural de la oscilación cuando M está primero localizada en A y luego en B



Solución.
a)



$$\sum \tau_O = -2kx.\ell\cos\theta - Mgh.\text{sen}\theta = I_O\alpha$$

Como: $x = \ell sen\theta$, $I_O = Mh^2$:

$$-2k.\ell^2 sen\theta\cos\theta - Mgh.\text{sen}\theta = Mh^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Con $\text{sen}\theta \approx \theta$, $\cos\theta = 1$ y simplificando:

$$-2\frac{k}{M}\ell^2\theta - gh\theta = h^2\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2k}{M}\frac{\ell^2}{h^2} + \frac{g}{h}\right)\theta = 0$$

b) con M en A: $h = \ell$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2k}{M} + \frac{g}{\ell}\right)\theta = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2k}{M} + \frac{g}{\ell}} = \sqrt{\frac{2k}{M}}\sqrt{1 + \left(\frac{M}{2k}\right)\frac{g}{\ell}}$$

Con M en B: $h = 10\ell$

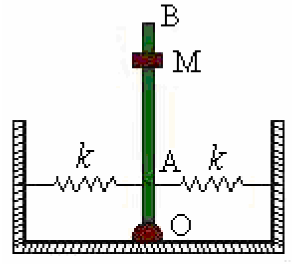
$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2k}{100M} + \frac{g}{10\ell}\right)\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{100M} + \frac{g}{\ell}} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{2k}{M}}\sqrt{1 + \left(\frac{100M}{2k}\right)\frac{g}{\ell}}$$

Metrónomo vertical derecho La figura muestra un metrónomo invertido, donde la masa M se puede situar entre los extremos A y B. Despreciar el peso de la barra rígida OAB. OA = ℓ, OB = 10ℓ.

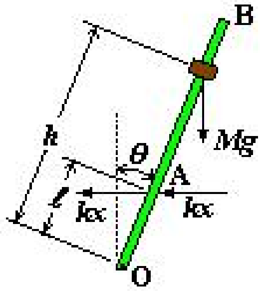
a) Encuentre la ecuación diferencial que gobierna el movimiento cuando la masa M está situada a una distancia h del punto O

b) Cuál es la frecuencia natural de la oscilación cuando M está primero localizada en A y luego en B



Solución.

a)



$$\sum \tau_O = -2kx.\ell\cos\theta + Mgh.\text{sen}\theta = I_O\alpha$$

Como: $x = \ell\,\text{sen}\theta$, $I_O = Mh^2$:

$$-2k.\ell^2 sen\theta\cos\theta + Mgh.\text{sen}\theta = Mh^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Con $\text{sen}\theta \approx \theta$, $\cos\theta = 1$ y simplificando:

$$-2\frac{k}{M}\ell^2\theta + gh\theta = h^2\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2k}{M}\frac{\ell^2}{h^2} - \frac{g}{h}\right)\theta = 0$$

b) con M en A: $h = \ell$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2k}{M} - \frac{g}{\ell}\right)\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{M} - \frac{g}{\ell}} = \sqrt{\frac{2k}{M}}\sqrt{1 - \left(\frac{M}{2k}\right)\frac{g}{\ell}}$$

Con M en B: $h = 10\ell$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2k}{100M} - \frac{g}{10\ell}\right)\theta = 0$$

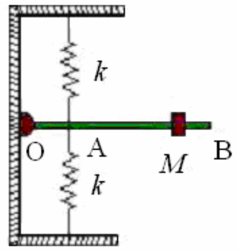
$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2k}{100M} - \frac{g}{10\ell}} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{2k}{M}}\sqrt{1 - 5\frac{Mg}{k\ell}}$$

Metrónomo horizontal

La figura muestra un metrónomo invertido, donde la masa M se puede situar entre los extremos A y B. Despreciar el peso de la barra rígida OAB. OA = ℓ, OB = 10ℓ.

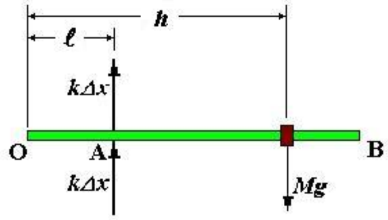
a) Encuentre la ecuación diferencial que gobierna el movimiento cuando la masa M está situada a una distancia h del punto O

b) Cuál es la frecuencia natural de la oscilación cuando M está primero localizada en A y luego en B



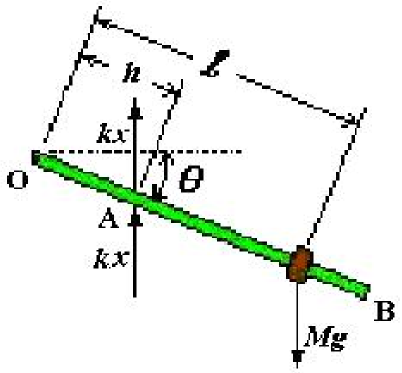
Solución.

a)



Equilibrio estático $\sum \tau_O = -2k\Delta x\ell + Mgh = 0$

El torque producido por los pesos de las masas es compensado por los torques producidos por las reacciones a las deformaciones previas de los resortes. Luego la ecuación dinámica es:



$\sum \tau_O = -2kx.\ell\cos\theta = I_O\alpha$

Como: $x = \ell \text{sen}\theta$, $I_O = Mh^2$:

$$-2k.\ell^2 \text{sen}\theta\cos\theta = Mh^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Con $\text{sen}\theta \approx \theta$, $\cos\theta = 1$ y simplificando:

$$-2\frac{k}{M}\ell^2\theta = h^2\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2k}{M}\frac{\ell^2}{h^2}\right)\theta = 0$$

b) Con M en A: $h = \ell$

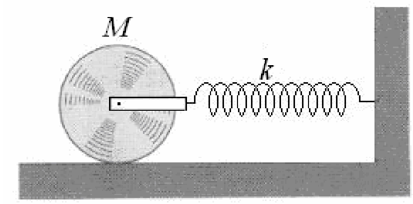
$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2k}{M}\right)\theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2k}{M}}$$

Con M en B: $h = 10\ell$

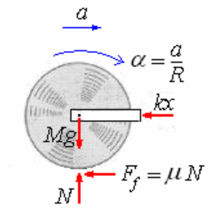
$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2k}{100M}\right)\theta = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{2k}{M}}$$

Ejemplo 33. Un cilindro de masa M y radio R se conecta por medio de un resorte de constante k como de muestra en la figura. Si el cilindro tiene libertad de rodar sobre la superficie horizontal sin resbalar, encontrar su frecuencia.



Solución.
Por la ley de Newton
Aplicando la segunda ley de Newton al cilindro,



$$\sum F = ma \text{ o } m\ddot{x} = -kx - F_f$$

Donde F_f es la fuerza de fricción,
Usando la segunda ley de Newton para la rotación,

$$\sum \tau = I_o\ddot{\theta},$$

$$I_o\ddot{\theta} = F_f R \text{ o } \left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{\ddot{x}}{R}\right) = F_f R$$

De aquí $F_f = \frac{1}{2}m\ddot{x}$, sustituyendo esta expresión en la ecuación de la fuerza obtenemos

$$m\ddot{x} = -kx - \frac{1}{2}m\ddot{x} \text{ o } \frac{3}{2}m\ddot{x} + kx = 0$$

y $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3M}}\text{rad/s}$

Por el método de la energía:
La energía total del sistema es la suma de la energía cinética (traslacional y rotacional) y la energía potencial; y permanece igual para todo tiempo,

$E = (K_{traslación} + K_{rotación}) + U$

$$K_{traslación} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2,\ K_{rotación} = \frac{1}{2}I_o\dot{\theta}^2$$

Donde el momento de inercia del cilindro es

$$I_o = \frac{1}{2}MR^2,$$

También $R\theta = x$ y $R\dot{\theta} = \dot{x}$
La ecuación de la energía del sistema para cualquier tiempo es

$$E = \left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2\right]$$

$$= \frac{3}{4}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

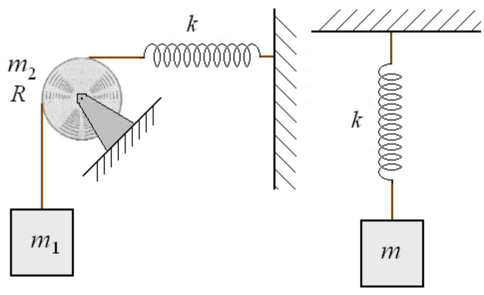
Como E = constante, $\frac{dE}{dt} = 0$

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{3}{2}M\ddot{x} + kx\right)\dot{x} = 0$$

Como $\dot{x}$ no siempre es cero, la ecuación del movimiento es

$$\frac{3}{2}M\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{o} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3M}}\,\text{rad/s}$$

Ejemplo 34. Hallar el valor *m* de la masa del sistema (b) de modo que su frecuencia sea la misma que la del sistema (a). Considere que los dos resortes son iguales y que la polea del sistema (a) tiene masa m_2 y radio *R*, La cuerda no resbala sobre la polea.



(a) (b)

Solución.

$$-kxR = \left(\frac{1}{2}m_2R^2 + m_1R^2\right)\ddot{\theta} \Rightarrow$$

$$-kR^2\theta = \left(\frac{1}{2}m_2 + m_1\right)R^2\ddot{\theta} \Rightarrow$$

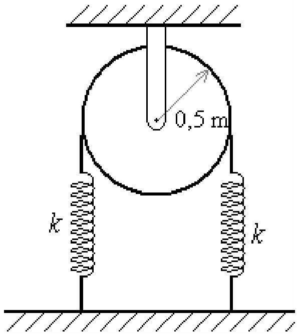
$$\ddot{\theta} + \frac{k}{\left(\frac{1}{2}m_2 + m_1\right)}\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\left(\frac{1}{2}m_2 + m_1\right)}}$$

Para que el sistema (b) tenga igual frecuencia que el sistema (a) debe tener una masa

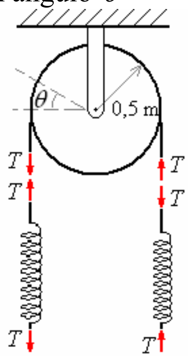
$$m = \frac{1}{2}m_2 + m_1$$

Ejemplo 35. El disco homogéneo tiene un momento de inercia alrededor de su centro I_o = 0,5 kgm^2 y radio R = 0,5 m. En su posición de equilibrio ambos resortes están estirados 5 cm. Encontrar la frecuencia angular de oscilación natural del disco cuando se le da un pequeño desplazamiento angular y se lo suelta. k = 800 N/m



Solución.

La figura muestra al sistema oscilando cuando se ha desplazado un ángulo θ



El resorte de la derecha está estirado

$x = R\theta$

El de la izquierda está comprimido

$x = R\theta$

Luego $T = kR\theta$

Aplicando la segunda ley de Newton para la rotación, $\sum \tau = I_o\alpha \Rightarrow$

$$-TR - TR = I_0\ddot{\theta} \Rightarrow -2kR^2\theta = I_0\ddot{\theta} \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2kR^2}{I_0}\theta = 0$$

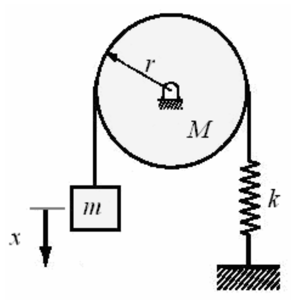
La frecuencia angular es

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2kR^2}{I_0}}$$

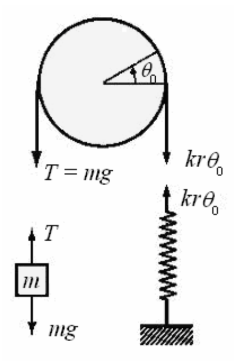
Reemplazando valores

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2(800)(0,5^2)}{0,5}} = 28\,\text{rad/s}$$

Ejemplo 36. Determinar la frecuencia natural del sistema resorte-masa-polea mostrado en la figura.

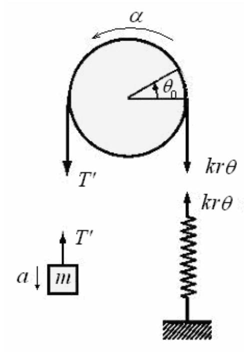


Solución.
Equilibrio estático:
El resorte tiene un estiramiento inicial igual a $r\theta_o$ que produce una fuerza $kr\theta_o$ que equilibra al peso mg.
O sea $kr\theta_o = mg$



Para hacerlo oscilar hay que sacarlo del equilibrio con un movimiento vertical de la masa *m*.

Solución aplicando la segunda ley de Newton:
Como el peso está compensado por el estiramiento previo la única fuerza actuante es producida por el estiramiento adicional del resorte.



Aplicando la segunda ley de Newton:
Para la masa m, $\sum F = ma$

$$-T' = ma = m\ddot{x}$$

Como $x = r\theta$, $\ddot{x} = r\ddot{\theta}$

Luego $T' = -mr\ddot{\theta}$ (1)
Para el disco de masa M, $\sum \tau = I\alpha$

$$I_0\alpha = I_0\ddot{\theta} = T'r - (kr\theta)r \qquad (2)$$

Donde $I_0 = \frac{1}{2}Mr^2$ es el momento de inercia de la polea.
Reemplazando (1? En (2):

$$\frac{1}{2}Mr^2\ddot{\theta} = r(-mr\ddot{\theta}) - kr^2\theta$$

y $\left(\frac{1}{2}Mr^2 + mr^2\right)\ddot{\theta} + kr^2\theta = 0$,

Finalmente $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M/2 + m}}\,\text{rad/s}$

Solución por el método de la energía:
$E = K + U =$ constante
$K = K_{masa} + K_{polea}$

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kr^2\theta^2$$

Como la energía total de sistema permanece constante,

$$\frac{d}{dt}(K + U) = 0 \quad \text{o}$$

$$mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + I_0\dot{\theta}\ddot{\theta} + kr^2\theta\dot{\theta} = 0$$

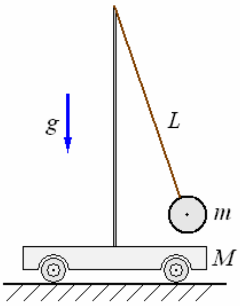
$$\Rightarrow \quad \dot{\theta}\left(mr^2\ddot{\theta} + I_0\ddot{\theta} + kr^2\theta\right) = 0$$

Como $\dot{\theta}$ no siempre es cero,
$\left(mr^2\ddot{\theta} + I_0\ddot{\theta} + kr^2\theta\right)$ es igual a cero. Luego

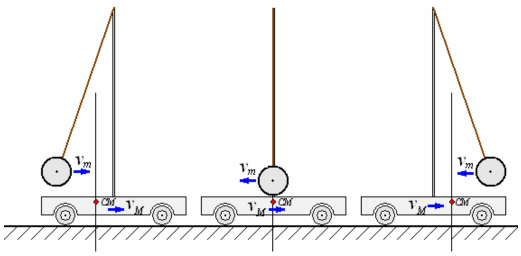
$$\ddot{\theta} + \frac{kr^2}{I_0 + mr^2}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M/2 + m}}\,\text{rad/s}$$

Ejemplo 37. En una superficie horizontal lisa se halla una carrito de masa *M* con el péndulo físico de longitud *L* y masa m, instalado en ella. Búsquese el periodo de las oscilaciones pequeñas del sistema.



Solución.



El centro de masa

$$x_{cm}=\frac{Mx_M+mx_m}{M+m},\ y_{cm}=\frac{My_M+my_m}{M+m}$$

$$v_{cm}=\frac{Mv_M+mv_m}{M+m}$$

Como el centro de masa del sistema permanece en reposo en el eje horizontal

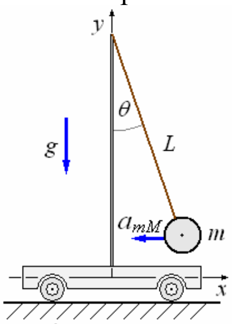
$$x_{cm}=0\ \Rightarrow\ Mv_M+mv_m=0$$

$$\Rightarrow v_M=-\frac{m}{M}v_m$$

$$\Rightarrow a_M=-\frac{m}{M}v_m$$

Por la segunda ley de Newton.

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento de *m* con respecto a *M*:



Sistema masa *M*

$$\sum F_x=ma_{mM}$$

Donde $a_{mM}=a_m-a_M=a_m-\left(-\frac{m}{M}a_m\right)$

Luego

$$-mg\,\mathrm{sen}\theta=m\left(a_m+\frac{m}{M}a_m\right)$$

$$-g\,\mathrm{sen}\theta=\frac{(M+m)}{M}a_m$$

Con $\mathrm{sen}\theta\approx\theta$ y $a_m=L\ddot{\theta}$:

$$-g\theta=\frac{(M+m)}{M}L\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow\ \ddot{\theta}+\frac{M}{(M+m)}\frac{g}{L}\theta=0$$

Ecuación del movimiento armónico simple

$$\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$$

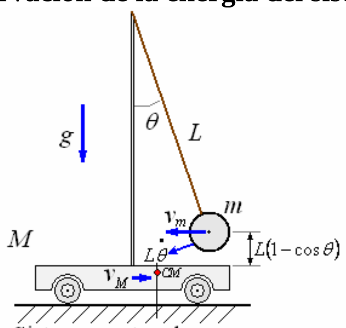
Cuya solución es

$$\theta=\theta_0\mathrm{sen}(\omega_0t+\varphi)$$

Con frecuencia angular

$$\omega_0=\sqrt{\frac{M}{(M+m)}\frac{g}{L}}$$

Por conservación de la energía del sistema.



Sistema centro de masa

$$\text{Energía}=\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}Mv_M^2+mgL(1-\cos\theta)$$

Para oscilaciones pequeñas

$\mathrm{sen}\theta\approx\theta$ y $\cos\theta\approx1$

Con $v_m=L\dot{\theta}\cos\theta\approx L\dot{\theta}$ y $v_M=-\frac{m}{M}L\dot{\theta}$,

obtenemos:

$$\text{Energía}=\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}M\left(-\frac{m}{M}L\dot{\theta}\right)^2+mgL(1-\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{2}m\left(1+\frac{m}{M}\right)L^2\dot{\theta}^2+mgL(1-\cos\theta)$$

Derivando

$$\left(1+\frac{m}{M}\right)L\dot{\theta}\ddot{\theta}+g\dot{\theta}\mathrm{sen}\theta=0$$

Como $\mathrm{sen}\theta\approx\theta$:

$$\left(1+\frac{m}{M}\right)L\ddot{\theta}+g\theta=0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}+\frac{M}{(M+m)}\frac{g}{L}\theta=0$$

Ecuación del movimiento armónico simple

$$\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$$

Cuya solución es

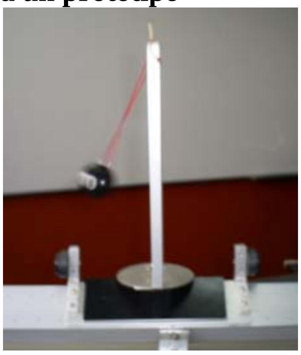
$$\theta=\theta_0\text{sen}(\omega_0 t+\varphi)$$

Con frecuencia angular

$$\omega_0=\sqrt{\frac{M}{(M+m)}\frac{g}{L}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{(M+m)}{M}\frac{L}{g}}$$

Aplicación a un prototipo



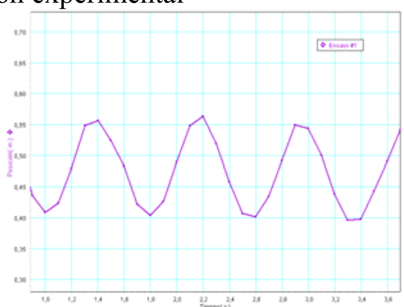
M = 512,6 g
m = 52,3 g
L = 14 + 2 = 16 cm
Calculado

$$\omega_0=\sqrt{\frac{M}{(M+m)}\frac{g}{L}}=\sqrt{\frac{512,6}{(512,6+52,3)}\frac{9,8}{0,16}}$$

= 7,453 rad/s

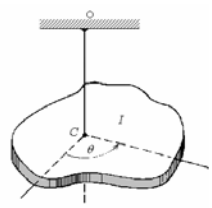
$$T=\frac{2\pi}{7,45}=0,84\text{ s}$$

Medición experimental



T = 2,2 – 1,4 = 0,8 s

PÉNDULO DE TORSIÓN.



