CAPÍTULO 4. MECÁNICA DE FLUIDOS

INTRODUCCIÓN

La materia puede clasificarse por su forma física como un sólido, un líquido o un gas.
Las moléculas de los sólidos a temperaturas y presiones ordinarias tienen atracción fuerte entre ellas y permanecen en posición fija relativa una a la otra. Luego un sólido tiene volumen y forma definida y sufre deformaciones finitas bajo la acción de una fuerza.
Las moléculas de los líquidos a temperaturas y presiones ordinarias tienen poca atracción entre ellas y cambian de posición relativa una a otra. En consecuencia los líquidos tienen volumen definido tomando la forma del recipiente que los contiene, pero no lo llenan necesariamente.
Las moléculas de los gases a. temperaturas y presiones ordinarias tienen muy poca atracción entre ellas y tienen un movimiento al azar, o sea que los gases no tienen volumen ni forma definidas, adoptan la forma del recipiente que los contiene y lo llenan completamente.
A causa de que los líquidos y gases a temperaturas y presiones ordinarias no resisten la acción de un esfuerzo cortante y continúan deformándose bajo su acción, son conocidos como **fluidos**.
La rama de la Física que estudia los efectos de las fuerzas que actúan sobre 1os fluidos se denomina **Mecánica de Fluidos**, tradicionalmente subdividida en dos partes estática y dinámica.
Estática de los fluidos, estudia el equilibrio de los fluidos bajo la acción de fuerzas estacionarias.
Dinámica de los fluidos, estudia el movimiento de los fluidos y las causas que la producen, sostienen o se oponen a este movimiento.

DENSIDAD

Densidad o masa específica

En un fluido, es importante la densidad o masa específica ella permite calcular el peso del elemento de volumen que se considere, que es una posible fuerza exterior actuando sobre cada elemento de fluido. Para un elemento de volumen dV ubicado en algún punto del fluido y que contenga una masa dm, la densidad ρ en ese punto se define mediante

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

La unidad de densidad en SI será kg/m^3 pero se usa generalmente densidades en g/cm^3,
1 g/cm^3 =1000 kg/m^3.

Densidad relativa

Es posible utilizar una escala de densidades relativas a la de alguna sustancia específica, por ejemplo existen las densidades de los fluidos respecto al agua, es decir

$\rho_r = \dfrac{\rho}{\rho_{agua}}$, cantidad adimensional.

Densidad del agua a 4º C = 1g/cm^3

Peso específico

El peso específico denotado por γ se define como el peso por unidad de volumen del fluido, es decir $\gamma = \rho g$, la unidad SI será N/m^3.

Ejemplo 1. Suponga que usted es capaz de llevar un peso de 400 N. ¿Cuál sería el tamaño del cubo hecho de oro podría usted llevar? La densidad del oro es 19300 kg/m^3.

Solución.

$$W = mg = \rho V g = \rho a^3 g \;\Rightarrow$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{W}{\rho g}} = \sqrt[3]{\frac{400}{(19300)(9,8)}} = 0,13$$

Lado del cubo = a = 13 cm

LA PRESIÓN EN LOS FLUIDOS. El concepto de presión es muy general y por ello puede emplearse siempre que exista una fuerza actuando sobre una superficie. Sin embargo, su empleo resulta especialmente útil cuando el cuerpo o sistema sobre el que se ejercen las fuerzas es deformable. Los fluidos no tienen forma propia y constituyen el principal ejemplo de aquellos casos en los que es más adecuado utilizar el concepto de presión que el de fuerza.
Cuando un fluido está contenido en un recipiente, ejerce una fuerza sobre sus paredes y, por tanto, puede hablarse también de presión. Si el fluido está en equilibrio las fuerzas sobre las paredes son perpendiculares a cada porción de superficie del recipiente, ya que de no serlo existirían componentes paralelas que provocarían el desplazamiento de la masa de fluido en contra de la hipótesis

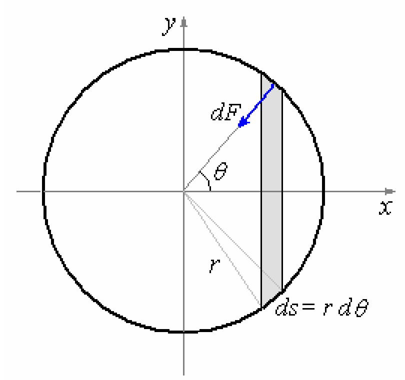
de equilibrio. La orientación de la superficie determina la dirección de la fuerza de presión, por lo que el cociente de ambas, que es precisamente la presión, resulta independiente de la dirección; se trata entonces de una magnitud escalar.
La presión se designa con la letra p , y se define como la fuerza de compresión por unidad de área perpendicular a la fuerza.

$$p = \frac{\text{Fuerza normal sobre un área}}{\text{Area sobre la que se distribuye la fuerza}} = \frac{F}{A}$$

O bien $p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$

Unidades de presión. En el Sistema Internacional (SI) la unidad de presión es el pascal, se representa por Pa y se define como la presión correspondiente a una fuerza de un newton de intensidad actuando perpendicularmente sobre una superficie plana de un metro cuadrado.
1 Pa = 1 N/m^2.
Otras unidades:
Atmósfera (atm) se define como la presión que a 0 ºC ejercería el peso de una columna de mercurio de 76 cm de altura y 1 cm^2 de sección sobre su base.
1 atm = 1,013x10^5 Pa.
Bar es realmente un múltiplo del pascal y equivale a 10^5 N/m^2.
En meteorología se emplea con frecuencia el milibar (mb) o milésima parte del bar
1 mb = 10^2 Pa ó 1 atm = 1013 mb.
También tenemos:
Milímetros de mercurio
1 mmHg = 133,322 Pa
Torr
1 torr = 133, 322 Pa
1 torr = 1 mmHg

Ejemplo 2. En 1654, Otto Van Guericke, alcalde de Magdeburgo e inventor de la bomba de aire, demostró que dos equipos de caballos no podrían separar dos hemisferios de bronce evacuados. ¿Si los diámetros de los hemisferios fueron 0,30 m, qué fuerza sería requerida para separarlos?
Solución.



Consideremos el hemisferio orientado con su eje a lo largo del eje *x*. Tomemos una tira estrecha de la ancho *ds* que circunda el hemisferio. El componente de *x* de la fuerza en esta tira es

$$dF_x = p_a dA\cos\theta = p_a(2\pi r\operatorname{sen}\theta)ds\cos\theta$$

y $ds = rd\theta$
Así

$$F_x = \int_0^{\pi/2} 2\pi r p_a \operatorname{sen}\theta\cos\theta r d\theta$$

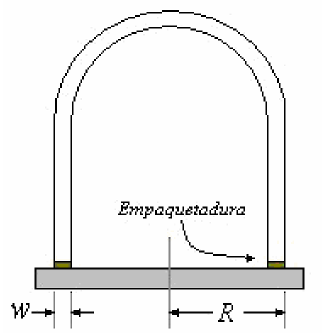
$$= 2\pi r^2 p_a \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta$$

$$= 2\pi r^2 p_a \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta\right]_0^{\pi/2} = \pi r^2 p_a$$

Reemplazando valores:

$$F_x = \pi(0,15)^2\left(1,013\times 10^5\right) = 7160 \text{ N}$$

Ejemplo 3. En el laboratorio el vacío se hace a menudo usando una campana de vidrio colocada sobre una placa de metal. Entre la campana de vidrio y la base se coloca una empaquetadura junta de espesor *e*, ancho *w* y radio externo *R*, donde *R* > 5 *w* > > *e*. ¿cuál es la presión sobre la empaquetadura en términos de la presión atmosférica p_a si *R* = 18 cm, *w* = 1,2 cm?



Solución

$$p_a\left(\pi R^2\right) = p_e(2\pi R w)$$

$$p_a\left(\pi R^2\right) = p_e\left(2\pi Rw\right) \Rightarrow$$

$$p_e = \frac{\pi R^2}{2\pi Rw} p_a = \frac{R}{2w} p_a$$

$$= \frac{18}{2(1,2)} p_a = 7,5 p_a$$

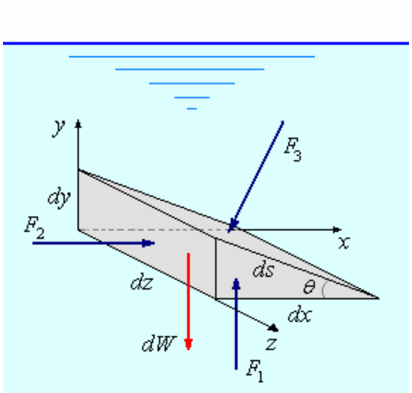
$= 7,5 \times 1,013 \times 10^5$ Pa $= 7,59 \times 10^5$ Pa

HIDROSTÁTICA

PRESIÓN EN UN PUNTO DE UN FLUIDO.

La presión sobre un punto totalmente sumergido en un fluido en reposo es igual en todas las direcciones.

Para demostrar esto consideremos un pequeño prisma triangular como se muestra en la figura.



Los valores de presiones promedio sobre cada una de las tres superficies son p_1, p_2, y p_3, en la dirección x las fuerzas son iguales y opuestas y se cancelan mutuamente.

Haciendo la sumatoria de fuerzas obtenemos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_2 - F_3 \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$p_2(dydz) - p_3(dsdz)\operatorname{sen}\theta = 0$$

Con $dy = ds\operatorname{sen}\theta$:

$$p_2(dydz) - p_3(dydz) = 0$$

$$\Rightarrow p_2 = p_3$$

También

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_1 - F_3\cos\theta - dW = 0$$

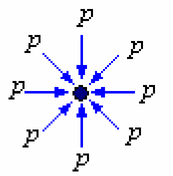
$$p_1(dxdz) - p_3(dsdz)\cos\theta - \rho g\left(\frac{1}{2}dxdydz\right) = 0$$

Con $dx = ds\cos\theta$:

$$p_1(dxdz) - p_3(dxdz) - \rho g\left(\frac{1}{2}dxdydz\right) = 0$$

$$\Rightarrow p_1 - p_3 - \frac{1}{2}\rho g dy = 0$$

Cuando el prisma triangular se aproxima a un punto,



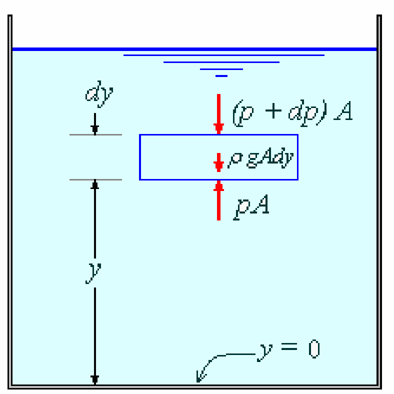
$dy \to 0$, y las presiones promedio se hacen uniformes, esto es la presión para un "punto" $p_1 = p_3$.

Por lo tanto finalmente:

$$p_1 = p_2 = p_3$$

VARIACIÓN DE LA PRESIÓN CON LA PROFUNDIDAD EN UN LÍQUIDO

Para encontrar la variación de presión con la profundidad, consideremos el estudio una porción de fluido como se muestra en la figura, consistente en un prisma de área A y altura dy, a una altura y un nivel de regencia arbitrario.



La presión a la altura y es p y la presión en $(y + dy)$ es $(p + dp)$.

El peso del elemento es $\rho gAdy$, donde ρ es la densidad del fluido.

Como el elemento está en equilibrio:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow$$

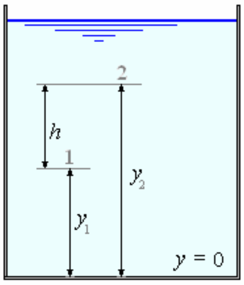
$$pA - (p + dp)A - \rho gAdy = 0$$

Simplificando: $-Adp - \rho gAdy = 0$

O $dp = -\rho gdy \Rightarrow \dfrac{dp}{dy} = -\rho g$

Esta ecuación nos da el cambio de presión con la altura.

Diferencia de presión entre dos puntos en un fluido.



Diferencia de presión entre dos puntos cualquiera (1 y 2) en un fluido en reposo, será

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g dy \quad \Rightarrow$$

$$p_2 - p_1 = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g dy$$

Para fluidos que pueden considerarse incompresibles (por lo general los líquidos), ρ es constante, adicionalmente para diferencias de altura no muy grandes g se puede considerar constante.

En este caso $p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$, llamando a $(y_2 - y_1) = h$

$$p_2 - p_1 = -\rho g h \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_2 + \rho g h$$

Cuando el punto 2 está en la superficie p_2 es la presión atmosférica p_a y se tendrá.

$$p_1 = p_a + \rho g h$$

Donde h representa la profundidad de un punto cualquiera en el fluido y p su presión:

Ejemplo 4. Un dispositivo de exploración de las profundidades del mar tiene una ventana de área 0,10 m^2. ¿Qué fuerza se ejercida sobre ella por la agua de mar (densidad 1030 kg/m^3) a la profundidad de 5000 m?

Solución.

$F = pA = \rho g h A$ = (1030)(9,8)(5000)(0,1)
= 5,05 x 10^6 N

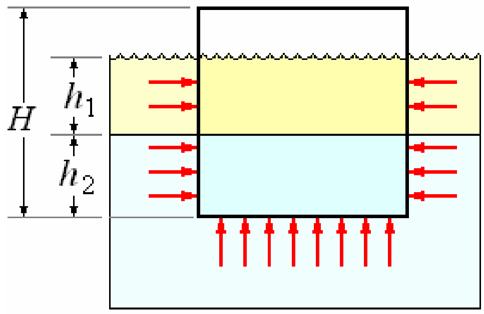
Ejemplo 5. Un cubo de arista *H* esta parcialmente sumergido entre 2 líquidos de densidades ρ_1 y ρ_2, una altura $h_1$en el liquido-1 y h_2 en el liquido-2. (*H* es mayor que $h_1 + h_2$)

a) ¿Cuál es la fuerza que hace el liquido-1 sobre todo el cubo?

b) ¿Cuál es la fuerza que hace el liquido-2 sobre todo el cubo?

Solución.

La figura muestra las fuerzas que actúan sobre el cubo.



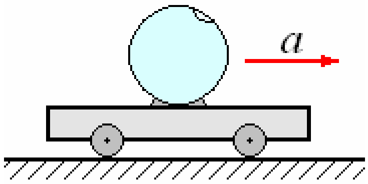
a) La fuerza neta que ejerce el líquido1 sobre todo el cubo es cero porque actúan lateralmente solamente y se anulan.

b) La fuerza neta que ejerce el líquido2 sobre todo el cubo

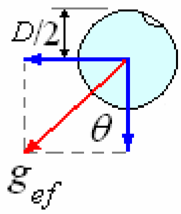
La única fuerza que actúa es la debida a la presión sobre el fondo

$$F = (\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2)H^2 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)gH^2$$

Ejemplo 6. Un depósito esférico sellado de diámetro *D* se fija rígidamente a una cesta, que se está moviendo horizontalmente con una aceleración *a* como en una figura. La esfera está casi llena de un líquido de densidad ρ y contiene una pequeña burbuja de aire a presión atmosférica. Determinar la presión *p* en el centro de la esfera.



Solución.



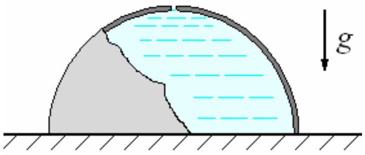
En el marco de referencia del fluido, la aceleración del carro ocasiona una fuerza ficticia hacia atrás, como si la aceleración de la gravedad fuera $g_{ef} = \sqrt{g^2 + a^2}$, dirigida con un ángulo $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{a}{g}\right)$, con la vertical.

El centro de la esfera está a una profundidad $\dfrac{D}{2}$, debajo de la burbuja de aire y la presión allí es

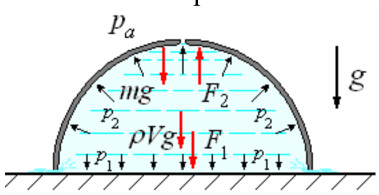
$$p = p_a + \rho g_{ef} h =$$

$$p = p_a + \frac{1}{2}\rho D\sqrt{g^2 + a^2}$$

Ejemplo 7. En una campana semiesférica, que yace herméticamente sobre la mesa, se echa por un orificio pequeño practicado en lo alto cierto líquido. Cuando el líquido llega hasta el orificio, levanta la campana y empieza a fluir por debajo de ella. Halle la masa de la campana. Si su radio interno es igual a R y la densidad del líquido es ρ.



Solución.
Se m la masa de la campana



$$p_1 = p_a + \rho g R$$

$p_2 = p_a$ (La capa que esta en contacto con la pared interna de semiesfera tiene un contacto con la atmósfera en el orificio).

$F_1 = p_1 \pi R^2$, $F_2 = p_2 \pi R^2$

Peso de la semiesfera = mg

Peso del agua en la semiesfera =

$$\frac{1}{2}\left(\rho \frac{4}{3}\pi R^3\right)g$$

Cuando se levanta la campana y empieza a fluir por debajo de ella

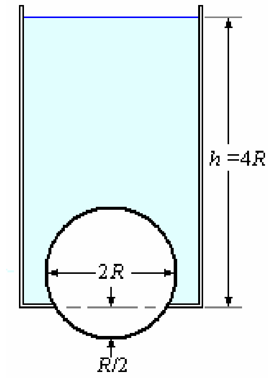
$$F_1 - F_2 = \frac{1}{2}(\rho V)g + mg \Rightarrow$$

$$\pi R^2(p_a + \rho g R) - \pi R^2 p_a = \frac{1}{2}\left(\rho \frac{4}{3}\pi R^3\right)g + mg \Rightarrow$$

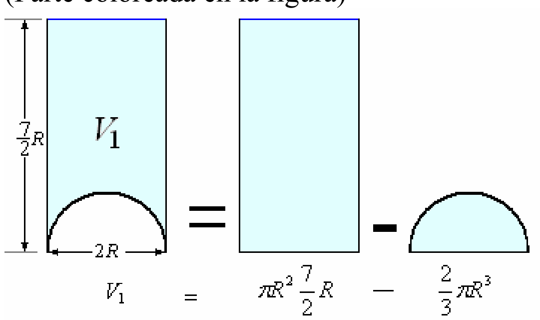
$$m = \frac{1}{2}\pi R^3 \rho$$

Ejemplo 8. El orificio circular de un depósito se cierra con una esfera de peso P. Hallar la fuerza necesaria para levantar la esfera.
Nota. Volumen de una porción de esfera.

$V = \frac{\pi}{3}t^2(3R - t)$. (En este caso $t = R/2$.)



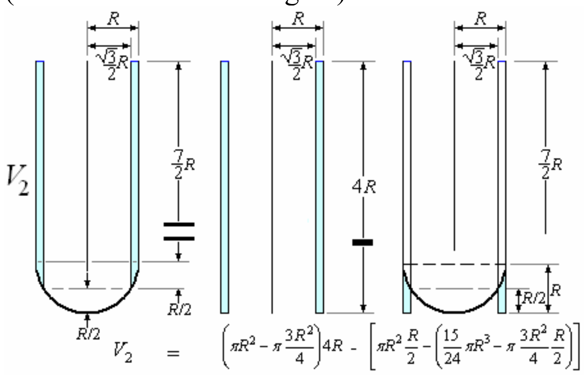
Solución.
Presión del líquido sobre la esfera hacia abajo
Peso del agua sobre la esfera
(Parte coloreada en la figura)



$$P_1 = \rho g V_1 = \rho g\left(\pi R^2 \frac{7}{2}R - \frac{2}{3}\pi R^3\right)$$

$$= \rho g \frac{7}{2}\pi R^3 - \rho g \frac{2}{3}\pi R^3 = \rho g \frac{17}{6}\pi R^3$$

Presión del líquido sobre la esfera hacia arriba
Fuerza sobre la parte inferior de la esfera = peso del agua que soporta
(Parte coloreada en la figura)



$$P_2 = \rho g V_2 = \rho g\left(\pi R^2 - \pi\frac{3R^2}{4}\right)4R$$

$$-\rho g\left[\pi R^2 \frac{R}{2} - \left(\frac{15}{24}\pi R^3 - \pi\frac{3R^2}{4}\frac{R}{2}\right)\right]$$

$$= \rho g\left[\left(\pi R^2 - \pi\frac{3R^2}{4}\right)4R - \left(\pi R^2\frac{R}{2} - \frac{11}{24}\pi R^3\right)\right]$$

$$= \rho g \pi R^3 - \rho g \frac{1}{24}\pi R^3 = \rho g \frac{23}{24}\pi R^3$$

Fuerza neta

$$F_{neta} = P_1 - P_2 \quad \Rightarrow$$

$$F_{neta} = \rho g \frac{17}{6}\pi R^3 - \rho g \frac{23}{24}\pi R^3 = -\rho g \frac{15}{8}\pi R$$

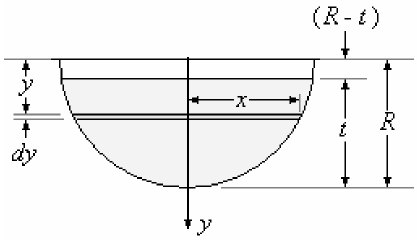
Fuerza total hacia abajo

$$F_{total} = Peso + \rho g \frac{15}{8}\pi R$$

Por lo tanto la fuerza para elevar a la esfera:

$$F = P + \rho g \frac{15}{8}\pi R^3$$

Nota. Cálculo del volumen de la porción de flecha t de una esfera de radio R.



Sea t el calado (parte sumergida).
El volumen del disco de radio x y espesor diferencial dy:

$$dV = \pi x^2 dy$$

Como $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow x^2 = R^2 - y^2$

Tenemos:

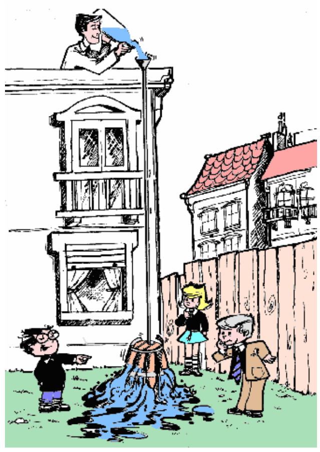
$$dV = \pi\left(R^2 - y^2\right)dy$$

Integrando desde $y = (R - t)$ hasta $y = R$, obtendremos el volumen buscado:

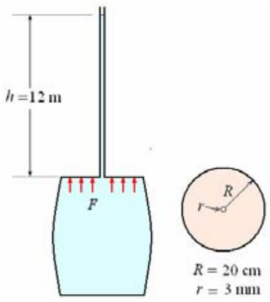
$$V = \int dV = \int_{(R-t)}^{R} \pi\left(R^2 - y^2\right)dy$$

$$= \frac{\pi}{3} t^2 (3R - t)$$

Ejemplo 9. En el siglo XVII, Blaise Pascal realizó el experimento indicado en la figura. Se llenó con agua un barril de vino al que luego se le conectó un tubo largo y se fue añadiendo agua por el tubo hasta que reventó el barril.
a) Si el radio de la tapa del barril era de 20 cm y la altura del agua en el tubo que reventó el barril fue de 12 m, calcular la fuerza ejercida por el agua en la tapa.
b) Si el tubo tenía un radio interior de 3 mm, ¿qué masa de agua en el tubo produjo la presión que reventó el barril?



Solución.
a)



$F = pA$

$p = \rho g h$ = 1000 x 9,8 x 12 = 117600 N/m^2

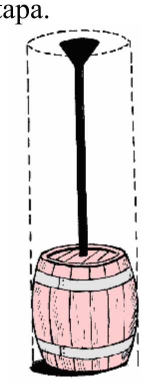
$A = \pi R^2 - \pi r^2 \approx$ 3,14 x 0,20^2 = 0,1256 m^2

F = 117600 x 0,1256 = 14778,05 N

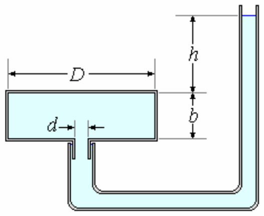
b) La masa que había en el tubo es

$m = \rho \pi r^2 h$ = 1000 x 3,14 x 0,003^2 x 12
= 0,339 kg

La altura de agua es la que produce la presión y esa es la presión sobre la tapa que produjo la ruptura de la tapa.

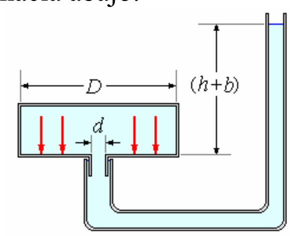


Ejemplo 10. Un émbolo hueco y abierto por su parte inferior, de diámetro D y altura h, puede desplazarse en el brazo corto de un depósito de dos brazos, como el indicado en la figura. Determinar la fuerza F con las que el líquido le empuja hacia arriba.



Solución.

La fuerza hacia abajo:

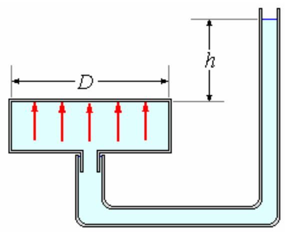


Sobre el anillo de área $\pi\left(\frac{D^2}{4}-\frac{d^2}{4}\right)$

Presión hidrostática $\rho g(h+b)$

$$F_{abajo} = -\rho g(h+b)\pi\left(\frac{D^2}{4}-\frac{d^2}{4}\right)$$

Fuerza hacia arriba:



Sobre el disco de área $\pi\frac{D^2}{4}$

Presión hidrostática ρgh

$$F_{arriba} = \rho gh\pi\frac{D^2}{4}$$

Fuerza neta

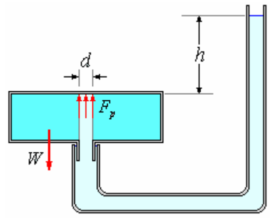
$$F_{neta} = \rho gh\pi\frac{D^2}{4} - \rho g(h+b)\pi\left(\frac{D^2}{4}-\frac{d^2}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\rho g\pi\left[d^2(h+b) - D^2b\right]$$

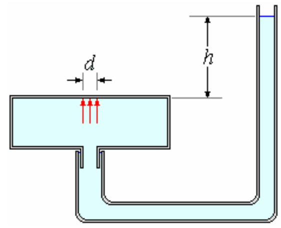
Hacia arriba

Solución de otra manera.

La fuerza que empuja hacia arriba es igual a l fuerza debida a la presión efectiva sobre la parte superior más el peso del líquido co se indica en la figura.

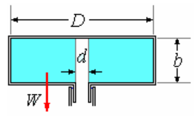


Presión efectiva sobre la cara superior del émbolo.



$$F_p = \rho gb\frac{\pi d^2}{4}$$

Peso del líquido



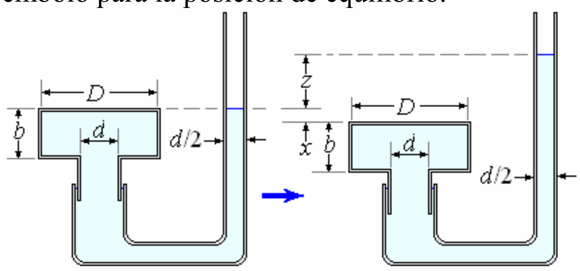
$$W = \rho g\pi\left(\frac{D^2}{4}-\frac{d^2}{4}\right)b$$

La fuerza F con las que el líquido le empuja hacia arriba es

$$F = F_p - W$$

$$F = \frac{1}{4}\rho g\pi\left[d^2(h+b) - D^2b\right]$$

Ejemplo 11. Un émbolo hueco de peso P y diámetro $D = 3d$ ocupa la posición inicial señalada en la figura. El tubo lateral tiene un diámetro $d/2$. Determinar el descenso del émbolo para la posición de equilibrio.



Posición inicial Posición de equilibrio

Solución.

El émbolo baja x, el nivel del líquido en el tubo lateral sube z.

Volumen que baja = volumen que sube

$$\pi\frac{d^2}{4}x = \pi\frac{(d/2)^2}{4}z \Rightarrow z = 4x$$

La fuerza que empuja al émbolo hacia arriba, visto en el problema anterior es:

$$F_{neta} = \rho g h \pi \frac{D^2}{4} - \rho g (h+b)\pi\left(\frac{D^2}{4} - \frac{d^2}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\rho g \pi\left[d^2(h+b) - D^2 b\right]$$

N este caso:
$h = x + z = x + 4x = 5x$ y $D = 3d$
Reemplazando

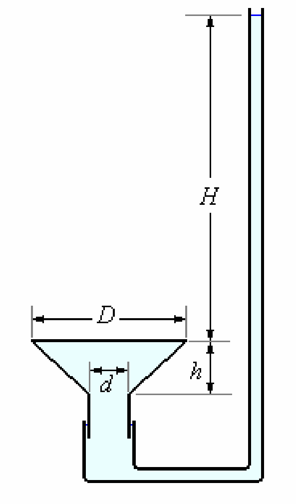
$$F_{neta} = \frac{1}{4}\rho g \pi\left[d^2(5x+b) - (3d)^2 b\right]$$
$$= \frac{1}{4}\rho g \pi (5x - 8b) d^2$$

Esta fuerza en el equilibrio es igual al peso P del depósito.

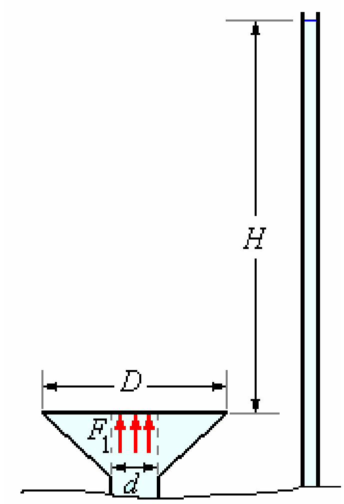
$$\frac{1}{4}\rho g \pi (5x-8b)d^2 = P \Rightarrow$$
$$5x - 8b = \frac{4P}{\rho g \pi d^2} \Rightarrow$$
$$x = \frac{4}{5}\left(\frac{P}{\rho g \pi d^2} + 2b\right)$$

Para la posición de equilibrio el émbolo desciende $x = \frac{4}{5}\left(\frac{P}{\rho g \pi d^2} + 2b\right)$.

Ejemplo 12 Un émbolo hueco, de cuyo peso se prescinde, está en equilibrio cuando $H = 6h$. Hallar para este caso la relación entre los diámetros D y d.

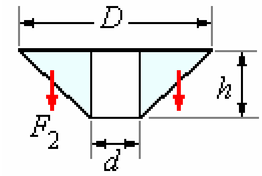


Solución.
La fuerza hacia arriba sobre el émbolo es:



$$F_1 = \rho g H \frac{\pi^2}{4} d^2$$

La fuerza hacia abajo sobre la superficie lateral del tronco de cono es el peso del tronco de cono menos el cilindro de radio d:



$$F_2 = \frac{1}{3}\rho g \frac{\pi}{4}\left(D^2 + Dd + d^2\right)h - \rho g \frac{\pi}{4} d^2 h$$

Cuando están en equilibrio $F_1 = F_2$:

$$\frac{1}{3}\rho g \frac{\pi}{4}\left(D^2 + Dd + d^2\right)h - \rho g \frac{\pi}{4} d^2 h = \rho g H \frac{\pi^2}{4} d^2$$
$$\Rightarrow \left(D^2 + Dd + d^2\right)h - 3d^2 h = 3Hd^2$$
$$\Rightarrow D^2 h + Ddh + d^2 h - 3d^2 h = 3Hd^2$$
$$\Rightarrow D^2 + Dd - 20d^2 = 0$$
$$\Rightarrow \left(\frac{D}{d}\right)^2 + \frac{D}{d} - 20 = 0$$

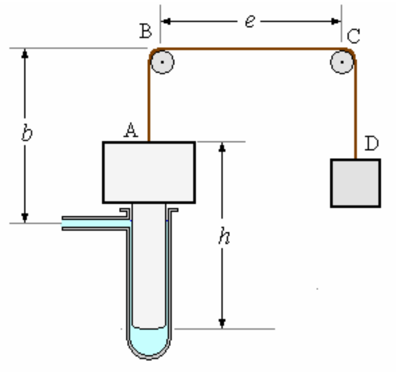
Resolviendo la ecuación:

$$\frac{D}{d} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 20} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

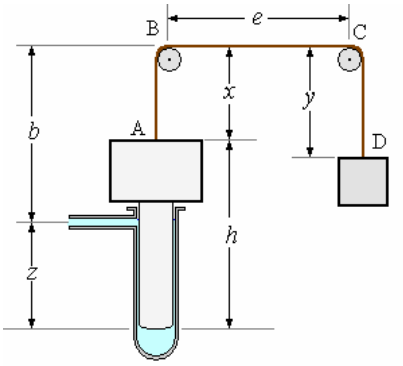
Las soluciones son: $\frac{D}{d} = -5$ y $\frac{D}{d} = 4$

La solución válida es $D = 4d$

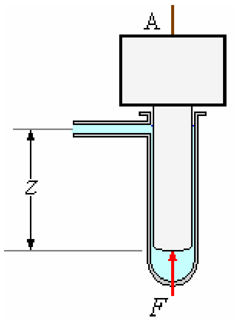
Ejemplo 13. Un acumulador hidráulico tiene un émbolo de área A que se eleva con agua a presión. El acumulador lleva una cadena ABCD, de longitud ℓ, guiada por dos poleas, que sostiene un contrapeso. Calcular la distancia e entre las poleas y el peso λ de la unidad de longitud de la cadena, para que ésta equilibre la variación de la fuerza sobre el él émbolo durante el ascenso.



Solución.



Sea AB = x, CD = y y z la profundidad de la superficie del émbolo respecto al tubo de alimentación.
La fuerza variable causada por la presión sobre el émbolo



$F = \rho g z A$

El equilibrio tiene lugar cuando
Peso de la cadena AB (x) - Fuerza variable F + Peso del acumulador = Peso de la cadena CD (y) + Contrapeso.
Como
Peso del acumulador = El contrapeso y
Peso de la cadena AB (x) - Fuerza variable F = Peso de la cadena CD (y).
Luego:

$$\lambda x - \rho g z A = \lambda y \Rightarrow \lambda = \frac{\rho g A z}{(x - y)}$$

También tenemos:

$x + h = b + z$

$\Rightarrow x = b - h + z$ (1)

Reemplazando x en

$x + e + y = \ell$

$\Rightarrow b - h + e + y = \ell$

$\Rightarrow y = \ell - b + h - e$ (2)

Restando (2) de (1):

$x - y = b - h + z - \ell + b - h + e \Rightarrow$

$x - y = z - \ell + 2(b - h) + e$

Con esto se obtiene:

$$\lambda = \frac{\rho g A z}{z - \ell + 2(b - h) + e}$$

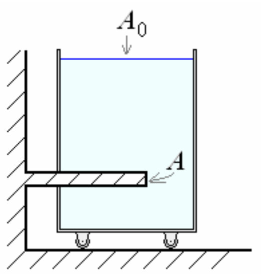
Esta expresión será independiente de z, si se cumple:

$e = \ell - 2(b - h)$

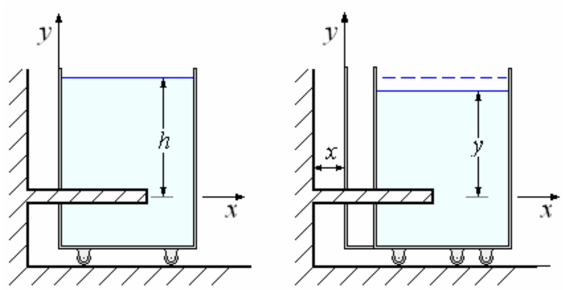
En ese caso

$\lambda = \rho g A$

Ejemplo 14. Un depósito prismático, lleno de agua. Montado sobre ruedas, lleva un orificio por el que puede introducirse una barra de sección A. El depósito, si no existiesen rozamientos, se movería a la derecha. Determinar el recorrido en función del tiempo.



Solución.



Sea h la altura inicial del líquido desde el centroide de A la superficie A_0.
Al moverse el depósito la cantidad x, el nivel baja a y.
El volumen dejado por la barra es Ax.
La disminución de volumen del agua es

$A_0(h - y)$

Estos volúmenes son iguales

$A_0(h - y) = Ax$

$$x = \frac{A_0}{A}(h - y) \Rightarrow y = h - \frac{A}{A_0}x \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{A_0}{A}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{A_0}{A}\frac{d^2y}{dt^2}$$

La fuerza que mueve al depósito es la fuerza horizontal sobre la pared de la derecha

F = presión a la profundidad y x la sección transversal de la barra.

$F = \rho g y A$

Aplicando la segunda ley de Newton:

$\sum F = ma$:

$$\rho g A y = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\rho g A}{m}y$$

Siendo m la masa del depósito más la masa del agua.

$$\frac{\rho g A}{m}y = -\frac{A_0}{A}\frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\rho g A^2}{m A_0}y$$

Ecuación cuya solución es:

$y = B\text{sen}(bt + \delta)$

$v = Bb\cos(bt + \delta)$

Con las condiciones iniciales $t = 0$ $y = h$, $v = 0$

Obtenemos: $h = B\text{sen}\delta$ y

$$0 = Bb\cos\delta \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$h = B\text{sen}\frac{\pi}{2} \Rightarrow B = h$$

Finalmente

$$y = h\text{sen}\left(\sqrt{\frac{\rho g A^2}{m A_0}}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

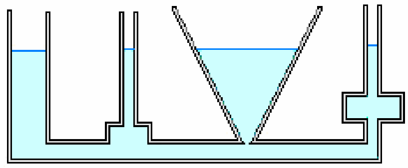
$$= h\cos\sqrt{\frac{\rho g A^2}{m A_0}}t \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

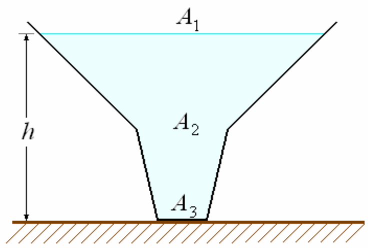
$$x = \frac{A_0 h}{A}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{\rho g A^2}{m A_0}}t\right)$$

PARADOJA HIDROSTÁTICA

Una consecuencia de la ecuación $p_1 = p_a + \rho g h$ es el fenómeno que se ilustra en la figura, llamado paradoja hidrostática. Podría parecer que el vaso cónico ejerce una mayor presión en su base que el que tiene la base más ancha, con lo cual el líquido pasaría del cónico al otro, y alcanzaría una mayor altura en este último. Sin embargo, ya hemos visto que la ecuación $p_1 = p_a + \rho g h$ establece que la presión depende únicamente de la profundidad, y no de la forma de la vasija.



Ejemplo 15. Sea un vaso, como lo muestra la figura, lleno de agua hasta una cierta altura h.



De qué depende la fuerza ejercida por el agua sobre el fondo del vaso.

A) del área A_1 multiplicada por h.

Solución.

Depende del área A_3 multiplicada por h.

Ejemplo 16. Se llena (completamente) con agua un recipiente cónico de 25 cm de altura que se apoya sobre su base de radio 15 cm.

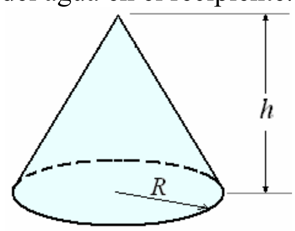
a) Hallar el peso del agua contenido en el recipiente.

b) Hallar la fuerza ejercida por el agua sobre la base del recipiente.

c) ¿Es mayor la fuerza calculada en la parte (b) que el peso del agua? ¿A qué se debe?

Solución.

a) El peso del agua en el recipiente.

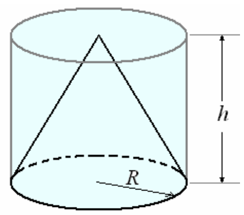


$$P = \rho g V = \rho g \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

$$= 1000 \times 9{,}8 \times \frac{1}{3}\pi \times 0{,}15^2 \times 0{,}25$$

$= 57{,}73$ N

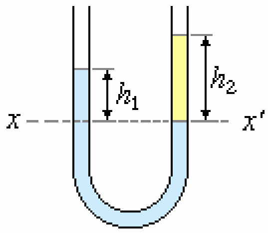
b) La fuerza ejercida por el agua sobre la base del recipiente.



$$F = \rho g \pi R^2 h$$
$$= 1000 \times 9{,}8 \times \pi \times 0{,}15^2 \times 0{,}25$$
$$= 173{,}18 \text{ N}$$

c) La fuerza calculada en la parte (b) es mayor que el peso del agua debido a que es la fuerza es la presión en el fondo multiplicada por el área de la base, equivale al peso del volumen de un cilindro de agua.