Otro ejemplo de movimiento armónico simple es el péndulo de torsión, consistente en un cuerpo suspendido por un alambre o fibra de tal manera que la línea OC pasa por el centro de masa del cuerpo. Cuando el cuerpo se rota un ángulo θ a partir de su posición de equilibrio, el alambre se tuerce, ejerciendo sobre el cuerpo un torque τ alrededor de OC que se oponen al desplazamiento θ y de magnitud proporcional al ángulo, $\tau=-\kappa\theta$, donde κ es el coeficiente de torsión del alambre.

Aplicando la segunda ley del movimiento (para variables angulares):

$$\sum\tau_0=I_0\alpha$$

Si I_0 es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje OC, la ecuación del movimiento

$-\kappa\theta=I_0\alpha$, con $\alpha=\ddot{\theta}$, es

$$I_0\ddot{\theta}=-\kappa\theta \quad \text{o} \quad \ddot{\theta}+\frac{\kappa}{I_0}\theta=0$$

Nuevamente encontramos la ecuación diferencial del MAS, de modo que el movimiento angular es armónico simple, con $\omega^2=\frac{\kappa}{I_0}$; el período de oscilación es

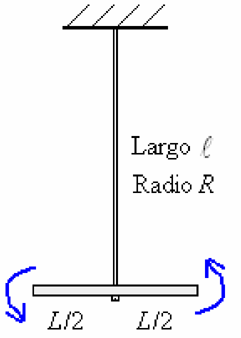
$$T=2\pi\sqrt{\frac{I_0}{\kappa}}$$

Este resultado es interesante debido a que podemos usarlo experimentalmente para determinar el momento de inercia de un cuerpo suspendiéndolo de un alambre cuyo coeficiente de torsión κ se conoce, y luego midiendo el período T de oscilación.

Ejemplo 38. Queremos determinar el módulo de cizalladura de un material y para ello tomamos una muestra filiforme del mismo, de 50 cm de longitud y 0,6 mm de diámetro, con la que vamos a construir un péndulo de torsión, sujetándole en la parte inferior y por su punto medio, una barrita de 20 cm de longitud. Se desvía la barrita de su posición de equilibrio torsionando el hilo, midiéndose 10 oscilaciones completas en 20 s. en los extremos de la barrita se colocan sendas masas de plomo, que se pueden considerar como puntuales, de 5 g cada una, y se pone de nuevo a oscilar el sistema por torsión, invirtiendo ahora 40 s en 10 oscilaciones. Calcule el módulo de cizalladura.

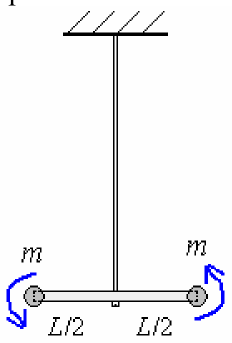
Solución.

Con el primer péndulo de torsión



$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{\kappa}}, \text{ con } I_1 = \frac{1}{12}ML^2$$

Con el segundo péndulo de torsión



$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{\kappa}}, \text{ con}$$

$$I_2 = I_1 + 2\left(5\times10^{-3}\right)(0,1)^2 = I_1 + 10^{-4}$$

El valor de κ es igual para ambos casos

Elevando al cuadrado T_1 y T_2

$$T_1^2 = 4\pi^2\frac{I_1}{\kappa},\ T_2^2 = 4\pi^2\frac{I_2}{\kappa}$$

Restándolas:

$$T_2^2 - T_1^2 = \frac{4\pi^2}{\kappa}\left(I_2 - I_1\right) \Rightarrow$$

$$\kappa = \frac{4\pi^2\left(I_2 - I_1\right)}{\left(T_2^2 - T_1^2\right)}$$

Como los periodos son:

$$T_1 = \frac{20}{10} = 2\text{ s y } T_2 = \frac{40}{10} = 4\text{ s}$$

La diferencia de los momentos de inercia es:

$$I_2 = I_1 + 10^{-4} \Rightarrow I_2 - I_1 = 10^{-4}$$

Luego:

$$\kappa = \frac{4\pi^2\left(I_2 - I_1\right)}{\left(T_2^2 - T_1^2\right)} = \frac{4\pi^2\left(10^{-4}\right)}{\left(4^2 - 2^2\right)}$$

$= 3,29 \times 10^{-4}$

Siendo $\kappa = \frac{\pi R^4}{2\ell}G \Rightarrow G = \frac{2\ell\kappa}{\pi R^4}$

Reemplazando valores obtenemos;

$$G = \frac{2\ell\kappa}{\pi R^4} = \frac{2(0,5)\left(3,29\times10^{-4}\right)}{\pi\left(0,3\times10^{-3}\right)^4}$$

$= 1,29 \times 10^{10}$ N/m^2

MOVIMIENTO ARMÓNICO EN DOS DIMENSIONES.

Hasta ahora no hemos limitado a estudiar el movimiento armónico de la partícula o cuerpo descrito por una sola variable, ahora permitiremos a la partícula, movimiento en dos dimensiones.

$$\vec{F} = -k\vec{r}$$

La fuerza se puede descomponer en dos componentes

$$F_x = -kx,\ F_y = -ky$$

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

Donde como antes $\omega_0^2 = k/m$. Las soluciones son:

$$x_{(t)} = A\cos\left(\omega_0 t - \alpha\right),\ y_{(t)} = B\cos\left(\omega_0 t - \beta\right)$$

Luego el movimiento es armónico simple en cada una de las dimensiones, ambas oscilaciones tienen la misma frecuencia pero tienen que diferenciar amplitudes y fases. Podemos obtener la ecuación de la trayectoria de las partículas eliminando el tiempo *t* entre las dos ecuaciones. Para esto escribimos:

$$y_{(t)} = B\cos\left[\omega_0 t - \alpha - (\alpha - \beta)\right]$$

$$= B\cos\left(\omega_0 t - \alpha\right)\cos(\alpha - \beta)$$

$$- B\operatorname{sen}\left(\omega_0 t - \alpha\right)\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$$

Con

$$\cos\left(\omega_0 t - \alpha\right) = \frac{x}{A} \text{ y}$$

$$\operatorname{sen}\left(\omega_0 t - \alpha\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}$$

Llamando $\delta = (\alpha - \beta)$:

$$y = \frac{B}{A}x\cos\delta - B\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}\operatorname{sen}\delta$$

Elevada al cuadrado se transforma en:

$$A^2y^2 - 2ABxy\cos\delta + B^2x^2\cos^2\delta$$
$$=$$
$$A^2B^2\operatorname{sen}^2\delta - B^2x^2\operatorname{sen}^2\delta$$

Que es:

$$B^2x^2 - 2AB\cos\delta + Ay^2 = A^2B^2\text{sen}^2\delta$$

Para $\delta = \pm\dfrac{\pi}{2}$, esta ecuación toma la forma de una elipse:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

En el caso particular de $A = B$ y $\delta = \pm\pi/2$, tendremos un movimiento circular:

$$x^2 + y^2 = A^2$$

Otro caso particular es con $\delta = 0$, en que tendremos:

$$Bx^2 - 2ABxy + Ay^2 = 0 \Rightarrow (Bx - Ay)^2 = 0,$$

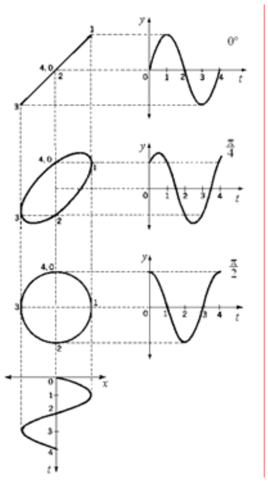
expresión de ecuación de una recta:

$$y = \frac{B}{A}, \text{ para } \quad \delta = 0$$

De forma similar para $\delta = \pm\pi$

$$y = -\frac{B}{A}, \text{ para } \quad \delta = \pm\pi$$

En la figura pueden observarse algunas de las curvas correspondientes al caso $A = B$, cuando $\delta = 0$, $\delta = \pi/4$ y $\delta = \pi/2$

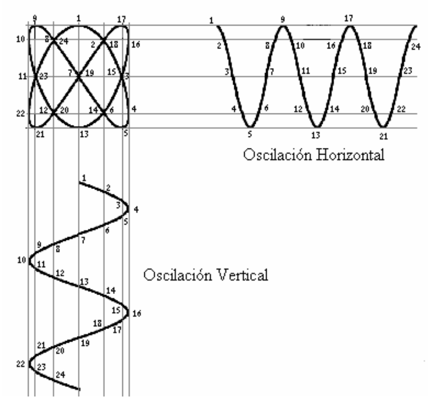


En general las oscilaciones bidimensionales no tienen por qué ser las mismas frecuencias en los mismos movimientos según las direcciones x e y, de forma que las ecuaciones se conviertan en

$$x_{(t)} = A\cos(\omega_x t - \alpha),\ y_{(t)} = B\cos(\omega_y t - \beta)$$

y la trayectoria no es ya una elipse, sino una de las llamadas curvas de Lissajous. Estas curvas serán cerradas cuando el movimiento se repita sobre sí mismo a intervalos regulares de tiempo, lo cual sólo será posible cuando las frecuencias ω_x y ω_y, sean «conmensurables», o sea, cuando ω_x/ω_y sea una fracción racional.

En la figura a continuación se representa uno de estos casos, para el cual ω_x/ω_y = 2/3 (y asimismo, $A = B$ y $\alpha = \beta$).



Curvas de Lissajous.

En el caso de que el cociente de las frecuencias no sea una fracción racional, la curva será abierta; es decir, la partícula no pasará dos veces por el mismo punto a la misma velocidad.

Medida del desfase entre dos señales

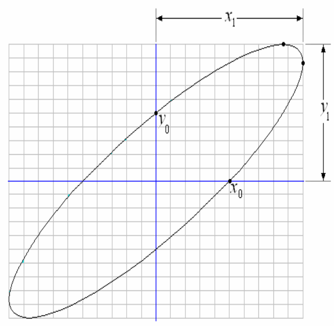
En un osciloscopio componemos dos MAS de direcciones perpendiculares y de la misma frecuencia ω, desfasados δ. Supondremos por simplicidad que ambas señales tiene la misma amplitud A.

$x = A\text{sen}(\omega t)$

$y = A\text{sen}(\omega t + \delta)$

La trayectoria como podemos comprobar es una elipse.

La medida de la intersección de la elipse con los ejes X e Y nos permite medir el desfase δ, entre dos señales x e y.



a) Intersección con el eje Y

Cuando $x = 0$, entonces $\omega t = 0$, ó π.

$y_0 = A\text{sen}\delta$

$y_0 = A\text{sen}(\pi + \delta) = - A\text{sen}\delta$

Si medimos en la parte positiva del eje Y, tendremos que sen $\delta = y_0/A$

En la pantalla del "osciloscopio" el eje X y el eje Y está dividido en 20 partes, cada división es una unidad.

En la figura, A=10, e y_0=5, el desfase δ=30º, ó mejor δ=π /6

b) Intersección con el eje X

Cuando y = 0, entonces $\omega t = -\delta$, ó $(\pi - \delta)$.

$x_0 = -A\text{sen}\delta$

$x_0 = A\text{sen}(\pi - \delta) = A\text{sen}\delta$

En la figura, A=10, e x_0=5, el desfase δ=30º, ó mejor δ= π /6

c) Intersección con $x = A$ el borde derecho de la pantalla del "osciloscopio"

$A = A\text{sen}(\omega t)$ por lo que $\omega t = \pi/2$

$y_1 = A\text{sen}(\pi/2+\delta) = A\cos\delta$

En la figura A = 10 y y_1 = 8.75, el desfase δ » 30º, ó mejor δ=π /6

Podemos comprobar que se obtiene la misma trayectoria con el desfase 30º y 330º y también con 150º y 210º. Pero podemos distinguir el desfase 30º de 150º, por la orientación de los ejes de la elipse.

Medida de la frecuencia

Componemos dos MAS de direcciones perpendiculares y de distinta frecuencia ωx, y ωy .Supondremos por simplicidad que ambas señales tiene la misma amplitud A y el desfase δ puede ser cualquier valor

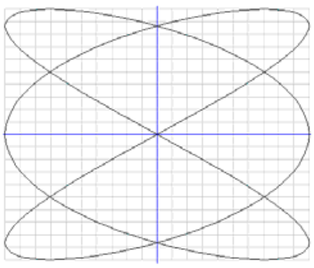
$x = A\text{sen}(\omega_x t)$

$y = A\text{sen}(\omega_y t+\delta)$

La relación de frecuencias se puede obtener a partir del número de tangentes de la trayectoria en el lado vertical y en el lado horizontal.

Número de tangentes lado vertical

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{\text{número de tangentes lado vertical}}{\text{número de tangentes lado horizontal}}$$



Ejemplo: en la figura

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{3}{2}$$

Ejemplo 39. Dos movimientos vibratorios perpendiculares de la misma frecuencia tienen sus amplitudes en la relación 2/3 y una diferencia de marcha de media longitud de onda. Hállese la forma del movimiento resultante.

Solución.

Las ecuaciones de estos movimientos son:

$x = A_1\text{sen}\omega t$; $y = A_2\text{sen}(\omega t + \pi) =$

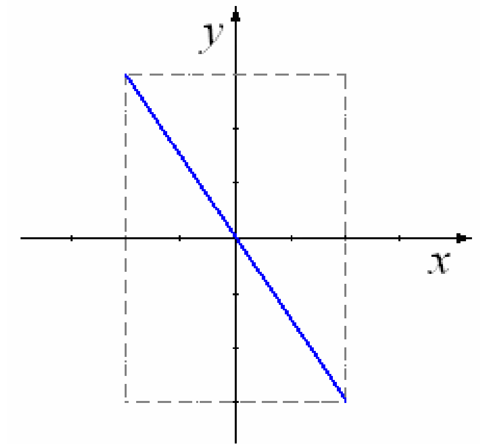
$A_2\text{sen}\omega t\cos\pi + A_2\cos\omega t\,\text{sen}\pi = -A_2\text{sen}\omega t$

$$\frac{x}{y} = \frac{A_1}{-A_2} = -\frac{2}{3}$$

El movimiento resultante es según la ecuación

$$y = -\frac{3}{2}x$$

Corresponde a una recta de pendiente -3/2.



Ejemplo 40. Encuentre la ecuación de la trayectoria de un punto sometido a dos movimientos oscilatorios armónicos rectangulares dados por las ecuaciones

$$x = 3\text{sen}\omega t\ ;\ y = 5\text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$$

Solución.

$$x = 3\text{sen}\omega t \Rightarrow \text{sen}\omega t = \frac{x}{3}$$

Luego: $\cos\omega t = \sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}$

$$y = 5\text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{y}{5} \Rightarrow$$

$$\frac{y}{5} = \text{sen}\omega t\cos\frac{\pi}{6} + \cos\omega t\,\text{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$= \left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{5} - \frac{\sqrt{3}x}{6} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{x^2}{36}}$$

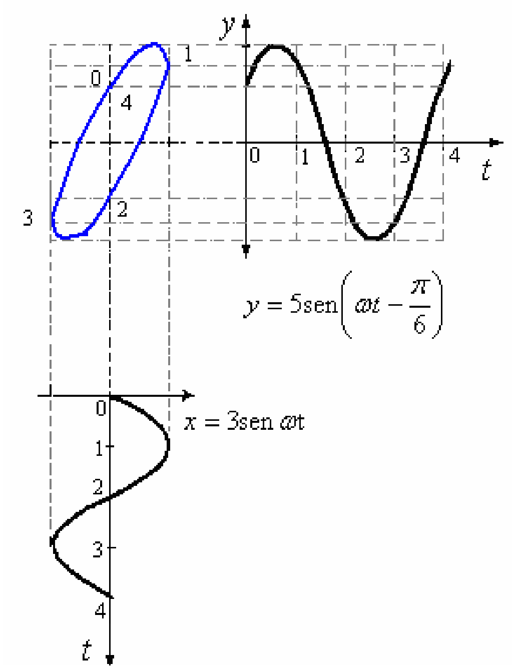
Elevando al cuadrado:

$$\frac{y^2}{25} - \frac{2\sqrt{3}yx}{30} + \frac{3x^2}{36} = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{36}$$

Simplificando:

$$\frac{y^2}{25} - \frac{\sqrt{3}yx}{15} + \frac{x^2}{9} = \frac{1}{4}$$

Corresponde a la ecuación de una elipse inclinada.



Ejemplo 41. Dos oscilaciones perpendiculares entre si tienen el mismo periodo, la misma amplitud y una diferencia de marcha igual a $\lambda/6$. ¿Qué oscilación resultante produce?

Solución.

Una diferencia de marcha de λ equivale a 2π.

Una diferencia de marcha de $\frac{\lambda}{6}$ equivale a

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Luego, las ecuaciones de los movimientos componentes son:

$x = a\text{sen}\omega t$, $y = a\text{sen}(\omega t - \pi/3)$

Trabajando con y:

$$y = a\text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= a\text{sen}\omega t\cos\frac{\pi}{3} - a\cos\omega t\,\text{sen}\frac{\pi}{3}$$

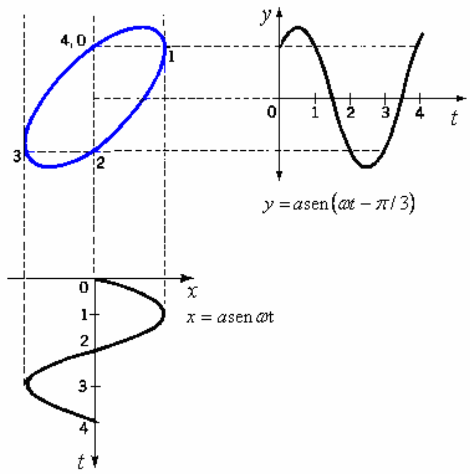
$$= x\left(\frac{1}{2}\right) - a\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y - \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}a}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Elevando al cuadrado y simplificando:

$$y^2 + x^2 - xy = \frac{3}{4}a^2$$

Corresponde a la ecuación de una elipse inclinada



Ejemplo 42. Una masa m descansa sobre una mesa horizontal sin rozamiento y está unida a unos soportes rígidos mediante dos resortes idénticos de longitud ℓ_0 sin deformar y constante k. Ambos resortes se estiran hasta una longitud ℓ considerablemente mayor que ℓ_0. Los desplazamientos horizontales de m respecto a su posición de equilibrio se denominarán x (sobre AB) e y (perpendicular a AB).

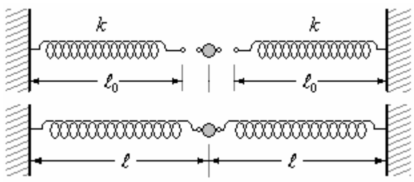
a) Escribir la ecuación diferencial del movimiento (es decir, la ley de Newton) que rige las oscilaciones pequeñas en dirección x.

b) Escribir la ecuación diferencial del movimiento que rige las oscilaciones pequeñas en dirección y (admitir que y <<1).

c) Calcular el cociente entre los períodos de oscilaciones sobre x e y en función de ℓ y ℓ_0.

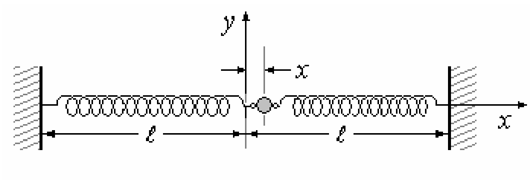
d) Si para t = 0 se deja libre la masa m desde el punto $x = y = A_0$ con velocidad nula, ¿cuáles son sus coordenadas x e y en un instante posterior t?

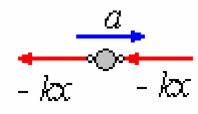
e) Dibujar un gráfico de la trayectoria de m resultante bajo las condiciones de la parte (d) si $\ell = \frac{9}{5}\ell_0$.



Solución.

a) Escribir la ecuación diferencial del movimiento (es decir, la ley de Newton) que rige las oscilaciones pequeñas en dirección x.





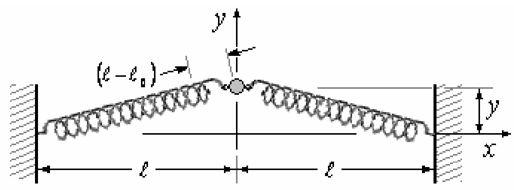
$$\sum F_x = ma_x$$

$$-kx - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

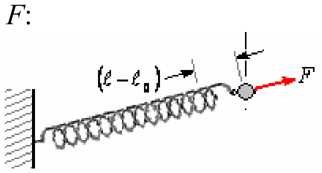
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2kx \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + 2kx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k}{m}x = 0$$

b) Escribir la ecuación diferencial del movimiento que rige las oscilaciones pequeñas en dirección y (admitir que $y << \ell$).



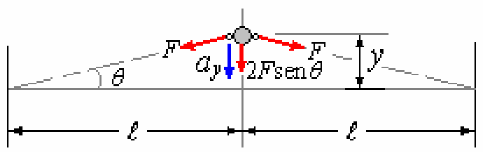
Cálculo de F:



$$F = -k\left(\sqrt{\ell^2 + y^2} - \ell_0\right) = -k\left[\ell\left(1 + \frac{y^2}{2\ell}\right) - \ell_0\right]$$

$$= -k\left(\ell - \ell_0 + \frac{y^2}{2\ell}\right) \approx -k(\ell - \ell_0)$$

Cálculo de F_y:



$$\sum F_y = ma_y \quad \sum F_y = 2F\text{sen}\theta = -2k(\ell - \ell_0)\frac{y}{\ell}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{\ell^2 + y^2}} \approx \frac{y}{\ell}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} - 2k(\ell - \ell_0)\frac{y}{\ell} \Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} + 2k(\ell - \ell_0)\frac{y}{\ell} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2k}{m}(\ell - \ell_0)\frac{y}{\ell} = 0$$

c) Calcular el cociente entre los períodos de oscilaciones sobre x e y en función de ℓ y ℓ_0.

La frecuencia de las oscilaciones sobre x es.

$$\omega_x = \frac{2\pi}{T_x} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

El período de las oscilaciones sobre x.

$$T_x = \frac{2\pi}{\omega_x} = \sqrt{\frac{m}{2k}},$$

La frecuencia de las oscilaciones sobre y.

$$\omega_y = \frac{2\pi}{T_y} = \sqrt{\frac{2k}{m}\frac{(\ell - \ell_0)}{\ell}}$$

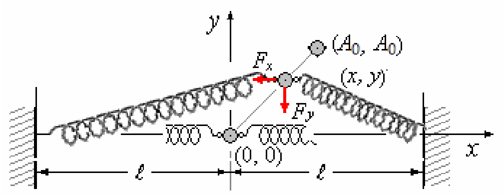
El período de las oscilaciones sobre y.

$$T_y = \frac{2\pi}{\omega_y} = \sqrt{\frac{m}{2k}\frac{\ell}{(\ell - \ell_0)}}$$

$$\frac{T_x}{T_y} = \frac{\sqrt{\frac{m}{2k}}}{\sqrt{\frac{m}{2k}\frac{\ell}{(\ell - \ell_0)}}} = \sqrt{\frac{(\ell - \ell_0)}{\ell}}$$

$$= \left(1 - \frac{\ell_0}{\ell}\right)^{1/2}$$

d) Si para $t = 0$ se deja libre la masa m desde el punto $x = y = A_0$ con velocidad nula, ¿cuáles son sus coordenadas x e y en un instante posterior t?



Cuando x e y son pequeños comparados con ℓ, las fuerzas son del tipo

$$F_x = -k_x x \text{ y } F_y = -k_y y$$

Movimiento en x. Según lo encontrado en a):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k}{m}x = 0$$

La solución es:

$$x = A_0\text{sen}(\omega_x t + \varphi)$$

Si para $t = 0$, $x = A_0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$x = A_0\text{sen}\left(\omega_x t + \frac{\pi}{2}\right) = A_0\cos\omega_x t$$

$$x_{(t)} = A_0\cos\left(\frac{2k}{m}\right)^{1/2} t$$

Movimiento en y. Según lo encontrado en b):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2k}{m}(\ell - \ell_0)\frac{y}{\ell} = 0$$

La solución es:

$$x = A_0\text{sen}(\omega_y t + \varphi)$$

Si para $t = 0$, $y = A_0$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

$$x = A_0 \operatorname{sen}\left(\omega_y t + \frac{\pi}{2}\right) = A_0 \cos \omega_y t$$

$$y_{(t)} = A_0 \cos\left[\frac{2k(\ell - \ell_0)}{m\ell}\right]^{1/2} t \, .$$

e) Dibujar un gráfico de la trayectoria de m resultante bajo las condiciones de la parte (d) si $\ell = \dfrac{9}{5}\ell_0$.

La relación de las frecuencias es:

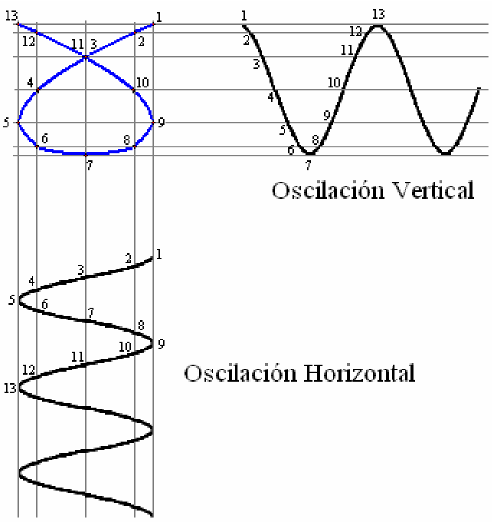
$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{\sqrt{\dfrac{2k}{m}\dfrac{(\ell - \ell_0)}{\ell}}}{\sqrt{\dfrac{2k}{m}}} = \sqrt{\frac{(\ell - \ell_0)}{\ell}}$$

Para el valor dado $\ell = \dfrac{9}{5}\ell_0$:

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \sqrt{\frac{(\ell - \ell_0)}{\ell}} = \sqrt{\frac{\left(\dfrac{9}{5}\ell_0 - \ell_0\right)}{\dfrac{9}{5}\ell_0}} = \frac{2}{3}$$

En la figura a continuación se representa

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{2}{3}$$

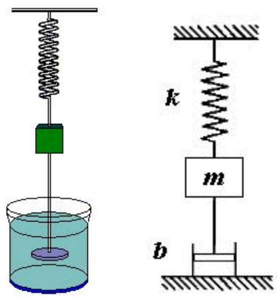


Curvas de Lissajous.

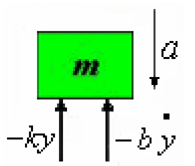
MOVIMIENTO ARMÓNICO AMORTIGUADO.

En el movimiento armónico simple la amplitud es constante al igual que la energía del oscilador. Sin embargo sabemos que la amplitud del cuerpo en vibración, como un resorte, un péndulo, disminuye gradualmente, lo que indica una pérdida paulatina de energía por parte del oscilador. Decimos que el movimiento oscilatorio está amortiguado.

El Amortiguamiento es causado por la fricción, para una resistencia la viscosa tal como la fuerza amortiguadora del aire, la fuerza amortiguadora puede tomarse como proporcional de la velocidad. Sea la fuerza de un amortiguador $F_b = -bv$ donde el signo menos indica que esta fuerza tiene sentido opuesto al movimiento del cuerpo oscilante:



Aplicando la segunda ley de Newton:



$ma = -ky - bv$

$$m\ddot{y} = -ky - b\dot{y}$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = 0 \, , \quad \ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_o^2 y = 0 \quad \text{(I)}$$

$$\beta = \frac{b}{2m} \, , \quad \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Solución de la ecuación es de la forma $y = e^{rt}$

Reemplazando en la ecuación obtenemos:

$$r^2 e^{rt} + 2\beta r e^{rt} + \omega_o^2 e^{rt} = 0$$

Simplificando

$$r^2 + 2\beta r + \omega_o^2 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son:

$$r_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \;\; \text{y} \;\; r_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Por consiguiente la solución general de la ecuación (I) es

$$y = e^{-\beta t}\left[Be^{\sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}\, t} + Ce^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}\, t}\right]$$

Discusión de la solución

a) Cuando $\omega_o^2 > \beta^2$

$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = i\omega_1$ es una cantidad imaginaria y

$$y = e^{-\beta t}\left[Be^{i\omega_1 t} + Ce^{-i\omega_1 t}\right]$$

Haciendo $B = \frac{A}{2}e^{i\delta}$ y $C = \frac{A}{2}e^{-i\delta}$

Obtenemos

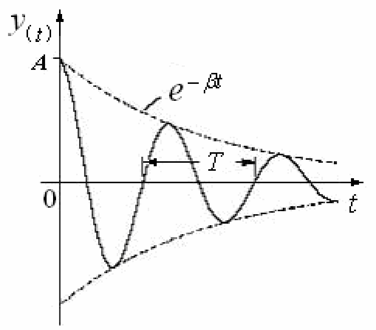
$$y = Ae^{-\beta t}\left[\frac{e^{i(\omega_1 t+\delta)} + e^{-i(\omega_1 t+\delta)}}{2}\right]$$

Expresión que se puede escribir usando las relaciones de Euler como

$$y = Ae^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \delta)$$

Donde ω_1 es la frecuencia del oscilador amortiguado, aunque hablando estrictamente no es posible definir la frecuencia en el caso del movimiento amortiguado desde que este no es un movimiento periódico.

La amplitud máxima del movimiento disminuye debido al factor $e^{-\beta t}$.



Este movimiento se conoce como SUBAMORTIGUADO o poco amortiguado.

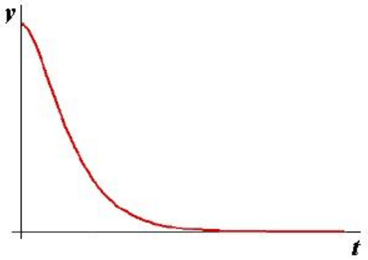
b) Cuando $\omega_o^2 = \beta^2$

$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = 0$ cantidad real

En este caso la solución tiene la forma

$$y = (B + Ct)e^{-\beta t}$$

El desplazamiento decrece a su posición de equilibrio sin oscilar en el menor tiempo posible, a este movimiento se le conoce como CRITICAMENTE AMORTIGUADO.



Pero para amortiguadores fuertes según lo mostrado en la figura abajo, el período varía según la amplitud y el movimiento cambia considerablemente del modelo armónico simple. El amortiguamiento crítico es la que lleva al oscilador al reposo en el menor tiempo. Esto encuentra aplicaciones en instrumentos donde es una ventaja el poder tomar una lectura rápida del indicador. Es también útil por resortes en asientos y amortiguadores de vehículos.

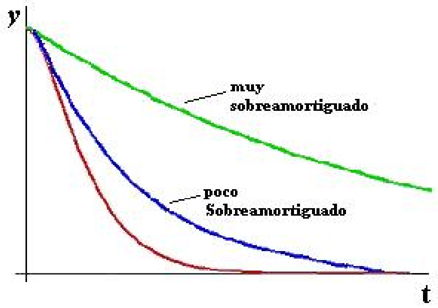
c) Cuando $\omega_o^2 < \beta^2$

$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \omega_1$

en este caso la solución tiene la forma

$$y = e^{-\beta t}\left[Be^{\omega_1 t} + Ce^{-\omega_1 t}\right]$$

En este caso tampoco existe oscilación, pero se acerca a la posición de equilibrio más lentamente que el crítico, a este movimiento se le conoce como SOBREAMORTIGUADO



Ejemplo 43. Un péndulo se ajusta para tener un período exacto 2 segundos, y se pone en movimiento. Después de 20 minutos, su amplitud ha disminuido a 1/4 de su valor inicial. Si el movimiento del péndulo puede se representado por $\theta = \theta_0 e^{-\beta t}\cos(2\pi f t)$, ¿cuál es el valor de β?

Nota: $e^{-1,386} = \frac{1}{4}$

Solución.

a) $\theta = \theta_0 e^{-\beta t}\cos(2\pi f t)$

Para t = 20 x 60 = 1200 s

$$\frac{\theta_0}{4} = \theta_0 e^{-1200\beta}(1)$$

$$e^{-1200\beta} = \frac{1}{4} = e^{-1,386}$$

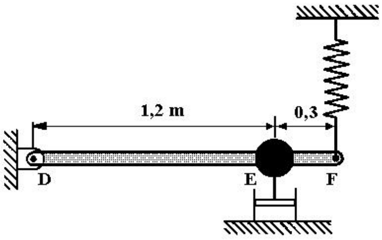
$$-1200t = -1,386$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{1,386}{1200} = 0,001155$$

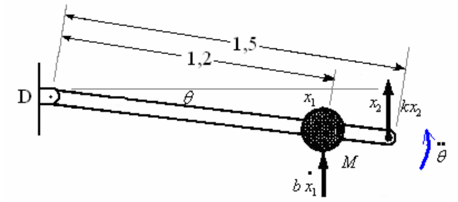
$= 1,2 \times 10^{-3}$ N.s/m ó kg/s.

Ejemplo 44. El cuerpo E de 3,34 kg de masa en la figura está asegurado a la varilla DF cuyo peso

puede ignorarse. El resorte tiene un módulo k = 100 N/m y el coeficiente del amortiguador es b = 26,7 N-s/m. El sistema está en equilibrio cuando DF está horizontal. La varilla se desplaza 0,10 rad en sentido horario y desde el reposo cuando t = 0. Determinar
a) la ecuación del movimiento de la varilla,
b) la frecuencia del movimiento.



Solución.
El sistema se encuentra en equilibrio cuando está en posición horizontal. El peso de la masa esta equilibrado por un estiramiento inicial del resorte.
La figura muestra el diagrama del cuerpo libre de la varilla DF, desplazada en la dirección positiva.



Aplicando la segunda ley de Newton para la rotación:

$$\sum \tau_D = I_D \alpha$$

$$-1,2\left(b\dot{x}_1\right) - 1,5(kx_2) = M1,2^2\ddot{\theta}$$

Tenemos que

$$x_1 = 1,2\operatorname{sen}\theta \approx 1,2\theta\,,\ \dot{x}_1 = 1,2\dot{\theta}$$
$$x_2 = 1,5\operatorname{sen}\theta \approx 1,5\theta$$

Luego

$$-1,2^2 b\dot{x}_1 - 1,5^2 kx_2 = M1,2^2\ddot{\theta}$$

k = 100 N/m y b = 26,7 Ns/m y M = 3,34 kg
Reemplazando valores

$$4,8\ddot{\theta} + 38.4\dot{\theta} + 225\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} + 8,00\dot{\theta} + 46,9\theta = 0\,.$$

De la forma

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Donde: $2\beta = 8$ y $\omega_0^2 = 46,9$
Cuya solución es

$$\theta = De^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi) \text{ y}$$

$$\dot{\theta} = -D\omega e^{-\beta t}\operatorname{sen}(\omega t - \phi) - D\beta e^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi)$$

Con D y ϕ constantes cuyos valores dependen de las condiciones iniciales del movimiento (en este caso para t = 0, $\theta = 0,1\,\text{rad}$ y $\dot{\theta} = 0$.

y $\omega = \left|\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right| = \left|\sqrt{4^2 - 46,9}\right|$ = 5,56 rad

Por las condiciones iniciales

$$0,1 = D\cos(-\phi) = D\cos\phi \qquad (1)$$
$$0 = -D\omega\operatorname{sen}(-\phi) - D\beta\cos(-\phi)$$
$$= D(\omega\operatorname{sen}\phi - \beta\cos\phi) \qquad (2)$$

De (2) obtenemos

$$\tan\phi = \frac{\beta}{\omega} = -\frac{4}{5,56} = -0,72$$

$\Rightarrow \phi$ = -0,62 rad
De (1)

$$D = \frac{0,1}{\cos\phi} = \frac{0,1}{0,81} = 0,12 \text{ rad}$$

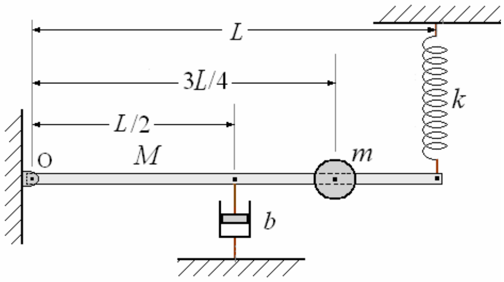
La ecuación del movimiento es

$$\theta = 0,12e^{-4t}\cos(5,56t - 0,62) \text{ rad}$$

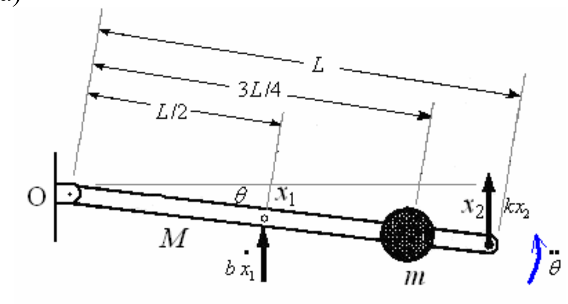
Correspondiente a un movimiento oscilatorio subamortiguado cuyo gráfico se muestra a continuación, la vibración se amortigua rápidamente.

b) La frecuencia del movimiento es ω = 5,56 rad/s.

Ejemplo 45. El sistema de la figura, está compuesto por una varilla horizontal de longitud L y masa M que se muestra en su posición horizontal de equilibrio, unida a un resorte de constante k y un amortiguador cuyo coeficiente de amortiguamiento es b. Considere la masa m puntual.
a) Plantear la ecuación diferencial del movimiento de la barra.
b) Determine la condición para el caso sub-amortiguado y halle la solución.