Ejemplo 17. Un experimentador desea determinar la densidad de una muestra de aceite que ha extraído de una planta. A un tubo de vidrio en U abierto en ambos extremos llena un poco de agua con colorante (para la visibilidad). Después vierte sobre el agua una pequeña cantidad de la muestra del aceite en un lado del tubo y mide las alturas h_1 y h_2, según como se muestra en la figura. ¿Cuál es la densidad del aceite en términos de la densidad del agua y de h_1 y de h_2?



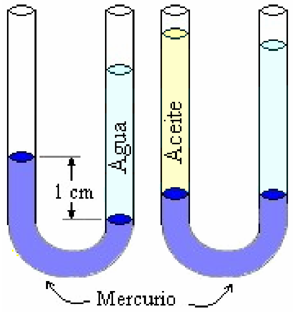
Solución.
La presión en el nivel $x - x'$ es igual en ambos lados del tubo.

$$\rho_{agua} g h_1 = \rho_{aceite} g h_2 \Rightarrow$$
$$\rho_{aceite} = \frac{h_1}{h_2} \rho_{agua}$$

Ejemplo 18. Si la presión manométrica del agua en la tubería a nivel del depósito de un edificio es de 500 kPa, ¿a qué altura se elevará el agua?
Solución.

$$p = \rho_a g h \Rightarrow$$
$$h = \frac{p}{\rho_a g} = \frac{5 \times 10^5}{10^3 \times 9{,}8} = 51 \text{ m}$$

Ejemplo 19. En unos vasos comunicantes hay agua y mercurio. La diferencia de alturas de los niveles del mercurio en los vasos es h = 1 cm. Calcular la altura de aceite que se debe añadir por la rama de mercurio para que el nivel de éste en los dos casos sea el mismo.
Densidad del mercurio = 13,6 g/cm^3.
Densidad del aceite = 0,9 g/cm^3.



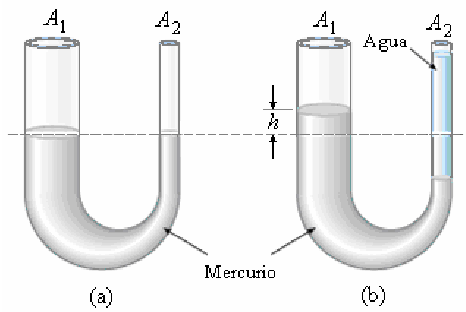
Solución.
La ley de los vasos comunicantes nos da para valor de la altura del agua:

$$\frac{h_{Hg}}{h_{agua}} = \frac{\rho_{agua}}{\rho_{Hg}} \Rightarrow \frac{1}{h_{agua}} = \frac{1}{13{,}6} \Rightarrow$$
$$h_{agua} = 13{,}6 \text{ cm}$$

Una vez añadido el aceite los líquidos quedarán en la disposición de la figura segunda. Las presiones en las superficies de separación deben ser iguales y, por tanto:

$$\rho_{agua} g h_{agua} = \rho_{aciete} g h_{aceite} \Rightarrow$$
$$h_{acite} = h_{agua} \frac{\rho_{agua}}{\rho_{aceite}} = \frac{13{,}6}{0{,}9} = 15{,}11 \text{ cm}$$

Ejemplo 20. El se vierte mercurio en un tubo en U como en la figura a. El brazo izquierdo del tubo tiene una sección transversal A_1 de 10,0 cm^2, y el brazo derecho tiene una sección transversal A_2 de 5,00 cm^2. Se vierte cien gramos de agua luego en el brazo derecho como en la figura b.
a) Determinar la longitud de la columna de agua en el brazo derecho del tubo en U.
b) Teniendo en cuenta que la densidad del mercurio es 13,6 g/cm^3, ¿qué distancia h sube el mercurio en el brazo izquierdo?

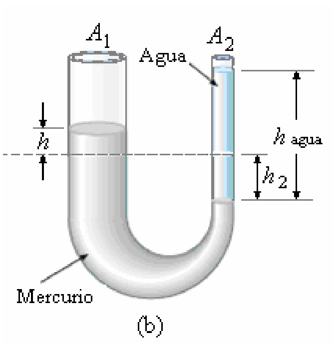


Solución.

a) $\rho_{agua} = \dfrac{m_{agua}}{A_2 h_{agua}} \Rightarrow$

$$h_{agua} = \frac{m_{agua}}{A_2 \rho_{agua}} = \frac{100}{(5{,}00)(1{,}00)}$$
$= 20{,}0$ cm

b)



El dibujo b representa la situación después de que se añade el agua. Un volumen (A_2 h_2) de mercurio ha sido desplazado por el agua en el tubo de la derecha. El volumen adicional de mercurio en la izquierda del tubo es $A_1 h$.
Dado que el volumen total de mercurio no ha cambiado,

$$A_2 h_2 = A_1 h \Rightarrow h_2 = \frac{A_1}{A_2} h \quad (1)$$

En el nivel de la interfase mercurio - agua en el tubo de la derecha, podemos escribir la absoluta presión como:

$$p = p_a + \rho_{Hg} g h (h + h_2) = p_a + \rho_{agua} g h_{agua}$$

Usando la ecuación (1), se reduce a

$$\rho_{Hg} h \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right) = \rho_{agua} h_{agua}$$

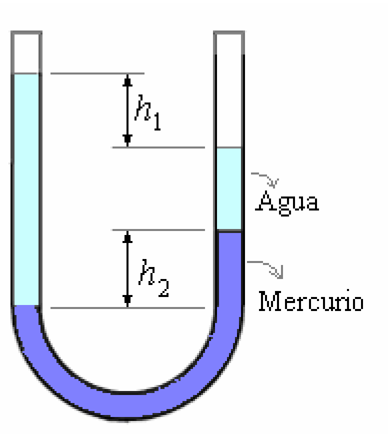
$$\Rightarrow h = \frac{\rho_{agua} h_{agua}}{\rho_{Hg}\left(1 + \dfrac{A_1}{A_2}\right)}$$

Luego el nivel de mercurio se eleva una altura

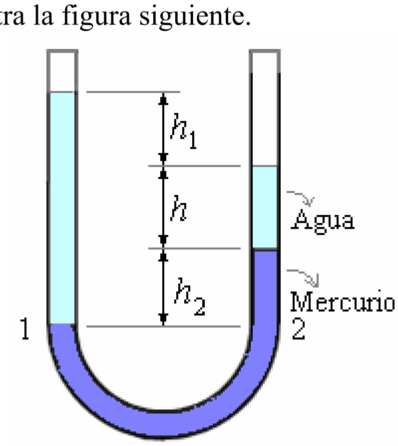
$$h = \frac{(1{,}00)(20{,}0)}{(13{,}6)\left(1 + \dfrac{10{,}0}{5{,}00}\right)}$$

$= 0{,}490$ cm, sobre el nivel original.

Ejemplo 21. Un tubo en U de sección transversal uniforme, abierto a la atmósfera, está parcialmente lleno de mercurio. El agua se vierte en ambos brazos. Si la configuración de equilibrio de la sonda es como se muestra en la figura, con h_2 = 1,00 cm, determinar el valor de h_1.



Solución.
Sea h la altura de la columna de agua añadida a la parte derecha del tubo en U. Cuando se alcanza el equilibrio, la situación es como se muestra la figura siguiente.



Consideremos dos puntos, 1 y 2, en el nivel de la interfase agua mercurio.

$$p_1 = p_a + \rho_{H_2O} g (h_1 + h + h_2) \text{ y}$$

$$p_2 = p_a + \rho_{H_2O} g h + \rho_{Hg} g h_2$$

Por el principio de Pascal, la presión en 1 es igual a la de 2.

$$p_a + \rho_{H_2O} g (h_1 + h + h_2) = p_a + \rho_{H_2O} g h + \rho_{Hg} g h_2$$

$$\Rightarrow$$

$$\rho_{H_2O}(h_1 + h_2) = \rho_{Hg} h_2 \Rightarrow$$

$$h_1 = \frac{(\rho_{Hg} - \rho_{H_2O})}{\rho_{H_2O}} h_2$$

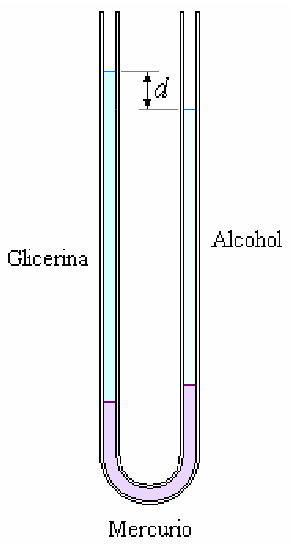
$$= \frac{(1360 - 1000)}{1000}(0{,}01)$$

$= 0{,}126$ m $= 12{,}6$ cm

Ejemplo 22. Considere un vaso comunicante de 2 cm^2 de sección transversal que contiene mercurio ρ_{Hg} = 13,6 g/cm^3). A un lado se echan 360 gramos de glicerina ρ_{gl} = 1,2 g/cm^3) y en el otro 1/4 de litro de alcohol ρ_{al} = 0,8 g/cm^3).

a) Encuentre el desnivel d que existe entre los niveles superiores de la glicerina y el alcohol.

b) Haga un gráfico cualitativo de la presión hidrostática en función de la profundidad para cada uno de los dos brazos del vaso comunicante (grafique las dos curvas en el mismo grafico).



Solución.

a) Altura de la glicerina

$$m_{gl} = 360\,\text{g} \Rightarrow V_{gl} = \frac{m_{gl}}{\rho_{gl}} = \frac{360}{1,2} = 300\text{cm}^3$$

$$h_{gl} = \frac{V_{gl}}{A} = \frac{300}{2} = 150 \text{ cm}$$

Altura del alcohol

$$V_{al} = 250\,\text{cm}^3$$

$$h_{al} = \frac{V_{al}}{A} = \frac{250}{2} = 125 \text{ cm}$$

$$p = p_a + \rho_{gl}\, g(1,50),$$

$$p = p_a + \rho_{al}\, g(1,25) + \rho_{Hg}\, g(x),$$

$$p_a + \rho_{gl}\, g(1,50) = p_a + \rho_{al}\, g(1,25) + \rho_{Hg}\, g(x)$$

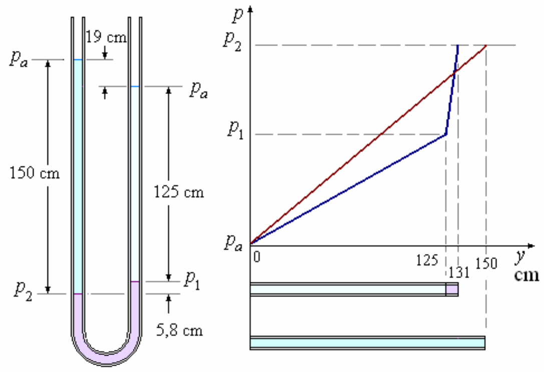
$$x = \frac{(\rho_{gl}(1,50) - \rho_{al}(1,25) +)}{\rho_{Hg}}$$

$$= \frac{1200(1,50) - 800(1,25)}{13600} = \frac{0,8}{13,6} = 0,058$$

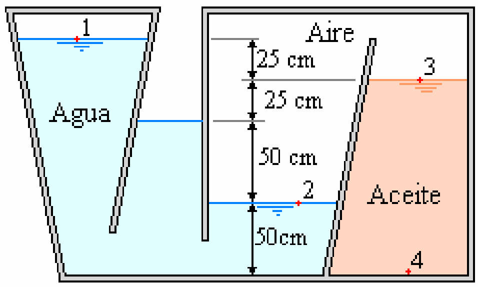
$x \approx 6$ cm m

$$d = h_{gl} - (h_{al} + x)$$
$$= 150 - (125 + 6) = 150 - 131 = 19 \text{ cm}$$

b) Gráfico cualitativo de la presión hidrostática en función de la profundidad para cada uno de los dos brazos del vaso comunicante.



Ejemplo 23. Calcular la presión en los puntos 1, 2, 3 y 4 en el sistema mostrado en la figura. Densidad específica del aceite = 0,9



Solución.

Considerando la disposición y geometría mostrada en la figura:

Presión en 1:

$p_1 = p_{atm} - (0,25 + 0,25)\rho_{agua}\, g$

= 1,033 x 10^5 – 4900

= 98400 Pa

Presión en 2:

$p_2 = p_{atm} + (0,50)\rho_{agua}\, g$

= 1,033 x 10^5 + 4900

= 108200 Pa

Presión en 3:

$p_3 = p_2 - (0,75)\rho_{aire}\, g$

Como la densidad del aire es 1000 veces menos que la del agua podemos considerar

$p_3 = p_2$ = 108200 Pa

Presión en 4:

$p_4 = p_3 + (1,25)\rho_{aceite}\, g$

= 108200 + 11025

= 119225 Pa

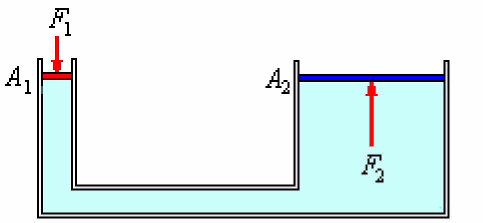
EL PRINCIPIO DE PASCAL.

Si mediante algún método o sistema externo aumentamos la presión en la superficie, la presión en todos los puntos del fluido sufrirá igual aumento, es decir, “el cambio de presión en alguna parte del fluido confinado introduce el mismo cambio de presión en todas partes del fluido”. Enunciado que corresponde al Principio de Pascal. Frecuentemente utilizado en la práctica de la ingeniería con la prensa hidráulica.

La prensa hidráulica, representada en la figura a continuación. Mediante un pistón de sección transversal pequeña, A_1 se ejerce una fuerza F_1 sobre un líquido. La presión se trasmite a un cilindro de mayor área A_2 sobre el que ejerce una fuerza F_2 mucho mayor:

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

Mientras mayor sea la relación entre las áreas de los pistones, mayor es la fuerza ejercida sobre el pistón mayor.



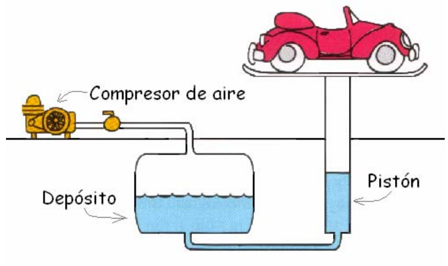
Ejemplo 24. Una gata hidráulica consiste en un cilindro grande del área A conectado con un cilindro pequeño del área a.. Ambos cilindros se llenan de aceite. Cuando la fuerza f se aplica al cilindro pequeño; la presión que resulta se transmite al cilindro grande, que entonces ejerce una fuerza ascendente F. Suponer que u auto pesa 12.000 N sobre el cilindro grande de área 0,10 m^2. ¿Qué fuerza se debe aplicar al cilindro pequeño del área 0,002 m^2 para soportar al auto?

Solución. $p = \frac{F}{A} = \frac{f}{a}$, tal que

$$f = \frac{a}{A} F = \frac{0,002}{0,10}(12000) = 240 \text{ N}$$

La gata tiene una ventaja mecánica de 50.

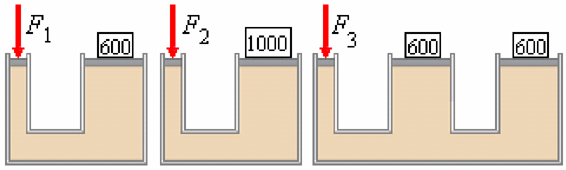
Ejemplo 25. El área transversal del pistón de la rampa hidráulica de la figura es 400 cm^2. La masa del automóvil y de la rampa misma es 2000kg. ¿Cuánta presión debe aplicarse a la superficie del fluido del depósito para subir el auto?



Solución.
La presión aplicada al fluido en el depósito debe ser igual a la presión que el pistón ejerce sobre el cilindro.

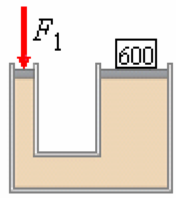
$$p = \frac{2000 \times 9,8}{400 \times 10^{-4}} = 4,9 \times 10^4 \text{ kPa}$$

Ejemplo 26. Ordenar de mayor a menor las magnitudes de las fuerzas F_1, F_2 y F_3 requeridas para equilibrar las masas.
Las masas están en kilogramos.



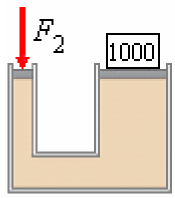
Solución.
Para F_1:

$$\frac{F_1}{a} = \frac{600g}{A}$$



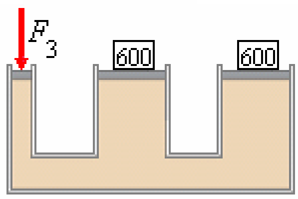
Para F_2:

$$\frac{F_2}{a} = \frac{1000g}{A}$$



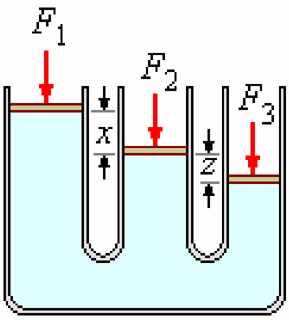
Para F_3:

$$\frac{F_3}{a} = \frac{600g}{A}$$



De esto podemos concluir:
$F_2 > F_1 = F_3$

Ejemplo 27. Tres émbolos cargados de áreas A_1, A_2 y A_3, descansan sobre la superficie de un líquido, en la forma indicada en la figura. Calcular las alturas x e y.



Solución.
La presión en cada uno de los émbolos es:

$$p_1 = \frac{F_1}{A_1},\ p_2 = \frac{F_2}{A_2} \text{ y } p_3 = \frac{F_3}{A_3}$$

De la presión en el émbolo 2 referida a la presión en el émbolo3:

$$p_2 = p_3 + \rho g z \ \Rightarrow$$

$$z = \frac{1}{\rho g}(p_2 - p_3) \Rightarrow z = \frac{1}{\rho g}\left(\frac{F_2}{A_2} - \frac{F_3}{A_3}\right)$$

De la presión en el émbolo 1 referida a la presión en el émbolo2:

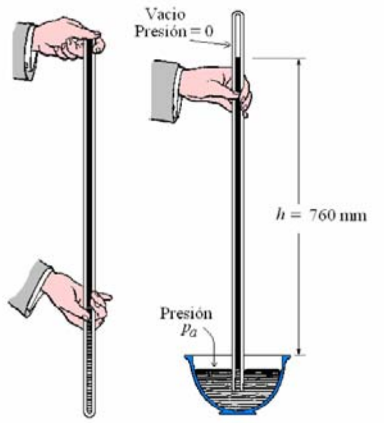
$$p_1 = p_2 + \rho g x \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{\rho g}(p_1 - p_2) \Rightarrow z = \frac{1}{\rho g}\left(\frac{F_1}{A_1} - \frac{F_2}{A_2}\right)$$

MEDIDA DE LA PRESIÓN.

Barómetro

La presión en la superficie de un fluido que se encuentra en un recipiente abierto a la atmósfera no es nula, sino igual a la presión atmosférica. Esta última se debe a que estamos inmersos en un fluido compresible constituido por el aire. La atmósfera de la Tierra ejerce una presión sobre todos los objetos con los que está en contacto. La presión atmosférica sobre la superficie terrestre la denotaremos por p_a, y es igual a la presión ejercida por el peso de toda la columna de aire que está por encima. La presión atmosférica p_a no es despreciable o insignificante como algunas personas suelen creer. Por el contrario, la presión atmosférica juega un papel importante en numerosos aparatos y máquinas de la vida diaria.
Considere un tubo de 1 m de largo y sección transversal *A*, cerrado por uno de los extremos. Llenemos el tubo con mercurio y coloquemos el tubo, con el extremo abierto hacia abajo, en un recipiente con mercurio. Observaremos que el nivel de mercurio se situará aproximadamente 760 mm del nivel del recipiente.



El extremo superior del tubo queda al vacío. Apliquemos la segunda ley de Newton a la columna de mercurio (que sobresale de la superficie del líquido en el recipiente). ¿Cuáles son las fuerzas que actúan sobre ella? Hay sólo dos: por una parte está la presión que el fluido que está en el recipiente ejerce sobre el mercurio que está en el tubo: tal fuerza es $F_1 = p_a A$; por otra, está el peso del mercurio al interior de la columna $Peso = \rho_{Hg} g V = \rho_{Hg} g h A$. Como el fluido está en reposo la fuerza neta debe ser nula, o sea:

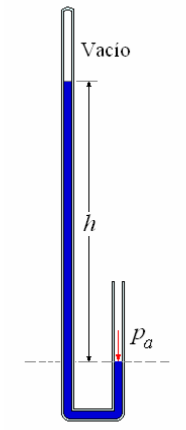
$$p_a A = \rho_{Hg} g h A$$

La densidad del mercurio es ρ_{Hg} = 13,6 g/cm^3. Con esto obtenemos para p_a el valor $p_a \approx 1{,}013 \times 10^5$ Pa = 1 atm .
La fuerza que eleva al mercurio al interior del tubo es la presión atmosférica. El dispositivo que acabamos de describir es un **barómetro de mercurio**. La altura de la columna de mercurio mide la presión atmosférica. La presión atmosférica promedio a nivel del mar corresponde a 760 mm de mercurio.
Al repetir el mismo experimento, pero con una columna de agua, la altura será 13,6 veces mayor (recuerde que la densidad del mercurio es 13,6 g/cm^3 y la del agua 1 g/cm^3). Multiplicando los 76 cm por 13,6 se obtienen 10,34 m. Este dato es muy importante, ya que interviene en varias aplicaciones tecnológicas. Por ejemplo, al intentar elevar agua de un pozo (cuya superficie está en contacto con el aire que nos rodea) succionando por el extremo superior de un tubo largo, sólo se tendrá éxito si el nivel de agua no está a más de 10,34 metros

de profundidad (en la práctica esta altura es menor ya que el agua comienza a hervir bastante antes de llegar a los 10,34 metros).

Barómetro de mercurio en U
Considere la figura donde se muestra un tubo cerrado en un extremo, doblado en forma de U, abierto por el otro extremo donde actúa la presión atmosférica que se desea medir. El mercurio alcanza una cierta posición de equilibrio, donde por el extremo cerrado por existir vacío, la presión es nula. Al nivel indicado, la presión debe ser la misma, de modo que podemos igualar

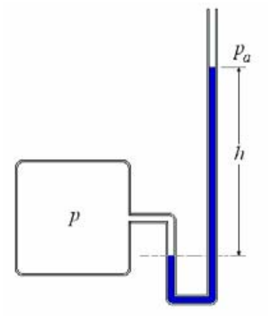
$p_a = h \text{ mmHg} = h$ torr



Manómetro simple.
Otra aplicación práctica de la ecuación $p_1 = p_2 + \rho gh$ son los instrumentos de medida de la presión:

Manómetro en U de líquido, para presiones relativas de gases
La columna en U contiene un líquido (líquido manométrico), por ejemplo agua, de modo que en la situación de equilibrio, cuando la presión p en el recipiente que contiene un gas es mayor que la atmosférica, la condición de equilibrio indicada en la figura da

$p = p_a + \rho_L gh$, de modo que si se mide la altura *h* tenemos una medida de la presión relativa.



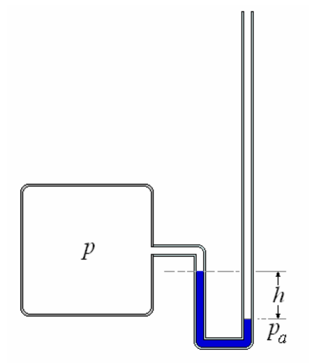
Presión relativa y la presión absoluta:
La presión relativa (a la atmosférica) será

$p - p_a = \rho_L gh$.

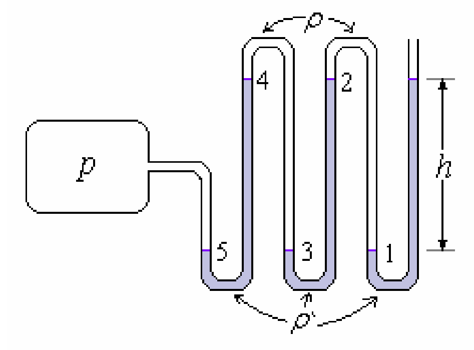
La presión absoluta p puede también calcularse de allí si se conoce o se mide la presión atmosférica mediante un barómetro.
Si la presión en el recipiente que contiene el gas es menor que la atmosférica, la situación de equilibrio será como se indica en la figura siguiente de modo que la condición de equilibrio será $p + \rho_L gh = p_a$, dando para la presión relativa

$p - p_a = -\rho_L gh$, un valor negativo que refleja que la presión en el interior del recipiente es menor que la atmosférica.
Igualmente se puede calcular la presión (absoluta) si la presión atmosférica es conocida

$p = p_a - \rho_L gh$



Ejemplo 28. Determinar la presión *p* de un gas, en el manómetro mostrado en la figura.



Solución.
Podemos determinar sucesivamente las presiones de los puntos indicados en la figura:

$$p_1 = p_a + \rho' gh$$

$$p_2 = p_1 - \rho gh = p_a + (\rho' - \rho)gh$$

$$p_3 = p_2 + \rho' gh = p_a + (2\rho' - \rho)gh$$

$$p_4 = p_3 - \rho gh = p_a + 2(\rho' - \rho)gh$$

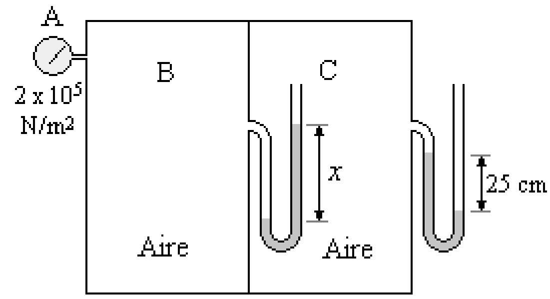
$$p_5 = p_4 + \rho' gh = p_a + (3\rho' - 2\rho)gh$$

$p = p_5$

Sumando todas obtenemos:

$p = p_a + (3\rho' - 2\rho)gh$

Ejemplo 29. Los compartimientos B y C en la figura están cerrados y llenos con aire, el barómetro lee 76 cm de mercurio cuando los manómetros leen x y 25 cm. ¿Cuál será el valor de x?
Los tubos en U están llenos de mercurio de mercurio.
La lectura del manómetro A es presión absoluta.



Solución.

Cálculo de p_C

$p_C = p_a - 0{,}25\rho_{Hg}g$

$= 1{,}033 \times 10^5 - 0{,}25 \times 13700 \times 9{,}8$

$= 69735$ Pa

El valor de la presión en B se lee en el manómetro A:

$p_B = 2 \times 10^5$ Pa

La lectura del manómetro entre los tanques B y C es la diferencia entre las presiones de dichos tanques:

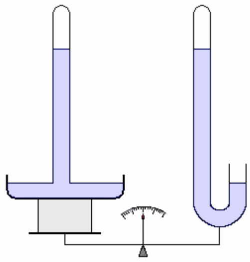
$p_B - p_C = \rho_{Hg}g(x)$

$200000 - 69735 = 13700 \times 9{,}8\, x$

De aquí se obtiene:

$x = 0{,}97$ m

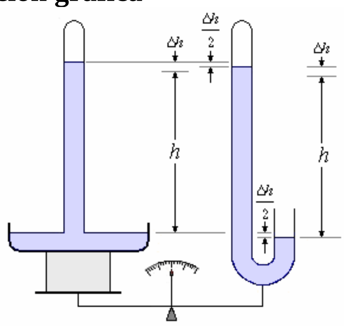
Ejemplo 30. En una balanza de gran sensibilidad fueron equilibrados dos barómetros de mercurio: uno en forma de platillo (con un plato ancho) y el otro en forma de U. Los barómetros están hechos del mismo material, tienen el mismo diámetro de los tubos y contienen la misma cantidad de mercurio. Las distancias entre las partes soldadas de los tubos y los niveles superiores del mercurio en ellos son iguales. ¿Cómo variará el equilibrio de la balanza si aumenta la presión atmosférica?



Solución.

Como resultado de la variación de la presión atmosférica, la fuerza de Arquímedes que actúa sobre los barómetros por parte del aire se varía tanto por el cambio de la densidad del aire, como por el cambio del volumen de los barómetros, cuando se cambian los niveles del mercurio en sus secciones abiertas.
Tomando en consideración todas las condiciones del problema, los barómetros tienen no sólo el mismo peso, sino también el mismo volumen. Por eso, para cada uno de ellos la variación de la fuerza de empuje, debido a la primera causa, es la misma. La variación de los volúmenes, como es evidente, será diferente. En el barómetro en forma de U, para una variación de la diferencia de niveles en un determinado valor, el nivel del mercurio en cada caño acodado debe cambiar sólo en la mitad de este valor. En el barómetro de cubeta el nivel del mercurio en la cubeta cambia muy poco y en el tubo cambia prácticamente en todo el valor de variación de la diferencia de niveles. Además, en la misma cantidad en que cambia el volumen del mercurio dentro del tubo variará el volumen en la cubeta. Por consiguiente, para el barómetro de cubeta, la variación del volumen será dos veces mayor que para el barómetro en forma de U (a diámetros iguales de los tubos). Al aumentar la presión, el volumen del barómetro de cubeta se hace menor que el volumen del barómetro en forma de U, la fuerza de Arquímedes que actúa sobre el barómetro de cubeta también será menor y por eso él pesa más.

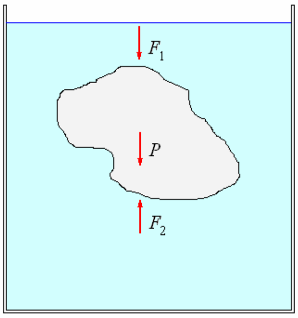
Explicación gráfica



La figura ilustra la variación en los barómetros con el aumento de presión.
Las alturas de las columnas de mercurio son iguales a $(h + \Delta h)$. Mientras la variación en el volumen de la cubeta corresponde al volumen de una columna de altura Δh del tubo, para el barómetro en U solo corresponde al volumen de una columna de altura $\Delta h / 2$, por lo tanto desaloja menor volumen y el empuje es menor que en barómetro de cubeta.

EL PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES.
Cuando un objeto se sumerge en un fluido (un líquido o un gas), experimenta una fuerza ascendente de la flotabilidad porque la presión en el fondo del objeto es mayor que en la parte superior. El gran científico griego Arquímedes (287-212 AC) hizo la observación cuidadosa siguiente, ahora llamada el principio de Arquímedes.
Cualquier objeto totalmente o parcialmente sumergido en un fluido es empujado para arriba por una fuerza igual al peso del fluido desplazado.
Para ver que esto es verdad, considere una porción pequeña de agua en un recipiente como se muestra en la figura. El agua sobre esta porción actúa hacia abajo, al igual que su peso. El agua bajo la porción empuja hacia arriba. Puesto que la porción de agua está en equilibrio, la fuerza hacia arriba equilibra las fuerzas hacia abajo.

$$F_1 + P = F_2$$



La fuerza neta hacia arriba debido al fluido se llama la fuerza **Empuje**, así

$$F_E = F_2 - F_1 = P$$

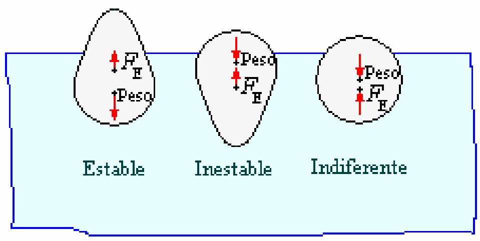
Aquí P es el peso del fluido desplazado por el objeto. Si la porción de agua de peso P es substituido por un objeto de la misma forma y tamaño, este objeto también sentiría la fuerza de empuje hacia arriba

$$F = P$$

O sea que la fuerza de empuje F_E es $F_E = \rho g V$, donde ρ es la densidad del fluido, y V es el volumen del cuerpo sumergido.
Si el peso del objeto es mayor que P (el peso del fluido desplazado), el objeto se hundirá (siempre experimenta la fuerza de empuje, razón por la que un objeto no se siente tan pesado cuando se sumerge que cuando se saca del agua). Si el peso del objeto es menor que el peso de agua desplazada cuando se sumerge totalmente, experimentará una fuerza neta hacia arriba y flotará a la superficie.
Algo del objeto resaltará sobre la superficie, de modo que la porción todavía sumergida desplace un peso de fluido igual al peso del objeto.

CENTRO DE EMPUJE
Es el punto a través del cual actúan las fuerzas de empuje, y está en el centro de gravedad del volumen de líquido desplazado. Si el cuerpo es homogéneo y está totalmente sumergido, su centro de gravedad coincide con el centro de empuje.

EQUILIBRIO ROTACIONAL DE OBJETOS FLOTANTES.
Un cuerpo tiene estabilidad vertical cuando un pequeño desplazamiento vertical en cualquier sentido origina fuerzas restauradoras que tienden a volver al cuerpo a su posición original y tiene estabilidad rotacional cuando al aplicar un pequeño desplazamiento angular se origina un par restaurador. En la figura se muestran los diversos casos de equilibrio que se presentan.



a) Estable. Ocurre cuando el centro de gravedad del cuerpo está por debajo del centro de empuje, para una pequeña rotación el par de fuerzas hará retornar al cuerpo a su posición inicial.,
b.) Inestable. Ocurre cuando el centro de gravedad del cuerpo esta por encima del centro de empuje para una pequeña rotación el par de fuerzas tenderá a hacer rotar el

cuerpo hacia una nueva posición de equilibrio.
c) Indiferente. Ocurre para cilindro recto horizontal y esfera, ya que su peso y fuerza de empuje son siempre colineales al aplicarle cualquier rotación.

Ejemplo 31. Un hombre que está pescando en el Mar Egeo pesca accidentalmente un artefacto antiguo de oro. La densidad del oro es 19,3 x 10^3 kg/m^3, y la densidad del agua de mar es 1,03 x 10^3 kg/m^3. ¿Mientras está levantando el tesoro, la tensión en su línea es 120 N. ¿Cuál será la tensión cuando saque el objeto del agua?
Nota: Si usted engancha un tesoro o un pez grande, no lo levante del agua. El cordel puede romperse.
Solución.
Si el objeto de peso mg se levanta lentamente, está en equilibrio y
$mg = T_1 + F_E$, donde $m = \rho V$, (ρ es la densidad del objeto, V es el volumen del objeto)
T_1 es la tensión en la línea mientras está en el agua y F_E es la fuerza de empuje,
$F_E = \rho_a g V$, (ρ_a es la densidad del agua)

Así: $\rho V g = T_1 + \rho_a V g \Rightarrow V = \dfrac{T_1}{(\rho - \rho_a)g}$

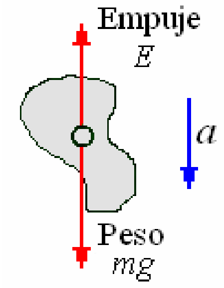
Cuando el objeto está en aire, la tensión es igual al peso mg.

$$\text{Peso} = mg = \rho g V$$
$$= \frac{\rho g T_1}{(\rho - \rho_a)g} = \frac{\rho/\rho_a}{[(\rho/\rho_a) - 1]} T_1$$
$$= \frac{19{,}3}{(19{,}3 - 1)}(120N) = 127 \text{ N}$$

Ejemplo 32. Un bloque de madera de la gravedad específica 0,8 flota en agua. ¿Qué fracción de volumen del bloque se sumerge?
Solución.
Si V es el volumen del bloque y xV es el volumen sumergido (x es la fracción de volumen sumergido), entonces

$$mg = F_B \quad \text{o} \quad \rho g V = \rho_a x V g$$
$$\Rightarrow x = \frac{\rho}{\rho_a} = 0{,}8$$

Ejemplo 33. Consideremos el movimiento de un objeto de volumen V y masa M que cae a través de un fluido con viscosidad cero (sin rozamiento).
a) Dibuja las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.
b) ¿La aceleración del objeto en caída es independiente de su masa?, ¿y de su volumen?
Solución.
a)

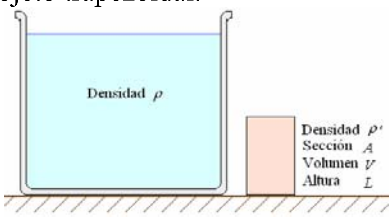


b) Ecuación del movimiento
$ma = mg - Empuje$
ρ_c = densidad del cuerpo, ρ_f = densidad del fluido, V = volumen del cuerpo

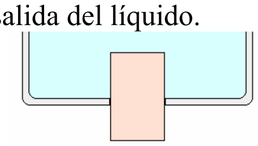
$$\rho_c V a = \rho_c V g - \rho_f V g$$

$a = g\left(1 - \dfrac{\rho_f}{\rho_c}\right)$, a es independiente de la masa y el volumen, depende de las densidades del cuerpo y del fluido.

Ejemplo 34. Se tiene un recipiente con agua y un objeto trapezoidal.

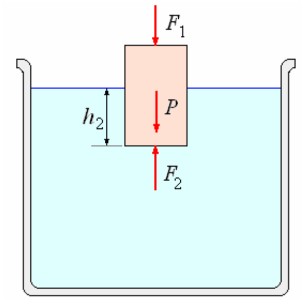


Encuentre la fuerza efectiva sobre el objeto cuando se introduce en el agua, para los siguientes casos.
a) La densidad del objeto es menor que la del agua.
b) La densidad del objeto es igual que la del agua.
c) La densidad del objeto es mayor que la del agua.
d) La densidad del objeto es mayor que la del agua y hay un agujero en el fondo por el que pasa el cuerpo sin rozamiento y además no permite la salida del líquido.