Solución.
a)



$$-\frac{L^2}{4}b\dot{\theta}-L^2k\theta=\left(\frac{9}{16}m+\frac{1}{3}M\right)L^2\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta}+\frac{b}{4\left(\frac{9}{16}m+\frac{1}{3}M\right)}\dot{\theta}+\frac{k}{\left(\frac{9}{16}m+\frac{1}{3}M\right)}\theta=0$$

b) El movimiento es subamortiguado para

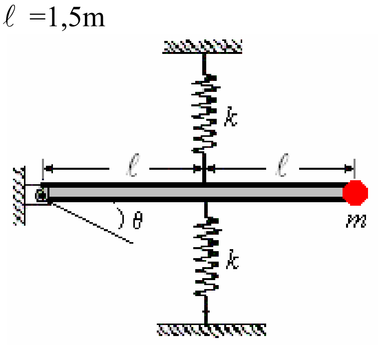
$$\frac{k}{\left(\frac{9}{16}m+\frac{1}{3}M\right)}>\frac{b^2}{64\left(\frac{9}{16}m+\frac{1}{3}M\right)^2}$$

$$\ddot{\theta}+2\beta\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$$

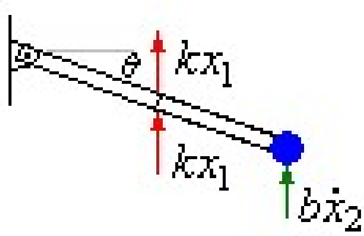
$$\beta=\frac{b}{8\left(\frac{9}{16}m+\frac{1}{3}M\right)},\ \omega_0=\sqrt{\frac{k}{\left(\frac{9}{16}m+\frac{1}{3}M\right)}}$$

$$\theta=De^{-\beta t}\cos(\omega t-\phi)$$

Ejemplo 46. El sistema mostrado en la figura se encuentra en el plano horizontal en equilibrio. Consiste en una barra rígida indeformable de masa *M*, ligada a dos resortes de constante *k*, y con una masa en el extremo libre de magnitud "*m*", sobre la cual actúa una fuerza disipativa proporcional a su velocidad $F_v = -\,b\,v_m$. Si se desplaza un ángulo 0,15 rad en sentido horario y luego se le suelta. Determinar:
a) La ecuación de movimiento del sistema para ángulos pequeños de deformación
b) Encontrar la ley de movimiento para cuando *k*=1500 N/m , *b* =40 N s/m y *M* =3*m*= 3kg, además ℓ =1,5m



Solución.
a)



$$\sum\tau_O=-2kx_1.\ell\cos\theta-b\dot{x}_2\,2\ell\cos\theta=I_O\alpha$$

Como:

$x_1=\ell\,\text{sen}\,\theta\approx\ell\theta$, $x_2=2\ell\,\text{sen}\,\theta\approx2\ell\theta\ \Rightarrow$

$\dot{x}_2=2\ell\dot{\theta}$

$I_0=\frac{1}{3}M(2\ell)^2+m(2\ell)^2$ y $\cos\theta\approx1$:

Tenemos

$$-2k.\ell^2\theta-4b\ell^2\dot{\theta}=\left(\frac{M}{3}+m\right)4\ell^2\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow\ddot{\theta}+\frac{b}{\left(\frac{3m}{3}+m\right)}\dot{\theta}+\frac{k}{2\left(\frac{3m}{3}+m\right)}\theta=0$$

$$\Rightarrow\ddot{\theta}+\frac{b}{2m}\dot{\theta}+\frac{k}{4m}\theta=0$$

b) $\theta=\theta_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)$

$$\beta=\frac{b}{4m}\quad\omega_0=\sqrt{\frac{k}{4m}}\quad\omega=\sqrt{\left|\beta^2-\omega_0^2\right|}$$

Cuando *k* =1500 N/m , *b* =40 N s/m y *M* =3*m* = 3kg, además ℓ =1.5m y el ángulo inicial = 0,15 rad.

$$\beta=\frac{(40)}{4(1)}=10\quad\omega_0=\sqrt{\frac{(1500)}{4(1)}}=\sqrt{375}$$

$$\omega=\sqrt{\left|10^2-375\right|}=\sqrt{275}=16{,}58$$

$$\theta=\theta_0e^{-10t}\cos(16{,}58t+\varphi)$$

$$\dot{\theta}=-10\theta_0e^{-10t}\cos(16{,}58t+\varphi)$$
$$-16{,}58\theta_0e^{-10t}\text{sen}(16{,}58t+\varphi)$$

Si para *t* = 0 se desplaza un ángulo 0,15 rad en sentido horario y luego se le suelta.

$$0{,}15=\theta_0\cos(\varphi)$$

$$0=-10\theta_0\cos(\varphi)-16{,}58\theta_0\text{sen}(\varphi)$$

De estas ecuaciones obtenemos:

$\varphi=-0{,}54\text{rad}$ y $\theta_0=0{,}175\text{rad}$

$$\theta=0{,}175e^{-10t}\cos(16{,}58t-0{,}54)$$

Ejemplo 47. Un bloque de 5,0 kilogramos se une a un resorte cuya constante es 125 N/m. El bloque se jala de su posición del equilibrio en x = 0 m a una posición en x = + 0,687 m y se libera del reposo. El bloque entonces ejecuta oscilación amortiguada a lo largo del eje x. La fuerza amortiguadora es proporcional a la velocidad. Cuando el bloque primero vuelve a x = 0 m, la componente x de la velocidad es - 2,0 m/s y la componente x de la aceleración es +5,6 m/s^2.
a) Calcule la magnitud de la aceleración del bloque después de ser liberado en x = + 0,687 m?
b) ¿Calcule el coeficiente de amortiguamiento b?
c) Calcule el trabajo realizado por la fuerza amortiguadora durante el recorrido del bloque de x = + 0,687 m a x = 0 m.
Solución.
a) **Forma simple.**
Como la ecuación del movimiento es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

en x = + 0,687 m, $\dot{x} = 0$
Luego:

$$5\ddot{x} + 125(0,687) = 0 \Rightarrow \ddot{x} = a = -17,18 \text{m/s}^2$$

Otra forma.

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi)$$

$$\dot{x} = -A\beta e^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi) - A\omega e^{-\beta t}\text{sen}(\omega t - \phi)$$

$$\ddot{x} = A\beta^2 e^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi) + A\omega\beta e^{-\beta t}\text{sen}(\omega t - \phi)$$
$$+ A\omega\beta e^{-\beta t}\text{sen}(\omega t - \phi) - A\omega^2 e^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi)$$
$$= A(\beta^2 - \omega^2)e^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi) + 2A\omega\beta e^{-\beta t}\text{sen}(\omega t - \phi)$$

Para $t = 0$

$e^{-\beta t} = 1$, $\cos(\omega t - \phi) = 1$ y $\text{sen}(\omega t - \phi) = 0$

Luego: $a = A(\beta^2 - \omega^2) = A\omega_0^2$,

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{125}{5} = 25$$

Reemplazando valores:

$$a = 0,687(25) = 17,18 \text{m/s}^2$$

b) **Forma simple.**
Cuando el bloque primero vuelve a x = 0 m, la componente x de la velocidad es - 2,0 m/s y la componente x de la aceleración es +5,6 m/s^2.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$
$$5(5,6) + b(-2,0) + k(0) = 0$$
$$5(5,6) + b(-2,0) = 0 \Rightarrow b = \frac{5(5,6)}{2,0} = 14 \text{m/s}$$

Otra forma.

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi)$$

$$\dot{x} = -A\beta e^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi) - A\omega e^{-\beta t}\text{sen}(\omega t - \phi)$$

$$\ddot{x} = A(\beta^2 - \omega^2)e^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi) + 2A\omega\beta e^{-\beta t}\text{sen}(\omega t - \phi)$$

x = 0 m, v = - 2,0 m/s, a = +5,6 m/s^2.

$$0 = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi) \quad (1)$$
$$-2,0 = -A\omega e^{-\beta t}\text{sen}(\omega t - \phi) \quad (2)$$
$$5,6 = 2A\omega\beta e^{-\beta t}\text{sen}(\omega t - \phi) \quad (3)$$

(3) / (2)

$$\frac{5,6}{2,0} = \frac{2A\omega\beta e^{-\beta t}\text{sen}(\omega t - \phi)}{A\omega e^{-\beta t}\text{sen}(\omega t - \phi)}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{5,6}{4,0} = 1,4$$

Siendo $\beta = \dfrac{b}{2m}$

$$\Rightarrow b = 2m\beta = 2(5)(1,4) = 14 \text{kg/s}$$

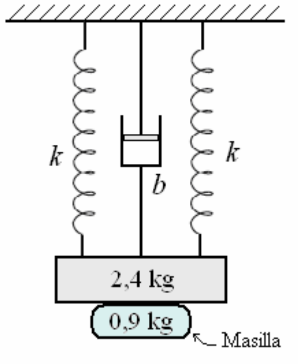
c) En x = + 0,687 m

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(125)(0,687)^2 = 29,5 \text{ J}$$

En x = 0 m $E_2 = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}(5)(-2,0)^2 = 10$ J

$\Delta E = E_2 - E_1$ = 10 - 29,5= - 19,5 J
Trabajo realizado por la fuerza amortiguadora

Ejemplo 48. Un trozo de masilla de 0,9 kg se encuentra pegado en la parte inferior del bloque de 2,4 kg, el cual está suspendido de dos resortes y un amortiguador (ver figura). Cada resorte tiene una constante k = 180 N/m y el amortiguador tiene un coeficiente b = 30 N.s/m. Considere que el sistema está en reposo cuando se desprende la masilla del bloque.
a) Plantear la ecuación diferencial de movimiento del sistema.
b) ¿Cuál es la frecuencia de oscilación del sistema?
c) ¿Cuál es la amplitud de oscilación del sistema?



Solución.

a) $\sum F_y = ma_y$

$$-2ky - b\dot{y} = m\ddot{y} \Rightarrow$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + 2ky = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{2k}{m}y = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{y} + \frac{30}{2{,}4}\dot{y} + \frac{2(180)}{2{,}4}y = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{y} + 12{,}5\dot{y} + 150y = 0$$

b) frecuencia de oscilación del sistema

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{150 - 6{,}25^2}$$

= 10,53 rad/s

c) Como $\omega_0^2 > \beta^2$ la oscilación es subamortiguada de la forma

$$y = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -A\beta e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi) - A\omega\operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

Considere que el sistema está en reposo cuando se desprende la masilla del bloque.

$$\Delta y = \frac{0{,}9g}{2\times 180} = \text{- }0{,}0245 \text{ m,}$$

Cuando se desprende la masilla del bloque se inicia el moviendo,

Par $t = 0$

Y = - 0,0245 m y $v = 0$

Luego

$$-0{,}0245 = A\cos\varphi \qquad (1)$$

$$0 = -6{,}25A\cos\varphi - 10{,}53A\operatorname{sen}\varphi \qquad (2)$$

De (2)

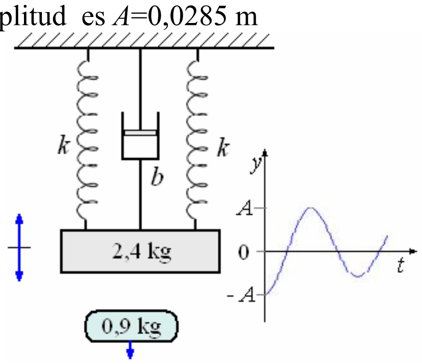
$$\tan\varphi = -\frac{6{,}25}{10{,}53} = -0{,}59$$

$$\Rightarrow \ \varphi - 0{,}53 \text{ rad}$$

De (1)

$$A = -\frac{0{,}0245}{\cos\varphi} = -\frac{0{,}0245}{0{,}86} = 0{,}0285 \text{ m}$$

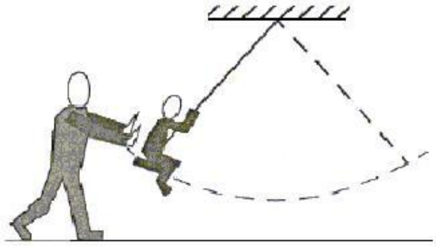
La amplitud es A=0,0285 m



OSCILACIONES FORZADAS

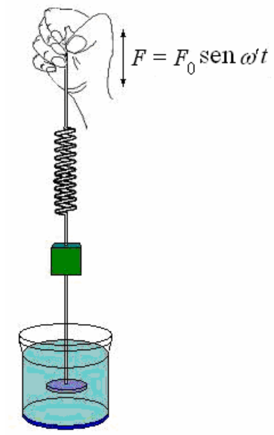
Las oscilaciones que hemos discutido hasta ahora son las oscilaciones libres en las cuales el sistema se da una cierta energía, y dejado solo. Por ejemplo, usted podría empujar a un niño en un columpio hasta cierta altura, después dejarlo y esperar que el movimiento termine.

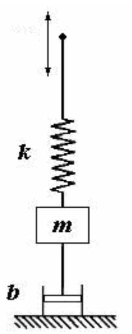
Pero ésta no es la única posibilidad; podríamos también empujar en varias ocasiones el columpio a cualquier frecuencia y que miramos a ver que sucede. En este caso decimos que tenemos oscilaciones forzadas. Ahora hay dos frecuencias en el problema: la frecuencia natural ω_o de las oscilaciones libres, y la frecuencia productora ω de las oscilaciones forzadas



Descripción

Como observamos en un columpio, para mantener las oscilaciones hemos de aplicar una fuerza oscilante al oscilador amortiguado.



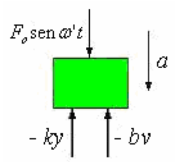


Sea $F_o \operatorname{sen}\omega' t$ la fuerza oscilante aplicada, siendo ω' su frecuencia angular. La ecuación del movimiento será ahora

$$\sum F = ma$$

$$.-ky.-b\dot{y} + F_o\operatorname{sen}\omega' t = ma$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F_o\operatorname{sen}\omega' t$$



Expresamos la ecuación del movimiento en forma de ecuación diferencial

$$\ddot{y}+2\beta\dot{y}+\omega_o^2 y=\frac{F_o}{m}\operatorname{sen}\omega' t \quad \omega_o^2=\frac{k}{m}$$

$$2\beta=\frac{b}{m}$$

La solución de esta ecuación diferencial es complicada, y se compone de la suma de dos términos

$y_{(t)}=Ae^{-\beta t}\cos(\omega t+\delta)+D\operatorname{sen}(\omega' t+\delta')$,

donde D' y δ' son constantes arbitrarias que han de ajustarse a fin de satisfacer las condiciones iniciales y ω' es la frecuencia del oscilador amortiguado no forzado.

Pasado un tiempo suficientemente largo, tal que $\frac{bt}{2m}>>1$, el primer término de la ecuación es prácticamente nulo y puede despreciarse frente al segundo término. Así, pues, la expresión:

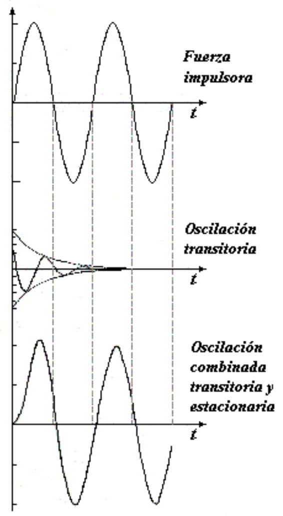
$Ae^{-\beta t}\cos(\omega_1 t+\delta)$ se denomina solución **transitoria**.

En cambio la expresión $D\operatorname{sen}(\omega' t+\delta')$ se conoce como solución **estacionaria**, y es la predominante siempre que se tenga $t>>\frac{2m}{b}$.

Para obtener las expresiones de A y δ', se sustituye $y=D\operatorname{sen}(\omega' t+\delta')$ en la ecuación diferencial, lo que nos da:

$$D=\frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega'^2\right)^2+4\beta^2\omega'^2}}$$

y $\tan\delta'=\dfrac{2\beta\omega'}{\omega_o^2-\omega'^2}$



El comportamiento dependiente del tiempo real de un oscilador armónico amortiguado y forzado puede resultar muy complejo. La figura muestra la respuesta de un oscilador amortiguado frente a la acción de una fuerza impulsora de frecuencia $\omega'=\frac{1}{2}\omega_o$, suponiendo que el sistema está en reposo cuando la fuerza comienza a actuar. Obsérvese que una vez eliminado el comportamiento transitorio, únicamente persiste el movimiento estacionario con frecuencia ω'.

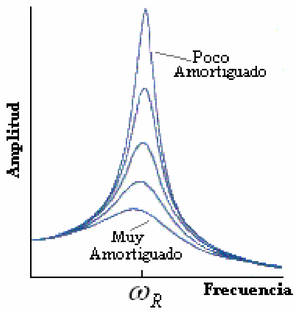
Resonancia, aplicaciones.

Resonancia

Como la amplitud D de depende de ω', ésta puede tomar diferentes valores, en particular, al valor de ω'que hace que D sea máxima, se le denomina frecuencia de resonancia ω_R.

El valor de ω' que hace máximo a D podemos encontrarlo de la manera siguiente:

$\left.\frac{\partial D}{\partial\omega'}\right|_{\omega'=\omega_R}=0$, derivando D e igualando a cero, se obtiene: $\omega'=\omega_R=\sqrt{\omega_o^2-2\beta^2}$



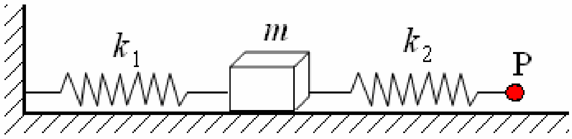
En la figura se muestra la respuesta en amplitud de la oscilación forzada, en el estado estacionario. Como podemos observar a partir de la fórmula o la gráfica, la amplitud de la oscilación forzada en el estado estacionario disminuye rápidamente cuando la frecuencia de la oscilación forzada ωf se hace mayor o menor que la frecuencia propia del oscilador ω_o.

En el caso ideal que no exista rozamiento, la amplitud de la oscilación forzada se hace muy grande, tiende a infinito, cuando la frecuencia de la oscilación forzada ω' se hace próxima a la frecuencia propia del oscilador ω_0.

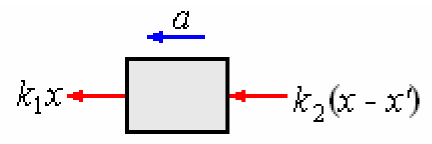
En el caso de que exista rozamiento (β >0) la amplitud se hace máxima cuando la frecuencia de la oscilación forzada ω' es próxima a la del oscilador ω_o

Los efectos de la resonancia igualmente pueden resultar indeseables o incluso destructivos. El traqueteo en la carrocería de un automóvil o el molesto zumbido en un alta voz estereof6nico se deben casi siempre a la resonancia. Casi todos hemos escuchado que una cantante de potente voz puede romper el cristal al cantar a determinada frecuencia. Igualmente conocida es la advertencia de que un grupo de personas no debe marchar por un puente por miedo a que la frecuencia de los pasos corresponda a alguna frecuencia natural del mismo. Todos éstos son ejemplos de resonancia.

Ejemplo 49. El extremo libre del resorte de constante k_2 empieza en $t = 0$ a oscilar armónicamente con amplitud B y frecuencia ω alrededor de su posición de equilibrio "P".



Haga el DCL del bloque y determine la ecuación diferencial que gobierna el movimiento del bloque.
Solución.



Movimiento del punto P

$$x' = B\,\mathrm{sen}\,\omega' t$$

$$-k_1x - k_2(x - x') = ma$$

$$ma + (k_1 + k_2)x = k_2x'$$

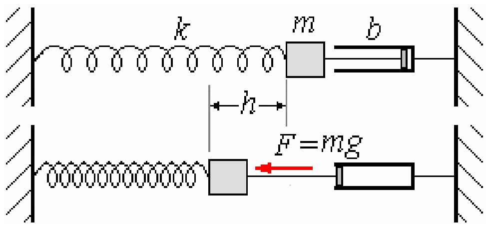
$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = k_2B\,\mathrm{sen}\,\omega' t$$

$$\ddot{x} + \frac{(k_1 + k_2)}{m}x = \frac{k_2B}{m}\mathrm{sen}\,\omega' t$$

Ecuación que corresponde a un movimiento armónico simple forzado.

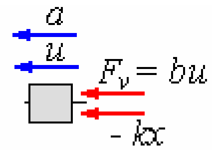
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\mathrm{sen}\,\omega' t$$

Ejemplo 50. Se conecta un bloque de masa m a un resorte cuyo otro extremo se mantiene fijo. Existe también un mecanismo de amortiguamiento viscoso. Sobre este sistema se han realizado las siguientes observaciones:
(1) Si se empuja horizontalmente el bloque con una fuerza igual a mg, la compresión estática del resorte es igual a h.
(2) La fuerza resistente viscosa es igual a mg si el bloque se mueve con una cierta velocidad conocida u.
a) Para este sistema completo (en el que se incluye tanto el resorte el amortiguador) escribir la ecuación diferencial que rige las oscilaciones horizontales de la masa en función de m, g, h y u.
Responder a las siguientes preguntas en el caso de que. $u = 3\sqrt{gh}$:
b) ¿Cuál es la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas?
c) ¿Qué tiempo ha de transcurrir, expresado en forma de un múltiplo de $\sqrt{h/g}$, para que la energía descienda en un factor $1/e$?
d) Si el oscilador se impulsa con una fuerza $mg\,\mathrm{sen}\,\omega' t$, siendo $\omega = \sqrt{2g/h}$ ¿cuál es la amplitud de la respuesta del estado estacionario?
Solución.
(1) Si se empuja horizontalmente el bloque con una fuerza igual a mg, la compresión estática del resorte es igual a h.



$$F = kh = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{h}$$

(2) La fuerza resistente viscosa es igual a mg si el bloque se mueve con una cierta velocidad conocida u.



$$F_v = bu = mg \Rightarrow b = \frac{mg}{h}$$

a) Aplicando la segunda ley de Newton

$$\sum F = ma$$

$$-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$-\frac{mg}{h}x - \frac{mg}{u}\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{u}\dot{x} + \frac{g}{h}x = 0$$

- Para b), c)y d) $u = 3\sqrt{gh}$:
b) En este caso:

$$\ddot{x} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{g}{h}}\dot{x} + \frac{g}{h}x = 0$$

De la forma

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

Con $\beta = \dfrac{b}{2m}$, $\omega_o = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

La solución de la ecuación es de la forma

$y = e^{rt}$

Reemplazando en la ecuación obtenemos:

$r^2 e^{rt} + 2\beta r e^{rt} + \omega_o^2 e^{rt} = 0$

Simplificando

$r^2 + 2\beta r + \omega_o^2 = 0$

Las raíces de esta ecuación son:

$r_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ y $r_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

Por consiguiente la solución general de la ecuación es

$$x = e^{-\beta t}\left[Be^{\sqrt{\beta^2-\omega_o^2}\,t} + Ce^{-\sqrt{\beta^2-\omega_o^2}\,t}\right]$$

Discusión de la solución

Cuando $\omega_o^2 > \beta^2$

$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = i\omega_1$ es una cantidad imaginaria y

$$x = e^{-\beta t}\left[Be^{i\omega_1 t} + Ce^{-i\omega_1 t}\right]$$

Haciendo $B = \dfrac{A}{2}e^{i\delta}$ y $C = \dfrac{A}{2}e^{-i\delta}$

Obtenemos

$$x = Ae^{-\beta t}\left[\frac{e^{i(\omega_1 t+\delta)} + e^{-i(\omega_1 t+\delta)}}{2}\right]$$

Expresión que se puede escribir usando las relaciones de Euler como

$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \delta)$

$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = i\omega_1$

La frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas es

$$\omega_1 = \sqrt{\left\|\beta^2 - \omega_0^2\right\|} = \sqrt{\frac{g}{h} - \left(\frac{1}{6}\sqrt{\frac{g}{h}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{g}{h} - \frac{g}{36h}} = \sqrt{\frac{35g}{36h}}$$

c) La ecuación del movimiento es:

$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \delta)$, su amplitud es $Ae^{-\beta t}$

La energía inicial del movimiento es:

$E_i = \dfrac{1}{2}k\left(Ae^{-\beta t}\right)^2$, después de un tiempo Δt, desciende en un factor $1/e$,

$$E_f = \frac{E_i}{e} = \frac{1}{2}k\left(Ae^{-\beta(t+\Delta t)}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{1}{2}k\left(Ae^{-\beta t}\right)^2}{e} = \frac{1}{2}k\left(Ae^{-\beta(t+\Delta t)}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{e^{1/2}} = e^{\beta\Delta t}$$

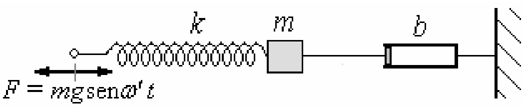
Luego

$$\beta\Delta t = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{2\beta}$$

Reemplazando valores:

$$\Delta t = \frac{6}{2}\sqrt{\frac{h}{g}} = 3\sqrt{\frac{h}{g}}$$

d) El oscilador se impulsa con una fuerza $F = mg\,\text{sen}\,\omega' t$, con $\omega' = \sqrt{2g/h}$



La ecuación del movimiento es

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F_o\,\text{sen}\,\omega' t$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = \frac{F_o}{m}\text{sen}\,\omega' t$$

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_o^2 y = \frac{mg}{m}\text{sen}\,\omega' t = g\,\text{sen}\,\omega' t$$

La amplitud de la respuesta del estado estacionario está dada por

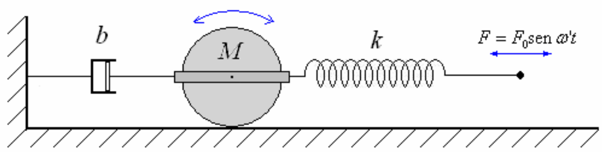
$$D = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega'^2\right)^2 + 4\beta^2\omega'^2}}$$

$$= \frac{g}{\sqrt{\left(\frac{g}{h} - \frac{2g}{h}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{6}\sqrt{\frac{g}{h}}\right)^2\left(\sqrt{\frac{2g}{h}}\right)^2}}$$

$$= \frac{g}{1{,}105\frac{g}{h}} = 0{,}9h$$

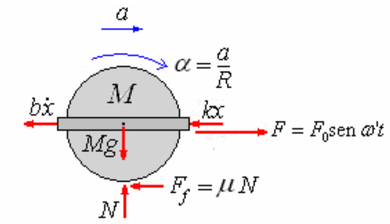
Ejemplo 51. Un cilindro de masa M y radio R se conecta por medio de un resorte de constante k y una amortiguación de constante b. En el extremo libre se aplica una fuerza $F = F_0\,\text{sen}\,\omega' t$ como de muestra en la figura. Si el cilindro tiene libertad de rodar sobre la superficie horizontal sin resbalar. Encontrar:

a) La ecuación diferencial del movimiento.
b) La solución transitoria.
c) La solución estacionaria.
d) La frecuencia de resonancia



Solución.

a) Diagrama del cuerpo libre de la masa.



Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento lineal.

$$\sum F_x = Ma \Rightarrow$$

$$-kx - b\dot{x} + F_f + F_0 \text{sen}\,\omega' t = M\ddot{x}$$

Donde $F_f = \mu N$ es la fuerza de fricción,

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - Mg = 0 \Rightarrow N = Mg$$

Aplicando la segunda ley de Newton para la rotación,

$$\sum \tau = I_o \ddot{\theta}$$

$$I_o \ddot{\theta} = F_f R \Rightarrow \left(\frac{1}{2} mR^2\right)\left(\frac{\ddot{x}}{R}\right) = F_f R$$

$$\Rightarrow F_f = \frac{1}{2} m\ddot{x}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de la fuerza obtenemos

$$-kx - b\dot{x} - \frac{1}{2} M\ddot{x} + F_0 \text{sen}\,\omega' t = M\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} M\ddot{x} + b\dot{x} + kx - = F_0 \text{sen}\,\omega' t$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{2b}{3M}\dot{x} + \frac{2k}{3M}x - = \frac{2F_0}{3M}\text{sen}\,\omega' t$$

b) La solución transitoria es la solución de

$$\ddot{x} + \frac{2b}{3M}\dot{x} + \frac{2k}{3M}x - = 0$$

Que tiene la forma

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = 0 \quad \text{(I)}$$

$$\beta = \frac{b}{3M}, \quad \omega_o = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$$

Pondremos la solución para el caso subamortiguado

Cuando $\omega_o^2 > \beta^2$

$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = i\omega_1$ es una cantidad imaginaria y

$$y = e^{-\beta t}\left[Be^{i\omega_1 t} + Ce^{-i\omega_1 t}\right]$$

Haciendo $B = \frac{A}{2}e^{i\delta}$ y $C = \frac{A}{2}e^{-i\delta}$

Obtenemos

$$x = Ae^{-\beta t}\left[\frac{e^{i(\omega_1 t+\delta)} + e^{-i(\omega_1 t+\delta)}}{2}\right]$$

Expresión que se puede escribir usando las relaciones de Euler como

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \delta)$$

c) La solución estacionaria. tiene la frecuencia de la fuerza impulsora y tiene la forma

$x = D\text{sen}(\omega' t + \delta')$.

Con

$$D = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega'^2\right)^2 + 4\beta^2\omega'^2}} \quad \text{y}$$

$$\tan\delta' = \frac{2\beta\omega'}{\omega_o^2 - \omega'^2}$$

d) La frecuencia de resonancia es:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{2k}{3M} - 2\left(\frac{b}{3M}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3M}\left(k - \frac{b^2}{3M}\right)}$$

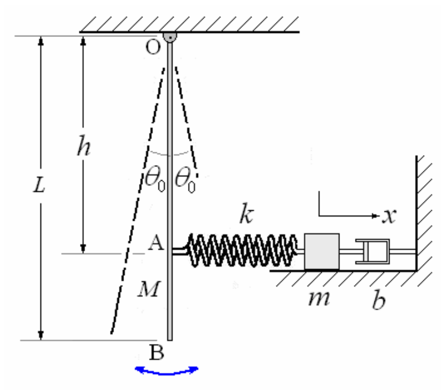
Ejemplo 52. En el sistema de la figura, la varilla rígida OAB tiene longitud L y masa despreciable. El resorte de constante k está unido a la varilla en el punto A y a la masa puntual m, que se encuentra sobre una superficie horizontal sin fricción. El coeficiente del amortiguador es b. La varilla se hace oscilar con un pequeño motor (que no se muestra) de modo que la ley de movimiento del péndulo es $\theta = \theta_0 \text{sen}\sqrt{\frac{g}{L}}t$.

a) Encuentre la ecuación $x_A(t)$ del extremo del resorte unido a la varilla. Diga, cualitativamente, qué tipo de movimiento tendrá la masa m.

b) Plantear la ecuación diferencial de movimiento de la masa m.

c) Hallar la solución estable del movimiento de la masa m.

d) ¿Para qué longitud L de la varilla el sistema es resonante?



Solución.
a)

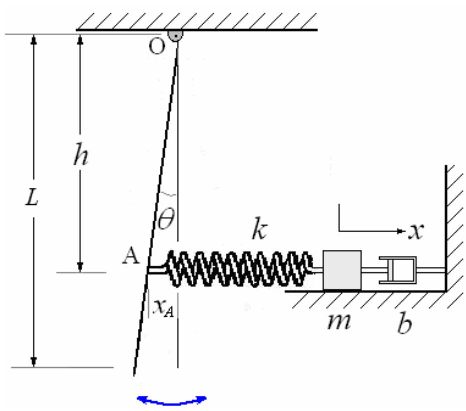
Como $\theta_{(t)} = \theta_0 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{g}{L}}t$

El movimiento de A para pequeñas oscilaciones

$$x_{A(t)} = h\theta_{(t)} = h\theta_0 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{g}{L}}t$$

La masa *m* tendrá un movimiento armónico simple amortiguado forzado debido al movimiento del extremo A del resorte por ser un punto de la varilla oscilante.

b)



La ecuación del movimiento de la masa *m* es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + k(x - x_A) = 0 \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = kx_A \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = kh\theta_0 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{g}{L}}t \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{kh\theta_0}{m}\operatorname{sen}\sqrt{\frac{g}{L}}t \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{kh\theta_0}{m}\operatorname{sen}\sqrt{\frac{g}{L}}t$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{g}{L}},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},\ \beta = \frac{b}{2m}$$

c) $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{kh\theta_0}{m}\operatorname{sen}\omega' t$

La solución estacionaria del movimiento de la masa *m*.

$$x = D\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \delta\right)$$

$$D = \frac{kh\theta_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega'^2\right)^2 + 4\beta^2\omega'^2}},\ \omega' = \sqrt{\frac{g}{L}},$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},\ \beta = \frac{b}{2m}$$

$$\tan\delta = \frac{2\beta\omega'}{\omega_o^2 - \omega'^2}$$

d) El sistema entra en resonancia cuando

$$\omega' = \omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$$

$$\sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{k}{m} - 2\left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$\frac{g}{L} = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m} = \frac{2k - b^2}{2m}$$

$$L = \frac{2m}{2k - b^2}\frac{g}{L}$$

CASO DEL PUENTE TACOMA

El puente Tacoma original era conocido como "Galloping Gertie" debido a su balanceo, comportamiento ondulado. Tenía una longitud de 1980 metros aproximadamente y fue abierto al tráfico el 1 de julio de 1940 uniendoTacoma y el puerto Gig por carretera.

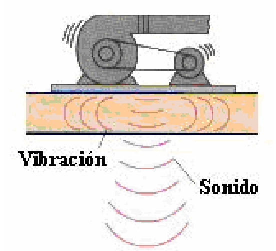
El puente era un diseño inusualmente ligero, los ingenieros descubrieron, una peculiar sensibilidad a los fuertes vientos. En lugar de resistirlos, como lo hacen la mayoría de los puentes modernos, El puente Tacoma tendía a sacudirse y a vibrar. Esto empeoró progresivamente debido a los fenómenos armónicos.

Cuatro meses después de la inauguración del puente, hubo una tormenta con viento de 70 km/h en el área alrededor del puente el 7 de noviembre de 1940. El viento hizo sacudir puente violentamente de lado a lado, y finalmente rompió el puente.

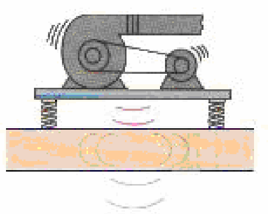
Este incidente sucedió debido a la estructura del puente entró en resonancia con la vibración que producía el viento. Nadie murió, pues el puente había sido cerrado debido a sacudidas anteriores. Éste es el más conocido y estudiado de fallas por oscilación forzada, gracias a la película y las fotografías que registran el derrumbamiento.

Muchas veces necesitamos un sistema que no transfiera eficientemente la energía. Un ejemplo es un mecanismo para aislar de las vibraciones a aparatos sensibles. Una solución común al problema de la vibración consiste en fijar la fuente de vibración sobre un montaje elástico que amortigüe y absorba los movimientos. Lo que quizás no sea tan obvio es el hecho de que el problema puede agravarse con un montaje elástico incorrecto. E1 aislamiento se consigue al disminuir la frecuencia natural del sistema con relación a la frecuencia de la fuente vibratoria. La razón por la que esta técnica funciona es la menor transferencia de energía cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es mucho mayor que la frecuencia natural del sistema.
Hemos fundamentado completamente nuestro análisis de la resonancia, así como de la respuesta de un sistema al movimiento forzado, en el comportamiento de una masa unida a un resorte que cumple con la ley de Hooke. Sin embargo, se aplican los mismos principios y resultados generales a otros sistemas oscilantes, sean mecánicos, eléctricos o de otro tipo.

Ejemplo 53. Un equipo de ventilación del sistema de calefacción y aire acondicionado de un edificio se monta firmemente en el techo y opera en forma continua. Las vibraciones se transmiten a la estructura del edificio y generan niveles de vibración inaceptables.



Para reducir la vibración que se percibe abajo, se va a fijar el equipo a una placa montada sobre resortes. EI eje del ventilador gira a 1800 rpm (revoluciones por minuto) y la masa combinada de la unidad y la placa de montaje (véase la figura) es de 576 kg.



¿Cuál es la constante de rigidez apropiada para los resortes usados para soportar la placa? Suponga que se emplean cuatro resortes, uno en cada esquina.

Estrategia. El sistema de oscilación en este caso está compuesto por el motor, el ventilador, la plataforma de montaje y los resortes. Una regla práctica a la que se recurre algunas veces establece que la frecuencia impulsora, o perturbadora, debe ser por lo menos 3 veces la frecuencia natural del sistema. Para muchos casos, resulta adecuado un factor de 5 y, en condiciones críticas, resulta conveniente un factor de 12 o superior. Podemos conseguir estos factores reduciendo la frecuencia natural del sistema. Si elegimos una proporción de 1 a 5, lo que corresponde a una reducción en la fuerza de las vibraciones en el edificio de más o menos 96%, la frecuencia natural que se desea del sistema es

$$\frac{1}{5}(1800\text{ rpm})\left(\frac{2\pi}{60s/\min}\right)=12\pi\ \text{ Hz}$$

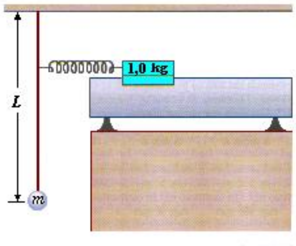
Solución. Los resortes adecuados pueden elegirse utilizando

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

AI resolver para la constante de resorte k, obtenemos
$k = m(2\pi f)^2 = (576\text{ kg})(12\pi/\text{s})^2 = 8{,}18 \times 10^5$ N/m.
Esta sería la más grande constante de resorte deseable si todas las masas se soportaran mediante un resorte. Puesto que son cuatro en total, uno en cada esquina de la placa de montaje, cada uno de estos cuatro resortes tendrá una constante o rigidez de

$$\frac{1}{4}\left(8{,}18\times10^5\text{ N/m}\right)=2{,}05\times10^5\text{ N/m}$$

Ejemplo 54. ¿Cuál debe ser la longitud del péndulo en la figura para producir la amplitud máxima en el carrito de 1,0 kg del carril neumático si la constante de resorte es k = 120 N/m?