Solución.

a) Cuerpo con densidad menor que la del agua
$\rho' < \rho$



$$\sum F_V = 0$$

$$F_2 - F_1 - P = 0 \Rightarrow F_2 - F_1 = P$$

Donde

$F_1 = p_a A$, $F_2 = (p_a + \rho g h_2)A$ y $P = \rho' g V$

Tenemos

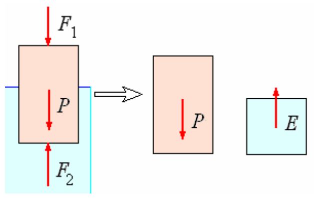
$$F_2 - F_1 = p_a A - (p_a + \rho g h_2)A = -\rho g h_2 A$$

$$\Rightarrow F_2 - F_1 = E$$

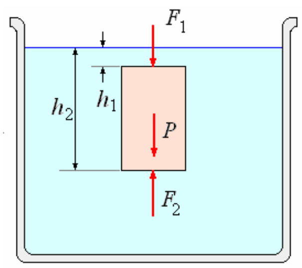
Luego

$$E = P$$

Cuerpo parcialmente sumergido



b) Cuerpo con densidad igual que la del agua
$\rho' = \rho$



$$\sum F_V = 0$$

$$F_2 - F_1 - P = 0$$

$F_1 = (p_a + \rho g h_1)A$, $F_2 = (p_a + \rho g h_2)A$ y

$$P = \rho' g V$$

Reemplazando:

$$(p_a + \rho g h_2)A - (p_a + \rho g h_1)A - \rho' g V = 0$$

$$\Rightarrow$$

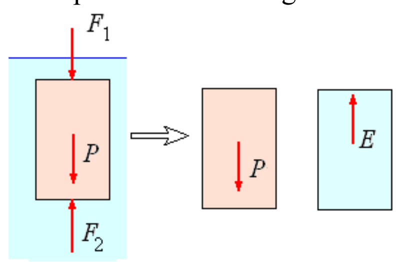
$$p_a A + \rho g h_2 A - p_a A - \rho g h_1 A - \rho' g V = 0$$

$$\Rightarrow \rho g A(h_2 - h_1) - \rho' g V = 0$$

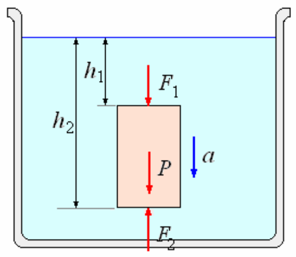
$$\Rightarrow \rho g A V - \rho' g V = 0$$

$$E = P$$

Cuerpo completamente sumergido estático



c) Cuerpo con densidad mayor que la del agua
$\rho' > \rho$



$$\sum F_V = ma$$

$F_2 - F_1 - P = ma$, con

$F_1 = (p_a + \rho g h_1)A$, $F_2 = (p_a + \rho g h_2)A$ y

$$P = \rho' g V$$

Reemplazando

$$(p_a + \rho g h_2)A - (p_a + \rho g h_1)A - \rho' g V = ma$$

$$\Rightarrow$$

$$p_a A + \rho g h_2 A - p_a A - \rho g h_1 A - \rho' g V = ma$$

$$\Rightarrow$$

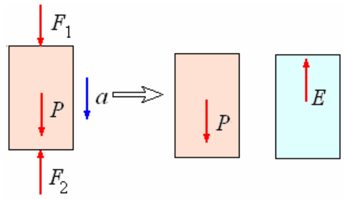
$$\rho g A(h_2 - h_1) - \rho' g V = ma \ \Rightarrow$$

$$\rho g A V - \rho' g V = ma \Rightarrow$$

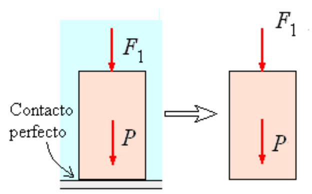
$$E - P = ma$$

$$a = -\frac{(P - E)}{m}$$

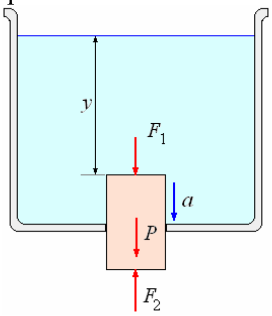
El cuerpo baja con aceleración constante a hasta el fondo



Si el cuerpo tiene un contacto perfecto con el fondo, no habría la fuerza F_2 y solo quedaría F_1 y el peso P ejerciendo presión sobre el fondo.



d) Hay un agujero en el fondo por el que pasa el cuerpo sin rozamiento y no permite la salida del líquido



$$\sum F_V = 0 \Rightarrow$$

$F_2 - F_1 - P = ma$, con

$F_1 = (p_a + \rho g y)A$, $F_2 = p_a A$ y $P = \rho' g V$

Reemplazando

$$p_a A - (p_a + \rho g h y)A - \rho' g V = ma \Rightarrow$$

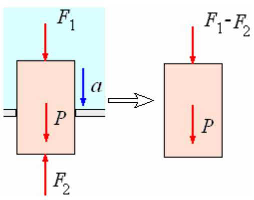
$$p_a - p_a A - \rho g h y A - \rho' g V = ma \Rightarrow$$

$$-\rho g A y - \rho' g V = ma \Rightarrow$$

$$-\rho g A y - P = ma \Rightarrow$$

$$a = -\frac{(\rho g A y + P)}{m}$$

Cuerpo baja con aceleración variable *a* hasta salir completamente del recipiente, luego sigue en caída libre con la aceleración de la gravedad *g*.



Observación: Se puede notar en todos los casos que la presión atmosférica p_a se elimina, por lo tanto es posible trabajar con las presiones relativas.

Ejemplo 35. El peso de un bloque rectangular de material de baja densidad es 15,0 N. Con una cuerda fina, el centro de la cara inferior del bloque se ata a la parte inferior de un vaso parcialmente lleno de agua. Cuando 25,0% del volumen del bloque está sumergido, la tensión en la cuerda es 10,0 N.

a) Haga el diagrama del cuerpo libre del bloque, mostrando todas las fuerzas que actúan sobre él.

b) Encontrar la fuerza de empuje en el bloque.

c) Se añade aceite de 800 kg/m^3 de densidad al vaso a un ritmo constante, formando una capa sobre el agua y rodeando al bloque. El aceite ejerce fuerzas sobre cada una de las cuatro paredes laterales del bloque que el aceite toca. ¿Cuáles son las direcciones de estas fuerzas?

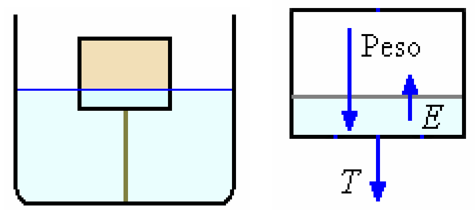
d) ¿Qué sucede con la tensión de la cuerda cuando se añade el aceite? Explicar la forma en que el aceite tiene este efecto sobre la tensión de la cuerda.

e) La cuerda se rompe cuando su tensión llega a 60,0 N. En este momento, el 25,0% del volumen del bloque está todavía por debajo de la línea de agua; ¿Qué fracción adicional del volumen del bloque está por debajo de la superficie superior del aceite?

f) Después de que la cuerda se rompe, el bloque llega a un nuevo equilibrio en el vaso. Esta ahora en contacto solamente con el aceite. ¿Qué fracción del volumen del bloque está sumergida?

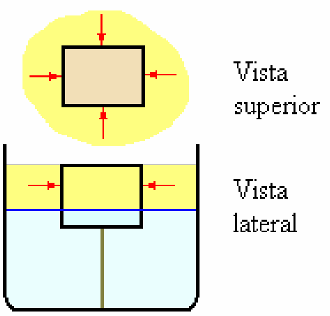
Solución.

a)



b) $\sum F_y = 0 \Rightarrow -15 - 10 + E = 0 \Rightarrow E =$ 25 N

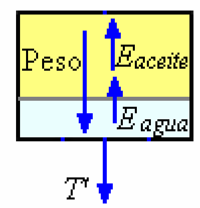
c)



El aceite empuja horizontalmente hacia adentro cada cara del bloque.

d) La tensión en la cuerda aumenta. El hace que el agua empuje con mayor fuerza a la base del bloque.

e) Considere el equilibrio justo antes de romperse la cuerda:



Peso = 15 N, Tensión = 60 N, Empuje del agua = 25 N.

$-15 - 60 + 25 + E_{aceite} = 0 \Rightarrow$

$E_{aceite} = 50$ N

El empuje es $E = \rho g V$

Por el empuje del agua tenemos:

$25 = (1000)(9,80)(0,25 V_{bloque}) \Rightarrow$

$$V_{bloque} = \frac{25}{(1000)(9,80)(0,25)}$$

$= 1,02 \times 10^{-2}$ m^3

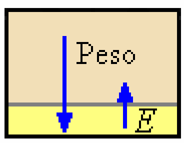
Para el empuje del aceite:

$50 = (800)(9,80)(x 1,02 \times 10^{-2})$

$$\Rightarrow x = \frac{25}{(1000)(9,80)(1,02 \times 10^{-2})} = 0,625$$

La fracción adicional de volumen del bloque por debajo de la superficie superior es 62,5 %.

f)



Peso = 15 N,

$\sum F_y = 0 \Rightarrow -15 + E_{aceite} = 0 \Rightarrow$

$E_{aceite} = 15$ N

$E = \rho_{aceite} g (x' V_{bloque}) =$

$(800)(9,80)(x' V_{bloque})$

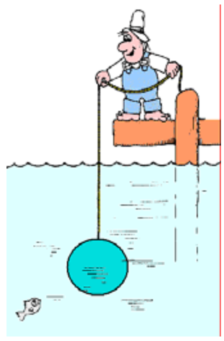
Luego $(800)(9,80)(x' V_{bloque}) = 15 \Rightarrow$

$$x' = \frac{15}{(800)(9,80)(1,02 \times 10^{-2})}$$

$= 0,187$

La fracción de volumen del bloque sumergido es 18,7 %.

Ejemplo 36. Una esfera sólida de 4,0 kilogramos, hecha del metal cuya densidad es 3000 kilogramos/m^3, es suspendida por medio de una cuerda. La densidad del agua es 1000 kilogramos/m^3.



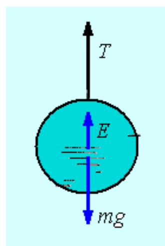
a) Cuando la esfera se sumerge en agua, ¿cuál es tensión en la cuerda?:

b) Cuando la esfera se sumerge en un líquido de la densidad desconocida, la tensión en la cuerda es 18 N. ¿Cuál es la densidad del líquido?:

c) La esfera flota cuando está colocada en un líquido cuya densidad es 3500 kilogramos/m^3. ¿Qué fracción del volumen de la esfera se sumerge?:

Solución.

a)



$\sum F_V = 0$, $T + E - mg = 0 \Rightarrow$

$T = mg - E$

$mg = (4,0)(9,8) = 39,2$ N,

$$E = \rho_{agua} g V = 1000(9,8)\left(\frac{4,0}{3000}\right)$$

$= 13,07$ N

Luego: $T = 39,2 - 13,07 = 26,2$ N.

b) $T = mg - E \Rightarrow E = mg - T \Rightarrow$

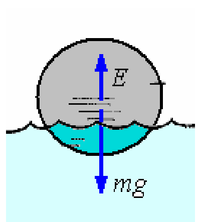
$E = 39,2 - 18 = 21,2$ N.

$E = \rho_{líquido} g V \Rightarrow$

$$\rho_{líquido} = \frac{E}{gV} = \frac{21,2}{9,8(4,0/3000)}$$

$= 1622,45$ kg/m^3.

c)



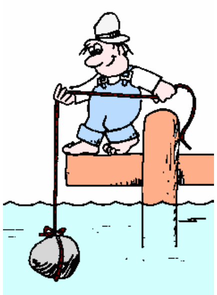
$$\sum F_V = 0,\ E - mg = 0 \Rightarrow E = mg \Rightarrow$$

$$\rho_{líquido} gV' = \rho_{esfera} gV \Rightarrow$$

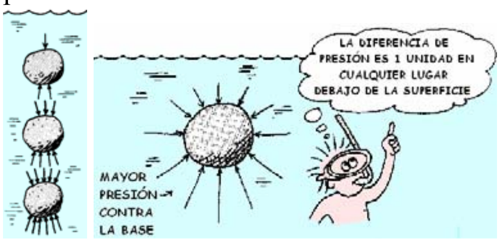
$$3500(9,8)V' = 3000(9,8)V \Rightarrow$$

$$\frac{V'}{V} = \frac{3000}{3500} = 0,86$$

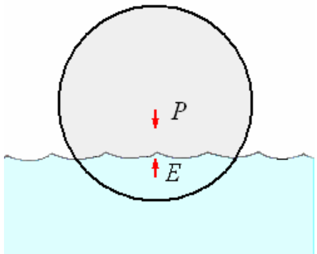
Ejemplo 37. Una piedra 25 kilogramos de masa atada por medio de una cuerda se sumerge bajo la superficie del agua. Cuando la piedra esta sumergida encuentras que el peso es menor. Cuando la piedra se sumerge más, ¿la fuerza necesaria para sujetar la piedra es diferente?



Solución.
La fuerza necesaria para sujetar la piedra es la misma a toda profundidad.
Con la piedra sumergida la fuerza de empuje es hacia arriba con una fuerza igual al peso de agua desplazada por la piedra, que hace una fuerza menor al correspondiente a una masa de 25 kg cuando la piedra se suspende debajo de la superficie del agua. Cuando la piedra baja a mayor profundidad, el volumen, y por lo tanto el peso de agua que desplaza, no cambian. Porque el agua es prácticamente incompresible, su densidad cerca de la superficie o a mucha profundidad es igual. Así la fuerza de empuje no cambia con la profundidad



Ejemplo 38. Una pelota de plástico tiene 25 cm de radio y flota en agua con el 25% de su volumen sumergido.
a) ¿Qué fuerza deberemos aplicar a la pelota para sostenerla en reposo totalmente sumergida en agua?
b) Si se suelta la pelota, ¿qué aceleración tendrá en el instante en que se suelte?
Solución.
Primero calcularemos la densidad de la pelota.
Utilizando la primera condición:



Fuerza de empuje: $E = \rho_a 0,25Vg$

Peso: $P = \rho_p Vg$

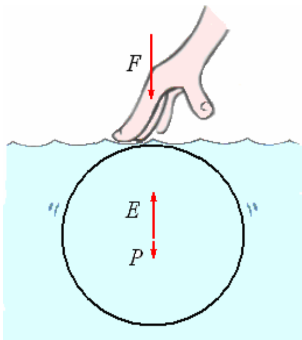
$\sum F_v = 0$

Peso = empuje

$\rho_p Vg = \rho_a 0,25Vg \Rightarrow$

$\rho_p = 0,25\rho_a = 0,25$ g/cm^3.

a) Empuje cuando está totalmente sumergida en agua;



Fuerza de empuje: $E = \rho_a Vg$

Peso: $P = \rho_p Vg$

$\sum F_v = 0$

$E - F - P = 0 \Rightarrow F = E - P$

La fuerza que se necesaria para mantenerla en equilibrio totalmente sumergida es:

Empuje – peso = $(\rho_a - \rho_p)Vg$

$$= (1000 - 250)\left(\frac{4}{3}\pi 0,25^3\right)9,8$$

$= 481,06$ N.

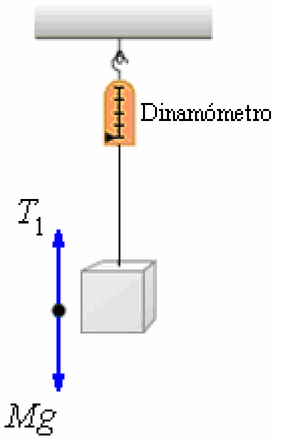
b) Sea a la aceleración de la pelota en el instante en que se suelte

$F = ma \Rightarrow$

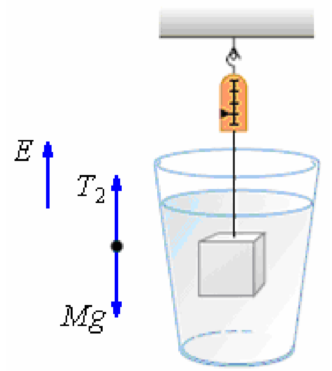
$$a = \frac{F}{m} = \frac{481,06}{(250)\left(\frac{4}{3}\pi 0,25^3\right)}$$

= 29,4 m/s^2.

Ejemplo 39. Un pieza de aluminio de 1,00 kg de masa y densidad 2 700 kg/m^3 es suspendida por medio de una cuerda, luego se sumerge completamente en un recipiente con agua.
Calcular la tensión en la cuerda
a) antes de sumergirla
b) cuando está sumergida.
Solución.
a) Antes de sumergir:

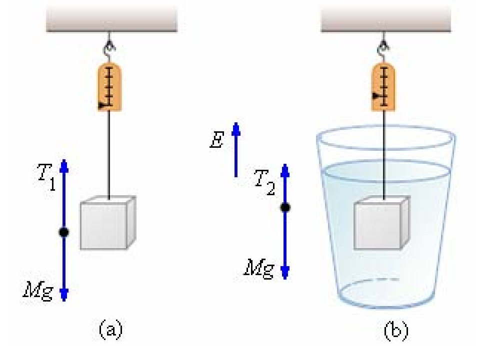


a)
$$\sum F_y = T_1 - Mg = 0 \Rightarrow$$
$$T_1 = Mg = (1,00)(9,80) = 9,80 \text{ N}$$
b) Después de sumergir:

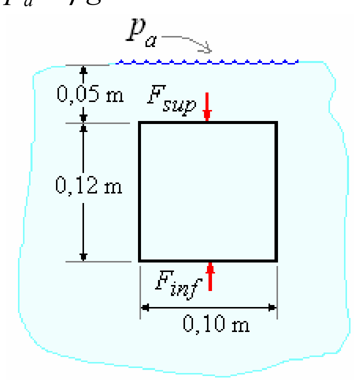


$$\sum F_y = T_2 + E - Mg = 0$$
$$\Rightarrow T_2 = Mg - E = Mg - \rho_a Vg$$
Como $V = \dfrac{M}{\rho} = \dfrac{1,00}{2700}$
Tenemos:
$$T_2 = Mg - \rho_a Vg$$
$$= 9,80 - (1000)\left(\frac{1,00}{2700}\right)(9,80)$$
$$= 6,17 \text{ N}$$

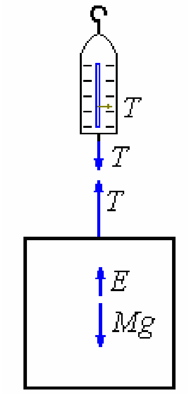
Ejemplo 40. Un bloque de metal de 10,0 kg mide 12,0 cm x 10,0 cm x 10,0 cm está suspendido de un dinamómetro y sumergido en agua como se muestra en la figura (b). la dimensión 12,0 es el lado vertical, y la parte superior del bloque esta 5,00 cm por debajo de la superficie del agua.
a) ¿Cuáles son las fuerzas que actúan en la parte superior y en la parte inferior del bloque? (Tome p_a = 1,0130 x 10^5 N/m^2).
b) ¿Cuál es la lectura del dinamómetro?
c) Demostrar que la fuerza de empuje es igual a la diferencia entre las fuerzas en la parte superior e inferior del bloque



Solución.
a) $p = p_a + \rho g h$



Presión en la parte superior.
$$p_{sup} = 1,013 \times 10^5 + (10^3)(9,80)(5,0 \times 10^{-2})$$
= 1,0179 x 10^5 N/m^2.
Presión en la parte superior.
$$p_{inf} = 1,013 \times 10^5 + (10^3)(9,80)(17,0 \times 10^{-2})$$
= 1,0297 x 10^5 N/m^2.
La fuerza en la parte superior:
$$p_{sup} = p_{sup} A = 1,0179 \times 10^5 (0,10^2)$$
= 1,0179 x 10^3 N.
La fuerza en la parte inferior:
$$p_{inf} = p_{sup} A = 1,0297 \times 10^5 (0,10^2)$$
= 1,0297 x 10^3 N.
b) L a lectura del dinamómetro es T.



$$\sum F_y = 0 \ \Rightarrow \ T + E - Mg = 0 \Rightarrow$$
$$T = Mg - E$$

Donde

$$E = \rho_{agua} Vg \ = \left(10^3\right)\left(1{,}2\times 10^{-3}\right)\left(9{,}80\right)$$
$$= 11{,}8 \text{ N}$$

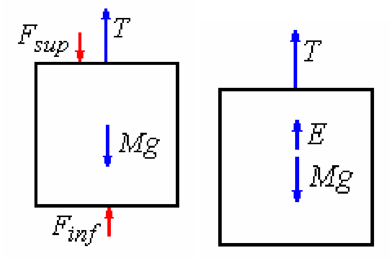
y $\ Mg = (10{,}0)(9{,}80) = 98{,}0$ N

Reemplazando valores:

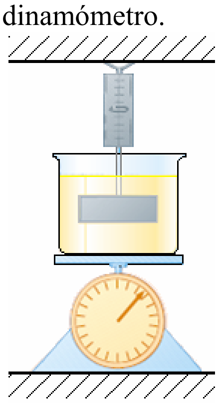
T = 98,0 -11,8 = 86,2 N.

c) $F_{\text{inf}} - F_{\text{sup}} \ = \left(1{,}0297 - 1{,}0179\right)\times 10^3 \ =$ 11,8 N

Igual al empuje E encontrado en la parte (b).

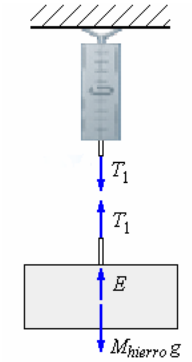


Ejemplo 41. Un vaso de masa m_{vaso} que contiene aceite de la masa m_{aceite} (densidad del aceite ρ_{aceite}) reposa sobre una balanza. Un bloque de hierro de masa m_{hierro} se suspende a partir de un dinamómetro y se sumerge completamente en el aceite como se muestra en la figura. Determinar las lecturas de la balanza y del dinamómetro.



Solución.

Sea T_1 la lectura en el dinamómetro



$$T_1 + E = M_{hierro} g \ \Rightarrow T_1 = M_{hierro} g - E$$

Donde $M_{hierro} = \rho_{hierro} V_{hierro} \Rightarrow$

$$V_{hierro} = \frac{M_{hierro}}{\rho_{hierro}} \ \text{y} \ \ E = \rho_{aceite} g V_{hierro}$$

Reemplazando:

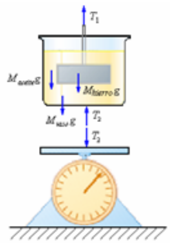
$$T_1 = M_{hierro} g - \rho_{aceite} g \frac{M_{hierro}}{\rho_{hierro}} \ =$$

$$M_{hierro} g \left(1 - \frac{\rho_{aceite}}{\rho_{hierro}}\right)$$

La lectura del dinamómetro es:

$$M_{hierro} g \left(1 - \frac{\rho_{aceite}}{\rho_{hierro}}\right)$$

Sea T_2 la lectura en la balanza (ejerce una fuerza hacia arriba T_2 sobre el sistema).



$$\sum F_y = 0 \ \Rightarrow$$

$$T_1 + T_2 - M_{vaso} g - M_{aceite} g - M_{hierro} g = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$T_2 = \left(M_{vaso} + M_{aceite} + M_{hierro}\right)g - T_1$$

$$= \left(M_{vaso} + M_{aceite} + M_{hierro}\right)g$$

$$- M_{hierro} g \left(1 - \frac{\rho_{aceite}}{\rho_{hierro}}\right)$$

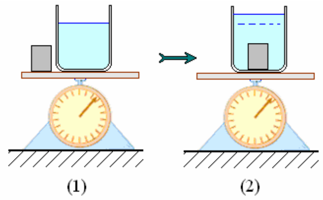
$$= \left[M_{vaso} + M_{aceite} + M_{hierro}\left(\frac{\rho_{aceite}}{\rho_{hierro}}\right)\right]g$$

La lectura de la balanza es

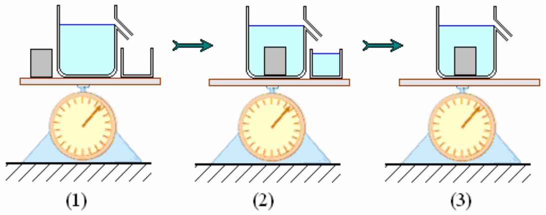
$$\left[M_{vaso} + M_{aceite} + M_{hierro}\left(\frac{\rho_{aceite}}{\rho_{hierro}}\right)\right]g$$

Ejemplo 42. La balanza y el dinamómetro.
A continuación se presenta una serie de casos en que interviene la fuerza de empuje sobre un cuerpo sumergido en agua, encuentre en cada caso la indicación de la balanza y la del dinamómetro (El peso de todos los recipientes es despreciable).

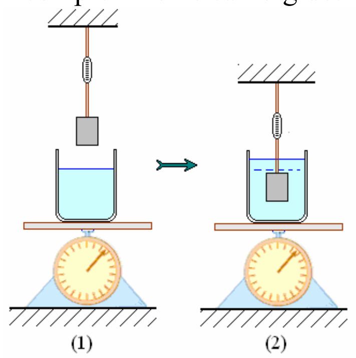
a) Balanza, vaso con agua de peso *P* y cuerpo de peso *P’*



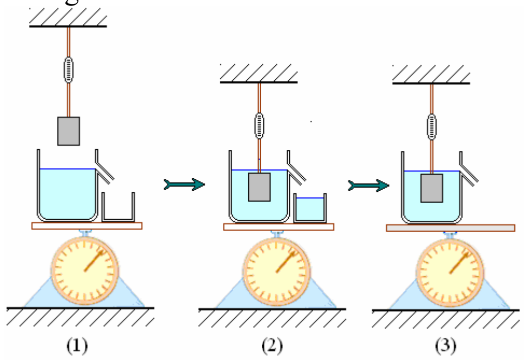
b) Balanza, vaso con vertedero con agua de peso *P* y cuerpo de peso *P’*, que sufre empuje *E* al estar completamente sumergido.



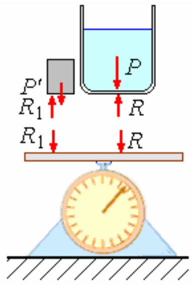
c) Dinamómetro, balanza, vaso con agua de peso *P* y cuerpo de peso *P’*, que sufre empuje *E* al estar completamente sumergido.



d) Dinamómetro, balanza, vaso con vertedero con agua de peso *P* y cuerpo de peso *P’*, que sufre empuje *E* al estar completamente sumergido.



Solución.
a)
Primer cuadro



Vaso con agua

$$\sum F_y = 0$$

$$P = R$$

Cuerpo

$$\sum F_y = 0$$

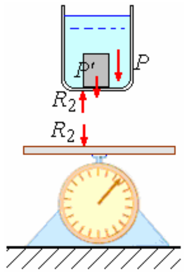
$$P' = R_1$$

La balanza indica $R + R_1$

Luego

La balanza indica $P + P'$

Segundo cuadro



$$\sum F_y = 0$$

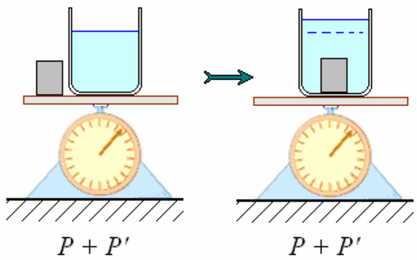
$$P + P' = R_2$$

La balanza indica R_2

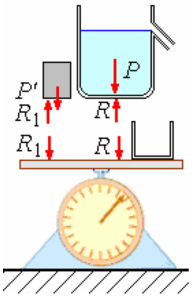
Luego

La balanza indica $P + P'$

El cuerpo sufre una pérdida de peso igual al empuje (peso del líquido desalojado), pero como el líquido no es desalojado, el peso total del conjunto se mantiene igual.



b)
Primer cuadro



Vaso con agua

$\sum F_y = 0$

$P = R_1$

Cuerpo

$\sum F_y = 0$

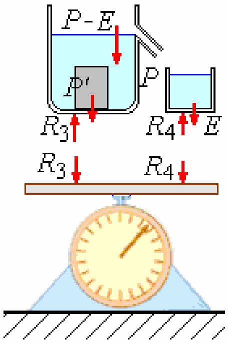
$P' = R$

La balanza indica $R + R_1$

Luego

La balanza indica $P + P'$

Segundo cuadro



Vaso con agua y cuerpo introducido

$\sum F_y = 0$

$P - E + P' = R_3$

Vaso con agua de rebose

$\sum F_y = 0$

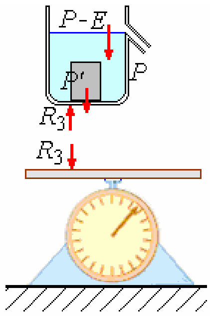
$R_4 = E$

La balanza indica $R_3 + R_4$

Luego

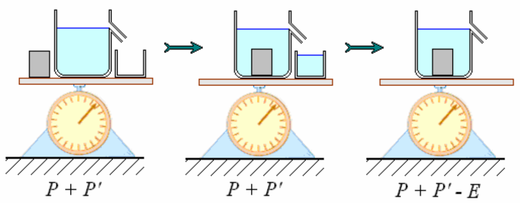
La balanza indica $P + P'$

Tercer cuadro

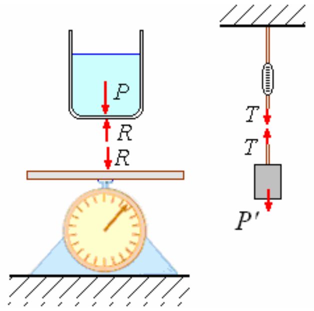


Cuando retira el vaso con el rebose, la balanza indica $R_3 = P + P' - E$

En este caso el líquido desalojado que sale del vaso, en el segundo cuadro todavía permanece sobre la balanza, en el tercer cuadro se retira y la indicación de la balanza baja en ese valor.



c) Primer cuadro



El vaso con agua

$\sum F_y = 0$

$R = P$

La balanza indica P

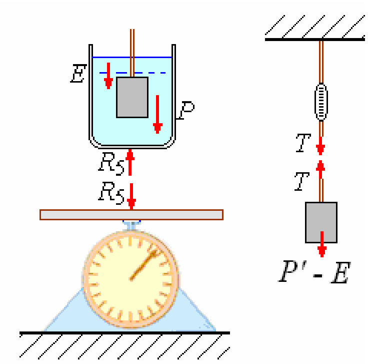
El cuerpo

$\sum F_y = 0$

$T = P'$

El dinamómetro indica P'

Segundo cuadro



El vaso con agua

$\sum F_y = 0$

$R_5 = P + E$

La balanza indica $P + E$

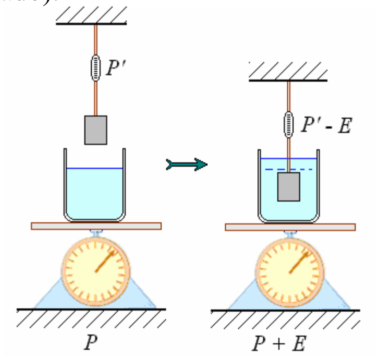
El cuerpo

$\sum F_y = 0$

$T = P' - E$

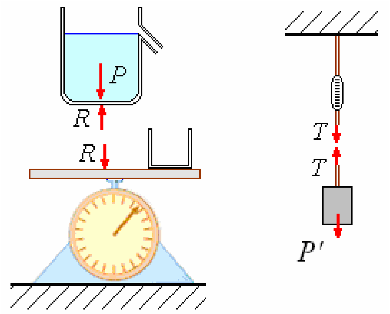
El dinamómetro indica $P' - E$

El dinamómetro mide el peso del cuerpo menos el empuje., como el líquido no es desalojado la balanza mide el peso del agua mas el empuje (peso del líquido no desalojado).



d)

Primer cuadro



El vaso con agua

$$\sum F_y = 0$$

$$R = P$$

La balanza indica P

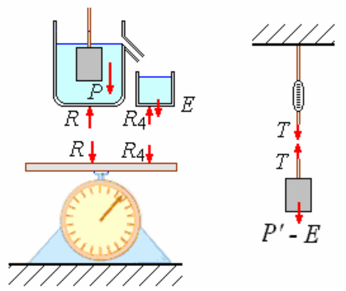
El cuerpo

$$\sum F_y = 0$$

$$T = P'$$

El dinamómetro indica *P'*

Segundo cuadro



El vaso con agua

$$\sum F_y = 0$$

$$R = P$$

El vaso con rebose

$$R_4 = E$$

La balanza indica $R + R_4 = P + E$

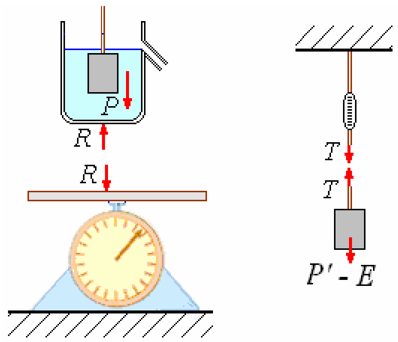
El cuerpo

$$\sum F_y = 0$$

$$T = P' - E$$

El dinamómetro indica $P' - E$

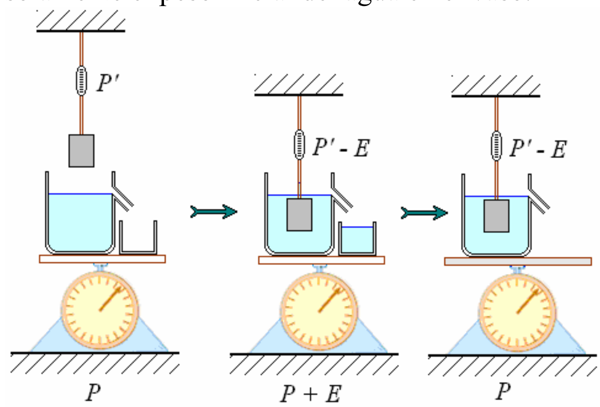
Tercer cuadro



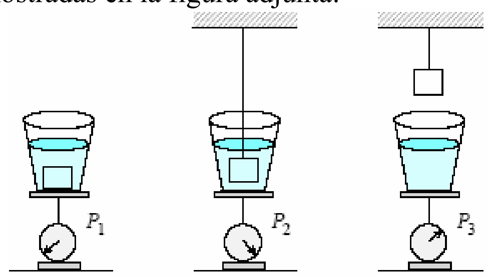
Cuando retira el vaso con el rebose, la balanza indica *P* y el dinamómetro indica *P' – E*.

En el segundo cuadro El dinamómetro mide el peso del cuerpo menos el empuje, la balanza indica el peso del agua más el empuje porque el líquido desalojado (empuje) permanece sobre la balanza.

En el tercer cuadro se retira el líquido desalojado (empuje) y la balanza indica solamente el peso inicial del agua en el vaso.



Ejemplo 43. Considere las tres mediciones mostradas en la figura adjunta:



I) P_1 es el peso de un recipiente con agua con un objeto sumergido en él.

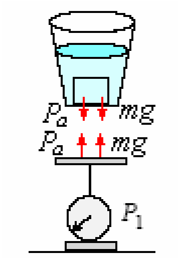
II) P_2 es el peso cuando el objeto está sumergido en el agua, pero colgado de una cuerda sin que toque el fondo del recipiente.

III) P_3 es el peso del recipiente con agua.
Encuentre la densidad promedio del objeto.

Solución.

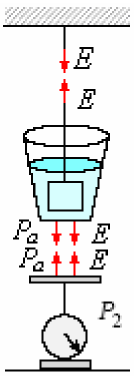
Sean: m masa del objeto, V volumen del objeto, ρ densidad del objeto, P_{agua} peso del agua y E el empuje.

I)



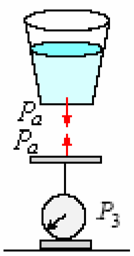
$$P_1 = P_{agua} + mg$$
$$= P_{agua} + \rho g V$$

II)



$$P_2 = P_{agua} + E$$
$$= P_{agua} + \rho_{agua} g V$$

III)



$$P_3 = P_{agua}$$

Restando (III) de (I):

$$P_1 - P_3 = mg \Rightarrow m = \frac{P_1 - P_3}{g},$$

Como $V = \dfrac{m}{\rho}$

$$\Rightarrow V = \frac{P_1 - P_3}{\rho g} \quad (1)$$

De (II) y (III):

$$P_2 = P_3 + E \Rightarrow E = P_2 - P_3,$$

como $E = \rho_{agua} g V$

$$\Rightarrow P_2 - P_3 = \rho_{agua} g V$$

y $V = \dfrac{P_2 - P_3}{\rho_{agua} g}$ (2)

Igualando (1) y (2):

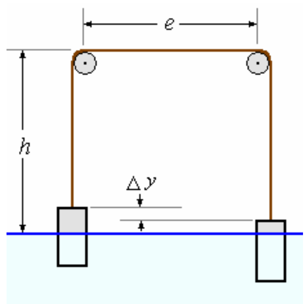
$$\frac{P_1 - P_3}{\rho g} = \frac{P_2 - P_3}{\rho_{agua} g} \Rightarrow \rho = \frac{P_1 - P_3}{P_2 - P_3}\rho_{agua}$$

Ejemplo 44. Dos cilindros circulares de radio R, longitudes L_1 y L_2 y pesos P_1 y P_2 están unidos por una cuerda de longitud a. Los cilindros se sumergen en un líquido de densidad ρ, como se muestra.

a) (1 p) Hacer los diagramas del cuerpo libre para cada cilindro.

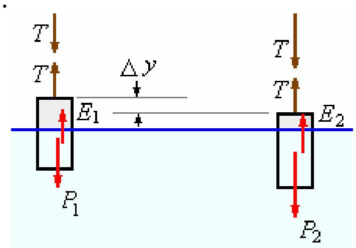
b) (2 p) Encontrar el valor de Δy.

c) (1 p) Determina el valor del empuje que recibe cada cilindro.



Solución.

a) Diagramas del cuerpo libre para cada cilindro.



b) De los diagramas del cuerpo libre.

$$T + E_1 = P_1 \Rightarrow T = P_1 - E_1 \quad (1)$$
$$T + E_2 = P_2 \Rightarrow T = P_2 - E_2 \quad (2)$$

Igualando (1) y (2):

$$P_1 - E_1 = P_2 - E_2 \Rightarrow E_1 - E_2 = P_1 - P_2$$

Los empujes son

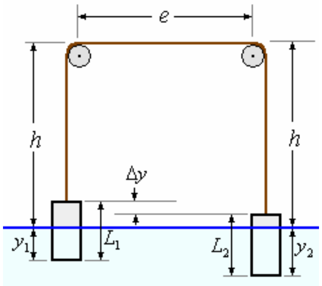
$$E_1 = \rho g \pi R^2 y_1 \text{ y } E_2 = \rho g \pi R^2 y_2$$

Reemplazando

$$\rho g(y_1 - y_2)\pi R^2 = P_1 - P_2 \Rightarrow$$

$$y_2 - y_1 = \frac{P_2 - P_1}{\rho g \pi R^2}$$

La figura siguiente muestra a los cilindros con las dimensiones conocidas y las no cocidas.



Del esquema obtenemos

$$h - (L_2 - y_2) - [h - (L_1 - y_1)] = \Delta y \Rightarrow$$

$$\Delta y = L_1 - L_2 + (y_2 - y_1)$$

Reemplazando el valor de (y_2 - y_1).

$$\Delta y = L_1 - L_2 + \frac{P_2 - P_1}{\rho g \pi R^2}$$

c) Del grafico anterior

$$L_1 - \Delta y = L_2 - y_2 \Rightarrow$$

$$y_2 = L_2 - L_1 + \Delta y$$

Reemplazando el valor de Δy:

$$y_2 = L_2 - L_1 + L_1 - L_2 + \frac{P_2 - P_1}{\rho g \pi R^2} \Rightarrow$$

$$y_2 = \frac{P_2 - P_1}{\rho g \pi R^2}$$

El empuje del cilindro 2.

$$E_2 = \rho g \pi R^2 y_2$$

$$E_2 = \rho g \pi R^2 \left(\frac{P_2 - P_1}{\rho g \pi R^2}\right)$$

$$= P_2 - P_1$$

Para el cilindro 1

$$E_1 = \rho g \pi R^2 y_1$$

Con $y_1 = y_2 - \dfrac{P_2 - P_1}{\rho g \pi R^2}$

Reemplazando y_2.

$$y_1 = \frac{P_2 - P_1}{\rho g \pi R^2} - \frac{P_2 - P_1}{\rho g \pi R^2} = 0$$

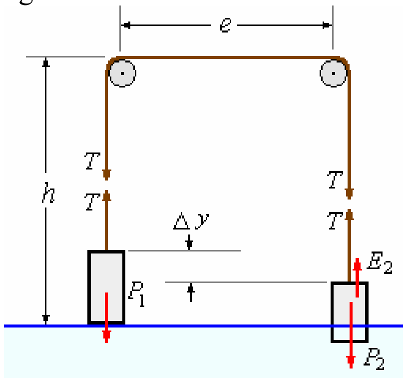
Luego

$$E_1 = \rho g \pi R^2 y_1 = 0$$

Nota. Este resultado es el esperado porque P_2 es mayor que P_1, y al sumergirlos en agua y suspendidos por el sistema de poleas, buscan el equilibrio, este se logra cuando el mayor ($P_2 - E_2$) peso iguala al menor peso ($P_1 - E_1$).

Los empujes varían, hasta que E_1 es igual a cero y ya no puede variar más.

Un requisito del problema es que siempre haya la tensión t, esto requiere que h tenga una longitud adecuada.



$E_1 = \rho g \pi R^2 y_1$ y $E_2 = \rho g \pi R^2 y_2$

Como $E_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$

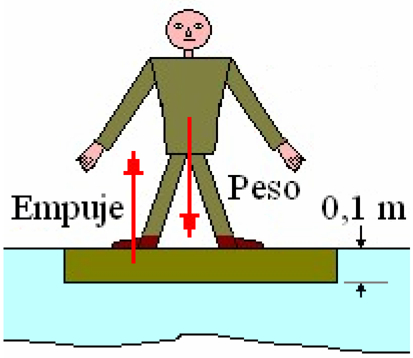
Siendo $E_2 = P_2 - P_1$

$$\rho g \pi R^2 y_2 = P_2 - P_1 \Rightarrow y_2 = \frac{P_2 - P_1}{\rho g \pi R^2}$$

Ejemplo 45. Disponemos de una plancha de corcho de 10 cm de espesor. Calcular la superficie mínima que se debe emplear para que flote en agua, sosteniendo a un náufrago de 70 kg. La densidad del corcho es de 0,24 g/cm^3.

Nota: entendemos por superficie mínima la que permite mantener al hombre completamente fuera del agua aunque la tabla esté totalmente inmersa en ella.

Solución.



Peso = empuje

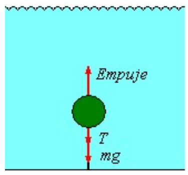
$$[70 + 240(0,1A)]g = 1000(0,1A)g$$

0,1 A es el volumen de la plancha de corcho.

$$70 = 100A - 24A \Rightarrow$$

$$A = \frac{70}{76} = 0,92\text{m}^2$$

Ejemplo 46. Un cable anclado en el fondo de un lago sostiene una esfera hueca de plástico bajo su superficie. El volumen de la esfera es de 0,3 m^3 y la tensión del cable 900 N.



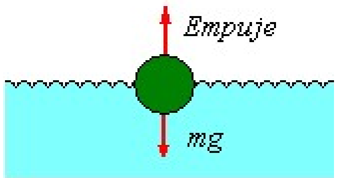
a) ¿Qué masa tiene la esfera?
b) El cable se rompe y la esfera sube a la superficie. Cuando está en equilibrio, ¿qué fracción del volumen de la esfera estará sumergida?
Densidad del agua de mar 1,03 g/cm^3

Solución.

a) $E = mg + T$ E = Empuje,
T = Tensión del cable.
1030 x 0,3 x 9,8 = m x 9,8 + 900 $\Rightarrow$ m = 217,2 kg

b) $E = mg$ V = Volumen sumergido.
1030 x V x 9,8 = m x 9,8 $\Rightarrow$ V = 0,21 m^3

Fracción del cuerpo sumergido = $\dfrac{0,21}{0,3} = 0,7$



Ejemplo 47. Un pedazo de aluminio se suspende de una cuerda y se sumerge completamente en un recipiente con agua. La masa del trozo de aluminio es de 1 kg. Calcule la tensión de la cuerda antes y después de sumergir el trozo de aluminio.

Solución.

La tensión antes es simplemente el peso del trozo de aluminio es decir

$P = mg = 1 \times 9,8 = 9,8 N$

Cuando se sumerge la fuerza de empuje es

$E = \rho_{agua} V_{al} g$, pero el volumen del aluminio es

$$V_{Al} = \frac{m}{\rho_{Al}}$$

de modo que la fuerza de empuje será:

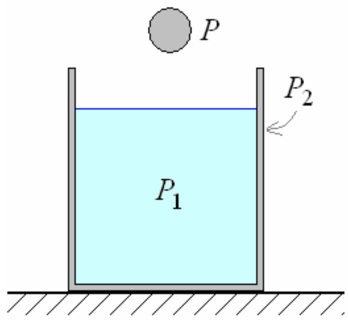
$$E = \rho_{agua} \frac{m}{\rho AL} g = 10^3 \frac{1}{2,70 \times 10^3} 9,8 =$$

3,6 N.

y finalmente la tensión en la cuerda será la diferencia

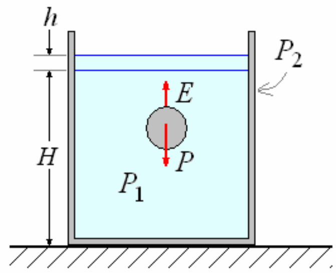
T = 9,8 - 3,6 = 6,2 N

Ejemplo 48. En un recipiente prismático de peso P_1, lleno de un líquido de peso P_2, se deja caer un cuerpote peso P. Calcular la el peso sobre el fondo del depósito, mientras P desciende por el líquido.



Solución.

Cuando P se encuentra completamente sumergido en el agua, experimenta un empuje hacia arriba igual a



$E = \rho g V$, donde V es el volumen y ρ la densidad del cuerpo.

La fuerza restante es

$P - E = P - \rho g V$, fuerza hacia abajo.

El líquido asciende una altura

$h = \dfrac{V}{A}$, donde A es la superficie de la base del recipiente prismático.

$F = pA = \rho g (H + h) A$ Presión en el fondo.

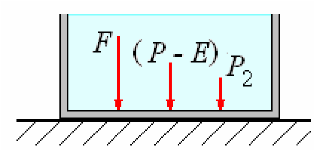
Siendo H la altura inicial del líquido y h la altura que sube cundo el cuerpo está completamente sumergido, la presión en el fondo es:

$$p = \rho g (H + h)$$
$$= \rho g H A + \rho g h A = \rho g V + P_1$$

La fuerza sobre el fondo es

$$F = pA = \rho g (H + h) A$$
$$= \rho g H A + \rho g h A = \rho g V + P_1$$

La fuerza total sobre el fondo.



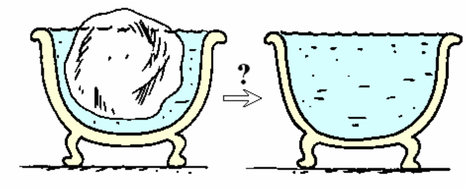
Fuerza total = presión en el fondo x área de la base

+ (peso del cuerpo – empuje)

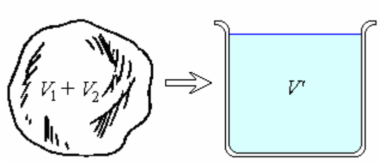
+ peso del depósito

$$F_{total} = F + (P - E) + P_2$$
$$= \rho g V + P_1 + (P - \rho g V) + P_2$$
$$= P + P_1 + P_2$$

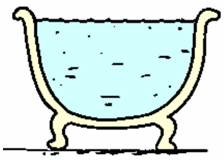
Ejemplo 49. Esta es una bañera llena de agua helada con un bloque de hielo en ella. Cuando el bloque se funde, el agua en la bañera, bajará un poco, rebalsará o permanecerá exactamente al borde sin rebalsar



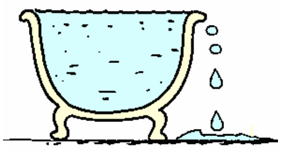
Solución.
El hielo ocupa un volumen $V_1 + V_2$
V_1 es el volumen que sobresale del agua
V_2 es le volumen de la parte sumergida.
Al fundirse ocupa un volumen V'.



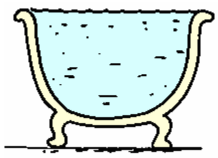
Hay tres posibilidades
Bajará un poco si $V' < V_2$



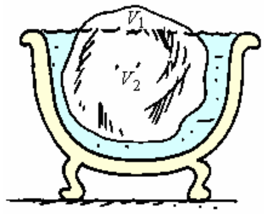
Rebalsará si $V' > V_2$

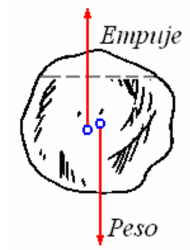


Permanecerá exactamente al borde sin rebalsar si $V' = V_2$



Aplicando el principio de Arquímedes





Como el bloque de hielo está en equilibrio
El empuje es igual peso.

$$Empuje = \rho_a g V_2$$
$$Peso = \rho_h g (V_1 + V_2)$$
$$\rho_h g (V_1 + V_2) = \rho_a g V_2$$

Obtenemos la relación:

$$\frac{\rho_h}{\rho_a} = \frac{V_2}{(V_1 + V_2)} \quad (1)$$

Aplicando el principio de la conservación de la masa
Masa del bloque de hielo = masa del bloque convertido en agua
Masa de hielo = $\rho_h (V_1 + V_2)$
Masa de agua = $\rho_a V'$

$$\rho_h (V_1 + V_2) = \rho_a V_2$$

Obtenemos la relación:

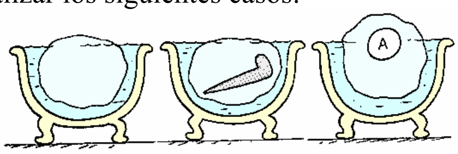
$$\frac{\rho_h}{\rho_a} = \frac{V'}{(V_1 + V_2)}$$

De (1) y (2):

$$V' = V_2$$

Luego Permanece exactamente al borde sin rebalsar

Ejemplo 50. En un vaso de agua flota un pedazo de hielo,- ¿Cómo cambia el nivel del agua en el vaso cuando el hielo se derrite? Analizar los siguientes casos:



a) el hielo es completamente homogéneo;
b) en el hielo se encuentra un clavo de línea de ferrocarril;

c) dentro del pedazo de hielo hay una burbuja de aire.

Solución.

a) Como el pedazo de hielo flota, el peso de toda el agua desplazada por éste es igual al peso del propio hielo o del agua recibida de éste. Por eso el agua que se forma después del deshielo ocupará un volumen igual al volumen de la parte hundida del pedazo de hielo y por consiguiente el nivel del agua no cambiará.

b) El volumen de la parte sumergida del pedazo de hielo con el clavo es mayor que la suma de los volúmenes del clavo y el agua que se obtiene después del deshielo. Por lo tanto, el nivel del agua en el vaso descenderá.

c) El peso del agua desplazada es igual al peso del hielo (el peso del aire en la burbuja puede prescindirse). Por eso igualmente como en el caso a), el nivel del agua no cambia.

Ejemplo 51. Un cubo de hielo cuyos lados miden de 20,0 mm flota en un vaso de agua helada con una de sus caras paralela a la superficie del agua.

a) ¿A qué distancia por debajo de la superficie del agua está la cara inferior del bloque?

b) Alcohol etílico helado se vierte suavemente sobre la superficie del agua para formar una capa de 5,00 mm de espesor por encima del agua. El alcohol no se mezcla con el agua. Cuando el cubo de hielo alcanza nuevamente el equilibrio hidrostático, ¿a qué distancia por debajo de la superficie del agua está la cara inferior del bloque?

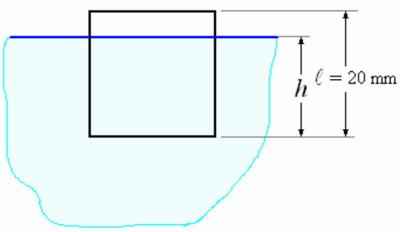
c) se vierte alcohol etílico helado adicional sobre la superficie del agua hasta que la superficie superior del alcohol coincide con la superficie superior del cubo de hielo (en equilibrio hidrostático). ¿Cuál es el espesor de la capa de alcohol etílico necesario?

ρ_{agua} = 1000 kg/m^3, ρ_{hielo} = 917 kg/m^3,

$\rho_{alcohol}$ = 806 kg/m^3

Solución.

a)



De acuerdo al principio de Arquímedes en el equilibrio tenemos:

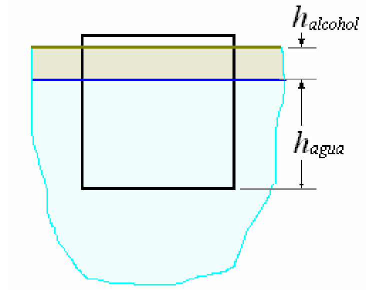
$$\rho_{hielo} g\ell^3 = \rho_{agua} gh\ell^2 \Rightarrow h = \ell \frac{\rho_{hielo}}{\rho_{agua}}$$

Reemplazando valores:

$$h = \left(20{,}0\times 10^{-3}\right)\frac{(917)}{(1000)} = 18{,}34 \text{ x } 10^{-3} \text{ m}$$

= 18,34 mm.

b)



Suponemos que la parte superior del cubo sigue por encima de la superficie del alcohol. De acuerdo al principio de Arquímedes en el equilibrio tenemos:

$$\rho_{alcohol} gh_{alcohol}\ell^2 + \rho_{agua} gh_{agua}\ell^2 = \rho_{hielo} g\ell^3$$

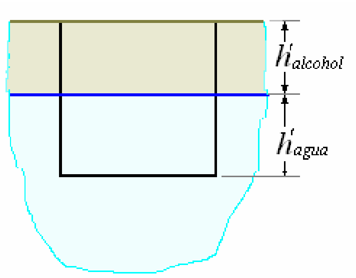
$$\Rightarrow h_{agua} = \ell \frac{\rho_{hielo}}{\rho_{agua}} - h_{alcohol}\frac{\rho_{alcohol}}{\rho_{agua}}$$

Reemplazando valores:

$$h_{agua} = \left(20{,}0\times 10^{-3}\right)\frac{(917)}{(1000)} - \left(5{,}0\times 10^{-3}\right)\frac{(806)}{(1000)}$$

= 14,31 x 10^{-3} m = 14,31 mm.

c)



Aquí $h'_{agua} = \ell - h'_{alcohol}$

De acuerdo al principio de Arquímedes en el equilibrio tenemos:

$$\rho_{alcohol} gh'_{alcohol}\ell^2 + \rho_{agua} g\left(\ell - h'_{alcohol}\right)\ell^2 = \rho_{hielo} g\ell^3$$

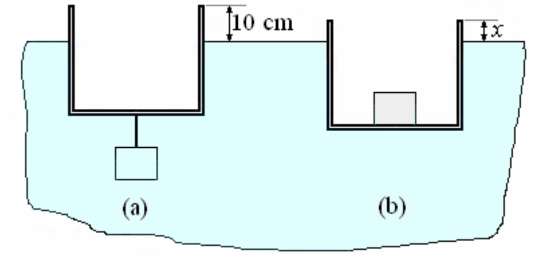
$$\Rightarrow h'_{alcohol} = \ell \frac{\left(\rho_{agua} - \rho_{hielo}\right)}{\left(\rho_{agua} - \rho_{alcohol}\right)}$$

$$= \left(20{,}0\times 10^{-3}\right)\frac{(1000-917)}{(1000-806)}$$

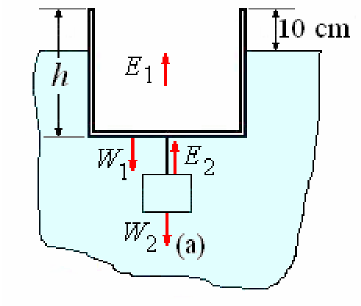
= 8,56 x 10^{-3} m = 8,56 mm.

Ejemplo 52. Se tiene un cilindro vacío de radio 10 cm y masa 0,5 kg, que flota en agua

dejando fuera del nivel del agua una altura de 10 cm cuando de el cuelga externamente un bloque de hierro de masa 10 kg y densidad 7,8 g/cm^3 tal como lo muestra la figura (a).
a) Calcular la altura del cilindro.
b) Calcular la altura que quedara afuera del agua si el bloque de hierro se introduce dentro del cilindro como lo muestra la figura (b).



Solución.
a) De la figura (a):



$$\sum F_y = 0$$

$$E_1 + E_2 - W_1 - W_2 = 0$$

Sea h la altura del cilindro.

$$E_1 = 1000g(h - 0{,}1)\pi 0{,}1^2$$

$$E_2 = 1000g\frac{10}{7800}$$

$$W_1 = 0{,}5g\,,\ W_2 = 10g$$

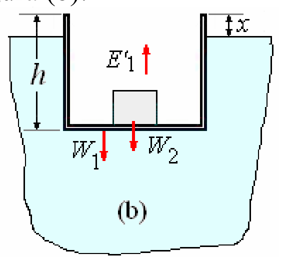
Reemplazando

$$1000g(h - 0{,}1)\pi 0{,}1^2 + 1000g\frac{10}{7800} - 0{,}5g - 10g = 0$$

$$\Rightarrow 1000(h - 0{,}1)\pi 0{,}1^2 + 1000\frac{10}{7800} = 10{,}5$$

$$\Rightarrow\ h = 0{,}39 \text{ m}$$

b) De la figura (b):



$$\sum F_y = 0$$

$$E'_1 - W_1 - W_2 = 0$$

$$1000g(h - x)\pi 0{,}1^2 - 0{,}5g - 10g = 0$$

$$1000(0{,}39 - x)\pi 0{,}1^2 = 10{,}5$$

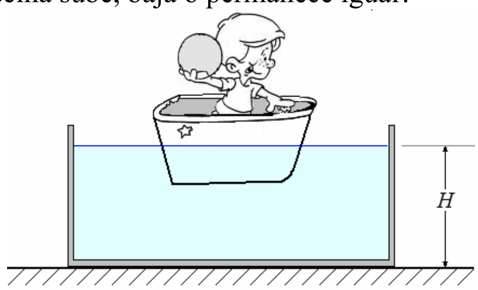
$$\Rightarrow\ x = 0{,}056 \text{ m}$$

Ejemplo 53. Un cuerpo homogéneo y compacto, colocado en un líquido con peso específico γ_1, pesa P_1; y colocado en un líquido con peso específico γ_2, pesa P_2 Determinar el peso específico ρ del cuerpo.

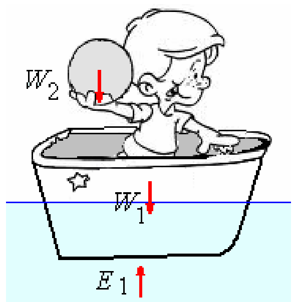
Solución.
El peso del cuerpo hundido en el líquido en el primer caso es igual a $P_1 = (\gamma - \gamma_1)V$; en el segundo caso es igual a $P_2 = (\gamma - \gamma_2)V$.
Donde V es el volumen del cuerpo; de allí resulta que

$$\gamma = \frac{(P_2\gamma_1 - P_1\gamma_2)}{(P_2 - P_1)}$$

Ejemplo 54. Una persona está dentro de un bote que está flotando en una piscina. La persona tiene en sus manos una bola de Bowling, la cual deja caer cuidadosamente por la borda. La bola se hunde hasta el fondo de la piscina y el agua de la piscina vuelve a estar en reposo. ¿El nivel del agua en la piscina sube, baja o permanece igual?

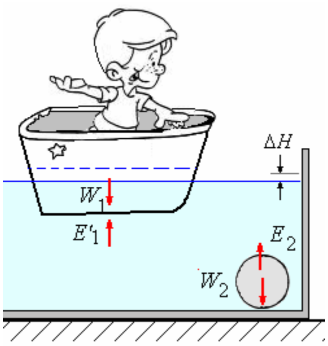


Solución.
Con la bola en el bote
A = área de la base del bote.
h_1 = altura sumergida del bote.
h'_1 = cambio del nivel del agua en la piscina.



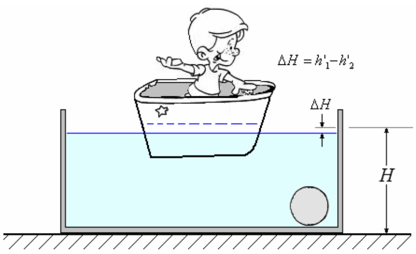
$$\sum F_y = 0$$
$$E_1 - W_1 - W_2 = 0 \Rightarrow$$
$$E_1 = W_1 + W_2 = \rho g A h_1 \Rightarrow$$
$$h_1 = \frac{W_1 + W_2}{\rho g A}$$
$$A h_1 = A_0 h'_1 \Rightarrow$$
$$h'_1 = \frac{A h_1}{A_0} = \frac{W_1 + W_2}{\rho g A_0} = \frac{W_1 + \rho_b g V}{\rho g A_0}$$

Con la bola en el agua
A = área de la base del bote.
h_2 = altura sumergida del bote.
h'_2 = cambio del nivel del agua en la piscina



$$\sum F_y = 0$$
$$E_2 - W_1 = 0 \Rightarrow$$
$$E_2 = W_1 = \rho g A h_2 \Rightarrow$$
$$h_2 = \frac{W_1}{\rho g A}$$
$$E_3 = \rho g V \Rightarrow$$
$$A h_2 + V = A_0 h'_2 \Rightarrow$$
$$h'_2 = \frac{A h_2 + V}{A_0} = \frac{W_1 + \rho g V}{\rho g A_0}$$

Comparando h'_1 con h'_2:
Como $\rho_b > \rho$
$$h'_1 > h'_2$$
El nivel de la piscina baja.
$$\Delta H = h'_1 - h'_2$$



Ejemplo 55. En el centro de un lago grande congelado han hecho Un claro. El grosor del hielo resultó igual a 1,0 m. ¿De qué longitud será necesaria la cuerda para sacar un balde de agua?
Solución.
Solamente en los pequeños lagos el hielo puede mantenerse suspenso gracias a la orilla. En el centro de un lago grande éste obligatoriamente flotará.
La relación de las densidades del hielo y del agua es 0,9. Por consiguiente, 0,9 de todo el espesor del hielo se encuentra en el agua.
La distancia entre la superficie del hielo y el agua es 1 m.

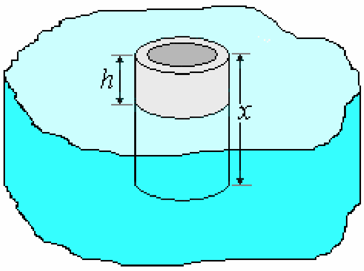
Ejemplo 56. En una taza con agua flota una cajita de fósforos dentro de la cual hay una piedra pequeña. ¿Variará el nivel del agua en la taza si la piedra se saca de la cajita y se pone en el agua?
Solución.
Al retirar la piedra de la caja se hizo más ligera en un peso igual al de la piedra y. por lo tanto, el volumen del agua desplazada por la caja disminuyó en $V_1 = P/\rho_1 g$, donde P es el peso de la piedra y ρ_1, la densidad del agua. Al sumergirse en el agua, la piedra desalojará un volumen de agua igual a su propio volumen, o sea, $V_2 = P/\rho_2 g$, donde ρ_2 es la densidad de la sustancia de la piedra. Como $\rho_2 > \rho_1$. entonces $V_1 > V_2$ y por consiguiente el nivel del agua en la taza disminuirá.

Ejemplo 57. Un cubo de Hielo flota en agua. Determine la fracción del hielo que queda sobre la superficie del agua.
Solución.
Sea m la masa de hielo. Su peso será
$$P = mg$$
Su volumen total será
$$V = \frac{m}{\rho_{Hielo}},$$
De modo que podemos escribir el peso en términos del volumen como
$$P = \rho_{Hielo} V g$$
Cuando una fracción V_S del volumen queda sumergida, la fuerza de empuje es
$$E = \rho_{agua} V_s g .$$
En la situación de equilibrio el peso iguala al empuje de modo que
$$\rho_{Hielo} V g = \rho_{agua} V_s g ,$$
De donde

$$\frac{V_s}{V} = \frac{\rho_{Hielo}}{\rho_{agua}} = 0{,}917$$

O sea hay un 91,7% sumergido y por lo tanto 8,3 % sobre el nivel del agua.

Ejemplo 58. Un tubo flota en el agua en posición vertical. La altura del tubo que sobresale del agua es h = 5 cm. Dentro del tubo se vierte aceite de densidad ρ' = 0,9 g/cm^3. ¿Cuál deberá ser la longitud del tubo para llenarlo totalmente de aceite manteniendo la altura h?

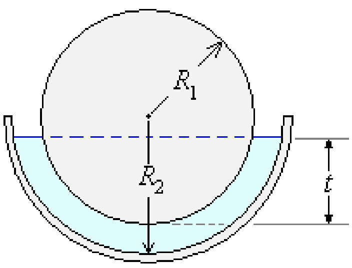


Solución.
La longitud del tubo x se halla de la condición $\rho' g x = \rho g (x - h)$ que expresa la igualdad de las presiones en la profundidad del extremo inferior del tubo. Aquí ρ es la densidad del agua. Obtenemos, entonces, que

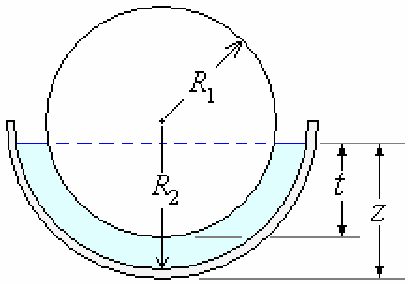
$$x = \frac{\rho}{(\rho - \rho')} h = 50 \text{ cm.}$$

Ejemplo 59. En una semiesfera hueca de radio R_1 hay una cierta cantidad de líquido, que pesa P_1. En este líquido flota una esfera de radio R_2. Calcular el peso P_2 de esta esfera para que al flotar quede concéntrica con la semiesfera.
Nota. Volumen de la parte sumergida de la esfera.

$$V = \frac{\pi}{3} t^2 (3R - t)$$



Solución.
Sea z la altura del líquido, t el calado de la esfera de radio R_1.



Se tiene:

$$z - t + R_1 = R_2$$

El peso P_1 de la esfera de radio R_1 es igual al empuje.

$$P_1 = \rho g (\text{Volumen desalojado})$$

$$= \rho g \frac{\pi}{3} t^2 (3R_1 - t) \quad (1)$$

El peso del líquido

$$P_2 = \rho g \frac{\pi}{3} z^2 (3R_2 - z) - P_1$$

$$= \rho g \frac{\pi}{3} z^2 (3R_2 - z) - \rho g \frac{\pi}{3} t^2 (3R_1 - t)$$

$$= \rho g \frac{\pi}{3} \left[z^2 (3R_2 - z) - t^2 (3R_1 - t) \right] \Rightarrow$$

$$\left[z^2 (3R_2 - z) - t^2 (3R_1 - t) \right] = \frac{P_2}{\frac{\pi}{3} \rho g} \Rightarrow$$

$$\left[(R_2 - R_1 + t)^2 (2R_2 + R_1 + t) - t^2 (3R_1 - t) \right] = \frac{P_2}{\frac{\pi}{3} \rho g}$$

$\Rightarrow$

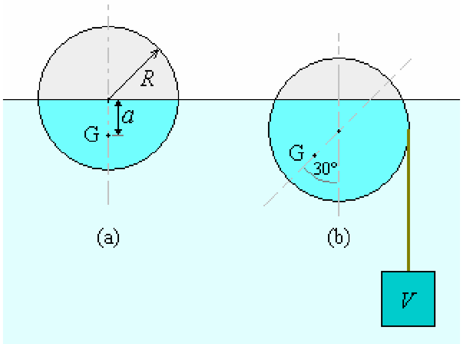
$$t = \frac{P_2}{\rho g \pi (R_2^2 - R_1^2)} - \frac{(2R_2 + R_1)(R_2 - R_1)}{3(R_2 + R_1)}$$

El peso se obtiene reemplazando t en la ecuación (1):

$$P_1 = \rho g \frac{\pi}{3} \left[\frac{P_2}{\rho g \pi (R_2^2 - R_1^2)} - \frac{(2R_2 + R_1)(R_2 - R_1)}{3(R_2 + R_1)} \right]^2$$

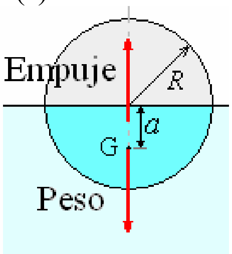
$$\left[3R_1 - \frac{P_2}{\rho g \pi (R_2^2 - R_1^2)} - \frac{(2R_2 + R_1)(R_2 - R_1)}{3(R_2 + R_1)} \right]$$

Ejemplo 60. La posición estable de un cilindro de longitud L, flotando en un liquido de densidad ρ, es como se muestra en la figura (a). Cuando el bloque de concreto (densidad ρ') se suspende del cilindro toma la posición mostrada en la figura (b) Si se desprecia el volumen y peso del cable. ¿Cuál es el volumen del bloque?



Solución.

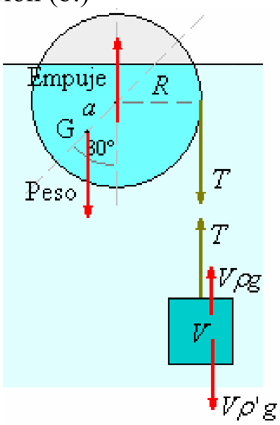
En la posición (a)



Peso = Empuje $\Rightarrow$

$$\text{peso} = \frac{\pi R^2 L}{2}\rho g$$

En la posición (b.)



$$T = V\rho' g - V\rho g$$

Tomando momentos con respecto al eje vertical por el que pasa el empuje, tenemos:

$$\text{Peso}(a\,\text{sen}30°) - TR = 0 \;\Rightarrow$$

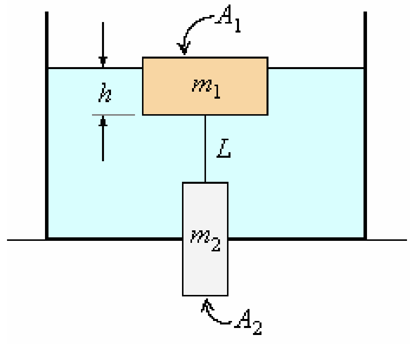
$$\text{Peso}(a\,\text{sen}30°) = (V\rho' g - V\rho g)R \;\Rightarrow$$

$$\frac{\pi R^2 L}{2}\left(\frac{a}{2}\right) = VRg(\rho' - \rho) \;\Rightarrow$$

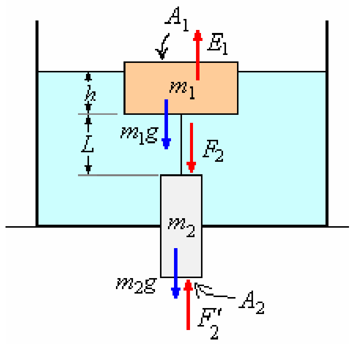
$$V = \frac{\pi R L \rho a}{4(\rho' - \rho)}$$

Ejemplo 61. Un corcho cilíndrico de masa m_1 y sección transversal A_1 flota en un líquido de densidad ρ. El corcho está conectado por medio de una cuerda sin masa, de largo L, a un cilindro de aluminio de masa m_2 y sección transversal A_2.

El cilindro de aluminio puede deslizarse sin roce por un orificio hermético en el fondo del recipiente. Calcular la profundidad h a la que debe hallarse la base del corcho para que el sistema de los dos cilindros esté en equilibrio. La presión atmosférica, ¿juega algún rol?



Solución.



$$E_1 + (F'_2 - F_2) - (m_1 + m_2)g = 0 \Rightarrow$$

$$E_1 = A_1 h\rho g\,,\; (F'_2 - F_2) = -\rho g(h + L)A_2 \Rightarrow$$

$$A_1 h\rho g - \rho g(h + L)A_2 - (m_1 + m_2)g = 0 \Rightarrow$$

$$A_1 h\rho g - A_2 h\rho g - A_2 L\rho g = (m_1 + m_2)g \Rightarrow$$

$$(A_1 - A_2)h\rho = (m_1 + m_2) + A_2 L\rho \Rightarrow$$

$$h = \frac{(m_1 + m_2) + A_2 L\rho}{(A_1 - A_2)\rho}$$

La diferencia de presión debido a la atmósfera para un caso como este, en que las diferencias de altura son pequeñas no juega un rol perceptible.

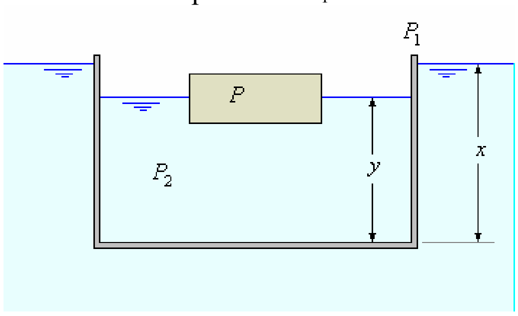
Ejemplo 62. Un depósito de peso P_1 flota en un líquido y al mismo tiempo tiene una cantidad del mismo líquido, de peso P_2, determinar el peso del flotador P para que la relación de las profundidades x/y se igual a n.

Sugerencia.

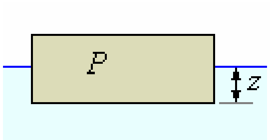
Para la solución considere lo siguiente

El P tiene una sección A, la parte sumergida es z.

La sección del depósito es A_1



Solución.
El peso P tiene una sección A y está hundido una altura z, de tal manera que:
$P = \rho g A z$



En el depósito:
Peso del flotador
P = empuje sobre P
El peso P_2 del agua en el depósito
$P_2 = \rho g\,(\text{Volumen})$
La sección del depósito es A_1, luego:
$P_2 = \rho g(A_1 y - Az) = \rho g A_1 y - P$
$\Rightarrow P_2 + P = \rho g A_1 y$ (1)
Para el conjunto total:
Peso total = Empuje sobre P_2
$\Rightarrow P + P_1 + P_2 = \rho g A_1 x$ (2)
Dividiendo (2) / (1):

$$\frac{\rho g A_1 x}{\rho g A_1 y} = \frac{P + P_1 + P_2}{P + P_2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{(P + P_2) + P_1}{(P + P_2)} \Rightarrow n = 1 + \frac{P_1}{(P + P_2)}$$

Finalmente:

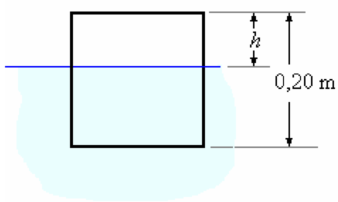
$$P = \frac{P_1}{(n-1)} - P_2$$

Ejemplo 63. En una tentativa de identificar un espécimen de roca, un geólogo pesa una muestra en aire y también cuando que está sumergido en agua, usando una balanza de brazos iguales improvisada... ¿Obtiene en su medición 120 g y 78 g. cuál es la densidad de la muestra?
Solución.
En aire $m = \rho V = 120$ y en agua
$120 - \rho_a V = 78 \Rightarrow \rho_a V = 42$
De estas relaciones obtenemos:

$$\frac{\rho}{\rho_a} = \frac{120}{42} = 2{,}86$$

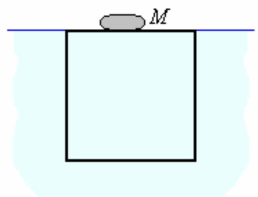
La roca desconocida tiene una densidad 2,86 g/cm^3

Ejemplo 64. Un cubo de madera de 20,0 cm de arista y una densidad de 650 kg/m^3 flota sobre el agua.
a) ¿Cuál es la distancia desde la parte superior del cubo al nivel del agua?
b) ¿Cuál es la masa del plomo que se ha colocado en la parte superior del cubo de manera que su cara superior queda a ras del agua?
Solución.



a) $\sum F_y = 0 \Rightarrow$
- Peso del bloque + Empuje de agua = 0 $\Rightarrow$
$P_{bloque} = E_{agua}$
Por el principio de Arquímedes.
$E = \rho_{agua} g V_{agua}$
$= (1000)(9{,}80)[0{,}20 \times 0{,}20(0{,}20 - h)]$
Peso del bloque $= mg = \rho_{bloque} g V_{bloque}$
$= (650)(9{,}80)(0{,}20^3)$
Luego
$(650)(9{,}80)(0{,}20^3) = (1000)(9{,}80)[0{,}20 \times 0{,}20(0{,}20 - h)]$
$\Rightarrow (0{,}20 - h) = (0{,}650)(0{,}20)$
$\Rightarrow h = 0{,}07$ m = 7,00 cm

b)

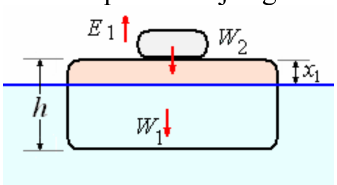


Empuje = Peso del bloque + Peso del plomo
$(1000)(0{,}20^3)g = (650)(0{,}20^3)g + Mg$
M es la masa del plomo.
$M = (1000 - 650)(0{,}20^3) = 2{,}80$ kg

Ejemplo 65. Un trozo de hierro está pegado encima de un bloque de madera. Si éste se coloca en una cubeta de agua con el hierro arriba, flota. Ahora, se voltea el bloque para que el hierro quede sumergido bajo el bloque. ¿El bloque flotará o se hundirá? ¿El nivel de agua en la cubeta subirá, bajará o no cambiará? Explique.

Solución.

Cuando el bloque está sobre la madera, solamente el bloque desaloja agua

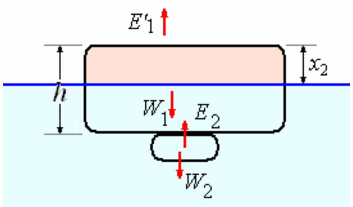


$\sum F_y = 0$

$E_1 - W_1 - W_2 = 0 \Rightarrow$

$\rho g(h - x_1)A - \rho_m gAh - W_2 = 0 \;\Rightarrow$

$$x_1 = \left(1 - \frac{\rho_m}{\rho}\right)h - \frac{W_2}{\rho g A} \qquad (1)$$



$\sum F_y = 0$

$E'_1 + E_2 - W_1 - W_2 = 0 \;\Rightarrow$

$$\rho g(h - x_2)A + \frac{\rho}{\rho_h}W_2 - \rho_m gAh - W_2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_2 = \left(1 - \frac{\rho_m}{\rho}\right)h - \left(1 - \frac{\rho}{\rho_h}\right)\frac{W_2}{\rho g A} \qquad (2)$$

Comparando (1) y (2):

$x_2 > x_1$

Se puede concluir que

El bloque flotará, el nivel del agua bajará ya que hay un volumen menor de agua desalojada.

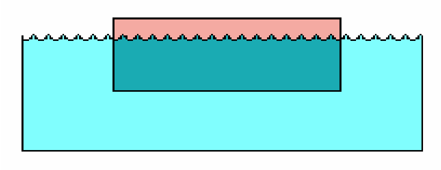
Ejemplo 66. Un cuerpo de forma rectangular de 10 cm de espesor está flotando en una laguna pequeña con tres cuartos de su volumen sumergido

a) Si un camión cisterna derrama en la laguna aceite de densidad 0,65 g/cm^3, quedando la cara superior del cuerpo justamente a nivel de la superficie del líquido.

¿Cuál es el espesor de la capa de aceite?

b) ¿Qué pasará si se para sobre el cuerpo un pajarito de masa m y luego se sale?

Determinar la ecuación de movimiento considerando que el agua tiene una constante de viscosidad bA (A es área del cuerpo rectangular).

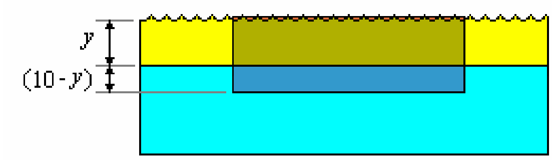


Solución.

a) Antes que se derrame el aceite, el poste está flotando en el agua simétricamente. Sea su sección transversal A y su densidad ρ_p, si ¾ de su volumen están sumergidos, sobresalen 2,5 cm y están sumergidos 7,5 cm. El peso es igual al empuje. La densidad del agua es ρ.

$$\rho_p gA(10) = \rho gA(7{,}5) \;\Rightarrow \rho_p = \frac{3}{4}\rho$$

Cuando el aceite de densidad ρ_a se derrama éste permanece sobre el agua y se extiende a una altura y sobre el agua, al agua le corresponde una altura (10 –y). Como se ha alcanzado el equilibrio:



$$\rho_p gA(10) = \rho gA(10 - y) + \rho_a gAy$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}\rho gA(10) = \rho gA(10 - y) + \rho_a gAy$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}\rho gA(10) = \rho gA(10) - \rho gAy + \rho_a gAy$$

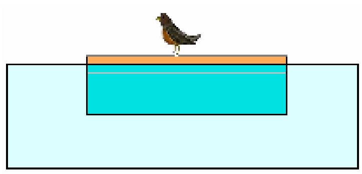
$$\Rightarrow \frac{1}{4}\rho(10) = (\rho - \rho_a)y$$

$$\Rightarrow y = \frac{10\rho}{4(\rho - \rho_a)} = \frac{10(1)}{4(1 - 0{,}65)}$$

$= 7{,}14$ cm

b) Si se para sobre el cuerpo un pajarito de masa m y luego se sale, el cuerpo quedará en movimiento armónico simple vertical, como lo demostraremos a continuación.

Vamos a considerar antes de derramado el aceite.