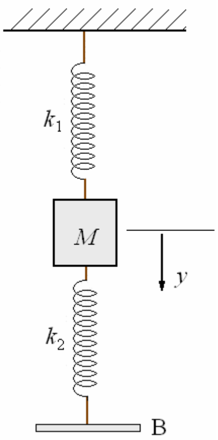


Solución.
La amplitud máxima se alcanzará cuando el péndulo oscile con la frecuencia de resonancia, en este caso no hay amortiguamiento, luego la frecuencia de de resonancia es: $\omega_R = \omega_0$

$$\sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$$

$$L = \frac{mg}{k} = \frac{(1{,}0)(9{,}8)}{120} = 0{,}0817 \text{ m} = 8{,}2 \text{ cm}$$

Ejemplo 55. En el sistema mostrado, el extremo B es obligado a moverse verticalmente con variación armónica, según $y_B = B_0 \text{sen}\omega t$.
Considerando que para $t = 0$, $y_0 = 0$ y $v_0 = 0$, determinar:
a) La ley de movimiento de la masa M.
b) La frecuencia de resonancia del sistema.



Solución.

a) $-(k_1 + k_2)y - M\ddot{y} = k_2 B_0 \text{sen}\omega' t$

$$\ddot{y} + \frac{(k_1 + k_2)}{M} y = \frac{k_2 B_0}{M} \text{sen}\omega' t$$

$$y = y_t + y_p$$

$$y_t = A\text{sen}(\omega t + \phi)$$

$$y_p = D\text{sen}(\omega' t + \delta)$$

$$D = \frac{\frac{k_2 B_0}{M}}{\frac{(k_1 + k_2)}{M} - \omega'^2} = \frac{k_2 B_0}{(k_1 + k_2) - M\omega'^2},$$

$\delta = 0^\circ$

$$y_p = D\text{sen}\omega' t$$

$$y = y_t + y_p = A\text{sen}(\omega t + \phi) + D\text{sen}\omega' t$$

$$v = v_t + v_p = A\omega\cos(\omega t + \phi) + D\omega'\cos\omega' t$$

Para $t = 0$, $y_0 = 0$ y $v_0 = 0$,

$$0 = A\text{sen}\phi \Rightarrow \phi = 0$$

$$0 = A\omega\cos\phi + D\omega' \Rightarrow A\omega\cos 0 = -D\omega' \Rightarrow$$

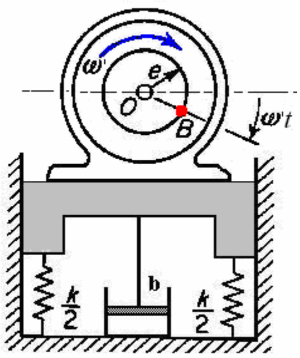
$$A = -D\frac{\omega'}{\omega} \Rightarrow A = -\left[\frac{k_2 B_0}{(k_1 + k_2) - M\omega'^2}\right]\frac{\omega'}{\omega}$$

b) La frecuencia de resonancia es para D máximo

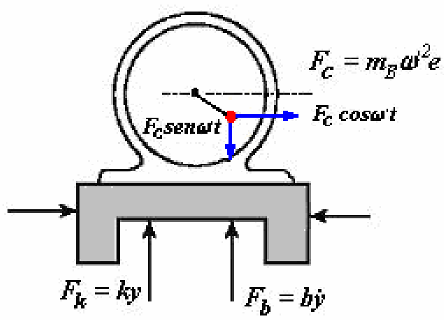
$$(k_1 + k_2) - M\omega'^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\omega' = \omega_R = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)}{M}}$$

Ejemplo 56. El motor en la figura está montado sobre dos resortes, cada uno con modulo $k/2$ = 10000 N/m. El amortiguador tiene un coeficiente b = 140 N.s/m. El motor incluyendo la masa desbalanceada B, pesa 170 N, y el cuerpo no balanceado B pesa 4,5 N y está localizado a 7,5 cm. del centro del eje.
a) El motor gira a 300 rpm. Determine la amplitud y el ángulo de fase (relativo a la posición de B) del movimiento resultante.
b) Determine la velocidad de resonancia y la amplitud resultante del movimiento.



Solución.



a) Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento vertical.

$$\sum F_y = ma_y,$$

$$-F_k - F_b + F_c \operatorname{sen}\omega t = ma_y$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{k}{2}+\frac{k}{2}\right)y - b\dot{y} + F_c \operatorname{sen}\omega t = m\ddot{y}$$

La ecuación del movimiento es

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + \left(\frac{k}{2}+\frac{k}{2}\right)y = F_c \operatorname{sen}\omega t$$

$$\Rightarrow m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F_c \operatorname{sen}\omega t$$

o $\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = \dfrac{F_c}{m}\operatorname{sen}\omega t$

Donde $m = \dfrac{170}{9,8} = 17,3kg$, b = 140 N.s/m

y $\beta = \dfrac{b}{2m} = 4$

k = 20000 N/m y $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 34$ rad/s

$$\omega' = \frac{300\times 2\pi}{60} = 31,4\text{rad/s}$$

$$F_c = m_B e\omega'^2 = \frac{4,5}{9,8}\times 0,075\times(31,4)^2 = 34\text{ N}$$

La solución de la ecuación es

$$y = D\operatorname{sen}(\omega' t + \delta)$$

Con $D = \dfrac{F_c/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega'^2\right)^2 + 4\omega'^2\beta^2}}$

y $\tan\delta' = \dfrac{2\omega'\beta}{\omega_o^2 - \omega'^2}$

Reemplazando valores:

$$D = \frac{34/17,3}{\sqrt{\left(34^2 - 31,4^2\right)^2 + 4\times 31,4^2\times 4^2}}$$

$$= 7,8\times 10^{-3}\text{m} = 7,8\text{ mm}$$

El ángulo de fase

$$\tan\delta = \frac{2\times 31,4\times 4}{34^2 - 31,4^2} = 1,48,\ \delta = 55,9^{\circ}$$

b) La resonancia ocurre cuando

$$\omega' = \omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$$

$$\omega_R = \sqrt{34^2 - 2\times 4^2} = 33,5\text{rad/s}$$

$$\omega_R = \frac{33,5\times 60}{2\pi} = 320\text{rpm}$$

La amplitud de resonancia es:

$$D = \frac{F_c/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega_R^2\right)^2 + 4\omega_R^2\beta^2}}$$

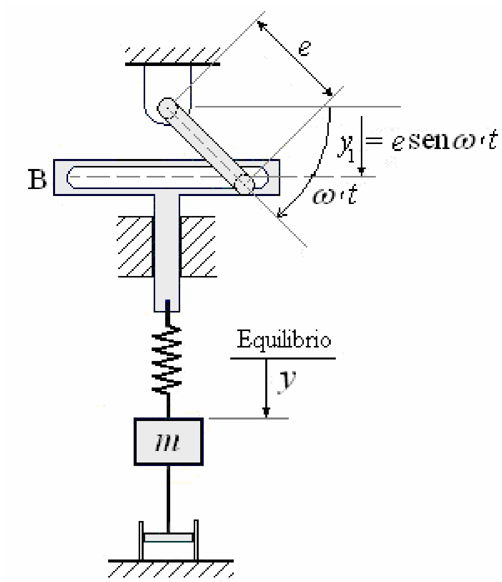
$$= \frac{34/17,3}{\sqrt{\left(34^2 - 33,5^2\right)^2 + 4\times 33,5^2\times 4^2}}$$

$$= 7,3\times 10^{-3}\text{m} = 7,3\text{ mm}$$

Ejemplo 57. El cuerpo *D* de la figura tiene una masa de 10 kg y está soportado por un resorte con una constante de 1000 N/m. El cuerpo en la parte superior da al resorte un movimiento armónico vertical por medio de la manivela que tiene una velocidad angular de 40 rpm. La longitud de la manivela es de 1,30 cm.

a) determine la amplitud y ángulo de fase del movimiento de la masa *m* cuando el coeficiente de amortiguación es 100 N.s/m y cuando se desconecta el amortiguador

b) Determine el rango de valores de ω (si hay alguno) que limitará al movimiento de la masa a 2 cm. Cuando b = 0.



Solución.

a) Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento vertical.

$$\sum F_y = ma_y,$$

$$-F_k - F_b = ma_y$$

$$-k(y - y_1) - b\dot{y} = m\ddot{y}$$

Como $y_1 = e\operatorname{sen}\omega' t$

$$-k(y - e\operatorname{sen}\omega' t) - b\dot{y} = m\ddot{y}$$

La ecuación del movimiento es

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = ke\operatorname{sen}\omega t$$

o $\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = \dfrac{ke}{m}\operatorname{sen}\omega' t$

Donde

$m = 10kg$, b = 100 N.s/m y $\beta = \dfrac{b}{2m} = 5$

$k = 1000$ N/m y $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 10\text{rad/s}$

$$\omega' = \frac{40\times 2\pi}{60} = 4{,}19\text{rad/s}$$

La solución de la ecuación es

$$y = D\text{sen}(\omega' t + \delta)$$

con $D = \dfrac{ke/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega'^2\right)^2 + 4\omega'^2\beta^2}}$ y

$$\tan\delta' = \frac{2\omega'\beta}{\omega_o^2 - \omega'^2}$$

Reemplazando valores:

$$D = \frac{1000\times 1{,}3\times 10^{-2}/10}{\sqrt{\left(10^2 - 4{,}19^2\right)^2 + 4\times 4{,}19^2\times 5^2}}$$

$$= 1{,}41\times 10^{-2} m = 1{,}41 \text{ cm}$$

El ángulo de fase

$$\tan\delta' = \frac{2\times 4{,}19\times 5}{10^2 - 4{,}19^2} = 0{,}51,\ \delta' = 26{,}9^{\text{o}}$$

Cuando se desconecta el amortiguador $\beta = 0$.

Con $D = \dfrac{ke/m}{\omega_o^2 - \omega'^2}$ y $\tan\delta' = 0$

Reemplazando valores:

$$D = \frac{1000\times 1{,}3\times 10^{-2}/10}{10^2 - 4{,}19^2}$$

$$= 1{,}58\times 10^{-2}\text{ m} = 1{,}58 \text{ cm}$$

El ángulo de fase

$\tan\delta' = 0, \Rightarrow\ \delta' = 0^{\text{o}}$

b) Determine el rango de valores de ω' (si hay alguno) que limitará al movimiento de la masa a 2 cm. Cuando $b = 0$.

La resonancia ocurre cuando

$$\omega' = \omega_R = 10\text{rad/s}$$

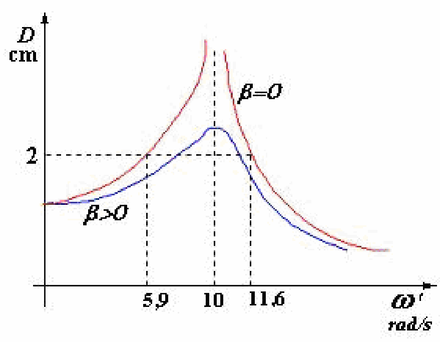
La amplitud D es infinita.

El valor de D con un valor máximo de dos se encuentra con

$D = \dfrac{ke/m}{\pm(\omega_o^2 - \omega'^2)}$ Para $D = 2$ cm

$$\Rightarrow D = \frac{1{,}3}{\pm(10^2 - \omega^2)} = 2\times 10^{-2}\text{m}$$

se obtiene $\omega'_1 = 5{,}9\text{rad/s}$ y $\omega'_2 = 11{,}6\text{rad/s}$



D tiene como valor máximo 2 cuando

$$5{,}9\text{rad/s} \le \omega' \ge 11{,}6\text{rad/s}$$

Ejemplo 58. La relación entre la fuerza aplicada a un resorte y el alargamiento producido (ley de Hooke) es: $F = 439\ \Delta\ell$ (todo en SI): Si se suspende el resorte de un extremo y se cuelga en el otro una masa $m = 3{,}2$ kg calcular:

a) la frecuencia propia de las oscilaciones.

b) Si existe un amortiguamiento debido a una fuerza resistente $F = -33v$ (velocidad) ¿cuál será la frecuencia y la ecuación diferencial del movimiento?

c) Sí además actúa una fuerza sinusoidal de amplitud 10 N y frecuencia doble que la propia del oscilador ¿cuál es la velocidad máxima en las oscilaciones forzadas permanentes?

Solución.

a) La ley de Hooke es: $F = k\,\Delta\ell \quad \Rightarrow\ F = 439\,\Delta\ell$

Luego la constante del resorte es $k = 439$ N/m

La frecuencia angular propia del resorte es:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{439}{3{,}2}} = 11{,}7 \text{ rad/s}$$

La frecuencia propia o natural es:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{11{,}7}{2\pi} = 1{,}864 \text{ Hz}$$

b) La ecuación del movimiento con fuerza resistente es:

$$-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

Con $k = 439$ N/m, $b = 33$ N.s/m y $m = 3{,}2$ kg:

$$-439x - 33b\dot{x} = 3{,}2\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + 10{,}31\dot{x} + 137{,}2x = 0$$

Ecuación de la forma

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Donde: $2\beta = 10{,}31$ y $\omega_0^2 = 137{,}2$

Cuya solución es

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi)$$

Con A y ϕ constantes cuyos valores dependen de las condiciones iniciales del movimiento y

$$\omega = \sqrt{\left|\beta^2 - \omega_0^2\right|} = \sqrt{\left|\left(\frac{10,31}{2}\right)^2 - 137,2\right|}$$

= 10,52 rad/s

Observamos que es un poco menor que la propia del oscilador ω_0

La frecuencia $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{10,52}{2\pi}$ = 1,674 Hz

c) Sí además actúa una fuerza sinusoidal de amplitud 10 N y frecuencia doble que la propia del oscilador

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento.

$$\sum F = ma \Rightarrow -kx - b\dot{x} + F_0 \operatorname{sen}\omega' t = m\ddot{x}$$

La ecuación del movimiento es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \operatorname{sen}\omega' t$$

o $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \dfrac{F_0}{m}\operatorname{sen}\omega' t$

Donde además de los valores conocidos, tenemos F_0 = 10 N y $\omega' = 2\omega_0$ = 2 (11,71) = 23,43 rad/s.

La solución de la ecuación es

$x = D\operatorname{sen}(\omega' t + \delta)$, la velocidad es

$$\frac{dx}{dt} = D\omega' \cos(\omega' t + \delta)$$

con $D = \dfrac{F'/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega'^2\right)^2 + 4\omega'^2\beta^2}}$ y

$$\tan\delta = \frac{2\omega\beta}{\omega_o^2 - \omega'^2}$$

Reemplazando valores:

$$D = \frac{10/3,2}{\sqrt{\left(11,71^2 - 23,43^2\right)^2 + 4 \times 23,43^2 \times 5,15^2}}$$

= 6,54 x 10^{-3} m = 6,54 mm

Y la velocidad máxima es

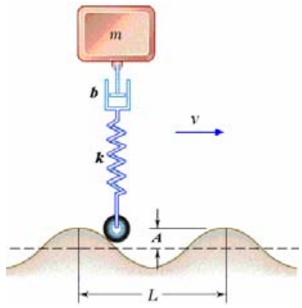
$$D\omega' = 6,54 \times 10^{-3}(23,43) = 0,153 \text{ m/s}$$

Ejemplo 59. Para estudiar el movimiento de un carro en un camino "encalaminado", se puede usar el siguiente modelo: El camino se representa por una sinusoide de amplitud A y separación entre crestas L.

El carro se representa por una masa M apoyada sobre un resorte de constante de rigidez k y un amortiguador de constante b (que representan a los 4 resortes y amortiguadores, realmente existentes, con el objeto de considerar únicamente el efecto vertical). El carro avanza con una velocidad horizontal v constante.

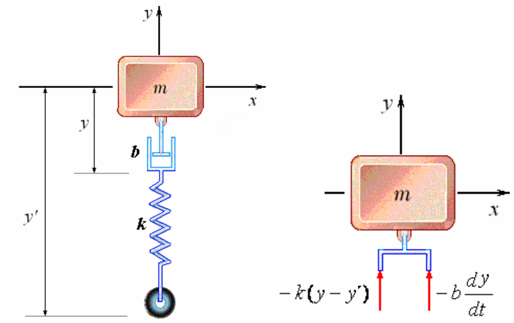
a) Encontrar la amplitud y frecuencia del movimiento vertical del carro.

b) ¿A qué velocidad entrará en resonancia?



Solución.

a) El carro tiene oscilación forzada debido al encalaminado de la carretera. El encalaminado le produce un movimiento vertical dado por la ecuación: $y' = A\operatorname{sen}\omega' t$, donde $\omega' = 2\pi f$, con $f = \dfrac{v}{\lambda} = \dfrac{v}{L}$.



La ecuación del movimiento vertical de la masa M se obtiene de $\sum F_y = Ma_y$

$$-k(y - y') - b\dot{y} = M\ddot{y} \Rightarrow$$

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = kA\operatorname{sen}\omega' t$$

$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_o^2 y = \dfrac{kA}{M}\operatorname{sen}\omega' t$, con $2\beta = \dfrac{b}{M}$ y

$$\omega_o^2 = \frac{k}{M}$$

La parte importante de la solución es la estacionaria

$y = D\operatorname{sen}(\omega' t + \delta)$, con

$D = \dfrac{kA/M}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega'^2\right)^2 + 4\beta^2\omega'^2}}$ y

$$\tan\delta = \frac{2\beta\omega'}{\omega_o^2 - \omega'^2}$$

La amplitud del movimiento esta dada por D y la frecuencia por ω'

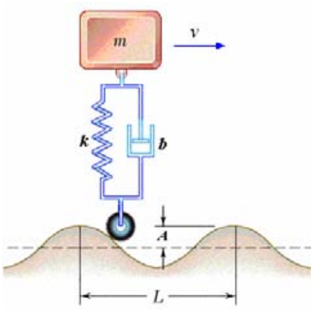
b) Como $\omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2} = 2\pi \dfrac{v}{L}$

Entrará en resonancia con la velocidad

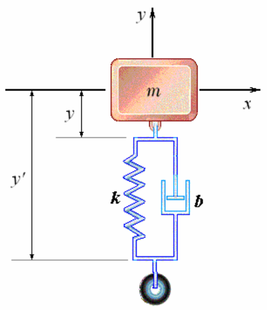
$$v = \frac{L\sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}}{2\pi}$$

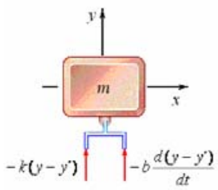
Nota: En la solución consideramos para el amortiguador solo el efecto del movimiento de la masa, para el resorte consideramos el efecto del movimiento de la masa y el producido por el calaminado. En el problema siguiente consideraremos los dos efectos en los dos elementos.

Ejemplo 60. Para estudiar el movimiento de un carro en un camino “encalaminado”, se puede usar el siguiente modelo: El camino se representa por una sinusoide de amplitud A y separación entre crestas L.
El carro se representa por una masa m apoyada sobre un resorte de constante de rigidez k y un amortiguador de constante b (que representan a los 4 resortes y amortiguadores, realmente existentes, con el objeto de considerar únicamente el efecto vertical). El carro avanza con una velocidad horizontal v constante.
a) Encontrar la amplitud y frecuencia del movimiento vertical del carro.
b) ¿A qué velocidad entrará en resonancia?



Solución.
a) El carro tiene oscilación forzada debido al encalaminado de la carretera. El encalaminado le produce un movimiento vertical dado por la ecuación: $y' = A\,\text{sen}\,\omega' t$, donde $\omega' = 2\pi f$, con $f = \dfrac{v}{\lambda} = \dfrac{v}{L}$.