$\sum F_y = ma_y \Rightarrow$

Fuerza recuperadora por empuje extra (debido a y) + Fuerza de oposición por viscosidad = masa de palo moviéndose verticalmente.

$$\Rightarrow -\rho g A y - bA\dot{y} = \rho_p A\ell \ddot{y}$$

$\ell = 0{,}1$ m, ρ_p = densidad del palo

$$\ddot{y} + \frac{b}{\rho_p \ell}\dot{y} + \frac{\rho g}{\rho_p \ell} y = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{y} + 2\beta \dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

Con $2\beta = \dfrac{b}{\rho_p \ell}$ y $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{\rho g}{\rho_p \ell}}$

La solución es

$$y = y_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

Con

$$y_0 = \frac{m}{\rho A},\ \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ y } \omega = \sqrt{\left|\beta^2 - \omega_0^2\right|}.$$

Ejemplo 67. Un recipiente se llena parcialmente de agua. Aceite de densidad 750 kg/m^3 se vierte sobre el agua, y flota sin mezclarse. Un bloque de la madera de densidad 820 kg/m^3 se coloca en el recipiente, y flota en la interfase de los dos líquidos. ¿Qué fracción del volumen del bloque se sumerge en agua?

Solución.

Sea el bloque de madera de sección A y altura h, la parte sumergida en agua es x y la parte en aceite es $(h - x)$.

El volumen en agua es $V_a = Ax$, y el volumen en aceite es $V_o = A(h - x)$

El peso del bloque es equilibrado por los empujes debidos al agua y al aceite.

$$\rho_m gAh = \rho_a gAx + \rho_o gA(h - x)$$

$$\Rightarrow \rho_m h = \rho_a x + \rho_o (h - x)$$

$$\Rightarrow \rho_m = \rho_a \frac{x}{h} + \rho_o - \rho_o \frac{x}{h}$$

$$\Rightarrow (\rho_a - \rho_o)\frac{x}{h} = \rho_m - \rho_o$$

$$\Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{(\rho_m - \rho_o)}{(\rho_a - \rho_o)}$$

$$\Rightarrow \frac{820 - 750}{1000 - 750} = 0{,}28$$

Ejemplo 68. Un cubo de arista L = 16 cm y densidad 0,8 g/cm^3, se deja libre en el fondo de un recipiente que contiene agua y cuya profundidad es desconocida. La cara superior del cubo tarda 0,64 s en llegar a la superficie del agua. Despreciar las fuerzas de fricción entre el cubo y el agua.

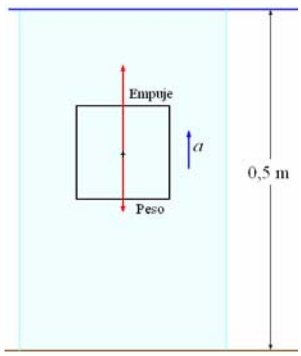
a) ¿Cuál es la profundidad del agua en el recipiente?

b) Cuando el cubo justo pasa por su posición de equilibrio, ¿qué porcentaje de su arista sobresale del agua?

c) ¿Cuál es el periodo de las oscilaciones verticales que efectuará el cubo, si se ignora el amortiguamiento debido a la fricción del agua?

Solución.

a)



La aceleración con que asciende se deduce a partir de

$$\sum F = ma$$

$$\text{Empuje - Peso} = ma$$

$$\rho_a g\ell^3 - \rho g\ell^3 = \rho g\ell^3 a$$

$$g(\rho_a - \rho) = \rho a$$

$$a = \frac{(\rho_a - \rho)}{\rho} g = \frac{(1 - 0{,}8)}{0{,}8} g = 0{,}25 g$$

$= 2{,}45$ m/s^2

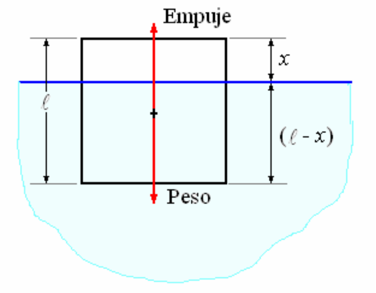
El tiempo que tarda en alcanzar la superficie es 0,4 s.

$$h = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(0{,}25g)(0{,}64)^2 = 0{,}50 \text{ m}$$

La profundidad del agua en el recipiente es 0,50 + 0,16 = 0,66 m.

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2(0{,}50)}{2{,}45}} = 0{,}64 \text{ s}$$

b) En la posición de equilibrio se cumplirá



Peso = empuje

$\rho_a g(\ell - x)\ell^2 = \rho g \ell^3$

$\rho_a(\ell - x) = \rho\ell$

$\rho_a\ell - \rho_a x = \rho\ell$

$\rho_a x = \rho_a\ell - \rho\ell$

$x = \dfrac{(\rho_a - \rho)}{\rho_a}\ell = \dfrac{(1 - 0{,}8)}{1}16$

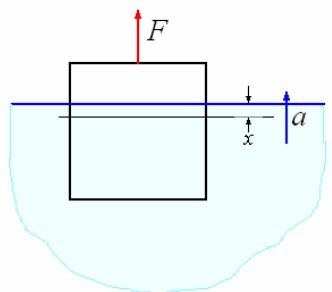
$= 3{,}2$ cm

$\dfrac{x}{\ell} = \dfrac{3{,}2}{16} = 0{,}2$

Sobresale 20 %

c) para hallar el periodo observamos que si el cubo está en la posición de equilibrio, un desplazamiento y vertical se presenta una fuerza recuperadora

$F = -\rho_a \ell^2 x g$



$\sum F = ma$

$-\rho_a \ell^2 x g = m\ddot{y}$

$m\ddot{x} + \rho_a \ell^2 y g = 0$

$\ddot{x} + \dfrac{\rho_a g}{\rho\ell} y = 0$

$\omega = \sqrt{\dfrac{\rho_a g}{\rho\ell}} = \dfrac{2\pi}{T} \Rightarrow$

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\rho\ell}{\rho_a g}} = 0{,}71$ s

Ejemplo 69. Un gran bloque de hielo (densidad 917 kg/m^3) flota en la agua de mar (densidad 1030 kg/m^3). ¿Si el área superficial del hielo es 20 m^2 y tiene 0,20 m de espesor, cuál es la masa del oso polar más pesado que puede estar parado en el hielo sin hacerlo ir debajo de la superficie del agua?

Solución.

$m_a = \rho_a Ah$, $m_B = \rho_B Ah$

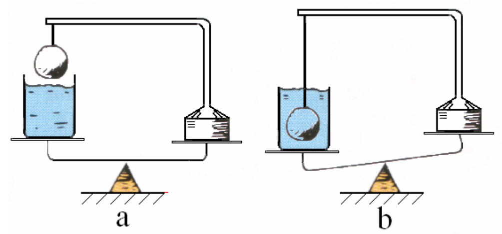
$m_B g + mg = m_a g$

$\Rightarrow\ m = m_a - m_B = (\rho_a - \rho_B)Ah$

$= (1030 - 917)(20)(0{,}2)$

$= 452$ kg

Ejemplo 70. El peso del recipiente de agua en la siguiente figura es igual al peso de la base con la esfera maciza de hierro colgada, como se ve en (a). Cuando la bola colgada se baja y se mete al agua se rompe el equilibrio (b). ¿El peso adicional que se debe poner en el platillo derecho, para regresar al equilibrio debe ser mayor, igual o menor que el peso de la bola?



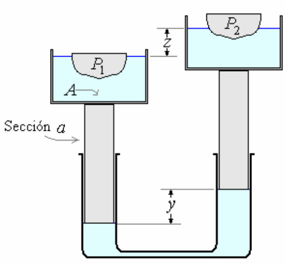
Solución.

En el platillo de la izquierda la indicación aumenta una cantidad igual al empuje. Para equilibrar debe colocarse en el platillo de la derecha un peso igual al empuje.
Como el empuje es igual al volumen de la bola por la densidad del agua este peso será menor que el peso de la bola.

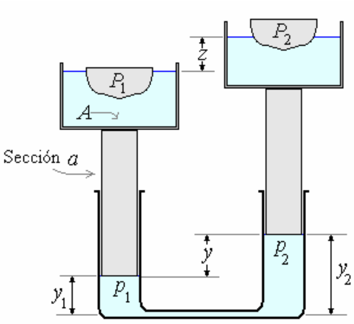
Ejemplo 71. En Inglaterra en la edad media se utilizó un sistema extenso de canales para el transporte. Algunos de estos canales cruzaron grandes barrancas sobre puentes (viaductos). Suponga que una lancha a remolque pesadamente cargada cruzó sobre tal puente del canal.
¿Qué pasa con la fuerza sobre el puente?

Solución.
La fuerza sobre el Puente no aumentará con el paso de la lancha sobre él.
Porque el canal se puede considerar como infinito, la elevación de nivel del agua no es notable.

Ejemplo 72. Dos depósitos iguales, de sección A, contienen igual cantidad de agua y descansan sobre émbolos iguales, de sección a, sometidos a la acción de agua a presión. En los depósitos flotan dos barcas de pesos P_1 y P_2.
a) Calcular la distancia y de las caras inferiores de los émbolos para que haya equilibrio.
b) Hallar el desnivel z del líquido entre ambos depósitos.



Solución.
a)



$$p_1 = \frac{P_1 + P + Q}{a}, \quad p_2 = \frac{P_2 + P + Q}{a}$$

Siendo P peso de las cámaras incluidos los émbolos, Q el peso del agua en cada cámara.
Restando

$$p_1 - p_2 \frac{P_1 + P + Q}{a} - \frac{P_2 + P + Q}{a}$$

Como

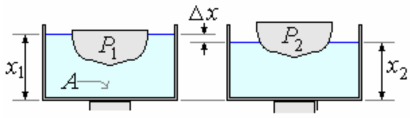
$$p_1 = p_2 + \rho g y \Rightarrow$$
$$p_1 - p_2 = \rho g y$$

Tenemos

$$\frac{P_1 + P + Q}{a} - \frac{P_2 + P + Q}{a} = \rho g y$$

$$\Rightarrow y = \frac{P_1 - P_2}{\rho g a}$$

b)



Siendo x_1, x_2 las alturas de agua en ambas cámaras, P sus pesos incluidos los émbolos, Q el peso del agua en cada cámara, se tiene:

$$x_1 = \frac{P_1 + Q}{\rho g A}, \quad x_2 = \frac{P_2 + Q}{\rho g A}$$

Restando

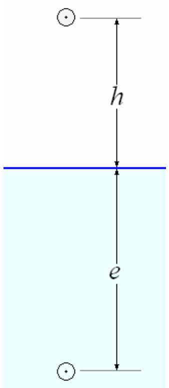
$$\Delta x = x_1 - x_2$$
$$= \frac{P_1 + Q}{\rho g A} - \frac{P_2 + Q}{\rho g A} = \frac{P_1 - P_2}{\rho g A}$$

Además se tiene

$$y = z + \Delta x \Rightarrow z = y - \Delta x$$

$$z = \frac{P_1 - P_2}{\rho g}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{A}\right)$$

Ejemplo 73. Se deja caer un cuerpo de densidad 0,6, desde 10 m de altura, en el mar (densidad 1,022 g/cm^3). Calcule.
a) La profundidad que penetra en el agua.
b) El tiempo que tarda en volver al a la superficie. (No tomar en cuenta la viscosidad y la tensión superficial.)
Solución.
a)



Aplicando el principio de conservación de la energía, se cumplirá:

Energía potencial = Trabajo necesario para vencer la fuerza de empuje en el agua

$U = Ee$

Energía potencial = $V\rho g(h+e)$

Trabajo necesario para vencer la fuerza de empuje en el agua = $Ee = V\rho_a ge$

$V\rho g(h+e) = V\rho_a ge \Rightarrow$

$\rho h + \rho e = \rho_a e \Rightarrow$

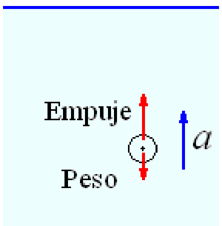
$\rho h = (\rho_a - \rho)e \Rightarrow$

$$e = \frac{\rho}{(\rho_a - \rho)}h$$

Reemplazando valores:

$$e = \frac{0{,}6}{(1{,}022 - 0{,}6)}10 = 14{,}22 \text{ m}$$

b)



Aplicando la segunda ley de Newton:

$\sum F = ma$

Empuje - Peso $= ma$

$\Rightarrow \rho_a gV - \rho gV = \rho Va$

$\Rightarrow (\rho_a - \rho)g = \rho a$

$$\Rightarrow a = \frac{(\rho_a - \rho)}{\rho}g = \frac{(1{,}022 - 0{,}6)}{0{,}6}9{,}8$$

$= 6{,}89 \text{ m/s}^2$

El cuerpo está sometido a un movimiento uniformemente acelerado, hacia arriba

$$a = \frac{(\rho_a - \rho)}{\rho}g = \frac{(1{,}022 - 0{,}6)}{0{,}6}9{,}8$$

$= 6{,}89 \text{ m/s}^2$

El tiempo necesario para alcanzar la superficie desde el momento en que llega a la profundidad máxima será:

$$t = \sqrt{\frac{2e}{a}} = \sqrt{\frac{2(14{,}22)}{6{,}89}}$$

$= 2{,}03$ s

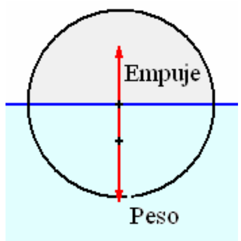
Ejemplo 74. Una esfera hueca, construida con un material de densidad 7 g/cm^3 y masa 10 kg, flota en agua de tal modo que la línea de flotación pasa por el centro de la esfera.

a) ¿Qué espesor tiene dicha esfera?

b) ¿cuántos perdigones de 0,1 g debemos introducir en la esfera para que esta se hunda justamente en el seno del líquido?

Solución.

a)



El peso de la esfera es igual al empuje experimentado por la media esfera sumergida

$mg = \rho gV$

$$10g = 1000gV \quad V = \frac{10}{1000} = 10^{-2} \text{ m}^3$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 10^{-2} \Rightarrow$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3}{200\pi}} = 0{,}168 \text{ m}$$

Llamando r al radio interior

$$\frac{4}{5}\pi(R^3 - r^3) = \frac{m}{\rho} = \frac{10}{7000} \Rightarrow$$

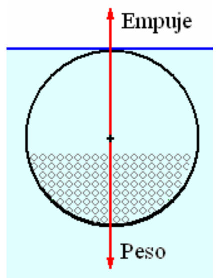
$$r^3 = R^3 - \frac{5}{280\pi}$$

$$= \frac{3}{200\pi} - \frac{5}{2800\pi} = \frac{37}{2800\pi} \Rightarrow$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{37}{2800\pi}} = 0{,}161 \text{ m}$$

Espesor: $R - r$ = 0,168 -0,161 = 0,007 m

b)



Para que la esfera se hunda justamente, el peso total ha de ser igual al empuje

$10g + Mg = \rho_a gV \Rightarrow$

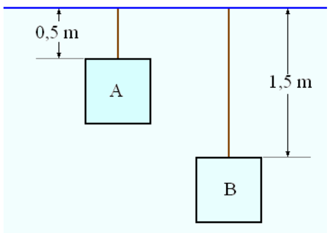
$10 + M = 1000(2 \times 10^{-2}) \Rightarrow$

$M = 20 - 10 = 10$ kg

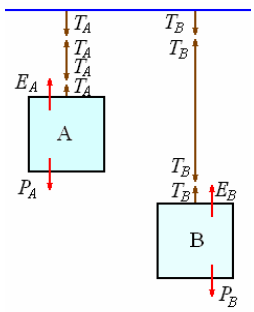
Se necesitan

$$\frac{10000 \text{ g}}{0{,}1 \text{ g}} = 100\,000 \text{ perdigones.}$$

Ejemplo 75. Dos bloques cúbicos idénticos en tamaño y forma se cuelgan de hilos y se sumergen completamente en un estanque de agua. El bloque A es de aluminio; su cara superior está 0,5 m bajo la superficie del agua. El bloque B es de latón; su cara superior está 1,5 m bajo la superficie del agua. Indique si las siguientes cantidades tienen un valor mayor para el bloque A o para el bloque B, o si son iguales:
a) la presión del agua sobre la cara superior del bloque.
b) la fuerza de flotación ejercida por el agua sobre el bloque.
c) la tensión en el hilo del que cuelga el bloque.
(Nota.- la densidad del latón es mayor que la del aluminio)
Solución.

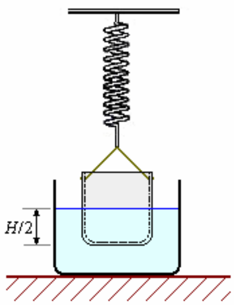


a)
$$p_A = p_a + \rho g 0{,}5$$
$$p_B = p_a + \rho g 1{,}5$$
Se tiene $p_A < p_B$
Luego la presión del agua sobre la cara superior del bloque.
b)
$$E_A = \rho g V_A$$
$$E_B = \rho g V_B$$
Se tiene $V_A = V_B$
Luego los empujes son iguales.
$$E_A = E_B$$
c)

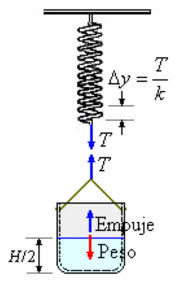


$$T_A + E_A - P_A = 0$$
$$T_A = P_A - E_A = P_A - \rho g V$$
$$T_B + E_B - P_B = 0$$
$$T_B = P_B - E_B = P_B - \rho g V$$
Comparando T_A y T_B:
Siendo $\rho_A < \rho_B$, se tiene que $P_A < P_B$
Luego
$$T_A < T_B$$

Ejemplo 76. Un cilindro vacío de plata se encuentra sumergido parcialmente hasta la mitad de su altura en un fluido (ρ = 1,020 x 10^3 kg/m^3) y sujeto a un resorte de constante k = 300 N/m. El sistema se encuentra en equilibrio. Las dimensiones del cilindro son 20cm de altura, radio 5cm y espesor 2mm. Considerar además ρ_{Ag} = 10,5 x 10^3 kg/m^3.
a) Determinar la deformación del resorte.
b) El cilindro es desplazado ligeramente de su posición de equilibrio, actuando el fluido como medio amortiguador. (b = 0,15 kg/s) determina el periodo de oscilación del cilindro.
c) Si ahora se llena el mismo fluido en el interior del cilindro de plata hasta 5cm de profundidad y se quita el resorte, ¿qué sucede con el cilindro?
Solución.



a)



Masa del cilindro de plata
$$m_{Ag} = \rho_{Ag}\left[\pi R^2 H - \pi (R-e)^2 (H-e)\right]$$
$$= 10{,}5\times 10^3 \pi\left[(0{,}05)^2(0{,}20) - (0{,}05-0{,}002)^2(0{,}2-0{,}002)\right]$$
$$= 1{,}451 \text{ kg}$$
Peso del cilindro de plata
Peso = $m_{Ag} g = (1{,}451)(9{,}8)$ = 14,22 N

Empuje

$$E = \rho_{H_2O} g \left(\pi R^2 \frac{H}{2} \right)$$

$$= \left(1,020 \times 10^3\right)(9,8)\pi(0,05)^2(0,10)$$

$= 7,85$ N

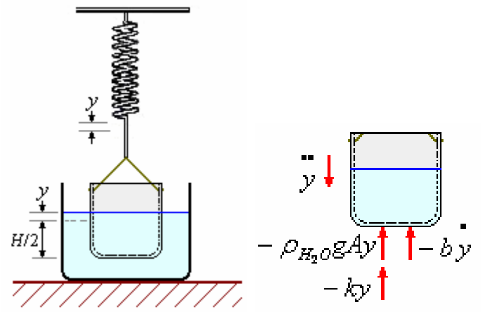
T = Peso – Empuje = 14,22 – 7,85 = 6,37 N

Deformación del resorte

$$\Delta y = \frac{T}{k} = \frac{6,37}{300} = 0,021$$

El resorte se estira 2,1 cm.

b) La ecuación de movimiento es:



$$\sum = m\ddot{y}$$

- empuje extra – recuperadora del resorte – amortiguación = $m\ddot{y}$ $\Rightarrow$

$$-\rho_{H_2O} gAy - ky - b\dot{y} = m\ddot{y}$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + \left(\rho_{H_2O} gA + k\right)y = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{\left(\rho_{H_2O} gA + k\right)}{m} y = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_o^2 y = 0$$

Con

$$\beta = \frac{b}{2m} = \frac{0,15}{2(1,05)}$$

$= 0,071$ N/s m,

$$\omega_o = \sqrt{\frac{\rho_{H_2O} gA + k}{m}} = \sqrt{\frac{78,5 + 300}{1,05}}$$

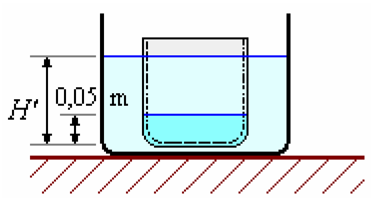
$= 18,99$ rad/s

$$\omega = \sqrt{\left|\beta^2 - \omega_0^2\right|}$$

$$= 18,98 = \frac{2\pi}{T}$$

$T = 0,33$ s

c) Ahora cambia el peso. El peso total es el peso del cilindro más el peso del líquido contenido.



El peso del cilindro vacío es 10,28 N

El peso del contenido es

$$\rho_{H_2O} g \pi R^2 (0,05) =$$

$$(1020)(9,8)\pi(0,045)^2(0,05) = 3,18 \text{ N}$$

En total hay 13,46 N.

Peso = empuje

$$13,46 = \rho_{H_2O} g \left(\pi R^2 H'\right)$$

$$= (1020)(9,8)\pi(0,05)^2 H' \Rightarrow$$

$$H' = \frac{13,46}{(1020)(9,8)\pi(0,05)^2} = \frac{13,46}{78,51}$$

$= 0,17$

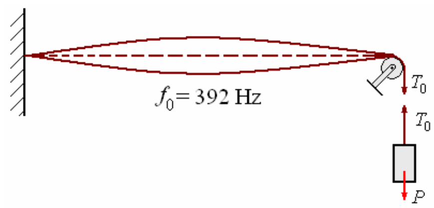
En el equilibrio, el cilindro estará sumergido 17cm

Ejemplo 77. Un extremo de un alambre horizontal está fijo y el otro pasa por una polea y tiene un cuerpo pesado atado a él. La frecuencia de la nota fundamental emitida cuando el alambre es pulsado es 392 Hz. Cuando el cuerpo esta sumergido totalmente en agua su frecuencia baja 343 HZ. Calcular la densidad del cuerpo.

Solución.

Inicialmente la frecuencia fundamenta es f_0 = 392 Hz.

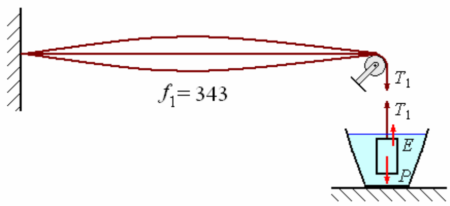
$$f_0 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$



$$T_0 = mg = \rho g V$$

Cuando el bloque se sumerge totalmente en agua la frecuencia fundamental es f_1 =343 Hz.

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_1}{\mu}}$$



$$T_1 + E = mg \;\Rightarrow T_1 = mg - E = \rho gV - \rho_a gV$$

Elevando al cuadrado ambas expresiones y dividiendo una con otra:

$$\frac{f_0^2}{f_1^2} = \frac{T_0}{T_1} = \frac{\rho gV}{\rho gV - \rho_a gV} = \frac{\rho}{\rho - \rho_a} \Rightarrow$$

$$(\rho - \rho_a) f_0^2 = \rho f_1^2 \Rightarrow \left(f_0^2 - f_1^2\right)\rho = \rho_a f_0^2 \Rightarrow$$

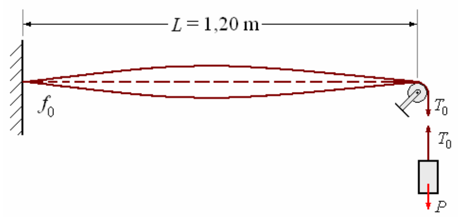
$$\rho = \rho_a \frac{f_0^2}{\left(f_0^2 - f_1^2\right)} = 1000 \frac{392^2}{\left(392^2 - 343^2\right)}$$

$$= 4266{,}66 \text{ kg/m}^3$$

Ejemplo 78. Un alambre horizontal está fijo por un extremo y el otro extremo pasa por una polea y tiene un cuerpo pesado atado a él. Un vibrador de frecuencia desconocida f_0 hace resonar el alambre en su modo fundamental, cuando su longitud efectiva es de 1,2 m. Si el cuerpo pesado se sumerge completamente en agua, la longitud efectiva a la que resuena el modo fundamental es de 1,0 m. ¿Cuál es la densidad del cuerpo pesado?

Solución.

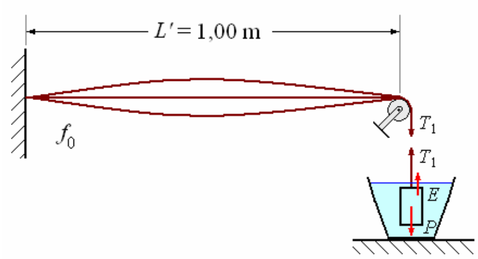
Con longitud L = 1,20 m.



$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{\rho_o gV}{\mu}} = \lambda f_0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{\rho_o gV}{\mu}} = \lambda f_0 \quad (1)$$

Con longitud L' = 1,00 m.



$$v' = \sqrt{\frac{T_1}{\mu}} = \sqrt{\frac{(\rho_o - \rho)gV}{\mu}} = \lambda' f_0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{(\rho_o - \rho)gV}{\mu}} = \lambda' f_0 \quad (2)$$

Dividiendo (1) : (2)

$$\frac{\sqrt{\dfrac{\rho_o gV}{\mu}}}{\sqrt{\dfrac{(\rho_o - \rho)gV}{\mu}}} = \frac{\lambda f_0}{\lambda' f_0} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{\rho_o}}{\sqrt{(\rho_o - \rho)}} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{2{,}4}{2} = 1{,}2 \Rightarrow$$

$$\frac{\rho_o}{(\rho_o - \rho)} = 1{,}2^2 \Rightarrow$$

$$\rho_o = \frac{1{,}44\rho}{0{,}44} = 3{,}27\rho$$

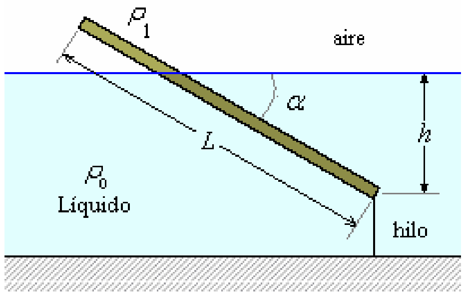
La densidad del cuerpo pesado es igual a 3,47 veces la densidad del agua.

Ejemplo 79. Una varilla de largo L y densidad ρ_1 flota en un líquido de densidad ρ_0 $(\rho_0 > \rho_1)$. Un extremo de la varilla se amarra a un hilo a una profundidad h (ver figura adjunta).

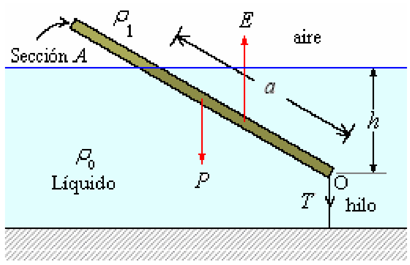
a) Encuentre el ángulo α .

b) ¿Cuál es el mínimo valor de h para el cual la varilla se mantiene en posición vertical?

c) ¿Cuál es la tensión del hilo?



Solución.



a) La fuerza de empuje se aplica en el lugar $\dfrac{a}{2}$ y la fuerza de gravedad en el lugar $\dfrac{L}{2}$ (medidos desde O).

Sea A la sección transversal de la varilla

El volumen de la barra es: AL

El peso de la barra es $P = \rho_1 ALg$

El largo a de la parte de la varilla sumergida es

$$a = \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

La fuerza de empuje viene dada por:

$$E = \rho_0 Aag = \rho_0 A \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha} g$$

La fuerza de gravedad es

El torque ejercido por ambas fuerzas respecto a O debe ser nulo, o sea,

$$E\left(\frac{a}{2}\cos\alpha\right) = P\left(\frac{L}{2}\cos\alpha\right) \Rightarrow Ea = PL$$

Sustituyendo las expresiones para E y P se deduce que

$$\rho_0 Aa^2 g = \rho_1 AL^2 g \Rightarrow \rho_0 a^2 = \rho_1 L^2,$$

Reemplazando el valor de a.

$$\rho_0\left(\frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}\right)^2 = \rho_1 L^2$$

Despejando se encuentra finalmente que

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}}\frac{h}{L}$$

b) Si el lado derecho de la última ecuación es mayor o igual a uno, la varilla se mantendrá en posición vertical. El mínimo valor de h para que la varilla esté en posición vertical es

$$h_{\min} = L\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_0}}$$

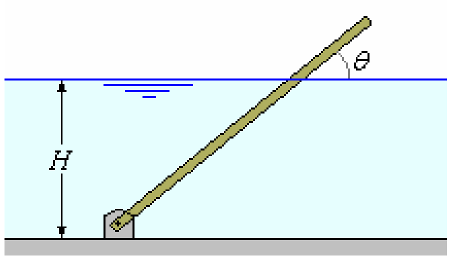
c) La tensión del hilo se obtiene exigiendo que la fuerza total sea nula. De esta manera se obtiene que

$$T = E - P = \rho_0 A \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha} g - \rho_1 ALg$$

$$= ALg\rho_1\left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}} - 1\right) = Mg\left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}} - 1\right)$$

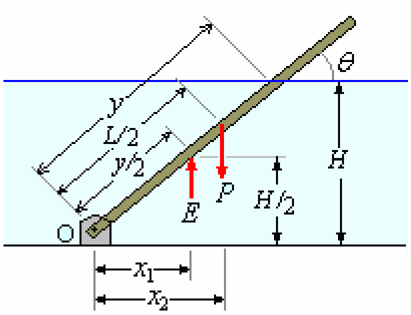
Donde M es la masa de la varilla.

Ejemplo 80. Una barra homogénea de peso P, área de sección transversal A y longitud L flota en agua con uno de sus extremos anclados a una profundidad H, tal como se muestra en la figura. Considerando el espesor de la barra pequeño, determinar el ángulo θ de equilibrio. Densidad del líquido = ρ.



Solución.

Geometría del problema



$$y = \frac{H}{\operatorname{sen}\theta},\ x_1 = \frac{H}{2\tan\theta},\ x_2 = \frac{L}{2}\cos\theta$$

Determinación del empuje:

$$E = \rho g V_{Sumergido} = \rho g A y = \rho g A \frac{H}{\operatorname{sen}\theta}$$

Estática, se tendrá equilibrio cuando:

$$\sum \tau_O = 0$$

O sea, $Px_2 = Ex_1$

Sustituyendo valores:

$$P\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right) = \rho g A \frac{H}{\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{H}{2\tan\theta}\right)$$

$$= \frac{\rho g A H^2 \cos\theta}{2\operatorname{sen}^2\theta}$$

De aquí:

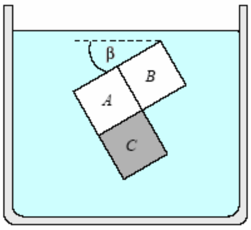
$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{\rho g A H^2}{PL}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta = H\sqrt{\frac{\rho g A}{PL}}$$

Finalmente:

$$\theta = \operatorname{arc\,sen} H\sqrt{\frac{\rho g A}{PL}}$$

Ejemplo 81. Considere tres cubos del mismo tamaño, adheridos tal como se muestra en la figura. La densidad del material del cual están hechos los dos cubos A y B es ρ_1 = 0,5 g/cm^3, mientras que el cubo C está hecho de un material de densidad ρ_2 = 2 g/cm^3. Observe que la densidad media de los tres cubos es igual a la del agua ρ = 1 g/cm^3) y, por lo tanto, al sumergirlo en agua, la fuerza de empuje exactamente cancela el peso. ¿Cuál será la orientación de equilibrio estable que el objeto adquirirla cuando está "flotando" rodeado de agua?



Solución.

Las únicas fuerzas que están actuando sobre el objeto son el peso P y el empuje E. Ya sabemos que ambas fuerzas tienen la misma magnitud y apuntan en direcciones opuestas y, por lo tanto, la fuerza neta sobre el objeto es nula. Pero para que se encuentre en equilibrio también el torque neto debe ser nulo. Esto se logra solo si ambas fuerzas son colineales (actúan a lo largo de la misma recta).

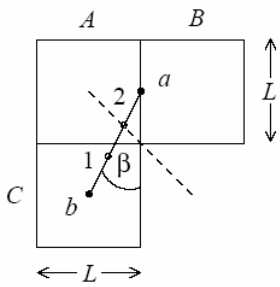
Encontremos los puntos en que actúan las dos fuerzas.

La gravedad actúa en el centro de masas.

El centro de masas de los cubos A y B se encuentra en a y el centro de masas de C se encuentra en b. El centro de masas del objeto completo se encontrará sobre la recta que une a con b. Como el cubo C tiene el doble de masa de los dos cubos $A + B$ juntos, el centro de masas del objeto completo se ubicará más cerca de b que de a. En la figura más abajo hemos designado el centro de masas del objeto completo con el numero 1. Se tiene que

$$\overline{b1} = \frac{\overline{ab}}{3}$$

La fuerza de empuje, por otra parte, actúa en el centro de masas que se obtiene al sustituir los tres cubos por agua (en la figura lo hemos designado con el numero 2).



Nuevamente el centro de masas de los cubos $A + B$ se encuentra en a, mientras que el de C se encuentra en b. El centro de masas de los centros de masas nuevamente se encontrará sobre la recta $\overline{ab}$. Pero ahora los cubos $A+B$ pesan el doble de lo que pesa C, luego el centro de masas ahora estará mías cerca de a que de b. De hecho, el centro de masas cuando los tres cubos están hechos de agua debe estar sobre el plano de simetría indicado en la figura con una línea punteada.

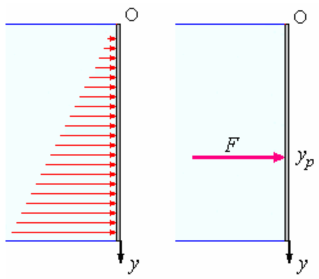
En resumen, la fuerza de gravedad actúa en 1 y el empuje actúa en 2. Para que no haya torque sobre el sistema la recta $\overline{ab}$ debe orientarse a lo largo de la vertical.

Concluimos que el ángulo β de la figura del enunciado debe coincidir con el de la segunda figura. Se deduce inmediatamente que tan β = 1/2. Convénzase de que el equilibrio es estable cuando el punto 2 está sobre el punto 1, es inestable cuando 1 está sobre 2.

FUERZAS SOBRE LAS PAREDES O COMPUERTAS

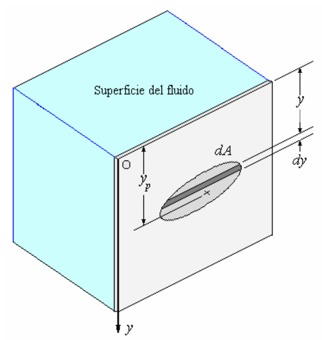
Ya hemos estudiado la variación de presión con la profundidad de un fluido, el conjunto de fuerzas que resultan de la acción del fluido sobre la cara de una superficie de área finita puede reemplazarse por una fuerza resultante. Luego, ahora nos ocuparemos de encontrar la magnitud de esta fuerza resultante y la determinación de su línea de acción o punto de aplicación.

Las fuerzas horizontales causadas por la presión sobre superficies que encierran al fluido, aumentan linealmente con la profundidad, de modo que se tienen fuerzas distribuidas no uniformes actuando sobre ellas. La resultante de ese sistema de fuerzas paralelas es en general una fuerza paralela aplicada en un punto llamado centro de presión, respecto al cual el torque de las fuerzas distribuidas es equivalente al torque de la fuerza resultante.



Para el caso de compuertas y situaciones similares, la fuerza debido a la presión atmosférica actúa por ambos lados, y entonces la omitiremos del análisis por no contribuir en forma neta a la fuerza horizontal actuando sobre la superficie.

La figura siguiente ilustra una situación típica, donde por el interior de una superficie hay un fluido y por el exterior está la atmósfera.



Para calcular la fuerza sobre superficie A en la pared vertical. Tomemos un elemento de área dA de ancho L y altura dy que se encuentra a una profundidad y. La fuerza sobre este elemento diferencial es: $dF = pdA = \rho gyLdy$

La fuerza total la encontramos integrando en toda la superficie: $F = \int_A pdA = \rho g \int_A ydA$

Como $\int_A ydA = y_G A$

Donde y_G es la posición del centroide del área de la superficie sobre la que actúa la fuerza.
A es el área total de la superficie.

Finalmente: $F = \rho g y_G A$

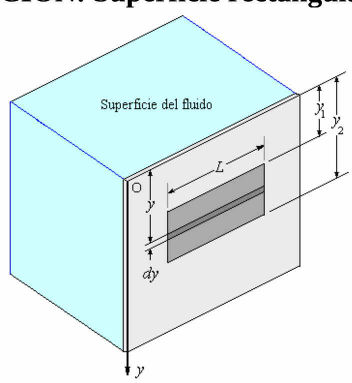
Centro de presión. El centro de presión lo encontramos de la siguiente manera
Torque de las fuerzas distribuidas = Torque de la fuerza resultante

$$y_p F = \int_A ydF \;\Rightarrow\; y_p \rho g y_G A = \int_A \rho g y^2 dA$$

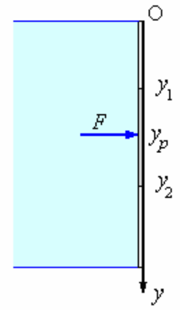
$$\Rightarrow y_p = \frac{\int_A y^2 dA}{y_G A} = \frac{I}{y_G A}$$

Donde I es el momento de inercia con respecto a un eje.

APLICACIÓN: Superficie rectangular



El caso más simple es si la superficie es rectangular como se indica en la figura que sigue donde se desea evaluar la fuerza resultante de las fuerzas distribuidas entre y_1 e y_2.



$$F = \int_A pdA = \rho g \int_A ydA$$

$$= \rho g L \int_{y_1}^{y_2} ydy$$

$$= \rho g L \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y_1}^{y_2} = \frac{1}{2}\rho g L\left(y_2^2 - y_1^2\right)$$

También podríamos calcularlo de otra forma
El centroide está en

$$y_G = \frac{1}{2}(y_2 + y_1)$$

El área $A = L(y_2 - y_1)$
Y la fuerza es:

$$F = \rho g y_G A = \frac{1}{2}\rho g L\left(y_2^2 - y_1^2\right)$$

Para calcular el centro de presión:

$$y_p = \frac{\int_A y^2 dA}{y_G A} = \frac{I}{y_G A}$$

$$I = \int_A y^2 dA = L\int_{y_1}^{y_2} y^2 dy$$

$$= \frac{1}{3}L\left[y^3\right]_{y_1}^{y_2} = \frac{1}{3}L\left(y_2^3 - y_1^3\right)$$

$$y_G = \frac{1}{2}(y_2 + y_1),\; A = L(y_2 - y_1)$$

Reemplazando:

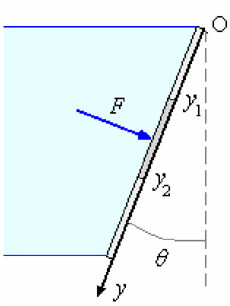
$$y_p = \frac{\frac{1}{3}L\left(y_2^3 - y_1^3\right)}{\frac{1}{2}L(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{2\left(y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2\right)}{3(y_2 + y_1)}$$

En particular si la superficie está entre $y_1 = 0$ e $y_2 = h$ resultará

$$y_p = \frac{2}{3}h$$

APLICACIÓN: Fuerza sobre una superficie de forma rectangular inclinada



En una sección anterior se calculó la fuerza resultante y centro de la fuerza para un área vertical de sección rectangular. Para una sección rectangular inclinada un ángulo θ con la vertical, el cálculo es muy parecido, pero ahora, el eje O*y* está inclinado luego resultarán

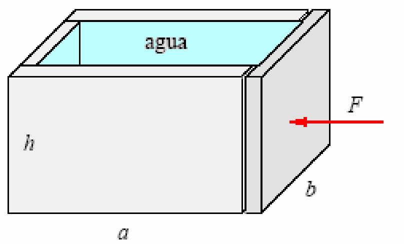
$$F = \frac{1}{2}\rho g L\left(y_2^2 - y_1^2\right)\cos\theta$$

y su punto de aplicación será

$$y_p = \frac{2\left(y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2\right)}{3\left(y_2 + y_1\right)}$$

Note que la expresión para el centro de fuerza es la misma.