La ecuación del movimiento vertical de la masa M se obtiene de $\sum F_y = Ma_y$

$$-k(y - y') - b\frac{d(y - y')}{dt} = M\frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$\Rightarrow -ky + ky' - b\dot{y} + b\dot{y}' = M\ddot{y}$$

Con $y' = A\,\text{sen}\,\omega' t$ y $\dfrac{dy'}{dt} = \dot{y}' = A\omega'\cos\omega' t$:

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = kA\,\text{sen}\,\omega' t + b\omega' \cos\omega' t$$

Haciendo $kA = F_0\,\text{sen}\,\phi$ y $b\omega' = F_0\cos\phi$,

Con $\phi = \tan^{-1}\dfrac{kA}{b}$ y $F_0 = \sqrt{(kA)^2 + (b\omega')^2}$

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F_0\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\omega' t + F_0\cos\phi\cos\omega' t$$

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F_0\cos(\omega' t - \phi) \Rightarrow$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{M}\dot{y} + \frac{k}{M}y = \frac{F_0}{M}\cos(\omega' t - \phi)$$

Con $2\beta = \dfrac{b}{M}$ y $\omega_o^2 = \dfrac{k}{M}$:

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{M}\cos(\omega' t - \phi)$$

La parte importante de la solución es la estacionaria

$y = D\cos(\omega' t - \phi + \delta)$, con

$$D = \frac{F_0 / M}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega'^2)^2 + 4\beta^2\omega'^2}} \text{ y}$$

$$\tan\delta = \frac{2\beta\omega'}{\omega_o^2 - \omega'^2}$$

La amplitud del movimiento esta dada por D y la frecuencia por ω'

b) Como $\omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2} = 2\pi \dfrac{v}{L}$

Entrará en resonancia con la velocidad

$$v = \frac{L\sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}}{2\pi}$$

Ejemplo 61. La constante elástica de un resorte es 40 N/m. Un extremo está fijo y en el otro hay una masa m = 0,16 kg. Calcular:
a) la frecuencia propia de la oscilación.
b) la ecuación diferencial del movimiento sin amortiguamiento.
c) La energía para el oscilador si amortiguamiento para amplitud de 0,02 m.

d) Si la masa se introduce en aceite se origina la fuerza resistente viscosa *F* = - *bv* (siendo *b* el coeficiente de amortiguamiento y *v* la velocidad). Escribir la ecuación diferencial del movimiento amortiguado para *b* = 0,4 Ns/m.
e) ¿Cuánto tendría que valer *b* para que el movimiento no fuese oscilatorio?
f) Para *b* = 0,4 expresar la amplitud en función del tiempo.
g) Dar la frecuencia del movimiento.
h) Si *b* = 0,4 y además aparece una fuerza sinusoidal de amplitud 0,5 N y frecuencia doble que la propia, calcular la amplitud de la oscilación y la diferencia de fase con la fuerza aplicada
i) Calcular la frecuencia de resonancia, y dar la amplitud en este caso.
j) Escribir la ecuación del movimiento completa y dar la solución general, indicando el tiempo para el cual la amplitud del tiempo transitorio se reduce ala mitad.

Solución.

a) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{40}{0,16}} = \sqrt{250}$ = 15,81 rad/s

b) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 250x = 0$

c) La energía para el oscilador si amortiguamiento para amplitud de 0,02 m.

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(40)(0,02)^2 = 0,008 \text{ N}$$

d) La ecuación diferencial del movimiento amortiguado para es:

$$-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

Con *k* = 40 N/m, *b* = 0,4 N.s/m y *m* = 0,16 kg:

$$-40x - 0,4b\dot{x} = 0,16\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + 2,5\dot{x} + 250x = 0$$

Ecuación de la forma

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Donde: $2\beta = 2,5$ y $\omega_0^2 = 250$

e) ¿Cuánto tendría que valer *b* para que el movimiento no fuese oscilatorio?
El movimiento es oscilatorio cuando
$\left(\beta^2 - \omega_0^2\right) < 0$ y no es oscilatorio cuando
$\left(\beta^2 - \omega_0^2\right) \geq 0$ o $\beta^2 \geq \omega_0^2$

$$\Rightarrow \beta^2 \geq 250 \Rightarrow \beta \geq 15,81$$

De aquí $b \geq 15,81(2m)$ $b \geq 5,06$

Como *b* = 0,4, realmente hay oscilación.

f) Para *b* = 0,4 expresar la amplitud en función del tiempo.

La solución de la ecuación del movimiento es

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi)$$

La amplitud está dada por $Ae^{-\beta t}$, donde

$\beta = \dfrac{2,5}{2} = 1,25\dfrac{\text{Ns}}{\text{m}}$ y *A* depende de las condiciones iniciales.

g) La frecuencia angular del movimiento es:

$$\omega = \sqrt{\left|\beta^2 - \omega_0^2\right|} = \sqrt{\left|\left(\frac{2,5}{2}\right)^2 - 250\right|}$$

= 15,76 rad/s

y la frecuencia $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{15,76}{2\pi}$ = 2,51 Hz

h) Si *b* = 0,4 y además aparece una fuerza sinusoidal de amplitud 0,5 N y frecuencia

$$\omega' = 2\omega_0 = 2(15,81) = 31,62 \text{ rad/s}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \operatorname{sen}\omega' t \Rightarrow$$

$$0,16\ddot{x} + 0,4b\dot{x} + 40x = 0,5\operatorname{sen}31,62t$$

De donde:

$$\ddot{x} + 2,5\dot{x} + 250x = 3,125\operatorname{sen}31,62t$$

Ecuación de la forma $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \dfrac{F_0}{m}\operatorname{sen}\omega' t$

Cuya solución es

$$x = D\operatorname{sen}(\omega' t + \delta)$$

Con $D = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega'^2\right)^2 + 4\omega'^2\beta^2}}$ y

$$\tan\delta = \frac{2\omega'\beta}{\omega_o^2 - \omega'^2}$$

Reemplazando valores:

$$D = \frac{3,125}{\sqrt{\left(15,81^2 - 31,62^2\right)^2 + 4(31,62)^2(1,25)^2}}$$

$= 4,14 \times 10^{-3}$ m

D = 4,4 mm

El ángulo de fase

$$\tan\delta = \frac{2 \times 31,62 \times 1,25}{15,81^2 - 31,62^2} = -0,1054,$$

$$\delta = -6,07^0$$

i) Calcular la frecuencia de resonancia, y dar la amplitud en este caso.

La resonancia ocurre cuando

$$\omega = \omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$$

$$\omega_R = \sqrt{15,81^2 - 2 \times 1,25^2} = 15,71 \text{rad/s}$$

La amplitud de resonancia es:

$$D = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega_R^2\right)^2 + 4\omega_R^2\beta^2}}$$

$$= \frac{3{,}125}{\sqrt{\left(15{,}81^2 - 15{,}71^2\right)^2 + 4\times 15{,}71^2 \times 1{,}25^2}}$$

$= 24{,}9 \text{ x } 10^{-3}$ m

j) Escribir la ecuación del movimiento completa y dar la solución general.

La ecuación completa del movimiento es.

$x = x_{\text{transitoria}} + x_{\text{particular}}$

La solución particular es $x = D\text{sen}(\omega' t + \delta)$

Y la solución transitoria es

$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi)$

El tiempo para el cual la amplitud del tiempo transitorio se reduce a la mitad es t'

De tal modo que $\dfrac{A}{2} = Ae^{-\beta t'}$

$$\Rightarrow\ t' = \frac{\ln 2}{\beta} = \frac{0{,}692}{1{,}25} = 0{,}554 \text{ s}$$

Ejemplo 62. En el sistema mostrado en la figura, si la masa de la polea mostrada en la figura es pequeña y la cuerda inextensible

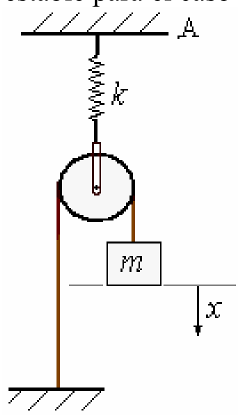
Encontrar:

a) La ecuación de movimiento para cuando el soporte A no tiene movimiento alguno.

b) La ecuación de Movimiento para cuando el soporte A según la siguiente ley $x_A = x_0 \cos\omega t$.

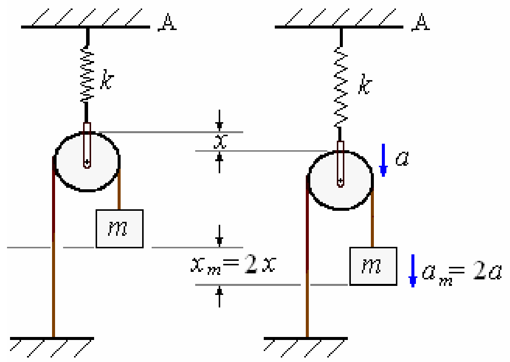
(Sugerencia: nótese que la deformación del resorte puede expresarla como la diferencia de las deformaciones de sus extremos)

c) La solución estable para el caso b.



Solución.

a)



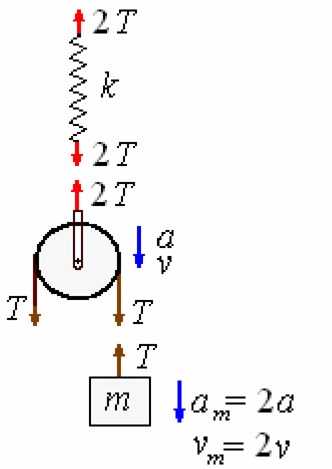
$x_m = 2x$, $\dot{x}_m = 2\dot{x}$, $\ddot{x}_m = 2\ddot{x}$

El resorte estira x y la masa baja la longitud $2x$.

La polea tiene una velocidad v, la masa tiene $2v$.

La polea tiene una aceleración a, la masa tiene $2a$.

A continuación el diagrama del cuerpo libre del sistema



El resorte estira x cuando se le aplica una fuerza F.

$F = kx$

Aplicando la segunda ley de Newton a la polea

$$F - 2T = 0 \ \Rightarrow\ T = \frac{F}{2} = \frac{kx}{2}$$

$$2T = kx \ \Rightarrow T = \frac{kx}{2}$$

Aplicando la segunda ley de Newton a la masa m:

$T = m2a$

La fuerza T es fuerza recuperativa.

$$\frac{-kx}{2} = m2\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{4m}x = 0$$

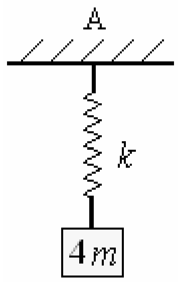
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Cuya solución es

$x = A\text{sen}(\omega_0 t + \varphi)$

Donde $\omega_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$, A y φ dependen de la condiciones iniciales.

El sistema es equivalente a tener un oscilador consistente en un resorte de constante k y una masa $4m$.



Solución por conservación de la energía

$E = K + U = \text{constante}$

$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$U = \frac{1}{2}kx^2$

Luego

$$\frac{1}{2}m\left(2\dot{x}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante}$$

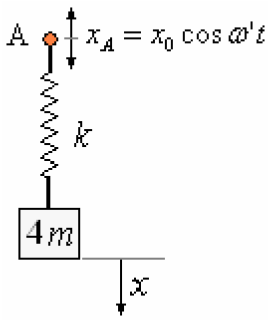
Derivando

$$8m\dot{x}\ddot{x} + 2kx\dot{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{4m}x = 0$$

La frecuencia angular de las oscilaciones de la masa m es: $\omega_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$

b)



El resorte estira $(x - x_A) = (x - x_0\cos\omega' t)$

La ecuación de Movimiento para cuando el soporte A según la siguiente ley $x_A = x_0\cos\omega' t$.

$$4m\ddot{x} + k(x - x_0\cos\omega t) = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{4m}x = \frac{kx_0}{4m}\cos\omega t$$

a) La solución estable de la ecuación $\ddot{x} + \frac{k}{4m}x = \frac{kx_0}{4m}\cos\omega t$, es de la forma.

$x = D\cos(\omega' t + \delta')$

Con $D = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega'^2\right)^2 + 4\omega'^2\beta^2}}$ y

$$\tan\delta' = \frac{2\omega'\beta}{\omega_o^2 - \omega'^2}$$

En nuestro caso $\frac{F_0}{m} = \frac{kx_0}{4m}$, $\beta = 0$ y $\omega_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$

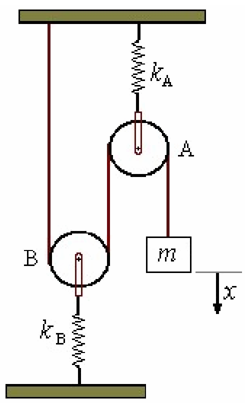
Luego

$$D = \frac{kx_0/4m}{\left(k/4m - \omega'^2\right)} \text{ y } \tan\delta' = 0 \Rightarrow \delta' = 0$$

Finalmente

$$x = D\cos\omega' t = \frac{kx_0/4m}{\left(k/4m - \omega'^2\right)}\cos\omega' t$$

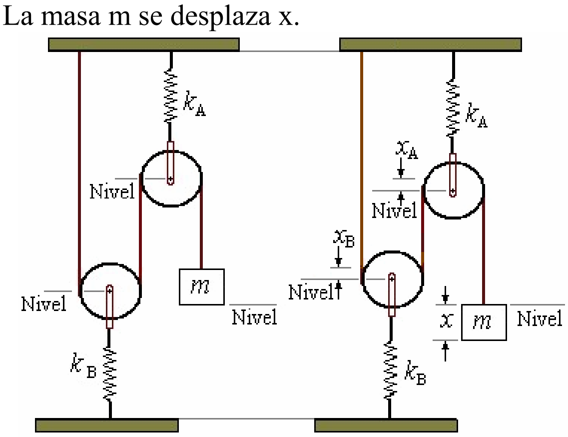
Ejemplo 63. Si la masa de las poleas mostradas en la figura es pequeña y la cuerda inextensible, encontrar la frecuencia natural del sistema.



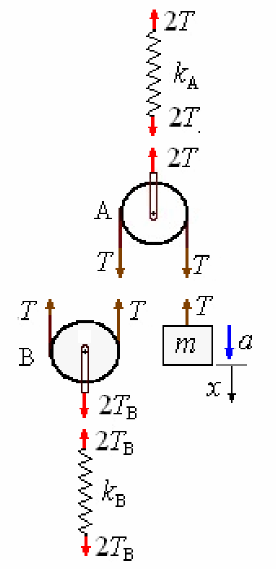
Solución.

El resorte A se deforma x_A, el resorte B se deforma x_B.

La masa m se desplaza x.



La figura siguiente muestra el diagrama del cuerpo libre del sistema



Polea A, se desplaza x_A.

$$k_A x_A = 2T \Rightarrow x_A = \frac{2T}{k_A}$$

Polea B, se desplaza x_B.

$$k_B x_B = 2T \Rightarrow x_B = \frac{2T}{k_B}$$

La masa oscila como si pendiera de un resorte equivalente, se desplaza x.

$$k_{eq} x = T \Rightarrow x = \frac{T}{k_{eq}}$$

Relación entre los desplazamientos de los tres elementos

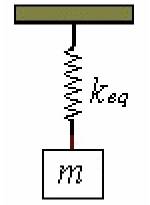
$$2x_A + 2x_B = x$$

$$2\frac{2T}{k_A} + 2\frac{2T}{k_B} = \frac{T}{k_{eq}} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{k_A} + \frac{4}{k_B} = \frac{T}{k_{eq}} \Rightarrow$$

$$k_{eq} = \frac{k_A k_B}{4(k_A + k_B)}$$

El sistema puede considerarse como un resorte equivalente $k_{eq} = \dfrac{k_A k_B}{4(k_A + k_B)}$ y una masa m.



Solución aplicando la segunda ley de Newton

$$\sum F = ma \Rightarrow$$

$$-k_{eq} x = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k_{eq}}{m} x = 0$$

Ecuación de la forma

$$\ddot{x} + \omega_9^2 x = 0$$

Cuya frecuencia angular es

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{k_A k_B}{4(k_A + k_B)}}$$

Solución aplicando la conservación de la energía.

$$E = K + U$$

Con

$$K = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 , \; U = \frac{1}{2} kx^2$$

Luego

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \text{Constante}$$

Derivando

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} m 2\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{2} k 2x\dot{x} = 0 \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Ecuación de la forma

$$\ddot{x} + \omega_9^2 x = 0$$

Cuya frecuencia angular es

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{k_A k_B}{4(k_A + k_B)}}$$

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Un oscilador armónico simple de 5 g de masa tiene un período de 0,6 s y una amplitud de 18 cm. Hallar el ángulo de fase, la velocidad y la fuerza aceleradora en el instante en que el desplazamiento del oscilador es -9 cm.

Respuesta
Fase = 120° o 240°, v = 160 cm/s, F = 0,05 N

2. Una nadadora de masa m está sobre una balanza situada en el extremo de una palanca de salto, que ella ha puesto previamente en movimiento armónico simple con frecuencia angular ω y amplitud $A = y_m$

(a) ¿Cuál es la lectura de la balanza? *(b)* ¿En qué condiciones se verá lanzada la nadadora de la palanca?

Respuesta

$F_g = mg - m\omega^2 y_m \text{sen}\,\omega t$

3. Una masa de 150 g situada en el extremo de un resorte horizontal se ve desplazada 3 cm hacia la izquierda de la posición de equilibrio mediante una fuerza de 60 N.

a) Hallar la frecuencia natural angular ω_0.

b) Hallar la amplitud del movimiento subsiguiente si se dejase de repente en libertad la masa.

c) ¿Cuáles serán la posición y velocidad de la masa 10 s después de haber quedado libre?

Respuesta

a) $\omega_0 = 115{,}47\, rad/s$, b) A = 3 cm, c) x = 0,492 cm a la izquierda de la posición de equilibrio, d) v = - 341,66 cm.

4. Un bloque descansa sobre una placa delgada que ejecuta un movimiento armónico simple vertical con un periodo de 1.2 s. ¿Cuál es la máxima amplitud del movimiento para el cual el bloque no se separa de la placa?

Respuesta

$A = 0{,}357$

5. Una plataforma está realizando un movimiento armónico simple en dirección vertical con una amplitud de 5 cm y una frecuencia de $10/\pi$ vibraciones por segundo. En el punto más bajo de su trayectoria se coloca un cuerpo sobre la plataforma.

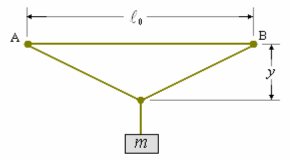
a) ¿En qué punto se separará el cuerpo de la plataforma?

b) ¿A qué altura ascenderá el cuerpo por encima del punto más alto alcanzado por la plataforma?

Respuesta

a) y = 2,5 cm, b) 1,25 cm

6. Un alambre de longitud ℓ_0 se alarga en $10^{-3}\ell_0$, cuando se cuelga de su extremo inferior una cierta masa. Si se conecta este mismo alambre entre dos puntos A y *B,* alejados ℓ_0 y situados en el mismo plano horizontal y de su punto medio se cuelga la misma masa, como se ve en la figura, ¿cuál es la depresión y en dicho punto y cuál es la tensión del alambre?



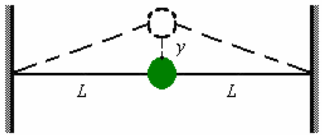
Respuesta

$y = \dfrac{\ell_0}{20}$, tensión = 5 x peso del objeto.