Ejemplo 82. Considere una caja de dimensiones *a*, *b* y *h*, llena de agua. Todos los lados de la caja están firmemente unidos entre sí, excepto uno de los lados laterales (de dimensión *b* · *h*). Evalúe la magnitud de la fuerza exterior mínima con que debe presionarse ese lado contra el resto de la caja para que el agua no escurra. Si la fuerza se aplica en un solo lugar, encuentre la posición en la que debe aplicarla.



Solución.
Elijamos el eje z a lo largo de la vertical, con el origen al fondo de la caja sobre la tapa móvil. La presión a una altura *z* es $p_{(z)} = \rho g\left(h - z\right)$.

Dividamos la tapa en franjas horizontales de largo *b* y ancho (altura) *dz*. La fuerza que ejerce el fluido sobre la franja que está a la altura *z* es

$dF = p_{(z)} b dz$.

Integrando la fuerza que el líquido ejerce sobre cada una de las franjas se obtiene la fuerza total

$$F = \int_0^h p_{(z)} b dz = \rho g b\int_0^h (h - z)dz = \frac{1}{2}\rho b g h^2 .$$

Para encontrar a qué altura h_p debemos aplicar esta fuerza sobre la tapa, evaluemos el torque que ejerce el fluido sobre la tapa respecto al origen.
El torque que el fluido ejerce sobre la franja que está a la altura z es

$d\tau = z p_{(z)} b dz$.

Integrando el torque que el líquido ejerce sobre cada una de las franjas se obtiene el torque total

$$\tau = \int_0^h z p_{(z)} b dz = \rho g b\int_0^h z(h - z)dz = \frac{1}{6}\rho g b h^3 .$$

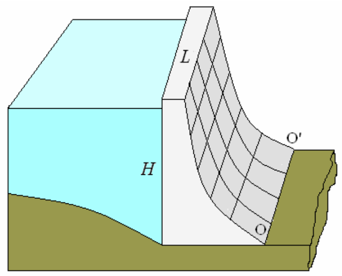
Para que la tapa esté en equilibrio el torque que ejerce la fuerza total externa *F* debe ser igual en magnitud con τ , es decir,

$$F h_p = \frac{1}{6}\rho g b h^3 \Rightarrow \frac{1}{2}\rho g b h^2 h_p = \frac{1}{6}\rho g b h^3$$

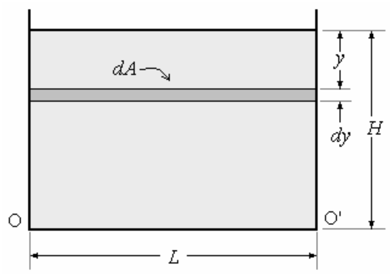
De esta ecuación se deduce finalmente que

$$h_p = \frac{h}{3}$$

Ejemplo 83. La figura nos representa el dique de un embalse en el que el agua alcanza una profundidad *h* = 60 m en la pared vertical, y tiene una longitud *L* = 250 m. Calcular:
a) La fuerza resultante que actúa sobre el dique.
b) El torque o momento de la fuerza que tiende a hacer girar el dique alrededor de OO'.
c) Posición de la línea de acción de la resultante.



Solución.
a)



El valor de la fuerza sobre un elemento de área *dA* será:

$dF = p dA$

Con $p = \rho_a g h$ y $dA = L dy$

$\Rightarrow dF = \rho_a g L y dy$

Y la fuerza resultante es, por tanto:

$$F = \int_0^H dF = \rho_a gL\int_0^H y dy = \frac{1}{2}\rho_a gLH^2$$

Expresión que podíamos haber obtenido aplicando directamente:

$F = \rho g h_C A$, sustituyendo valores:

$$F = \frac{1}{2}(1000)(9{,}8)(250)(60)^2 = 4{,}42 \text{ x } 10^9 \text{ N}$$

b) El torque o momento de la fuerza dF respecto del eje O O' es:

$$d\tau = (H - y)dF = \rho_a gLy(H - y)dy$$

y el torque resultante es:

$$\tau = \int_0^H d\tau = \rho_a gL\int_0^H y(H - y)dy = \frac{1}{6}\rho_a gLH^3$$

Sustituyendo valores:

$$\tau = \frac{1}{6}(1000)(9{,}8)(250)(60)^3 = 8{,}82 \text{ x } 10^{10} \text{ N}$$

c) Llamando h a la distancia por encima de O a la fuerza F para producir el torque τ calculado en (b), obtenemos:

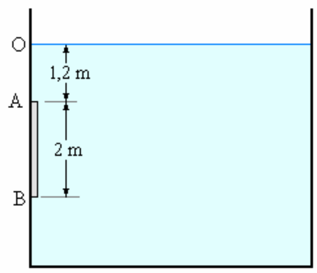
$$\tau = hF \Rightarrow \frac{1}{6}\rho_a gLH^3 = h\left(\frac{1}{2}\rho_a gLH^2\right)$$

$$\Rightarrow h = \frac{H}{3}$$

Sustituyendo valores:

$$h = \frac{60}{3} = 20 \text{ m}$$

Ejemplo 84. Determine la fuerza resultante y su punto de aplicación debida a la acción del agua sobre la superficie plana rectangular de altura AB = 2 m y de ancho 1 m (hacia adentro del papel), donde el punto A está a profundidad de 1,2m.



Solución.

Cálculo de la fuerza resultante

$$F = \int_A p dA = \rho g\int_A y dA$$

$$F = \rho gL\int_{y_1}^{y_2} y dy = \rho gL\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y_1}^{y_2}$$

$$= \frac{1}{2}\rho gL\left(y_2^2 - y_1^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}1000(9{,}8)(1)\left(3{,}2^2 - 1{,}2^2\right)$$

= 43120 N

Cálculo del centro de presión:

$$y_p = \frac{\int_A y^2 dA}{y_G A} = \frac{I}{y_G A}$$

$$I = \int_A y^2 dA = L\int_{y_1}^{y_2} y^2 dy$$

$$= \frac{1}{3}L\left[y^3\right]_{y_1}^{y_2} = \frac{1}{3}L\left(y_2^3 - y_1^3\right)$$

$$y_G = \frac{1}{2}(y_2 + y_1),\ A = L(y_2 - y_1)$$

Reemplazando:

$$y_p = \frac{\frac{1}{3}L\left(y_2^3 - y_1^3\right)}{\frac{1}{2}L(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)}$$

$$= \frac{2\left(y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2\right)}{3(y_2 + y_1)}$$

En particular si la superficie está entre $y_1 = 1{,}2$ e $y_2 = 3{,}2$ resultará:

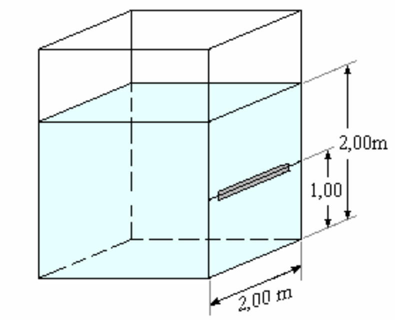
$$y_p = \frac{2\left(3{,}2^2 + 3{,}2 \times 1{,}2 + 1{,}2^2\right)}{3(3{,}2 + 1{,}2)}$$

= 2,35 m.

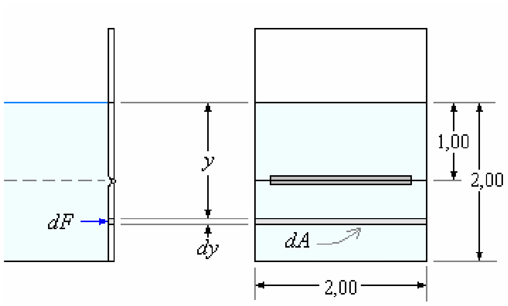
Ejemplo 85. El tanque en la figura está lleno con agua, 2,00 m de profundidad. En la parte inferior de una pared lateral hay una escotilla rectangular 1,00 de alto y 2,00 m de ancho, con una bisagra en la parte superior de la escotilla.

a) Determinar la fuerza que ejerce el agua sobre la escotilla.

b) Calcular el torque ejercido por el agua alrededor de las bisagras.



Solución. a)



El aire afuera y el agua dentro ambos ejercen la presión atmosférica, solamente cuenta el exceso de presión del agua ρgh para la fuerza neta.

La fuerza sobre el área diferencial dA es

$$dF = pdA = \rho gy(2{,}00)dy$$

La fuerza total es

$$F = \int dF = \rho g(2{,}00)\frac{y^2}{2}\Bigg|_{1{,}00}^{2{,}00}$$

$$= (1000)(9{,}80)(2{,}00)\left(\frac{2{,}00^2}{2} - \frac{1{,}00^2}{2}\right)$$

$$= 29400 \text{ N}$$

b) Posición del centro de presión

$$y_p = \frac{\int y^2 dA}{y_c A}$$

Con el centroide

$$y_c = 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5 \text{ m}$$

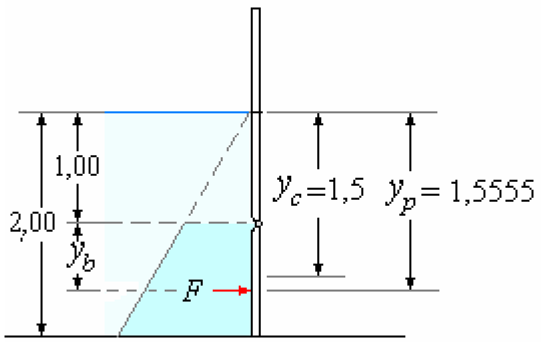
Área

$$A = 2\times 1 = 2 \text{ m}^2$$

Luego

$$y_p = \frac{\int y^2 dA}{y_c A} = \frac{2\int_1^2 y^3 dy}{1{,}5\times 2} = \frac{\frac{2}{3}y^3\Big|_1^2}{1{,}5\times 2}$$

$$= \frac{(2^3 - 1^3)}{4.5} = \frac{7}{4.5} = 1{,}55555 \text{ m}$$



El torque ejercido por el agua alrededor de las bisagras

$$\tau_b = F(y_p - 1)) = 29400(1{,}555 - 1)$$

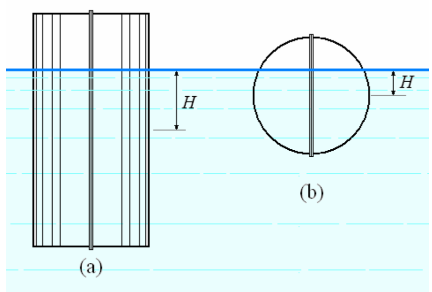
$$= 16333{,}333 \text{ Nm}$$

Ejemplo 86. ¿Cómo depende la fuerza con se comprimen los dos semicilindros iguales del batiscafo flotante en función del profundidad de su sumergimiento *H*, si aquel flota en la superficie del agua?

El radio del batiscafo es *R*, la longitud *L* y la densidad es ρ.

a) Si flota verticalmente.

b) Si flota horizontalmente.



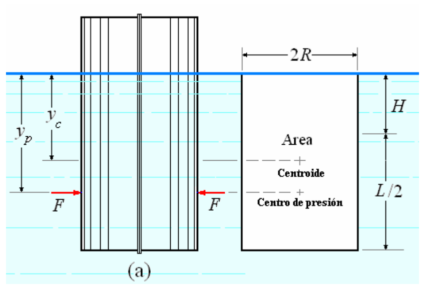
Solución.

$$F = \rho g y_c A$$

y_c = centroide

A = Área

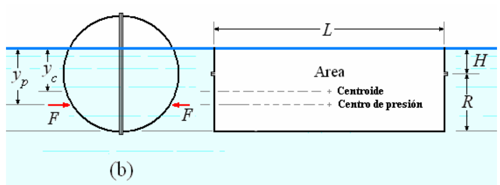
a) Si flota verticalmente.



$$y_c = \frac{1}{2}\left(H + \frac{L}{2}\right),\ A = 2R\left(H + \frac{L}{2}\right)$$

$$F = \rho g R\left(H + \frac{L}{2}\right)^2$$

b) Si flota horizontalmente.



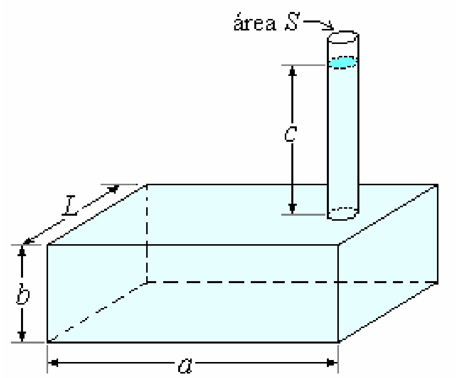
$$y_c = \frac{1}{2}(H + R),\ A = L(H + R)$$

$$F = \frac{1}{2}\rho g L(H + R)^2$$

Ejemplo 87. El agua se eleva hasta la altura *c* en el tubo soldado al tanque mostrado en la figura. Despreciando el peso del tubo:

a) Determinar y localizar la fuerza resultante que actúa sobre el área *Lb*.

b) Determinar la fuerza total en la base del tanque.
c) Comparar el peso total del agua con el resultado obtenido en (b) y explicar la diferencia.



Solución.
a) La fuerza sobre el área $A_1 = Lb$.

$$F_{1_1} = \rho g h_{G1} A_1 = \rho g \left(c + \frac{b}{2} \right) Lb$$

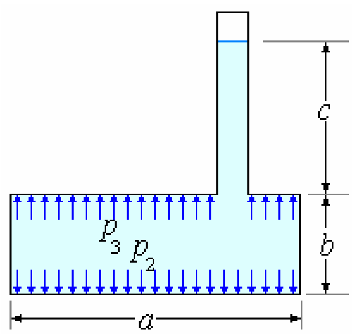
$$y_{p1} = \frac{\int_{A1} y^2 dA}{y_{G1} A_1} = \frac{L \int_c^{(c+b)} y^2 dy}{\left(c + \frac{b}{2} \right) Lb}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left[(c+b)^3 - c^3 \right]}{\left(c + \frac{b}{2} \right) b} = \frac{2\left[(c+b)^3 - c^3 \right]}{3(2c+b)b}$$

b) La fuerza total en la base $A_2 = La$ del tanque.

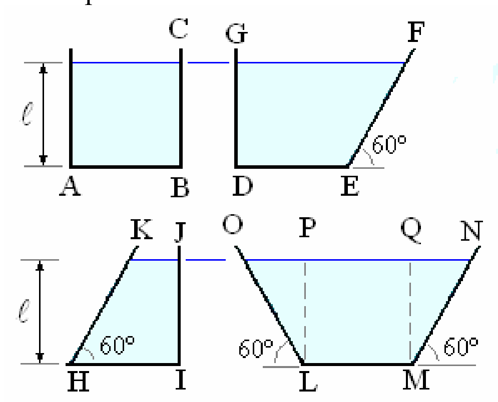
$$F_2 = \rho g h_2 A_2 = \rho g (c+b) La$$
$$= \rho g (Lac + Lab)$$

c) El peso total del agua
$P = \rho g (Lab + Sc)$
Resultado diferente al obtenido en (b)
Explicación: porque el peso es:



$P = F_2 - F_3$
Donde: $F_2 = \rho g (Lac + Lab)$ y
$F_3 = \rho g h_3 A_3 = \rho g c (La - Sc)$
Luego: $P = \rho g (Lac + Lab) - \rho g (La - Sc)$
$= \rho g (Lab + Sc)$

Ejemplo 88. Supongamos los recipientes de la forma indicada en la figura. El primer recipiente es cúbico, de 10 cm de arista; los otros tres recipientes tienen la misma base e igual altura y están llenos de agua. Calcular:
a) El peso del agua en cada recipiente.
b) La fuerza sobre el fondo de cada uno.
c) La fuerza sobre las caras BC, EF y HK.
d) La fuerza sobre la cara vertical LMNO del cuarto recipiente.



$AB = DE = HI = LM = \ell$

Solución.
a)
$V_1 = \ell^3 \quad \Rightarrow$
$P_1 = \ell^3 \rho_a g$

$$V_2 = \ell^3 \left(1 + \frac{1}{2} \text{cotan} 60^\circ \right) \quad \Rightarrow$$

$$P_2 = \ell^3 \left(1 + \frac{1}{2} \text{cotan} 60^\circ \right) \rho_a g$$

$$V_3 = \ell^3 \left(1 - \frac{1}{2} \text{cotan} 60^\circ \right) \quad \Rightarrow$$

$$P_3 = \ell^3 \left(1 - \frac{1}{2} \text{cotan} 60^\circ \right) \rho_a g$$

$V_4 = \ell^3 (1 + \text{cotan} 60^\circ) \quad \Rightarrow$
$P_4 = \ell^3 (1 + \text{cotan} 60^\circ) \rho_a g$

Sustituyendo valores:
$P_1 = 10$ N $\quad P_2 = 12{,}89$ N
$P_3 = 7{,}11$ N $\quad P_4 = 15{,}77$ N

b) La fuerza sobre el fondo de cada uno.
$F = \rho g \ell (\ell^2) = 10$ N

c) La fuerza sobre las caras BC, EF y HK.

$$F_{BC} = \frac{1}{2} \ell^3 \rho_a g = 5N$$

$F_{BF} = F_{HK} = 5{,}8N$

d) La fuerza sobre la cara vertical LMNO del cuarto recipiente.

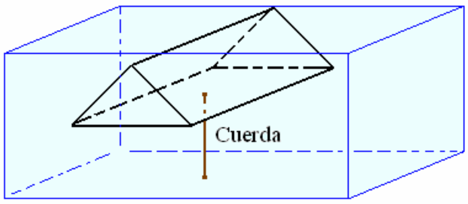
$$F = \rho_a g h_c A$$

$$h_c = \frac{2\frac{\ell}{3}\left(\frac{\ell^2}{2\sqrt{3}}\right)+\frac{\ell}{2}\left(\ell^2\right)}{\frac{\ell^2}{\sqrt{3}}+\ell^2} = 0{,}44\ell,$$

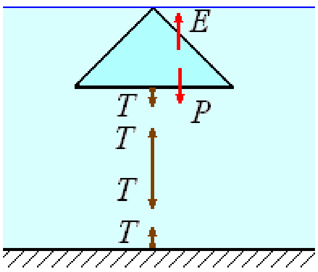
$$A = \frac{\ell^2}{\sqrt{3}} + \ell^2 = 1{,}58\ell^2$$

$$F = 1000 \times 9{,}8(0{,}44\ell)(1{,}58\ell^2) = 7N$$

Ejemplo 89. Suponga que un trozo de espuma de poliestireno (ρ_p = 180 kg/m^3) se mantiene totalmente sumergido en agua.
a) Calcule la tensión en la cuerda.
b) Calcule la fuerza que ejerce el agua sobre los dos lados inclinados y la base del trozo de poliestireno.
c) Muestre que la suma vectorial de las tres fuerzas obtenidas en la parte (b) es la fuerza de flotación.



Longitud de los lados inclinados (catetos de triángulo rectángulo) 0,20m
Largo del objeto 0,50 m
Solución.
La tensión en la cuerda.



$$\sum F_y = 0$$

$$T = P - E = (\rho_{H2O} - \rho_p)gV$$

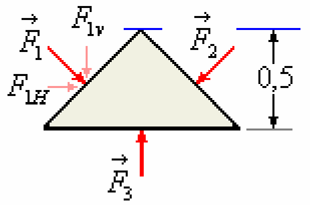
Donde
ρ_{H2O} = 1000 kg/m^3, ρ_e = 180 kg/m^3

$$V = \frac{1}{2}0{,}2^2 \times 0{,}5 = 0{,}01 \text{ m}^3$$

Luego

$$T = (1000 - 180)9{,}8 \times 0{,}01 = 80{,}36 \text{ N}$$

b)



Fuerza sobre la cara de la izquierda

$$F_{1v} = \frac{1}{2}\rho_{H2O} g\left(\frac{0{,}2}{\sqrt{2}}\right)^2 0{,}5 = 49 \text{ N}$$

$$F_{1H} = \rho_{H2O} g \frac{0{,}2}{2\sqrt{2}} \times \frac{0{,}2}{\sqrt{2}} \times 0{,}5 = 49 \text{ N}$$

$$\vec{F}_1 = 49\hat{\imath} - 49\hat{\jmath}$$

De igual manera se encuentra la fuerza sobre la cara de la derecha

$$\vec{F}_2 = -49\hat{\imath} - 49\hat{\jmath}$$

Fuerza sobre la base

$$F_3 = \rho_{H2O} g\left(\frac{0{,}2\sqrt{2}}{2}\right)\left(0{,}2\sqrt{2} \times 0{,}5\right) = 196 \text{ N}$$

$$\vec{F}_3 = 196\hat{\jmath}$$

c) Suma vectorial de las tres fuerzas

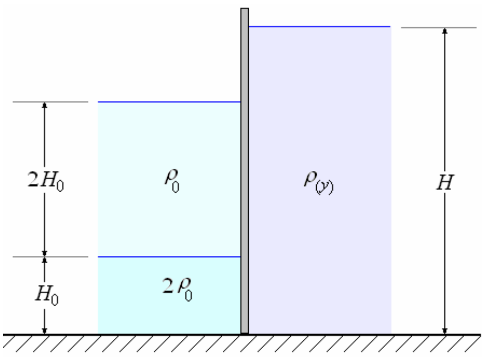
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 49\hat{\imath} - 49\hat{\jmath} - 49\hat{\imath} - 49\hat{\jmath} + 196\hat{\jmath}$$
$$= 98\hat{\jmath}$$

El empuje

$$E = \rho_{H2O} g\left(\frac{0{,}2^2}{2} \times 0{,}5\right) = 98 \text{ N}$$

El empuje es igual a la suma vectorial de las tres fuerzas obtenidas

Ejemplo 90. Se muestra una pared vertical que separa los líquidos 1 y 2 de un tercero de densidad variable. Los datos se muestran en el gráfico.
a) Calcula las fuerzas que ejercen los líquidos 1 y 2 sobre la pared.
b) Se sabe que para el líquido de densidad variable, la máxima densidad 3ρ es a la profundidad máxima y a 0,5H, la densidad es 2ρ. Sabiendo que la densidad varía linealmente, determine la función $\rho(y)$.
c) Calcula la fuerza total que ejerce el líquido de densidad variable sobre la pared vertical.
d) Determine la profundidad H que debe tener el líquido de densidad variable para que la pared vertical se mantenga en equilibrio.



Solución.

a) La fuerza que ejerce el líquido 1 sobre la pared.

$dF_1 = \rho_1 gLydy$

Integrando

$$F_1 = \int dF_1 = \int_0^{2H_0} \rho_0 gLydy$$

$$= \rho_0 gL\int_0^{2H_0} ydy = \rho_0 gL\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{2H_0}$$

$$= 2\rho_0 gLH_0^2$$

La fuerza que ejerce el líquido 1 sobre la pared.

$$dF_2 = (\rho_0 g 2H_0 + 2\rho_0 gy)Ldy$$

$$= 2\rho_0 gL(H_0 + y)dy$$

Integrando

$$F_2 = \int dF_2 = \int_{2H_0}^{3H_0} 2\rho_0 gL(H_0 + y)dy$$

$$= 2\rho_0 gL\int_{2H_0}^{3H_0}(H_0 + y)dy$$

$$= 2\rho_0 gL\left.\left(H_0 y + \frac{y^2}{2}\right)\right|_0^{2H_0}$$

$$= 6\rho_0 gLH^2$$

b) La densidad a la profundidad H es $3\rho_0$.

La densidad a la profundidad $0,5H$ es $2\rho_0$.

La densidad a la profundidad y es ρ.

Luego

$$\frac{y - H}{\rho - \rho_0} = \frac{2H - 0,5H}{3\rho_0 - 2\rho_0} \Rightarrow$$

$$\frac{y - H}{\rho - \rho_0} = \frac{1,5H}{\rho_0} \Rightarrow$$

$$y\rho_0 - H\rho_0 = 1,5H\rho - 1,5H\rho_0 \Rightarrow$$

$$y\rho_0 = 1,5H\rho - 0,5H\rho_0 \Rightarrow$$

$$y\rho_0 + 0,5H\rho_0 = 1,5H\rho \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{y\rho_0 + 0,5H\rho_0}{1,5H}$$

c) La fuerza total que ejerce el líquido de densidad variable sobre la pared vertical.

$$dF = \rho gLydy = \left(\frac{y\rho_0 + 0,5H\rho_0}{1,5H}\right)gLydy$$

$$= \frac{gL\rho_0}{1,5H}\left(y^2 + 0,5Hy\right)dy$$

Integrando

$$F = \int dF = \frac{gL\rho_0}{1,5H}\int_0^H \left(y^2 + 0,5Hy\right)dy$$

$$= \frac{gL\rho_0}{1,5H}\left(\frac{H^3}{3} + \frac{H^3}{4}\right) = \frac{7}{18}gL\rho_0 H^2$$

d) Centro de presión de F_1.

$$y_{p1} 2\rho_0 gLH_0^2 = \int_0^{2H_0} ydF_1$$

$$= \int_0^{2H_0} y\rho_0 gLydy = \rho_0 gL\int_0^{2H_0} y^2 dy$$

$$\Rightarrow y_{p1} = \frac{\int_0^{2H_0} y^2 dy}{2H_0^2} = \frac{\left.\frac{1}{3}y^3\right|_0^{2H_0}}{2H_0^2} = \frac{4}{3}H_0$$

Centro de presión de F_2.

$$y_{p2} 4\rho_0 gLH_0^2 = \int_0^{H_0} ydF_2$$

$$= \int_0^{H_0} y 2\rho_0 gL(H_0 + y)dy$$

$$= 2\rho_0 gL\int_0^{H_0}\left(H_0 y + y^2\right)dy$$

$$= 2\rho_0 gL\left(\int_0^{H_0} H_0 ydy + \int_0^{H_0} y^2 dy\right)$$

$$= 2\rho_0 gL\left(\frac{H_0^3}{2} + \frac{H_0^3}{3}\right) = \frac{5}{3}\rho_0 gLH_0^3 \Rightarrow$$

$$y_{p2} 4\rho_0 gLH_0^2 = \frac{5}{3}\rho_0 gLH_0^3 \Rightarrow$$

$$y_{p2} = \frac{\frac{5}{3}\rho_0 gLH_0^3}{4\rho_0 gLH_0^2} = \frac{5}{12}H_0$$

Centro de presión de F.

$$y_p \frac{7}{18}gL\rho_0 H^2 = \int_0^H ydF$$

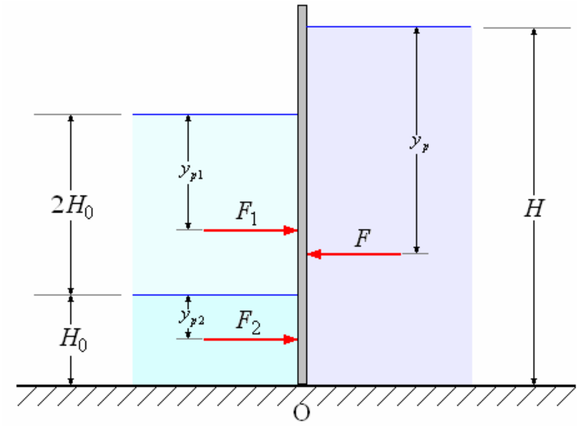
$$= \int_0^H y\frac{gL\rho_0}{1,5H}\left(y^2 + 0,5Hy\right)dy$$

$$= \frac{gL\rho_0}{1,5H}\left(\int_0^H y^3 dy + 0,5H\int_0^H y^2 dy\right)$$

$$= \frac{gL\rho_0}{1,5H}\left(\frac{H^4}{4} + \frac{0,5H^4}{3}\right) = \frac{5}{18}gL\rho_0 H^3$$

$$\Rightarrow y_p \frac{7}{18}gL\rho_0 H^2 = \frac{5}{18}gL\rho_0 H^3 \Rightarrow$$

$$y_p = \frac{\frac{5}{18}gL\rho_0 H^3}{\frac{7}{18}gL\rho_0 H^2} = \frac{5}{7}H$$



Tomando momentos respecto a O:

$$(H_0 - y_{p1})F_1 + (3H_0 - y_{p1})F_2 = (H - y\ )F \Rightarrow$$

$$\left(3H_0 - \frac{4}{3}H_0\right)2\rho g L H_0^2 + \left(H_0 - \frac{5}{12}H_0\right)6\rho g L H_0^2$$

$$= \left(H - \frac{5}{7}H\right)\frac{7}{18}\rho g L H^2 \Rightarrow$$

$$\frac{10}{3}H_0^3 + \frac{7}{2}H_0^3 = \frac{1}{9}H^3 \Rightarrow$$

$$\frac{41}{6}H_0^3 = \frac{1}{9}H^3 \Rightarrow$$

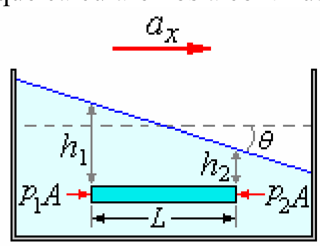
$$H = 3{,}95 H_0$$

TRASLACIÓN DE FLUIDOS.

Un fluido puede estar sujeto a traslación o rotación con aceleración constante si movimiento relativo entre partículas. Esta condición de equilibrio relativo hace que el fluido este libre de esfuerzos cortantes y se aplican las leyes de la estática de fluidos teniendo en cuenta los efectos de la aceleración.

Traslación horizontal.

Si el recipiente que contiene un líquido de densidad ρ se traslada horizontalmente con aceleración constante a_x, la superficie inicialmente horizontal se inclina con una pendiente que calcularemos a continuación.



En la figura consideremos un prisma de líquido a lo largo de una línea horizontal. La presión no varía igual que en un líquido en reposo, por lo tanto el efecto de la aceleración a_x será en la dirección x.

Para el cuerpo libre se tiene:

$$\sum F_x = ma_x$$

$p_1 A - p_2 A = \rho L A a_x$, como $p_1 = \rho g h_1$ y

$$p_2 = \rho g h_2$$

Podemos escribir:

$$\rho g h_1 A - \rho g h_2 A = \rho L A a_x$$

Simplificando

$$g(h_1 - h_2) = L a_x \Rightarrow \frac{(h_1 - h_2)}{L} = \frac{a_x}{g}$$

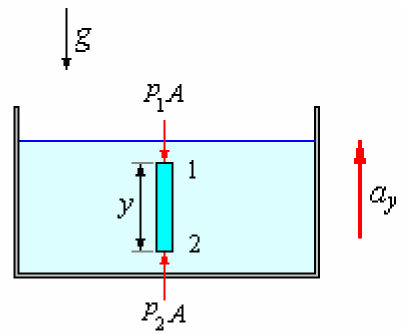
Siendo $\frac{(h_1 - h_2)}{L}$ la pendiente de la superficie libre, se tendrá finalmente:

$$\tan\theta = \frac{a_x}{g}$$

Como a_x es constante, la superficie libre es un plano inclinado.

Traslación vertical.

Si el recipiente que contiene un líquido de densidad ρ se mueve con aceleración vertical a_y, la superficie libre permanece horizontal. La presión es constante en planos horizontales, pero es diferente a cuando está en reposo, valor que calcularemos a continuación.



Para el prisma de líquido en la figura tenemos:

$$\sum F_y = ma_y$$

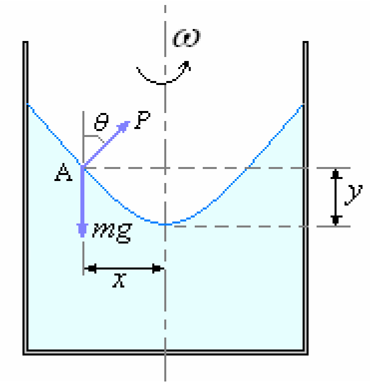
$$p_2 A - p_1 A - \rho y A g = \rho y A a_x$$

Simplificando: $p_2 - p_1 = \rho g y\left(1 + \frac{a_y}{g}\right)$

Si el punto 1 estuviera en la superficie del líquido, la presión en un punto cualquiera bajo la superficie a un a profundidad h sería:

$$p = p_a + \rho g y\left(1 + \frac{a_y}{g}\right)$$

Rotación uniforme alrededor de eje vertical.
Si un recipiente abierto parcialmente lleno con un líquido rota alrededor de un eje vertical con velocidad angular constante, no hay movimiento relativo entre las partículas, la superficie que inicialmente era horizontal toma una forma parabólica como lo demostraremos a continuación.



En la figura, consideremos una partícula de masa m en el punto A, aplicando la segunda ley de Newton se tiene:

En el eje x: $\sum F_x = ma_x$

$$\Rightarrow\ P\,\text{sen}\,\theta = m\omega^2 x \qquad (1)$$

En el eje y: $\sum F_y = 0$

$$\Rightarrow\ P\cos\theta - mg = 0 \ \text{ o } \ P\cos\theta = mg \qquad (2)$$

Dividiendo (1) entre (2):

$$\tan\theta = \frac{\omega^2 x}{g}$$

Como la pendiente de la curva en A es

$\tan\theta = \dfrac{dy}{dx}$, tenemos.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g} \ \Rightarrow\ dy = \frac{\omega^2}{g} x dx$$

Integrando: $y = \dfrac{\omega^2 x^2}{2g} + C$

Para evaluar la constante, tenemos que para $x = 0 \ \rightarrow \ y = 0$, por lo tanto $C = 0$.

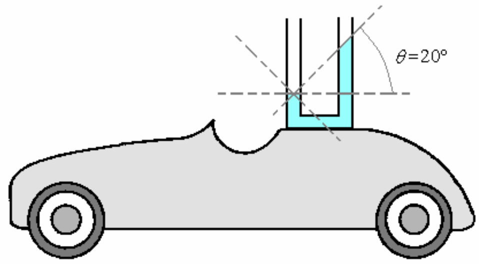
Finalmente:

$y = \dfrac{\omega^2 x^2}{2g}$, ecuación de la parábola.

La presión manométrica a una profundidad h del vértice de la parábola será:

$$p = \rho g(h + y) = \rho g\left(h + \frac{\omega^2 x^2}{2g}\right)$$

Ejemplo 91. Sobre un automóvil de carreras se instala un tubo en U lleno de agua. El conductor acelera uniformemente desde el arranque, al cabo de 5 segundos el agua contenida en el tubo tiene la posición señalada en la figura. ¿Cuáles son la aceleración y la velocidad del automóvil en ese instante? (No tome en cuenta los efectos viscosos transitorios del agua del tubo).



Solución.
Observamos en el esquema que la gravedad efectiva es normal a la línea trazada por los extremos de la columna de agua. Sus extremos están a la presión atmosférica y quedan en una línea de presión constante. Podemos calcular fácilmente la magnitud de a:

$$a = g\tan\theta = g\tan 20^\circ = 9{,}81 \times 0{,}364$$
$$= 3{,}57 \text{ m/s}^2$$

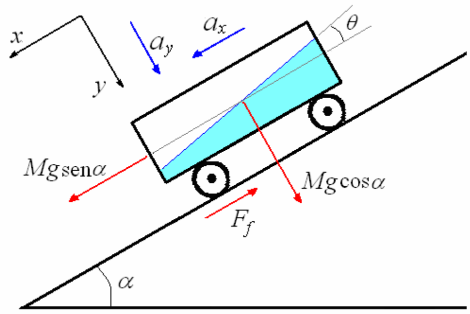
La magnitud de la velocidad del automóvil se determina de la siguiente ecuación:

$$a = \frac{dx}{dt} = 3{,}57\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Integramos y para $t = 5$ s:

$$v = 3{,}57t = (3{,}57)(5) = 17{,}85\frac{\text{m}}{\text{s}} = 64\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Ejemplo 92. Un tanque abierto, lleno de agua, rueda sobre un plano inclinado, que forma un ángulo α con la horizontal. Si el tanque tiene una masa M y la fuerza producida por la resistencia del aire y la fricción en ruedas es F_f, ¿qué ángulo formaría la superficie del agua con el fondo del tanque?



Solución.
Primeramente hallemos la aceleración a_x del tanque que desciende por el plano.

$\sum F_x = Ma_x \Rightarrow$

$Mg\text{sen}\alpha - F_f = Ma_x$

La aceleración paralela al fondo del tanque es La aceleración paralela al fondo del tanque es

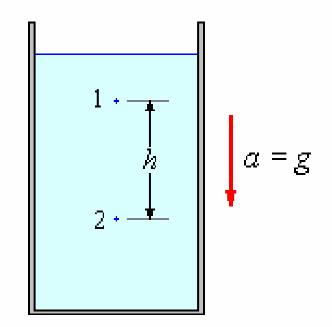
$$a_x = g\text{sen}\alpha - \frac{F_f}{M}$$

La aceleración perpendicular al fondo del tanque es $a_y = g\cos\alpha$

El ángulo θ que forma la superficie del agua con el fondo del tanque (dirección *x*) se encuentra de la siguiente manera:

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{g\cos\alpha}{g\text{sen}\alpha - F_f/M}$$

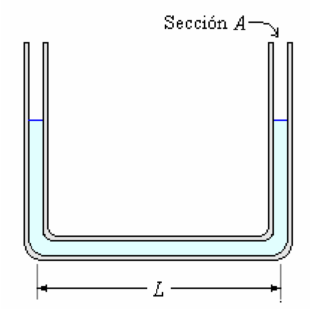
Ejemplo 93. Un tanque sufre una caída libre. Encuentre la diferencia de presión entre dos puntos separados por una distancia vertical h.



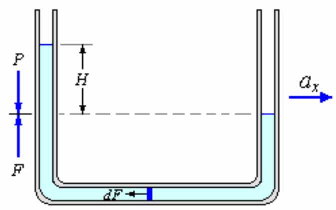
Solución.
La diferencia de presiones entre dos puntos de un fluido que se mueve verticalmente con aceleración a es $(p_2 - p_1) = \rho gh\left(1 + \frac{a}{g}\right)$

Luego $(p_2 - p_1) = 0$, consecuentemente $p_2 = p_1$

Ejemplo 94. Se tiene un tubo en U de área *A* y con un fluido de densidad ρ, como se muestra en la figura. Determinar la diferencia de altura *H* que se producir entre las alturas que alcanza el líquido en cada una de las ramas cuando,
a) Se le imprime una aceleración lineal horizontal.
b) Rote con una velocidad angular constante a alrededor de un eje vertical que coincide con una de sus ramas.



Solución.
a) Solamente la masa de líquido que está en la parte horizontal podrá desplazarse bajo la acción de la aceleración, pues, la masa de líquido que esta en las ramas verticales tiene su movimiento restringido, por ser perpendiculares.



Como todos los elementos diferenciales de masa en la parte horizontal tienen la misma aceleración, la fuerza total será:

$F = ma = \rho Va = \rho ALa$

Esta fuerza, al alcanzarse el equilibrio, debe ser igual al peso de la columna de líquido de altura *H*, que es:

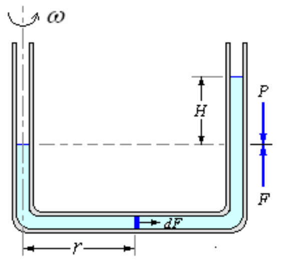
$P = pA = \rho gHA$

Luego, igualando $F = P \Rightarrow \rho ALa = \rho gHA$

De donde $H = \frac{a}{g}L$

b) En este caso se tiene la acción de la aceleración centrípeta $a_c = \omega^2 r$, al ser horizontal, como en el caso anterior, solo actúan sobre la masa de líquido que está en la parte horizontal del tubo, pero, como es variable, función del radio r, la fuerza sobre cada elemento diferencial de masa será:

$dF = (dm)a = (\rho Adr)\omega^2 r$



Integrando, tendremos la fuerza total F:

$$F = \int dF = \omega^2 A\rho\int_0^L rdr = \omega^2 A\rho\frac{L^2}{2}$$

Nuevamente, en equilibrio, la igualaremos al peso de la columna de líquido de altura H,

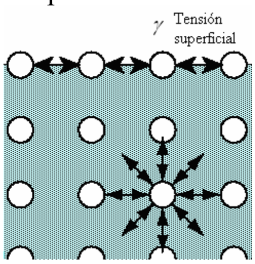
$$F = P \Rightarrow \omega^2 A\rho \frac{L^2}{2} = \rho g H A$$

Finalmente: $H = \dfrac{\omega^2 L^2}{2g}$

TENSION SUPERFICIAL - CAPILARIDAD

TENSIÓN SUPERFICIAL

Entre dos moléculas de un fluido actúan fuerzas. Estas fuerzas, llamadas fuerzas de van der Waals o fuerzas cohesivas son de origen eléctrico. Una de las características de estas fuerzas es que su alcance es muy pequeño (rápidamente se desvanecen cuando la distancia entre las moléculas es dos o tres veces su tamaño); otra característica es que mientras las moléculas no se traslapan, la fuerza es atractiva.
El efecto neto de las fuerzas de cohesión sobre una molécula que está en el interior del líquido es nulo, pero no así para una molécula que se encuentra en la superficie.

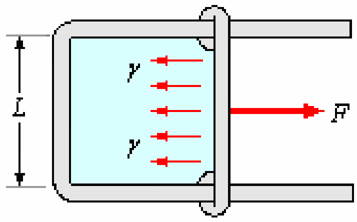


Para poner una molécula en la superficie hay que realizar un trabajo. O sea, la existencia de una superficie en un fluido introduce una energía potencial. Esta energía es proporcional a la superficie y se tiene que

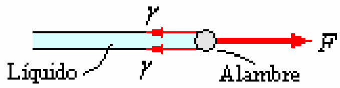
$$dW = \gamma\, dA$$

Aquí γ es una constante que depende del fluido y se llama tensión superficial y dA es un elemento (infinitesimal) de superficie. En realidad la tensión superficial depende de las dos sustancias que están en contacto.

Medición de la tensión superficial.
Para medir la tensión superficial se puede usar el dispositivo mostrado en la figura. Un alambre movible, inicialmente sumergido, se tira lentamente, extrayéndolo del líquido (con una película del líquido adosada).



Vista superior



Vista lateral
(ampliada)

La energía para desplazar la longitud d es Fd y el área de la película se incrementa en $2dL$, considerando que existen dos superficies.
La relación entre la energía necesaria para realizar el desplazamiento y el área incrementada es la tensión superficial

$$\gamma = \frac{\text{Energía}}{\text{Area formada}}$$

En el caso del dispositivo empleado:

$$\gamma = \frac{Fd}{2Ld} = \frac{F}{2L}$$

F es la fuerza paralela a la superficie de la película necesaria para mantener la película extendida. Esta fuerza por unidad de longitud es la tensión superficial γ.
Así la tensión superficial γ no sólo es igual a la fuerza por unidad de longitud; sino también es igual al trabajo hecho por unidad de incremento del área superficial. De ahí que y pueda especificarse en N/m o en J/m^2.

Ejemplo 95. Deseamos encontrar la diferencia de presión entre el interior y exterior de una pompa de jabón de radio R = 1 cm.
Solución.
Si, soplando con una pajita, aumentamos el radio de la pompa de R a $R + dR$, entonces la superficie aumenta en

$$dA = 2\left[4\pi(R + dR)^2 - 4\pi R^2\right] = 16\pi R dR$$

El factor 2 nuevamente se debe a que hay que considerar tanto la superficie interior como exterior de la pompa.
El cambio de energía debido al aumento de la superficie es por lo tanto

$$dW = \gamma\, dA = 16\gamma\pi R dR$$

Por otra parte, podemos evaluar el trabajo directamente, multiplicando el desplazamiento dR por la fuerza $\Delta p\left(4\pi R^2\right)$, es decir,

$$dW = \Delta p . 4\pi R^2 dR .$$

Igualando las dos últimas expresiones se encuentra la diferencia de presión

$$\Delta p = \frac{4\gamma}{R}.$$

Con γ = 0,025 N/m y R = 0,01 m se obtiene

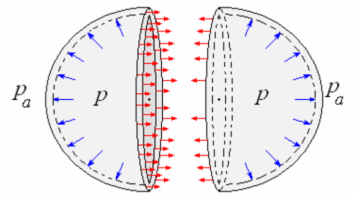
Δp = 10 N/m^2.

Si se deja de soplar por la pajita, la pompa se desinfla.

Observe que la presión al interior de una pompa de jabón es mayor tanto más pequeño es su radio. De esta observación se deduce que al juntarse una pompa de jabón grande con una pequeña, la pequeña inflará a la más grande. De esta manera la pompa grande aumentará su tamaño mientras que la pequeña disminuirá: en otras palabras, la más grande absorberá a la más pequeña.

Otra manera.

La pompa es una película delgada sostenida por la tensión superficial de dos superficies (la superficie externa y la superficie interna).



$$\Delta p = p - p_a$$

Fuerza debida a la presión dentro de la pompa.

$$F_p = (p - p_a)\pi R^2 = \Delta p \pi R^2$$

Fuerza debida a la tensión superficial de las dos caras de la pompa

$$F_\gamma = \gamma 2(2\pi R) = \gamma 4\pi R$$

Como están en equilibrio:

$$F_p = F_\gamma$$

$$\Delta p \pi R^2 = \gamma 4\pi R$$

$$\Rightarrow \Delta p = \frac{4\gamma}{R}$$

La gota y la burbuja.

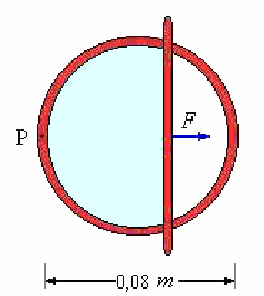
En el caso de la gota y la burbuja solamente hay una superficie que las encierra por lo tanto:

$$F_\gamma = \gamma 2\pi R$$

La diferencia de presión es:

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{R}$$

Ejemplo 96. Un alambre con forma circular, 0,08 m de diámetro, con un alambre que puede deslizar en él, está en un plano horizontal. Se forma una película líquida, limitada por los alambres, en el lado izquierdo, como se muestra en la figura. La tensión superficial del líquido es 25 mN/m. una fuerza aplicada *F*, perpendicular al alambre deslizante mantiene a la película en equilibrio.



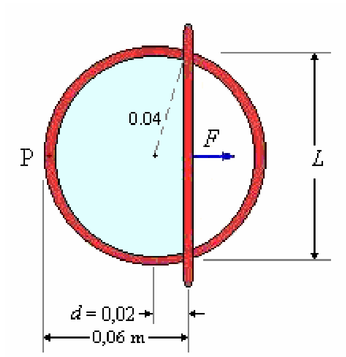
a) Cuando el alambre deslizante se encuentra a 0,06 m del punto P, la fuerza aplicada *F*, es:

b) Cuando la fuerza *F* es 1,5 mN, la distancia del alambre deslizante al centro del círculo es:

c) Cuál es el valor máximo de la fuerza *F*:

Solución

a)



$$L = 2\sqrt{0,04^2 - 0,02^2} = 0,069 \text{ m}$$

$$F = \gamma(2L) = 25\frac{\text{mN}}{\text{m}}(2 \times 0,069 \text{ m})$$

$$= 3,46 \text{ mN}$$

b)

$$F' = \gamma(2L') \Rightarrow L' = \frac{F'}{2\gamma}$$

$$L' = \frac{1,5}{2 \times 25} = 0,015 \text{ m}$$

Luego

$$d = \sqrt{0,04^2 - 0,015^2} = 0,037 \text{ m}$$

c)

$$F_{max} = \gamma(2L_{max}) = 25\frac{\text{mN}}{\text{m}}(2 \times 0,08 \text{ m})$$

$$= 4,0 \text{ mN}$$

Ejemplo 97. Cuál es el trabajo requerido para formar una pompa de jabón de radio *R*, usando una solución jabonosa de tensión superficial γ.

Solución.

Como $\gamma = \dfrac{\text{Energía}}{\text{Area formada}} = \dfrac{\Delta W}{\Delta A}$

Siendo $\Delta A = 2\left(4\pi R^2\right) = 8\pi R^2$

Obtenemos:

$\Delta W = \gamma\, 8\pi R^2$

Ejemplo 98. Dos pompas de jabón, de radios *a* y *b*, se unen y forman una burbuja de radio *c*. La presión atmosférica p_a. En términos de estos parámetros, ¿cuál es la tensión superficial de la película jabonosa?

Solución.

La pompas *a* y *b*.

Radio a

Radio b

Superficie de las pompas

$A_a = 8\pi a^2$, $A_b = 8\pi b^2$

Volumen de las pompas

$V_a = \dfrac{4}{3}\pi a^3$, $V_b = \dfrac{4}{3}\pi b^3$

Cuando se juntan forman una pompa de radio *c*.

Pompas uniéndose

Radio c

Superficie de la pompa

$A_c = 8\pi c^2$

Volumen de la pompa

$V_c = \dfrac{4}{3}\pi c^3$

Cambio de superficie durante la unión

$\Delta A = A_a + A_b - A_c = 8\pi\left(a^2 + b^2 - c^2\right)$

Cambio de volumen durante la unión

Trabajo realizado durante la unión

El trabajo es un proceso de cambio de volumen a presión constante $\left(p_a\right)$.

$$\Delta W = \int_{V_a+V_b}^{V_c} p_a dV =$$

$$p_a\left(V\right)\Big|_{V_a+V_b}^{V_c} = p_a\left[V_c - \left(V_a + V_b\right)\right]$$

$$= p_a \frac{4}{3}\pi\left(c^3 - a^3 - b^3\right)$$

Como la relación entre la energía necesaria para realizar el desplazamiento y el área incrementada es la tensión superficial

$$\gamma = \frac{\text{Energía}}{\text{Area formada}} = \frac{\Delta W}{\Delta A} =$$

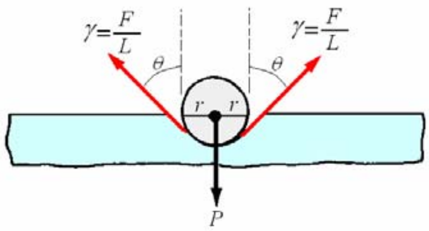
$$\frac{p_a \frac{4}{3}\pi\left(c^3 - a^3 - b^3\right)}{8\pi\left(a^2 + b^2 - c^2\right)} = \frac{p_a\left(c^3 - a^3 - b^3\right)}{6\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}$$

La tensión superficial de la película jabonosa es

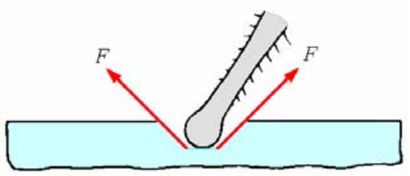
$$\frac{p_a\left(c^3 - a^3 - b^3\right)}{6\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}$$

Insectos que caminan sobre el agua.

Debido a la tensión superficial, los insectos pueden caminar sobre el agua y cuerpos más densos que ésta, como una aguja de acero, pueden flotar realmente sobre la superficie. La figura muestra cómo puede soportar el peso *P* de un objeto la tensión superficial. En realidad, *P* es el "peso efectivo" del objeto (su peso verdadero menos la fuerza de empuje) puesto que el objeto se sumerge ligeramente en el fluido.

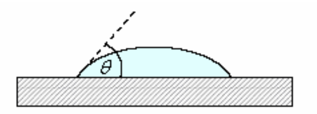


Si el objeto tiene forma esférica, que es aproximadamente la forma que tienen las patas de los insectos, la tensión superficial actúa en todos los puntos a lo largo de un círculo de radio r. Sólo la componente vertical, $\gamma\cos\theta$, actúa para equilibrar *P*. En consecuencia la fuerza neta ascendente debida a la tensión superficial es $2\pi r\gamma\cos\theta$.

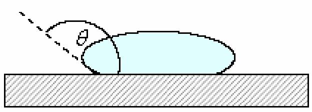


Tensión superficial actuando sobre la pata de un insecto.

ADHESIÓN Y COHESIÓN.
En las superficies de un líquido algunas de sus moléculas dejan el líquido por evaporación, pero no todas. Existe una fuerza de atracción entre las moléculas de un líquido, por ejemplo una gota de mercurio tiene la tendencia a asumir la forma esférica, esto es, una superficie de área mínima, consistente con la fuerza atractiva entre moléculas, esta propiedad es conocida como **cohesión.**
La atracción que existe entre las moléculas de dos sustancias diferentes, como la atracción que hay entre el líquido y las paredes del recipiente que lo contiene, es la propiedad conocida como **adhesión.**
Consideremos una pequeña cantidad de líquido en contacto con una superficie sólida plana y ambos en contacto con un gas.
Si la fuerza de adhesión (entre el líquido y el sólido) es mucho mayor que la fuerza de cohesión (entre las moléculas del líquido), entonces el líquido tenderá a esparcirse sobre el sólido. En este caso se dice que el líquido moja al sólido,

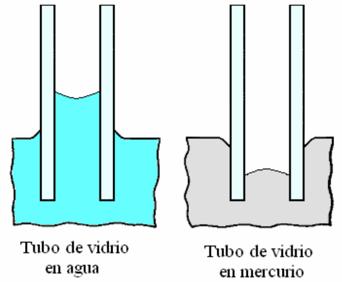


Si la fuerza de cohesión es mayor entonces el líquido tenderá a concentrarse, adquiriendo una forma compacta tipo gota

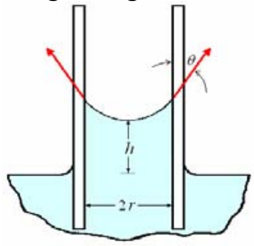


Como resultado de esta competencia entre las distintas fuerzas de adhesión y cohesión, se forma un ángulo de contacto θ bien característico entre el líquido y el sólido. Experimentalmente se determina que este ángulo de contacto para las substancias, en el caso $\theta < 90^\circ$ el fluido es humectante, o sea moja al sólido y cuando $\theta > 90^\circ$ el fluido es no humectante.

CAPILARIDAD
En tubos que tienen diámetros muy pequeños se observa que los líquidos se elevan o se hunden en relación con el nivel del líquido de los alrededores. Este fenómeno se conoce por capilaridad y dichos tubos delgados se llaman capilares. El que un líquido suba o baje depende de los esfuerzos relativos de las fuerzas adhesivas y cohesivas. Así, el agua sube en un tubo de vidrio en tanto que mercurio baja.



La cantidad real que sube (o que baja) depende de la tensión superficial (puesto que es ésta la que mantiene unida a la superficie del líquido), así como del ángulo de contacto θ, y el radio r del tubo. Para calcular h, la altura que nos referiremos a la figura siguiente.



La tensión superficial γ actúa en un ángulo θ alrededor de un círculo de radio r. La magnitud de la fuerza vertical F debida a la tensión superficial es $F = (\gamma\cos\theta)(2\pi r)$. Esta fuerza está equilibrada por el peso del líquido de abajo que es aproximadamente un cilindro de altura h y volumen $V = \pi r^2 h$. En consecuencia,

$$2\pi r\gamma\cos\theta = mg$$

Como $mg = \rho V g = \rho\pi r^2 hg$, donde ρ es la densidad del líquido, tenemos:

$$2\pi r\gamma\cos\theta = \rho\pi r^2 hg$$

Resolviendo para h encontramos

$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r}$$

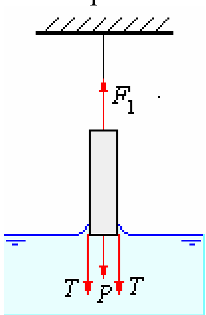
Para mayor parte de los líquidos como el agua en un vaso, θ, es casi cero y

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g r}$$

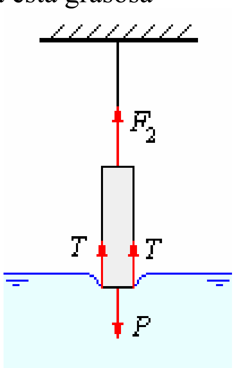
Esta ecuación también se cumple cuando desciende el líquido, como en el caso del mercurio en un tubo de vidrio. En esta situación,

el ángulo de contacto mayor que 90° y $\cos\theta$ será negativo; esto hace h negativa lo que corresponde a un descenso de nivel.
Note que mientras más delgado sea el tubo mayor será el ascenso (o descenso) del líquido.

Ejemplo 99. Un cuadrado cuyas aristas miden 6 cm hecho de una placa delgada de metal se suspende verticalmente de una balanza tal que el borde inferior de la hoja se moja en agua de tal forma que es paralela a la superficie. Si la hoja está limpia, el ángulo de contacto es 0º, y la hoja parece pesar 0,047 N. Si la hoja esta grasosa, el ángulo de contacto es 180º y el peso parece ser 0,030 N. ¿Cuál es la tensión superficial del agua?
Solución.
Cuando la hoja está limpia

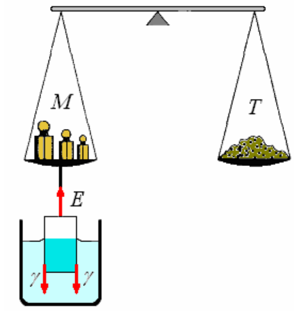


La fuerza de tensión superficial en cada cara de la placa es:
$T = \gamma L$
No tomaremos en cuenta las partes del espesor, por ser placa delgada.
Como hay equilibrio vertical
$F_1 = P + 2T$, (1)
Cuando la hoja está grasosa

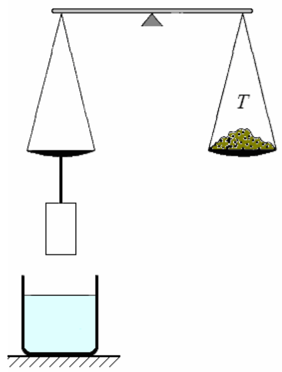


$F_2 = P - 2T$ (2)
Restando (2) de (1):
$$T = \frac{F_1 - F_2}{4} \Rightarrow \gamma L = \frac{F_1 - F_2}{4}$$
$$\Rightarrow \gamma = \frac{F_1 - F_2}{4L}$$
Reemplazando valores:
$$\gamma = \frac{0{,}047 - 0{,}030}{4(0{,}06)} = \frac{0{,}017}{0{,}24}$$
$= 0{,}071$ N/m

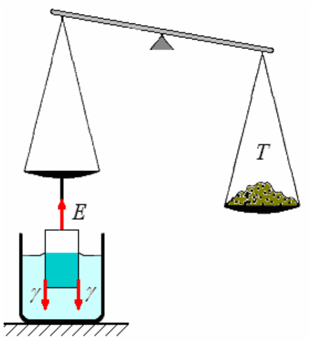
Ejemplo 100. Del platillo de una balanza se cuelga un cuerpo cilíndrico de vidrio cerrado por su base inferior, de 1 cm de radio y 4 cm de altura, y se pone tara en el otro platillo hasta conseguir el equilibrio. Se sumerge el cuerpo en agua destilada a 4º C hasta la mitad de su altura exactamente. Para restablecer el equilibrio hace falta poner en el platillo del cuerpo pesas por valor de 5,8 g. Calcular el coeficiente de tensión superficial del agua. El ángulo de contacto se supone de cero grados, es decir, que el menisco es tangente a la superficie lateral del cilindro.



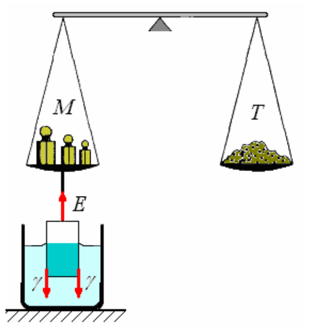
Solución.
La tara T equilibra al sistema



Cuando el cuerpo cilíndrico de vidrio cerrado se sumerge en agua aparecen las fuerzas de empuje y la de tensión superficial
La tensión superficial actúa a lo largo del contacto del líquido con el cilindro. La fuerza hacia abajo debida a ella es:
$F = 2\pi R\gamma$
El empuje vale: $E = V_s \rho_a g = \pi R^2 \dfrac{h}{2} \rho_a g$



Para volver al equilibrio (balanza horizontal) se colocan las pesas en el platillo izquierdo de la balanza (peso *Mg*), esto anula la acción del empuje *E* y a la fuerza de la tensión superficial *F*.



Por lo tanto

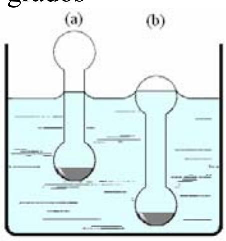
$$E = F + Mg \Rightarrow \pi R^2 \frac{h}{2} \rho_a g = 2\pi R\gamma + Mg$$

$$\gamma = \frac{\pi R^2 hg - 2Mg}{4\pi R}$$

$$= \frac{\pi\left(10^{-2}\right)^2\left(4\times10^{-2}\right)\left(10^3\right)(9{,}8) - 2\left(5{,}8\times10^{-3}\right)(9{,}8)}{4\pi\left(10^{-2}\right)}$$

$= 75{,}36 \times 10^{-3}$ N/m

Ejemplo 101. Tenemos unas ampollitas de vidrio de paredes muy estrechas en la forma indicada en la figura. La ampollita va lastrada en su parte inferior con mercurio para que se mantenga en la posición de la figura (a) al dejarla sobre el nivel de un recipiente con agua. Sumergimos el sistema hasta la posición de la figura (b). Debería recobrar la posición a, pero se queda en la b. ¿Por qué? El ángulo de contacto se supone de cero grados



Solución.
Llamamos *r* y *R* los radios de la parte cilíndrica y de la esferita, respectivamente: $R > r$.

En la posición (a) el valor de la tensión superficial es: $F = 2\pi r\gamma$

Y al estar en equilibrio, el empuje ha de ser igual al peso más la fuerza correspondiente a la tensión superficial:

$E = P + 2\pi r\gamma$

Al sumergir la ampollita la fuerza debida a la tensión superficial es: $F' = 2\pi R\gamma$

Y se habrá de verificar:

$E' = P + 2\pi R\gamma$.

Y como el peso es el mismo, nos queda:

$E - 2\pi r\gamma = E' - 2\pi R\gamma \Rightarrow$

$V\rho g - 2\pi r\gamma = V'\rho g - 2\pi R\gamma$

$$\Rightarrow \frac{V' - V}{R - r} = \frac{2\pi\gamma}{\rho g}$$

Condición que se debe cumplir para que exista el segundo equilibrio.

Ejemplo 102. Los cilindros huecos y cerrados de la figura son de vidrio y están unidos por la varilla OO'; el inferior se ha lastrado con el mercurio necesario para que el sistema flote en un líquido, con el cilindro inferior sumergido. Sumergimos el sistema hasta que quede también flotando en la forma de la figura (b), sin recobrar la primitiva posición (a).

Demostrar que se debe cumplir:

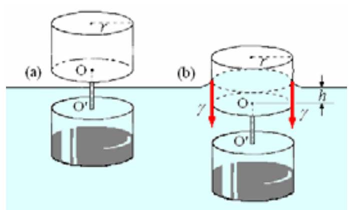
$rh = 2\gamma / \rho g$,

γ es la tensión superficial y

ρ es la densidad del líquido respectivamente.

Se supone la varilla OO' infinitamente delgada, que el líquido moja al vidrio y que el ángulo de contacto es nulo.

Solución.



En el primer equilibrio: $Mg = V\rho g$.

V = volumen del cilindro inferior.

En el segundo equilibrio:

$Mg + 2\pi r\gamma = V\rho g + \pi r^2 h\rho g$

Luego teniendo en cuenta la primera, nos queda:

$$2\pi r\gamma = \pi r^2 h\rho g \Rightarrow rh = \frac{2\gamma}{\rho g}$$

Ejemplo 103. Ocho gotas de mercurio de radio *r* se unen para formar una sola. ¿Qué relación existe entre las energías superficiales antes y después de la unión?

Solución.

El volumen de la gota formada, que tendrá por radio *R*, será ocho veces mayor que el volumen de una de las gotas pequeñas:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 8\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow R^3 = 8r^3 \Rightarrow \frac{R}{r} = 2$$

La energía superficial de las ocho gotas será ocho veces la energía de una sola:

$$W = 8\gamma 4\pi r^2 = 32\gamma\pi r^2$$

Y de la gota resultante: $W' = \gamma 4\pi R^2 = 4\gamma\pi R^2$

Dividiendo: $\frac{W}{W'} = 8\frac{r^2}{R^2} = 8\frac{1}{4} = 2$

La disminución que experimenta la superficie del mercurio (o de otro líquido cualquiera) al juntarse las gotas pequeñas para formar una grande, libera una determinada energía que se emplea en calentar la gota. Por el contrario cuando una gota grande se divide en otras más pequeñas, se produce un aumento de energía en la película superficial y, como consecuencia un determinado enfriamiento de las gotas.

Ejemplo 104. El aceite de olivo tiene una tensión superficial respecto del aire de 32 mN/m. Una gota esférica tiene un diámetro de 4 mm. Calcular:
a) La presión a que está sometida.
b) La fuerza total a la que está sometida, debida a la tensión superficial que actúa sobre su superficie.
c) La energía potencial de superficie.

Solución.

a) $p = \frac{2\gamma}{r} = \frac{2(32\times 10^{-3})}{2\times 10^{-3}}$
= 32 Pa

b) $F = pA = p4\pi R^2 = 32\times 4\pi(2\times 10^{-3})^2$
= 1,608 mN

c) $W = \gamma A = \gamma 4\pi R^2 = (32\times 10^{-3})4\pi(2\times 10^{-3})^2$
= 1,608 μJ

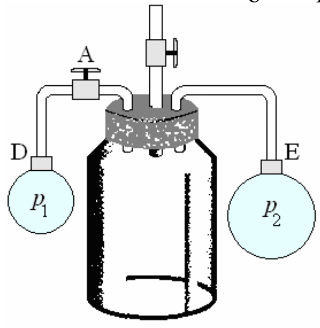
Ejemplo 105. Calcular la energía superficial de una pompa de agua jabonosa de 1 cm de radio y la presión debida a su curvatura. Consideramos el espesor de la película líquida como despreciable. Tensión superficial = 35 x 10^{-5} N/cm.

Solución.

$W = 2\gamma A = 2\gamma 4\pi R^2 = 2(35\times 10^{-3})4\pi(10^{-2})^2$
= 87,96 μJ

$p = 2\frac{2\gamma}{r} = \frac{4(35\times 10^{-3})4\pi(10^{-2})^2}{10^{-2}}$
= 14 Pa

Ejemplo 106. En un dispositivo como el de la figura se han conseguido dos pompas de agua jabonosa en los extremos D y E de los tubos. La llave A incomunica el aire interior de las dos pompas. Abierta tal llave, la pequeña se achica y la grande aumenta de volumen. ¿Por qué?



Solución.
Las presiones del gas interior de las pompas pequeña y grande, respectivamente, exceden a la atmosférica en: $p_1 = 2\frac{2\gamma}{r}$ $p_2 = 2\frac{2\gamma}{R}$.
Al ser $r < R$, se ha de verificar que $p_1 > p_2$, y el aire pasa de la pompa pequeña a la grande

Ejemplo 107. Sabiendo que la tensión superficial del agua es 75 x 10^{-3} N/m. Calcular la altura a que asciende el agua en un tubo de 1 mm de diámetro y en unas láminas cuadradas paralelas cuya distancia es 0,05 mm. Se supone el ángulo de contacto igual a cero.

Solución.
Como el líquido no moja: $\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$, luego:

$h_1 = \frac{2\gamma}{r\rho g} = \frac{2(75\times 10^{-3})}{(5\times 10^{-4})(10^3)(9,8)}$
= 0,031 m

La altura alcanzada entre dos láminas paralelas es:

$h_2 = \frac{2\gamma\cos\theta}{d\rho g} = \frac{2(75\times 10^{-3})}{(5\times 10^{-5})(10^3)(9,8)}$
= 0,31 m

Ejemplo 108. El tubo de un barómetro de mercurio (tensión superficial, 547 x 10^{-3} N/m; ángulo de contacto, 125°) tiene 3 mm de diámetro. ¿Qué error introduce en las medidas la tensión superficial?

Solución.

$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{r\rho g} = \frac{2(547\times 10^{-3})\cos 125^{\circ}}{(1,5\times 10^{-3})(13600)(9,8)}$
= -0,003 m

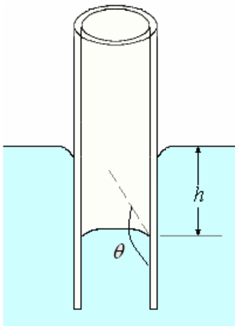
El signo menos nos indica que la medida es inferior a la correcta.

Ejemplo 109. Sabiendo que la tensión superficial del mercurio es 547 dina/cm y que el ángulo de contacto con un tubo de 1 mm de diámetro y con unas láminas paralelas separadas 0,05 mm es de 125°, calcular la altura que desciende el mercurio al introducir tubo y láminas en una cubeta con dicho líquido.

Solución.

Hacemos este problema en el sistema cgs.

a) En el tubo



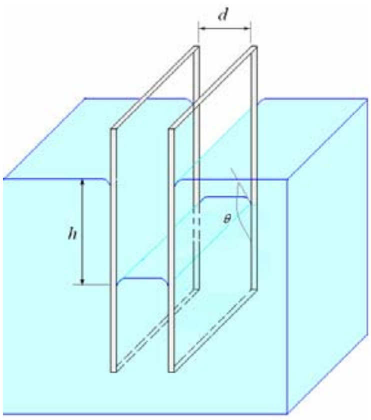
Fuerza de la tensión superficial = Peso del líquido bajado

$$2\pi r\gamma\cos\theta = \rho\pi r^2 hg$$

$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{r\rho g}$$

$$= \frac{2(547)\cos 125^{\circ}}{(0{,}05)(13{,}6)(980)} = \text{-1 cm}$$

b) En las láminas



Fuerza de la tensión superficial = Peso del líquido bajado

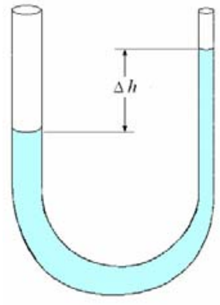
$$2L\gamma\cos\theta = \rho g d L h$$

$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{d\rho g}$$

$$= \frac{2(547)\cos 125^{\circ}}{(0{,}005)(13{,}6)(980)} = \text{- 10 cm}$$

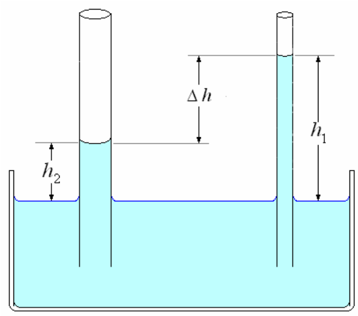
El signo menos indica el descenso.

Ejemplo 110. En un tubo en U cuyas ramas son de 0,6 mm y 0,6 cm de diámetro se introduce un líquido de densidad 1,8 g/cm^3 y de 32 dina/cm de tensión superficial. ¿Cuál será la diferencia de nivel del líquido en las dos ramas del tubo, si éste se encuentra en posición vertical y el ángulo de contacto es 32°?



Solución.

La situación es semejante a la mostrada en la figura siguiente



$$h_1 = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r_1}, \quad h_2 = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r_2}$$

Luego

$$\Delta h = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

$$= \frac{2(32)\cos 32^{\circ}}{(1{,}8)(980)}\left[\frac{1}{0{,}03} - \frac{1}{0{,}3}\right] = 1 \text{ cm}$$

Ejemplo 111. En un experimento para calcular el ángulo de contacto entre un líquido y el vidrio se han obtenido los siguientes datos: densidad del líquido, 0,8 g/cm^3; radio del capilar, 0,5 mm; elevación en el tubo capilar, 1,2 cm; tensión superficial del líquido 28 dina/cm. Calcular dicho ángulo.

Solución.

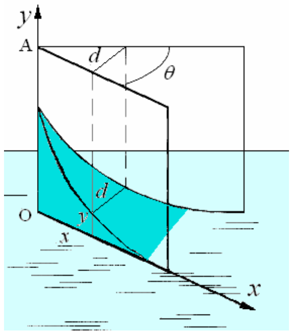
$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{r\rho g}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{r\rho g h}{2\gamma} = \frac{(0{,}05)(0{,}8)(9{,}8)(1{,}2)}{2(28)}$$

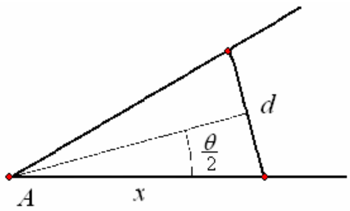
$$= 0{,}84$$

$$\Rightarrow \theta = 32^{\circ}\, 51'\, 36''$$

Ejemplo 112. Demostrar que la línea de contacto de un líquido con dos láminas de vidrio verticales que forman entre sí un ángulo diedro muy pequeño es una hipérbola equilátera.



Solución.



Tomaremos los ejes sobre una de las láminas:

$$y = \frac{2\gamma \cos\theta}{d\rho g} \quad d = 2x\text{sen}\frac{\theta}{2}$$

Luego

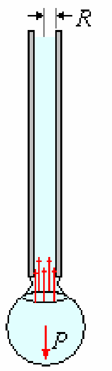
$$y = \frac{\gamma \cos\theta}{x\rho g \text{sen}\frac{\theta}{2}} \Rightarrow$$

$$xy = \frac{\gamma \cos\theta}{g\rho \text{sen}\frac{\theta}{2}} = \text{constante}$$

Ley de Tate de la formación de gotas mediante un cuentagotas.

Consideremos un gotero con agujero de salida de radio R,

El liquido ira saliendo formando la gota, la que se mantendrá unida al cuentagotas mientras la tensión superficial la mantenga. Cuando el peso de la gota iguale a la tensión superficial, esta caerá como gota suelta.



Sea γ la tensión superficial del líquido, consideremos el ángulo de contacto cero.

$$\sum F_V = 0$$

$$P - 2\pi R\gamma = 0 \Rightarrow P = Mg = 2\pi\gamma R$$

Ejemplo 113. El estalagmómetro, aparato destinado a la medida de tensiones superficiales, es una pipeta de la que se vierte gota a gota, en una primera experiencia, el líquido problema, contándose el número de gotas n correspondientes a un determinado volumen: se repite el recuento para el mismo volumen de agua, obteniéndose n' gotas. Determina la tensión superficial del líquido (γ) conocida la del agua (γ') y las densidades $(\rho \ y \ \rho')$ de ambos líquidos.

Solución.

Las masas de una gota de líquido y de agua son:

$$M = \frac{V\rho}{n} \quad M' = \frac{V\rho'}{n'}$$

Por división, y teniendo en cuenta la ley de Tate (ley del cuentagotas):

$$\frac{M}{M'} = \frac{\rho}{\rho'}\frac{n'}{n} = \frac{\gamma}{\gamma'} \Rightarrow \gamma = \gamma'\frac{\rho}{\rho'}\frac{n'}{n}$$

Ejemplo 114. En el platillo izquierdo de una balanza se coloca una tara; en el derecho un vasito y pesas de masa M_1 hasta equilibrarla. Se quitan las pesas y se vierte en el vaso con un cuentagotas, n gotas de un líquido; se vuelve a equilibrar la balanza (la misma tara) con pesas de masa M_2. Se quitan éstas y se vierten en el vasito, sobre el líquido, n gotas de agua. Se consigue de nuevo el equilibrio con pesas de masa M_3. Conocida la constante de tensión superficial del agua γ' determinar la del líquido (γ).

Solución.

Masa de n gotas de líquido:

$$nM = M_1 - M_2$$

Masa de n gotas de agua:

$$nM' = M_2 - M_3$$

Por división obtenemos:

$$\frac{M}{M'} = \frac{M_1 - M_2}{M_2 - M_3}$$

Aplicando la fórmula de Tate al líquido y al agua, nos da:

$$\left.\begin{array}{l} P = Mg = 2\pi r\gamma \\ P' = M'g = 2\pi r\gamma' \end{array}\right\} \quad \frac{M}{M'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$$

Igualando:

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{M_1 - M_2}{M_2 - M_3}$$

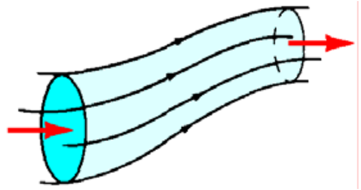
$$\Rightarrow \gamma = \gamma' \frac{M_1 - M_2}{M_2 - M_3}$$

DINÁMICA DE FLUIDOS - MOVIMIENTO DE UN FLUIDO

El flujo describe el cambio en la posición de las partículas del fluido en el tiempo.
La descripción op1eta del movimiento de un fluido es compleja por lo tanto, en el tratamiento que utilizaremos será necesario suponer algunas simplificaciones.
En particular, no analizaremos el comportamiento de cada una de las partículas con los conceptos de la mecánica, sino más bien describiremos las características del movimiento en cada punto del espacio conforme transcurre el tiempo.

LÍNEA DE FLUJO. Es una línea imaginaria continua que denota en cada uno de sus puntos la dirección del vector velocidad del fluido. Las líneas de flujo de un sistema estable nunca se cruzan una a otra (pues una partícula podría seguir dos direcciones) y representan
Un patrón instantáneo de flujo el cual en otro instante puede ser completamente diferente.

Si seleccionamos un número finito de líneas de corriente como se muestra en la figura, esta región tubular se denomina **tubo de flujo**, las fronteras de este son líneas de corriente y por lo tanto ninguna partícula puede cruzar este tubo, comportándose como una verdadera tubería.



CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL FLUJO DE FLUIDOS:

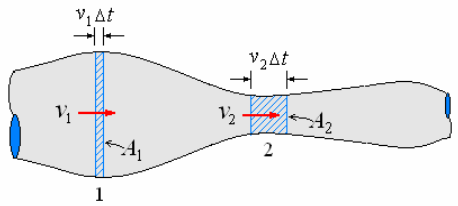
El flujo puede clasificarse como estacionario (o estable) y no estacionario uniforme y no uniforme, laminar (o irrotacional) o turbulento (o rotacional), compresible e incompresible y viscoso y no viscoso.
Un flujo es **estacionario** cuando los parámetros del flujo (velocidad, densidad., presión) son independientes del tiempo y la temperatura o sea que no cambian en el punto (puede ser diferente de punto a punto del espacio). Cuando ocurre lo contrario el flujo es **no estacionario.**
Un flujo en un campo es **uniforme** cuando el vector velocidades constante e igual n todos los puntos de aquel campo y es **no uniforme** cuando el vector velocidad está variando.
Un flujo es **turbulento** cuando las partículas del fluido tienen un movimiento irregular, caótico causando pérdidas de energía proporcionales al cuadrado de la velocidad, lo contrario ocurre cuando el movimiento es suave, ordenado, sus pérdidas son proporcionales a la velocidad y se conoce como flujo **laminar.** (En cada punto no hay velocidad angular respecto a ese punto).
Experimentalmente se ha encontrado que hay una combinación de cuatro factores que determinan si el f1ujo por un tubo es laminar.
Esta combinación es conocida domo el **Número de Reynolds**, N_{Re} y se define como

$$N_{\text{Re}} = \frac{\rho \bar{v} D}{\eta}$$

Donde:
ρ = densidad
$\bar{v}$ = velocidad promedio
η = viscosidad
D = diámetro de la tubería
El número de Reynolds no tiene dimensiones, por lo tanto, es independiente del sistema de unidades utilizado.
Se observa que hasta el va1or de 2000 el flujo es laminar y para valores mayores de 3000 el flujo es turbulento.

ECUACIÓN DE LA CONTINUIDAD.

De la conservación de la masa del líquido en un tubo del flujo, resulta inmediatamente la ecuación de la continuidad.