7. Una masa m se conecta a dos bandas de jebe de longitud *L*, cada una bajo una tensión *T*, como se muestra la figura. La masa se desplaza una pequeña distancia y en forma vertical. Suponiendo que la tensión no cambia significativamente, demuestre que:

a) la fuerza de restitución es - (2*T/L*) y

b) que el sistema presenta un movimiento armónico simple con una frecuencia dada por $\omega = \sqrt{2T/mL}$



8. Se observa que una fuerza de 0,1 N estira a una determinada cuerda elástica en 50 mm. Se suspende de un extremo de la cuerda un objeto de 15 g Y se le hace adquirir una vibración vertical tirando hacia abajo de él y luego soltándolo. ¿Hasta qué punto habrá que alargar la cuerda con el objeto colgado para que al alcanzar el punto más alto de la vibración no exista tensión en la cuerda?

Respuesta

$\Delta y = 7{,}5\text{cm}$

9. Una partícula gira con celeridad constante en una circunferencia de radio *R.*

a) Demostrar que sus proyecciones sobre los ejes horizontal y vertical (sus componentes x e y) realizan movimientos armónicos simples con unas constantes de fase que se diferencian en $\pi/2$. Esta circunferencia se conoce como circunferencia de referencia correspondiente a la oscilación horizontal.

b) Si el eje x representa el desplazamiento de un oscilador armónico simple en unidades de la amplitud A y el eje y representa su *velocidad* en unidades de ωA, demostrar que el gráfico del movimiento en el plano xy es un círculo de radio unidad.

10. Consideremos el oscilador armónico simple de 5 *g* de masa tiene un período de 0,6 s y una amplitud de 18 cm.. a) Hallar la energía mecánica total del oscilador. b) ¿Cuál es su velocidad inicial v_0 si el desplazamiento inicial es 6 cm?

Respuesta

a) E = 88,826x10^{-7} N b) $v_0 = 177{,}7$ cm/s

11. En el instante *t* = 0 un oscilador armónico simple con una frecuencia de 5 rad/s tiene un desplazamiento de 25 cm y una celeridad de -10 cm/s.

a) Hallar la amplitud *A* de la oscilación.

b) ¿Cuál es su constante de fase?

c) Si existe un peso de 10 g en el oscilador, ¿cuál es su energía mecánica total?

Respuesta

a) *A* = 25,08 cm, b) $\phi = 94{,}6^{\circ}$, c) E = 78,625 x 10^{-7} N

12. Un oscilador armónico simple de masa 0,8 kg y frecuencia $10/3\pi$ Hz se pone en movimiento con una energía cinética inicial $K_0 = 0{,}2J$ y una energía potencial inicial $U_0 = 0{,}8J$. Calcular

a) su posición inicial.

b) su velocidad inicial.

c) ¿Cuál es la amplitud de la oscilación?

Respuesta

a) $x_0 = \pm 0{,}45m$, b) $v_0 = \pm 1{,}5m/s$, c) *A* = 0,50 m,

13. Se cuelga de un resorte un objeto de 1g de masa y se le deja oscilar. Para *t* = 0, el desplazamiento era 43,785 cm y la aceleración -1,7514 cm/s^2. ¿Cuál es la constante del resorte?

Respuesta

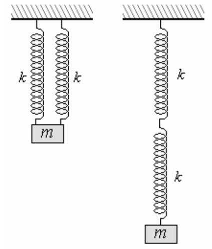
k = 0,025 N/m

14. Una masa *m* cuelga de un resorte uniforme de constante *k.*

a) ¿Cuál es el período de las oscilaciones del sistema?

b) ¿Cuál sería el período si la masa *m* se colgase de modo que:

- Estuviese sujeta a dos resortes idénticos situados uno junto al otro?
- Estuviese sujeta al extremo inferior de dos resortes idénticos conectados uno a continuación del otro?



Respuesta

a) $T_0 = 2\pi\left(\dfrac{m}{k}\right)^{1/2}$, b) $\dfrac{T_0}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}T_0$

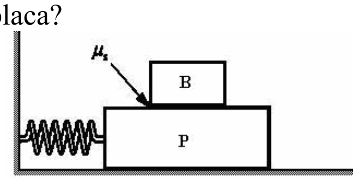
15. Un resorte que tiene su masa M distribuida uniformemente en toda su longitud tiene colgada una masa m en su extremo inferior. Si el resorte se alarga uniformemente cuando el sistema oscila, demostrar que cuando la masa suspendida se está moviendo con una velocidad *v* la energía cinética del sistema viene dada por

$$K = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{3}\right)v^2$$

Si el sistema masa-muelle realiza un movimiento armónico simple, demostrar que tendrá un período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \dfrac{M}{3}}{k}}$$

16. Una placa plana P hace un movimiento armónico simple horizontal sobre una superficie sin fricción con una frecuencia *f* = 1,5 Hz. Un bloque B descansa sobre la placa, como se muestra en la figura, y el coeficiente de fricción estático entre el bloque y la placa es μ = 0,60. ¿Cuál es la máxima amplitud de oscilación que puede tener el sistema sin que resbale el bloque sobre la placa?



Respuesta

A = 6,62 cm

17. Se observó que el período de un determinado péndulo era *T* = 1,002 s al nivel del mar. Cuando el péndulo se llevó a la cima de una montaña, el período resultó ser *T* = 1,003 s.

a) ¿Qué altura tenía la montaña?

b) ¿Cómo se vería afectado por la altura un péndulo de torsión?

Para $h << R_T \Rightarrow g = g_0\left(1 - 2\dfrac{h}{R_T}\right)$,

R_T = 6 378,13 km

Respuesta

a) h = 6,36 km, b) no, excepto en el caso de que la resistencia del aire sea más pequeña.

18. Un cohete que posee un empuje igual a cinco veces su peso está equipado con un reloj de péndulo vertical. Se dispara el cohete en el instante t = 0 y se eleva verticalmente. Después de 5 s se agota el combustible. ¿Cuál es el tiempo leído en dicho reloj de péndulo si un reloj semejante en el suelo marca 15 s?

Respuesta

t = 21,2 s

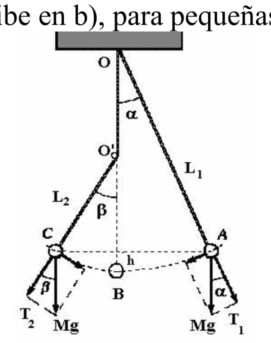
19. Un péndulo está constituido por una pequeña esfera, de dimensiones que consideramos despreciables, cuya masa es M = 200 g, suspendida en un hilo inextensible y sin peso apreciable, de 2 m de largo.

a) Calcular el período para pequeñas amplitudes.

b) Supongamos que en el momento de su máxima elongación la esfera se ha elevado 20 cm por encima del plano horizontal que pasa por la posición de equilibrio. Calcular su velocidad y su energía cinética cuando pase por la vertical.

c) Supongamos que al pasar por la vertical el hilo encuentra un clavo O' situado 1m debajo del punto de suspensión O y normal al plano de oscilación. Describir el movimiento posterior de la esfera. Calcular la relación de las tensiones del hilo cuando el péndulo alcanza sus posiciones extremas.

d) Calcular el período de este péndulo, tal como se describe en b), para pequeñas amplitudes.



Respuesta

a) $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_1}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{9,8}} = 2\sqrt{2}$ s

b) $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2x9,8x0,2} = 0,4m/s$

c) $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \dfrac{L_1 - h}{L_1 - 2h} = \dfrac{2 - 0,2}{2 - 2x0,2} = 1,12$

d) $T = \dfrac{2\sqrt{2} + 2}{2} = \sqrt{2} + 1 = 2,4s$

20. Un aro delgado y uniforme de diámetro d cuelga de un clavo. Se desplaza un ángulo pequeño en su propio plano y luego se le deja libre. Suponiendo que el aro no desliza sobre el clavo, demostrar que su período de oscilación es el mismo que el de un péndulo ideal de longitud d.

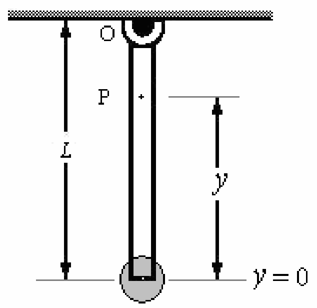
21. a) Una varilla homogénea delgada de longitud ℓ oscila alrededor de un eje horizontal que pasa por uno de sus extremos. Hallar la longitud del péndulo ideal equivalente y situar el centro de oscilación y el centro de percusión.

b) Un disco macizo de radio R está oscilando con una pequeña amplitud alrededor de un eje perpendicular al plano del disco y situado a una distancia r de su centro. ¿A qué distancia r' será máxima la frecuencia?

Respuesta

a) $\ell_0 = \dfrac{2}{3}\ell$, b) $r' = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

22. Se sujeta una masa M en el extremo de un barra uniforme de masa M y longitud L, la cual se pivota en la parte superior Determine las tensiones en la barra en el pivote y en el punto P, cuando la barra se encuentra en reposo. Calcule el periodo de oscilación para pequeños desplazamientos del equilibrio y determine el periodo para L = 2 m. (Sugerencia: Suponga que la masa en el extremo de la barra es una masa puntual.)



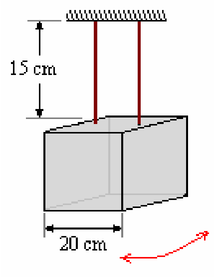
Respuesta

$T = \dfrac{4\pi}{3}\sqrt{\dfrac{2(2)}{9,8}}$ = 2,68 s.

23. Un bloque cúbico de 20 cm de arista está colgado por dos cuerdas de 15 cm de largo, como se indica en la figura.

a) ¿Cuál es el período de oscilación cuando el movimiento es paralelo al plano de la figura?

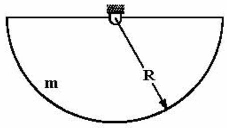
b) ¿Cuándo el movimiento es perpendicular al plano de la figura?



Respuesta
a) $T = 0{,}78s$, b) $T = 1{,}1s$

24. Un alambre delgado se dobla en forma de una semicircunferencia de radio *R*. Se le hace oscilar en su propio plano alrededor de un eje perpendicular a su plano y que pasa por el punto medio del alambre. Hallar la longitud del péndulo ideal equivalente.
Respuesta
$\ell_0 = 2R$

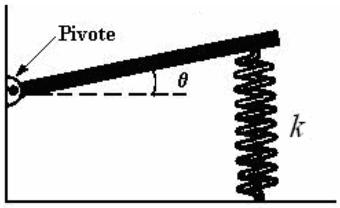
25. Un semicírculo de radio R y masa m está pivotado alrededor de su centro como se muestra en la figura. Determinar su frecuencia natural de oscilación para pequeños desplazamientos.



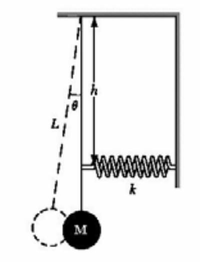
Respuesta
$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{8g}{3R\pi}}$rad/s

26. Un arco circular de diámetro *d* se cuelga de un clavo. ¿Cuál es el período de sus oscilaciones cuando las amplitudes son pequeñas?
Respuesta
$2\pi\left(\dfrac{d}{g}\right)^{1/2}$

27. Una tabla horizontal de masa *m y longitud* L se pivota en un extremo, y en el extremo opuesto se sujeta a un resorte de constante de fuerza k . El momento de inercia de la tabla respecto del pivote es $\dfrac{1}{3}mL^2$. Si la tabla se desplaza un ángulo pequeño θ de la horizontal y se suelta, demuestre que se moverá con un movimiento armónico simple, con una frecuencia angular dada por $\omega = \sqrt{3k/m}$.

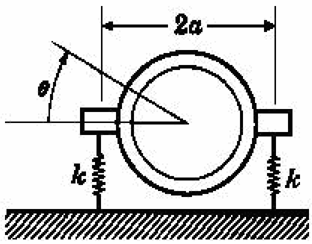


28. Un péndulo de longitud *L* y masa *M* tiene conectado un resorte de constante de fuerza k a una distancia *h* por debajo del punto de suspensión. Encuentre la frecuencia de vibración del sistema para valores pequeños de la amplitud (θ pequeño). (Suponga que el soporte vertical, de longitud *L*, es rígido, pero de masa despreciable.)



Respuesta
$$\omega = \sqrt{\frac{mgL + kL^2}{mL^2}}$$

29. Un motor eléctrico está apoyado por 4 resortes, cada uno de constante *k* como se muestra en la figura. Si el momento de inercia del motor alrededor del eje central de rotación es I_0, encontrar la frecuencia natural de oscilación.

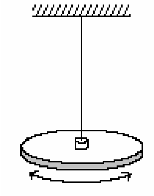


Respuesta
$$\omega_0 = 2a\sqrt{\frac{k}{I_o}} \text{ rad/s}$$

30. a) Se cuelga una bola de acero maciza del extremo de un alambre de acero de 2m de longitud y radio 1 mm. La carga de rotura del acero es **1,1** x 10^9 N/m^2. ¿Cuáles son el radio y la masa de la bola de mayor tamaño que puede soportar el alambre?
b) ¿Cuál es el período de las oscilaciones de torsión de este sistema? (Módulo de cizalladucha del acero = 8 x 10^{10} N/m^2. Momento de inercia de la esfera respecto a un eje que pasa por centro = $2MR^2/5$.)
Respuesta

a) 22 cm radio, 360 kg b) 66 s.

31. La lenteja de un péndulo de torsión como el de la figura es un disco de momento de inercia desconocido *I.* Su período es $T = 3$ s. Cuando se coloca sobre el disco un anillo delgado de 3 kg de masa y un radio de 10 cm, de forma que el hilo de suspensión pasa por el centro exacto del anillo, el nuevo período de oscilación es $T = 4$ s. Hallar el momento de inercia *I.*



Respuesta
$I = 0{,}0386$ kg.m^2

32. Un resorte de 20 cm de longitud cuelga de un soporte fijo. Al colocarse una masa de 0,5 kg en el extremo inferior la longitud aumenta a 25 cm. Al poner en oscilación el sistema se observa que en el tiempo π/0,65 segundos ejecuta 10 oscilaciones. Analice y diga si el movimiento armónico es simple o amortiguado. Justifique.
Respuesta

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},\ k = \frac{0{,}5\times 9{,}8}{0{,}05} = 98\frac{N}{m},\ \Rightarrow$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{98}{0{,}5}} = 14\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La frecuencia medida es

$$\omega = 2\pi\left(\frac{10}{\pi/0{,}65}\right) = 13\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La diferencia se debe a que el movimiento es amortiguado.

33. Se cuelga un objeto de masa 0,2 kg de un resorte cuya constante es 80 N/m., Se somete el objeto a una fuerza resistente dada por - *bv,* siendo *v* su velocidad en m/s.
a) Plantear la ecuación diferencial del movimiento en el caso de oscilaciones libres del sistema.
b) Si la frecuencia con amortiguamiento es $\sqrt{3}/2$ de la frecuencia sin amortiguamiento, ¿cuál es el valor de la constante *b?*
Respuesta
b) 4 N.s/m,

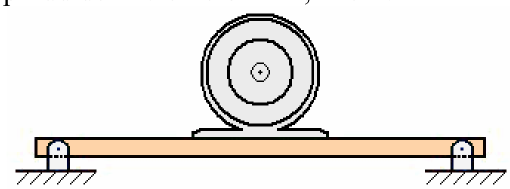
34. Se conecta un bloque de masa *m* él un resorte cuyo otro extremo se mantiene fijo. Existe también un mecanismo de amortiguamiento viscoso. Sobre este sistema se han realizado las siguientes observaciones:
(1) Si se empuja horizontalmente el bloque con una fuerza igual a $2mg$, la compresión estática del resorte es igual a *h*.
(2) La fuerza resistente viscosa es igual a *mg* si el bloque se mueve con una cierta velocidad conocida *u*.
a) Para este sistema completo (en el que se incluye tanto el resorte el amortiguador) escribir la ecuación diferencial que rige las oscilaciones horizontales de la masa en función de *m,* g, *h* y *u*.
Responder a las siguientes preguntas en el caso de que. $u = 3\sqrt{gh}$:
b) ¿Cuál es la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas?
c) ¿Qué tiempo ha de transcurrir, expresado en forma de un múltiplo de $\sqrt{h/g}$, para que la energía descienda en un factor $1/e$?
d) Si el oscilador se impulsa con una fuerza $mg\cos\omega t$, siendo $\omega = \sqrt{2g/h}$ ¿cuál es la amplitud de la respuesta del estado estacionario?
Respuesta
b) $\left(\frac{35g}{36h}\right)^{1/2}$, c) $3\left(\frac{h}{g}\right)^{1/2}$, d) 0,90 *h*.

35. Un objeto de masa 0,2 kg se cuelga de un resorte cuya constante es 80 N/m. El cuerpo se somete a una fuerza resistente dada por - *bv,* siendo *v* su velocidad (m/s) y $b = 4$ N.m/s.
a) Plantear la ecuación diferencial del movimiento en el caso de oscilaciones libres del sistema y hallar su período.
b) Se somete el objeto a una fuerza impulsora sinusoidal dad $F(t) = F_0$ sen ωt, siendo $F_0 = 2$N y $\omega = 30$ rad/s. En estado estacionario, ¿Cuál es la amplitud de la oscilación forzada?
Respuesta
a) $T = \frac{\pi}{5\sqrt{3}}s$, b) 1,3 cm

36. Un Pontiac Grand Prix de 1550 kg se soporta mediante cuatro resortes en espiral, cada uno con una constante de 7,00 x 10^4 N/m.
a) ¿Cuál es la frecuencia natural de este sistema?
b) El automóvil vibra al rodar sobre los baches en una autopista de concreto. Si los baches están separados 18,5 m, ¿qué tan rápido se está moviendo el automóvil cuando la frecuencia de los baches está en resonancia con la frecuencia natural?

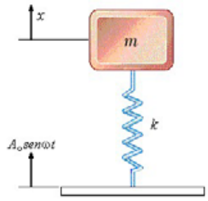
Respuesta
a) 2,14 Hz b) 39,6 m/s

37. Un motor pequeño de velocidad variable tiene una masa de 9 kg se monta en una viga elástica tal como se muestra en la figura. El motor rota con una masa excéntrica de 1 kg a 5 cm. del centro del eje. Cuando el motor no está funcionando, el motor y el peso excéntrico hacen desviar a la viga 1,25 cm. Determine
a) la velocidad del sistema en la resonancia y
b) la amplitud de las vibraciones forzadas cuando el motor está funcionando en 300 rpm.
c) ¿Sería posible reducir la amplitud de la vibración forzada del motor en la parte
b) sujetando un peso adicional al motor? ¿Si es así qué peso se debe agregar para reducir la amplitud de la vibración a 1,25 cm?



38. Un auto con amortiguadores en mal estado rebota hacia arriba y hacia abajo con un periodo de 1,5 s después de pasar por un hoyo. El auto tiene una masa de 1500 kg y se soporta mediante cuatro resortes de igual constante de fuerza *k*. Determine el valor de *k*.
Respuesta
$k = 6580$ N/m

39. Un bloque de masa m está soportado por un resorte de constante *k* el cual está montado sobre una base de peso despreciable sometida a un movimiento armónico simple de arriba abajo $A_0 \operatorname{sen} \omega t$ como se muestra en la figura. Determine el movimiento del bloque.



Respuesta

$$x = A\operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi) + \frac{A_0\omega_0^2}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. A, ϕ y δ dependen de las condiciones iniciales.