Consideremos un tubo de flujo constante de un líquido no viscoso; tal como el mostrado en la figura. Sean 1 y 2 dos sectores cuyas secciones tienen áreas normales al flujo A_1 y A_2, con velocidades v_1 y v_2 respectivamente.
Considere las porciones sombreadas de los líquidos en 1 y 2. Luego, en un intervalo de tiempo Δt la masa de líquido Δm_1 pasa por la

sección 1 y la masa Δm_2 que pasa por la sección 2 deben ser iguales, porque las mismas partículas son las que se mueven en el tubo de flujo, sin haber ingresado o salido partículas. Tal que $\Delta m_1 = \Delta m_2$.

Pero $\Delta m_1 = \rho_1 \Delta V_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$ y

$\Delta m_2 = \rho_2 \Delta V_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$

Donde ΔV_1 y ΔV_2 son los volúmenes del líquido en las secciones 1 y 2 respectivamente y ρ_1 y ρ_2 son las densidades del líquido en 1 y 2.

De tal manera que: $\rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t \Rightarrow$

$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$

Si consideramos el fluido incompresible o poco incompresible como los líquidos.

$\rho_1 = \rho_2$, y $\rho_1 A_1 = \rho_2 A_2 \Rightarrow Av = \text{Constante}$

Ahora $Av = \text{Constante}$

$$Av = \text{área} \times \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{\text{Volumen}}{\text{tiempo}} = \text{Gasto}$$

(G)

A esta razón de flujo de volumen $G = Av$ = constante, se le conoce con el nombre de GASTO o CAUDAL y sus unidades son m^3/s.

Ejemplo 115. El agua fluye en una manguera de jardín de diámetro interior 2 centímetros a una velocidad de 1,2 m/s. ¿Con qué velocidad emergerá de un eyector del diámetro 0,5 centímetros?

Solución.

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{\pi(0{,}01)^2}{\pi(0{,}025)^2}(1{,}2)$$

$$= 4{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 116. Calcule la velocidad media de la sangre en la aorta (radio 1 centímetro) cuando el caudal es 5 litros/min.

Solución.

$$Caudal = \frac{5\,\text{litros}}{\text{min}} = \frac{5000\,\text{cm}^3}{60\,\text{s}} = 83{,}33 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$$

$$Caudal = Av \Rightarrow$$

$$v = \frac{Caudal}{A} = \frac{83{,}33}{\pi(1)^2}$$

$= 26{,}54$ cm/s

Ejemplo 117. Una manguera de 2 cm. de diámetro por la que fluye agua a una velocidad de 3m/s. termina en un tubo cerrado que tiene 50 orificios pequeños de 0,2cm de diámetro. ¿Cuál es la velocidad de salida del agua en cada agujero?

Solución.

Por la ecuación de la continuidad

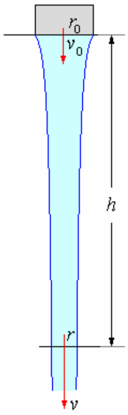
$$A_1 v_1 = 50 A_2 v_2 \Rightarrow$$

$$\pi(1)^2(3) = 50\pi(0{,}2)^2 v_2 \Rightarrow$$

$$v_2 = \frac{3}{50(0{,}01)} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 118. Cuando se abre poco a poco un caño de agua, se forma un pequeño chorro, un hilo cuyo radio va disminuyendo con la distancia al caño y que al final, se rompe formando gotas. ¿Cuál es la velocidad del agua cuando a recorrido una distancia *h*.?

Solución. La ecuación de continuidad nos proporciona la forma de la superficie del chorrito de agua que cae del grifo, tal como apreciamos en la figura.



La sección trasversal del chorro de agua cuando sale del caño es A_0, y la velocidad del agua es v_0. Debido a la acción de la gravedad la velocidad v del agua se incrementa. A una distancia h del grifo la velocidad es

$$v^2 = v_0^2 + 2gh$$

Aplicando la ecuación de continuidad

$$A_0 v_0 = Av \Rightarrow$$

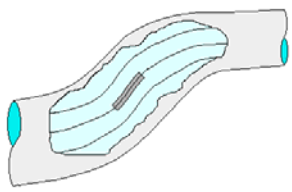
$$\pi r_0^2 v_0 = \pi r^2 v$$

Despejamos el radio r del hilo de agua en función de la distancia h al caño.

$$r = r_0 \sqrt[4]{\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gh}}$$

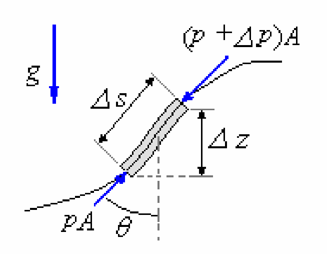
ECUACIÓN DE BERNOULLI.

Al aplicar las leyes de Newton a los fluidos en movimiento se obtiene la ecuación de Bernoulli.



Tomemos una partícula de fluido de forma prismática (sección A largo Δs) que se mueve a lo largo de una línea de flujo en la dirección s.

La partícula prismática se muestra en detalle en la siguiente figura.



Considerando un fluido no viscoso, o sea, que no hay pérdidas de energía, aplicamos la segunda ley de Newton

$$\sum F_s = ma_s$$

Las fuerzas que actúan son el peso y las fuerzas debido a las presiones p y $p+dp$, la masa de la partícula es $\Delta m = \rho A \Delta s$

Luego:

$$pA - (p+\Delta p)A - \rho g A \Delta s \cos\theta = \rho A \Delta s\, a_s$$

Simplificando y dividiendo entre Δs:

$$\frac{\Delta p}{\Delta s} + \rho g \cos\theta + \rho a_s = 0$$

En el límite $\Delta s \to 0$

$$\frac{dp}{ds} + \rho g \cos\theta + \rho a_s = 0 \qquad (1)$$

Como

$$\cos\theta = \frac{dz}{ds} \text{ y } a_s = \frac{dv}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} = v\frac{dv}{ds}$$

Por consiguiente la ecuación (1) puede escribirse:

$$\frac{dp}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} + \rho v \frac{dv}{ds} = 0$$

$$\Rightarrow dp + \rho g dz + \rho v dv = 0$$

Si ρ constante, integrando obtenemos:

$$p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante}$$

Expresión que es la ecuación de Bernoulli. La misma que puede ser obtenida por la conservación de la energía, siendo por supuesto, equivalente.

Como la ecuación de Bernoulli es válida para cualquier sección, entre dos puntos cualesquiera, se podrá escribir:

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Adicionalmente podemos decir que cuando existen pérdidas por la presencia de fuerzas viscosas, ésta expresión de la ecuación de Bernoulli se modificará escribiéndose.

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \text{pérdidas}$$

APLICACIONES:

Fluido en reposo

$$v_1 = v_2 = 0 \;\rightarrow\; p_1 + \rho g y_1 = p_2 + \rho g y_2$$

$$p_2 - p_1 = \rho g (y_1 - y_2)$$

Es decir, la presión disminuye con la altura (aumenta con la profundidad).

Fórmula de Torricelli: Permite calcular la velocidad v_2 con que sale un líquido de un recipiente con un agujero a una distancia h de la superficie.

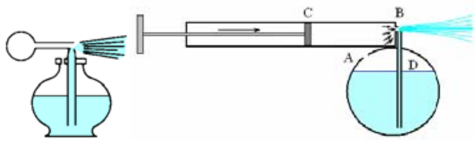
$p_1 = p_2 = p_a$, $y_1 = 0$, $y_2 = -h$ y $v_1 \approx 0$

$$p_a = p_a - \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \;\Rightarrow\; v_2 = \sqrt{2gh}$$

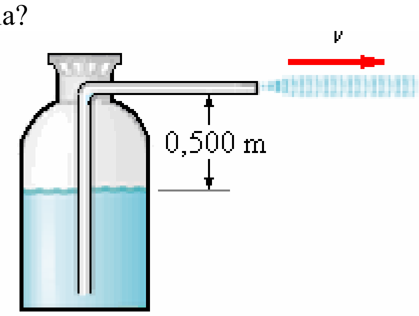
que es la misma velocidad que tendría en caída libre desde una altura h.

El atomizador.

La presión en el aire soplado a alta velocidad a través de la parte superior del tubo vertical de **atomizador.** Un atomizador de perfume o de un rociador de insecticida es menor que la presión normal del aire que actúa sobre la superficie del líquido en el frasco, así el perfume es empujado hacia arriba del tubo debido a la presión reducida en la parte superior.



Ejemplo 119. El agua es forzada a abandonar un extintor de incendios por la presión del aire, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la presión del aire en el tanque (sobre la atmosférica) necesaria para que el chorro de agua tenga una velocidad de 30,0 m/s cuando el nivel de agua en la tanque este a 0,500 m por debajo de la boquilla?



Solución.

Asumimos $v_{int} \approx 0$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$v_1 \approx 0$, $y_1 = 0$

$p_2 = p_a$, $v_1 \approx 0$, $y_1 = 0$,

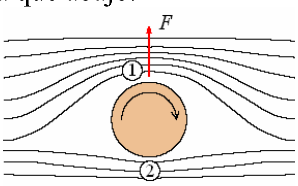
$y_2 = 0{,}50$ $v_2 = 30{,}0$

$$p_1 + 0 + 0 = p_a + \frac{1}{2}(1000)(30{,}0)^2 + (1000)(9{,}8)(0{,}500) \Rightarrow$$

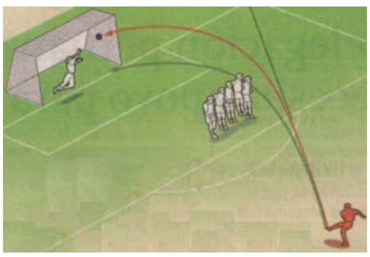
$$p_1 - p_a = \frac{1}{2}(1000)(30{,}0)^2 + (1000)(9{,}8)(0{,}500)$$

$= 4{,}55 \times 10^5$ Pa

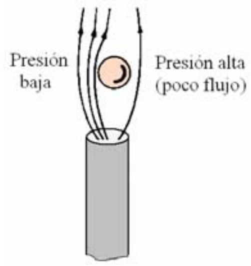
EFECTO MAGNUS.
Consideremos un cilindro (o una esfera) en un fluido en movimiento. Si el cilindro rota en torno a un eje perpendicular a la corriente del fluido, y además hay roce viscoso entre le cilindro y el fluido, entonces el cilindro arrastrará al fluido haciendo que las velocidades del fluido a ambos lados del cilindro no sean iguales. En el caso mostrado en la figura adjunta, la velocidad es mayor arriba que abajo.



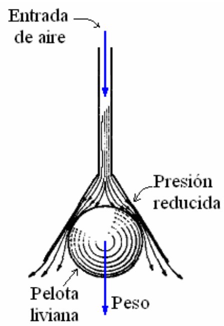
De acuerdo a la ecuación de Bernoulli, la presión en el lugar 1 serán inferior que en el lado 2 $(p_1 < p_2)$. Esta diferencia de presión genera una fuerza neta sobre el cilindro hacia arriba.
Es este efecto, llamado efecto Magnus, el responsable de los así llamados “efectos” que pueden observarse en numerosos juegos de pelota.
Suponga que una bola es pateada de tal manera que va rotando a la derecha sobre un perpendicular del eje a su dirección móvil durante su movimiento a la izquierda (véase la figura). Entonces la bola experimentaría la fuerza de Magnus. Así la bola se mueve con una trayectoria curvada hacia la derecha del arquero.



Una bola en un chorro de aire.
Una bola ligera se puede mantenido en un chorro de aire como se muestra en la figura. Una pelota de ping-pong puede hacerse flotar sobre un chorro de aire (algunas aspiradoras pueden soplar aire), si la pelota comienza a dejar el chorro de aire, la presión más alta de afuera del chorro empuja la pelota de nuevo hacia éste como se muestra en la figura siguiente.



Levantar una bola con un embudo.
En el espacio entre la superficie del embudo y la superficie de la bola la presión es menor que la presión atmosférica, y esta diferencia de presión soporta la bola contra la acción de la gravedad.



Una bola ligera apoyada por un jet del aire. La presión sobre la bola es menos que debajo de ella.

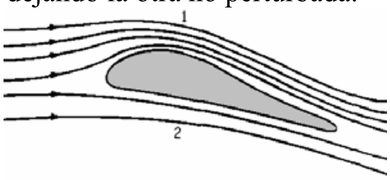
Efecto chimenea.
¿Por qué sube el humo por una chimenea? En parte se debe a que el aire caliente se eleva (es decir, debido a la densidad). Pero el principio de Bernoulli también tiene un lugar importante. Debido a que el viento sopla a través de la parte superior de la chimenea, la presión es menor ahí que dentro de la casa. Por eso el aire y el humo son empujados hacia arriba de la chimenea. Incluso en una noche calmada, existe el flujo de aire suficiente en el ambiente en el extremo superior de 1 chimenea para permitir el flujo ascendente del humo.
Si las tuzas, perros de la pradera, conejos y otros animales que viven bajo el no se asfixian, el aire debe circular en sus madrigueras. Estas siempre tienen por lo menos dos entradas. La velocidad del flujo del aire a través de los diferentes hoyos por lo regular será un poco distinta. Esto conduce a una pequeña diferencia de presión que fuerza al

flujo de aire a través de la madriguera por el principio de Bernoulli. El flujo de aire se intensifica si un hoyo está más arriba que el otro (lo que a menudo hacen los animales) puesto que la velocidad del viento tiende a incrementarse con la altura.

La ventilación en una mina.

La ventilación en una mina responde a tres propósitos principales: para proporcionar el aire fresco para la respiración de los mineros, diluir los gases nocivos que puedan ser formados subterráneamente.
En un túnel horizontal simple de minería generalmente es suficiente la ventilación natural utilizando la diferencia en la presión de aire asociada a la diferencia en nivel entre dos aberturas, la entrada de la mina y la parte superior de un eje de ventilación (efecto chimenea).

Empuje sobre las alas de un avión.
Una superficie aerodinámica como el ala de un avión se diseña de tal modo que perturba las líneas de corriente del fluido en una región de espacio, dejando la otra no perturbada.

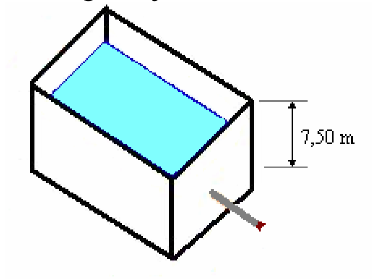


Las, líneas de corriente encima del ala son comprimidas y las que se encuentran debajo del ala permanecen no perturbadas, resultando el flujo mayor en la parte superior.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Como $v_1 > v_2$, resulta $p_2 > p_1$
Produciendo una fuerza de empuje hacia arriba.
En realidad, el principio de Bernoulli es sólo un aspecto de la sustentación de un ala. Las alas se inclinan un poco hacia arriba, de modo aire que choca contra la superficie inferior se desvíe hacia abajo; el cambio en la cantidad de movimiento de las moléculas de aire que rebotan deviene en una fuerza ascendente adicional sobre el ala. De igual modo la turbulencia desempeña una función de gran importancia.

Ejemplo 120. Un pueblo tiene un gran tanque con una abertura en la parte superior, que contiene el agua para situaciones de emergencia. El agua del tanque puede drenar a través de una manguera de 6,60 cm de diámetro. La manguera termina en una boquilla de 2,20 cm de diámetro. Un tapón de goma se inserta en la boquilla. El nivel de agua en el tanque se mantiene 7.50 m por encima de la boquilla.
a) Calcular la fuerza de fricción ejercida por la punta en el tapón.
b) El tapón se quita. ¿Qué masa de agua sale de la boquilla en 2,00 h?
c) Calcular la presión manométrica del agua que fluye en la manguera justo detrás de la boquilla.



Solución.
Tomar como punto 1 la superficie del agua en el tanque y 2 dentro de la boquilla.
a) Con el tapón de goma en su lugar

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

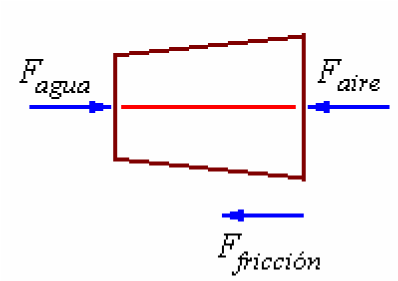
$p_1 = p_a$, $y_1 = 7{,}50$ m, $v_1 = 0$, $y_2 = 0$, $v_2 = 0$

$$p_a + 0 + \rho g(7{,}50) = p_2 + 0 + 0 \Rightarrow$$

$$p_a - p_2 = \rho g(7{,}50) = 7{,}35 \text{ x } 10^4 \text{ N/m}^2$$

Para el tapón:

$$\sum F_x = 0$$



$$p_2 A - p_a A = F_f \Rightarrow$$

$$p_2 A - p_a A = F_f = (p_2 - p_a)A$$

$$= 7{,}35 \times 10^4 (\pi 0{,}011^2) = 27{,}9 \text{ N.}$$

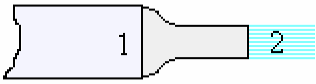
b) Cuando se quita el tapón

$$p_a + 0 + \rho g(7{,}50) = p_a + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + 0 \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{15\rho g} = 12{,}1 \text{ m/s}$$

El flujo o gasto es $G = Av = (\pi 0{,}011^2)(12{,}1) =$ 0,0046 m^3/s
En 2 horas salen

$0{,}0046 \times 7200 = 33{,}12$ m^3 de agua
Que es una masa de $33{,}12 \times 1000 = 3{,}312 \times 10^4$ kg.
c) Tome el punto 1 en la manguera y el punto 2 fuera de la boquilla.



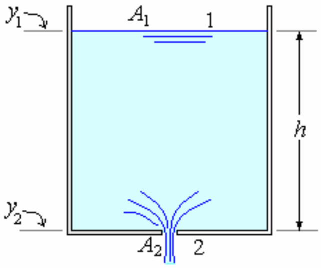
Por la ecuación de continuidad
$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$
$$\pi\left(\frac{6{,}6}{2}\right)^2 v_1 = \pi\left(\frac{2{,}2}{2}\right)^2 12{,}1 \;\Rightarrow\; v_1 = \frac{12{,}1}{9} =$$
1,35 m/s
Aplicando la ecuación de Bernoulli:
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$
$$\Rightarrow p_1 + \frac{1}{2}(1000)(1{,}35)^2 + 0$$
$$= p_a + \frac{1}{2}(1000)(12{,}1)^2 + 0$$
$$\Rightarrow p_1 - p_a = \frac{1}{2}(1000)(146{,}41 - 1{,}82)$$
$= 7{,}23 \times 10^4$ Pa

Ejemplo 121. La figura muestra una corriente de agua en flujo constante de un caño de la cocina. En el caño el diámetro de la corriente es 0,960 cm. El flujo llena un recipiente de 125 cm^3 de en 16,3 s. Calcular el diámetro del flujo 13,0 cm por debajo de la boca del caño.

Solución.
Sea 1 el punto de salida del agua y el punto 2, 13cm abajo.
El flujo es: $G = \dfrac{125}{16{,}3} = 7{,}67$ cm^3/s
$$G = A v_1 \;\Rightarrow\; v_1 = \frac{G}{A} = \frac{7{,}67}{0{,}724} = 10{,}6 \text{ cm/s}$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2:
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \Rightarrow$$
$$p_a + \frac{1}{2}(1000)(0{,}0106)^2 + (1000)(9{,}80)0{,}13$$
$$= p_a + \frac{1}{2}(1000)v_2^2 + 0 \Rightarrow$$
$$v_2 = \sqrt{(0{,}0106)^2 + 2(9{,}80)0{,}13}$$
$= 1{,}60$ m/s
El flujo es constante:
$$7{,}67 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 160 \;\Rightarrow\; d = 0{,}247 \text{ cm}$$

Ejemplo 122. Velocidad de salida de un líquido
Velocidad de salida de un líquido a través de un orificio



Solución. Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2 tenemos
$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$
Como en 1 y 2 la presión es la presión atmosférica, la expresión se reduce a
$$\rho g y_1 - \rho g y_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 \;\Rightarrow$$
$$g(y_1 - y_2) = \frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) \qquad (1)$$
Por la ecuación de la continuidad $A_1 v_1 = A_2 v_2$
$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2 \qquad (2)$$
Como $(y_1 - y_2) = h$ (3)
Reemplazando (2) y (3) en (1), obtenemos:
$$gh = \frac{1}{2}\left[v_2^2 - \left(\frac{A_2}{A_1}v_2\right)^2\right]$$
$$\Rightarrow\; gh = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]v_2^2$$
Finalmente:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

Si $A_1 >> A_2$:

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Resultado que es igual al caso de un orificio lateral.

Tiempo de vaciado. Podemos calcular el tiempo de vaciado.
Para este cálculo usaremos la velocidad con que baja el fluido, es decir v_1

Como $v_1 = \frac{dy}{dt} = \frac{A_2}{A_1} v_2$

$$v_1 = \frac{dy}{dt} = -\frac{A_2}{A_1}\sqrt{\frac{2gy}{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

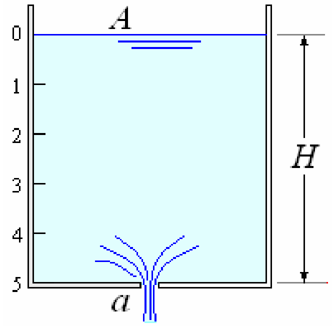
$$dt = -\frac{A_1}{A_2}\sqrt{\frac{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}{2g}}\frac{dy}{\sqrt{y}}$$

Integrando:

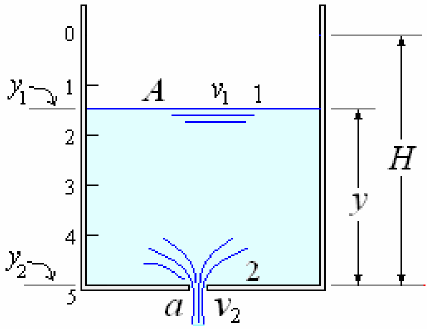
$$t = -\frac{A_1}{A_2}\sqrt{\frac{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}{2g}}\int_h^0 \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$= \frac{2A_1}{A_2}\sqrt{\frac{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}{2g}} h^{1/2}$$

Ejemplo 123. Hay agua hasta una altura H en un tanque abierto cilíndrico de sección transversal A. Un estudiante hace marcas en el cilindro para dividir el volumen de agua que hay en el tanque en cinco parte iguales. Luego, perfora un agujero circular con área a en el centro del fondo del tanque y registra el tiempo t_1 que tarda en salir la primera quinta parte del volumen de agua. El tiempo t_2 corresponde a la salida de la segunda quinta parte del volumen de agua y así sucesivamente hasta que no queda agua en el tanque. Determine el cociente entre los tiempos de salida t_2/t_4.



Solución.
Velocidad con que baja el nivel del líquido en el tanque.



Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2 tenemos

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Como en 1 y 2 la presión es la presión atmosférica, la expresión se reduce a

$$\rho g y_1 - \rho g y_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 \Rightarrow$$

$$g(y_1 - y_2) = \frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) \quad (1)$$

Por la ecuación de la continuidad $Av_1 = av_2 \Rightarrow$

$$v_2 = \frac{A}{a}v_1 \quad (2)$$

Como $(y_1 - y_2) = y$ (3)

Reemplazando (2) y (3) en (1), obtenemos:

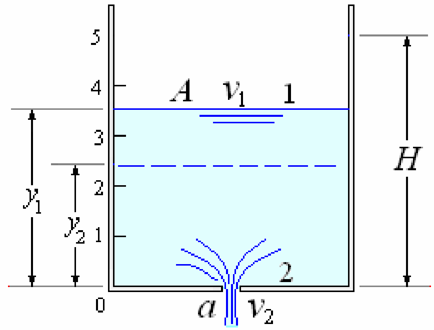
$$gy = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{A}{a}v_1\right)^2 - v_1^2\right]$$

$$\Rightarrow gy = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1\right]v_1^2$$

Finalmente:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gy}{\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1}}$$

Para calcular el tiempo en que el nivel baja de y_1 a y_2 en el tanque.



Para este cálculo usaremos la velocidad con que baja el fluido, es decir v_1

Como $v_1 = -\dfrac{dy}{dt}$

$$v_1 = \frac{dy}{dt} = -\sqrt{\frac{2gy}{\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1}}$$

$$dt == -\sqrt{\frac{\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1}{2g}} \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

Integrando:

$$t = -\sqrt{\frac{\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1}{2g}} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1}{2g}} \left(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}\right)$$

Para $t_2 \rightarrow y_1 = 4H/5$ a $y_2 = 3H/5$

$$t_2 = 2\sqrt{\frac{\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1}{2g}} \left(\sqrt{\frac{4}{5}} - \sqrt{\frac{3H}{5}}\right)$$

$$= 2\sqrt{\frac{\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1}{2g}} \left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)\sqrt{H}$$

Para $t_4 \rightarrow y_1 = 2H/5$ a $\rightarrow y_2 = H/5$

$$t_4 = 2\sqrt{\frac{\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1}{2g}} \left(\sqrt{\frac{2H}{5}} - \sqrt{\frac{H}{5}}\right)$$

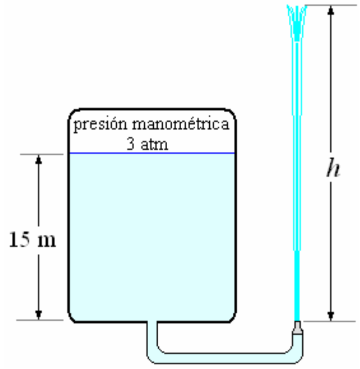
$$= 2\sqrt{\frac{\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1}{2g}} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}}\right)\sqrt{H}$$

El cociente entre los tiempos de salida t_2/t_4.

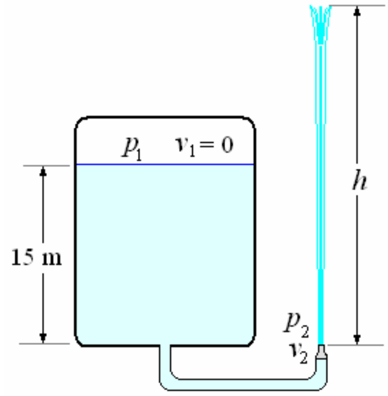
$$\frac{t_2}{t_4} = \frac{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}}\right)} = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)} = 0{,}647$$

El cociente entre los tiempos de salida t_2/t_4 es 0,647.

Ejemplo 124. El tanque de agua de la figura está cerrado por arriba y el aire comprimido entre la superficie del agua y la tapa tiene una presión manométrica de 3 atm cuando el nivel del agua está a 15 m de su base. La boquilla de la manguera está apuntando verticalmente hacia arriba. Considere que el área de la sección transversal de la boquilla de la manguera es muy pequeña en comparación con la del tanque y que la densidad del agua es 1000 kg/m^3. Determine la máxima altura h que puede alcanzar el chorro de agua.



Solución.



Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Con

$p_1 = 4p_a$, $y_1 = 15$ m, $v_1 = 0$

$p_2 = p_a$, $y_2 = 0$, $v_2 = ?$

$p_a = \rho_{Hg} g (0{,}76 \text{ m})$

Tenemos

$$4p_a + \rho g(15) = p_a + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow$$

$$3\rho_{Hg} g(0{,}76) + \rho g(15) = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow$$

$$\frac{v_2^2}{2g} = \left(2{,}28\frac{\rho_{Hg}}{\rho} + 15\right) = 46 \text{ m}$$

Por conservación de la energía
Siendo h la altura máxima que alcanza el chorro de agua

$$mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow$$

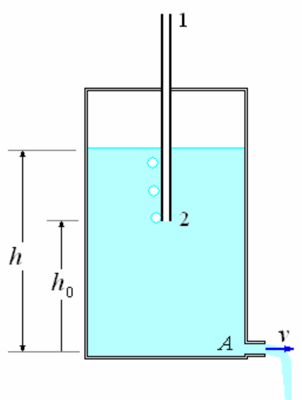
$$h = \frac{v_2^2}{2g}$$

Luego $h = 46$ m

El frasco de Mariotte.
La velocidad de salida de un líquido por un orificio practicado en su fondo es la misma que la que adquiere un cuerpo que cayese libremente en el vacío desde una altura h, siendo h la altura de la columna de fluido.

$$v = \sqrt{2gh}$$

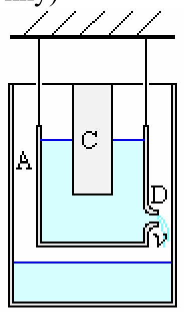
A medida que el fluido sale por el orificio, la altura h de fluido en el depósito va disminuyendo. Si A es la sección del orificio, el gasto $G = Av$, o volumen de fluido que sale por el orificio en la unidad de tiempo no es constante. Si queremos producir un gasto constante podemos emplear el denominado frasco de Mariotte.



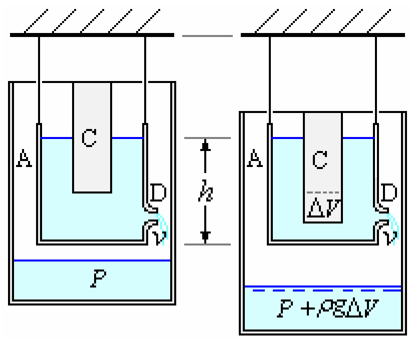
Consiste en un frasco lleno de fluido hasta una altura h_0, que está cerrado por un tapón atravesado por un tubo cuyo extremo inferior está sumergido en el líquido. El fluido sale del frasco por un orificio practicado en el fondo del recipiente. En el extremo inferior 2 del tubo, la presión es la atmosférica ya que está entrando aire por el tubo, a medida que sale el líquido por el orificio.

La velocidad de salida del fluido no corresponderá a la altura h_0 desde el orificio a la superficie libre de fluido en el frasco, sino a la altura h o distancia entre el extremo inferior 2 del tubo y el orificio.
Dado que h permanece constante en tanto que el nivel de líquido esté por encima del extremo inferior del tubo, la velocidad del fluido y por tanto, el gasto se mantendrán constantes. Cuando la altura de fluido en el frasco h_0 es menor que h, la velocidad de salida v del fluido deja de ser constante.
La velocidad de salida v puede modificarse subiendo o bajando el extremo inferior 2 del tubo en el frasco.

Ejemplo 125. El depósito A es fijo. En él flota un cilindro C, unido a un depósito B. Por el orificio D pasa líquido del depósito a al B. Determinar la variación de la velocidad en D. (Contador de Pronny)

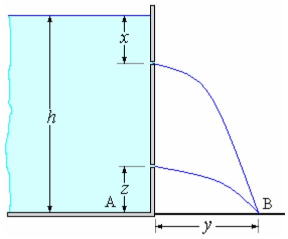


Solución.



A través de D sale un volumen de líquido ΔV.
El peso P aumenta a $P + \rho g \Delta V$.
C desciende de modo que el líquido desplazado aumenta en un volumen ΔV.
La superficie del líquido en A no desciende (h permanece igual).
Como $v = \sqrt{\rho g h}$, la velocidad de salida en D permanece invariable.

Ejemplo 126. En la pared vertical de un depósito hay dos pequeños orificios, uno está a la distancia x de la superficie del líquido, y el otro está a una altura z sobre el fondo. Los chorros de líquido que salen encuentran el suelo en el mismo punto, en que relación está *x* y *z*.



Solución.

Si v_1 es la velocidad por la salida superior y t_1 el tiempo que se tarda en alcanzar el punto B:

$$\left.\begin{array}{l} y = v_1 t_1 \\ v_1 = \sqrt{2gx} \\ h - x = \dfrac{1}{2} g t_1^2 \end{array}\right\} h - x = \frac{1}{2} g \frac{y^2}{v_1^2} = \frac{y^2}{4x}$$

Análogamente, para el orificio inferior:

$$\left.\begin{array}{l} y = v_2 t_2 \\ v_1 = \sqrt{2g(h-z)} \\ z = \dfrac{1}{2} g t_2^2 \end{array}\right\} z = \frac{1}{2} g \frac{y^2}{v_2^2} = \frac{y^2}{4(h-z)}$$

Eliminando y se tiene:

$x(h-x) = z(h-z)$

Por lo tanto: $x = z$

Ejemplo 127. Cuando el viento sopla entre dos edificios grandes, se puede crear una caída significativa de presión. La presión del aire normalmente es una atmósfera dentro del edificio, así que la caída de la presión en el exterior puede hacer que una placa de vidrio de la ventana estalle hacia fuera del edificio y estrellarse en la calle abajo.¿Qué diferencia de presión resultaría de un viento de 27 m/s? ¿Qué fuerza sería ejercida sobre la placa de vidrio de 2 x 3 m de una ventana? La densidad del aire es 1,29 kg/m^3 a 27° C y 1 atmósfera.

Solución.

Alejado de los edificios la presión es 1 atmósfera, y la velocidad del viento es aproximadamente cero. Así

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_a + 0 \Rightarrow$$

$$p - p_a = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}(1,29)(27)^2 = 470 \text{ Pa}$$

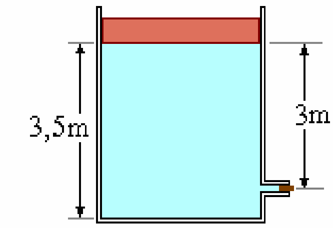
y $F = pA = (470)(2\times 3) = 2820$ N

Ejemplo 128. Un depósito de agua está cerrado por encima con una placa deslizante de 12 m^2 y 1200 kg.

a) El nivel del agua en el depósito es de 3,5 m de altura. Calcular la presión en el fondo.

b) Si se abre un orificio circular de 5 cm de radio a medio metro por encima del fondo, calcúlese el volumen de agua que sale por segundo por este orificio. (Se considera que el área del orificio es muy pequeña frente al área del depósito).

Considere la presión atmosférica como 1,013 x10^5 Pa, $g \approx 10\,\text{m/s}^2$



Solución.

a)

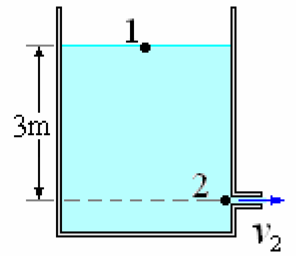
Presión en el fondo

$= p_{\text{ atmosférica}} + p_{\text{ ejercida por la placa}} + p_{\text{ columna de fluido}}$

$$p = 1,013\times 10^5 + \frac{1200\times 10}{12} + 1000\times 10\times 3,5$$

= 1,3673 x 10^5 Pa

b) Ecuación de bernoulli



$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p_1 = p_a + \rho g(3) = 1,033\times 10^5 + 29400$$

$y_1 = 3$m, $y_2 = 0$, $v_1 \approx 0$, $\rho = 1000$ kg/m^3

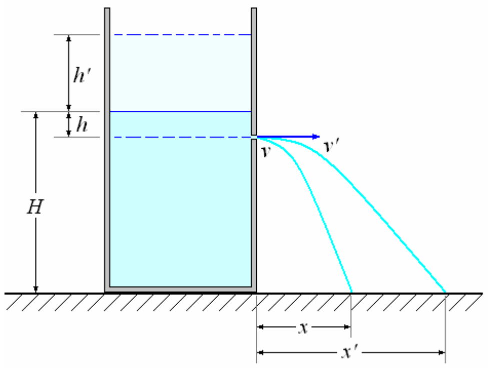
$$p_2 = p_a = 1,013\times 10^5$$

$$29400 = \frac{1}{2}1000 v_2^2 \Rightarrow v_2 = 7,67 \text{ m/s}$$

Gasto $= A_2 v_2 = \pi\,(0,05)^2(7,67) = 0,06$ m^3/s

Ejemplo 129. Sobre un plano horizontal se encuentra un recipiente lleno de agua hasta el nivel de 60 cm**.** En una pared lateral se abre un orificio situado a 10 cm por debajo de dicho nivel. Calcule a que distancia el chorro corta al plano horizontal y que aumento de presión se ha

de ejercer sobre la superficie del líquido para que el alcance sea doble.
Solución.



Siendo la trayectoria del chorro de agua la composición de un movimiento uniforme y otro unifórmenme acelerado, resulta:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Además

$$x = vt = \sqrt{2gh}t\ ,\ H - h = \frac{1}{2}gt^2$$

Sustituyendo los valores numéricos

$$x = \sqrt{2(9,8)(0,1)}t\ ,\ 0,50 = \frac{1}{2}(9,8)t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{1}{9,8}} = 0,32 \text{ s}$$

$$x = \sqrt{2(9,8)(0,1)}(0,32) = 0,448 \text{ m}$$

Si $x' = 2x = 2(0,448) = 0,896$ m, para obtener dicho alcance hará falta que el líquido salga con una velocidad $v' = \frac{x'}{t}$, siendo t el mimo tiempo que antes, ya que el orificio se encuentra en igual posición. Por tanto:

$$v' = \frac{0,896}{0,32} = 2,8 \text{ m/s}$$

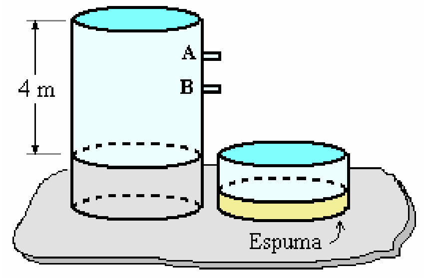
Por el teorema de Torricelli:

$$v' = \sqrt{2gh'} \Rightarrow h' = \frac{v'^2}{2g} = \frac{2,8^2}{2(9,8)} = 0,4 \text{ m}$$

Este sería el desnivel de la superficie del líquido con el orificio. Como éste solo se encuentra a 10 cm hay que ejercer una presión suplementaria de 30 cm de columna de agua.

$$\Delta p = \rho g(h' - h) = 1000(9,8)(0,40 - 0,10)$$
$$= 2940 \text{ Pa}$$

Ejemplo 130. Un tanque cilíndrico de radio 1 m y altura 4 m, lleno de agua, puede desaguar sobre un recipiente, como se muestra en la figura. El recipiente receptor se encuentra sobre una espuma de 10 cm de espesor y módulo de Young 0,79 x 10 N/m^2. El tanque posee 2 agujeros, el primero A de área 5 cm^2 ubicado a 3H/4 de su base y el segundo agujero B de 3 cm^2 de área a H/2 de la base del tanque.



a) Calcule la velocidad de salida del agua por cada uno de los agujeros suponiendo abierto solo uno a la vez.
b) Si se permite desaguar al tanque durante 3 minutos por sólo uno de los agujeros, determine en que caso el esfuerzo de compresión sobre la espuma será mayor. Justifique su respuesta
Solución.
a) La velocidad de salida está dada por:

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$v_A = \sqrt{2g(1)} = 4,43\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

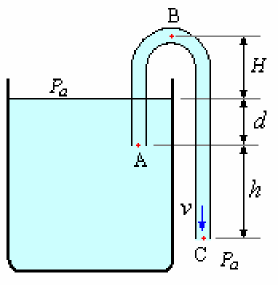
$$v_B = \sqrt{2g(2)} = 6,26\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) El esfuerzo de compresión depende del peso al que esté expuesto la espuma.

$$G_A = A_A v_A = (5\times 10^{-4})(4,43)$$
$$= 22,15 \text{ x } 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$
$$G_B = A_B v_B = (3\times 10^{-4})(4,43)$$
$$= 13,29 \text{ x } 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

Con estos valores obtenemos para un tiempo de 3 min = 180 segundos:
$V_A = 0,3987$ m^3 y $V_B = 0,2392$ m^3
Luego $S_A > S_B$

Ejemplo 131. Un sifón es un dispositivo para sacar el líquido de un envase que sea inaccesible o que no pueda ser inclinado fácilmente. La salida C debe estar más baja que la entrada A, y el tubo se debe llenar inicialmente del líquido (esto generalmente se logra aspirando el tubo en el punto C). La densidad del líquido es ρ .
a) ¿Con qué velocidad el líquido fluye hacia fuera en el punto C?
b) ¿Cuál es la presión en el punto B?
c) ¿Cuál es la altura máxima H que el sifón puede levantar el agua?



Solución.
a) Compare la superficie (donde la presión es la presión atmosférica p_a y la velocidad es aproximadamente cero) con el punto C.
Aplicando la ecuación de Bernoulli

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{Constante}:$$

$$p_a + 0 + \rho g(h + d) = p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 + 0$$

$$v = \sqrt{2g(h + d)}$$

b) Compare la superficie con el punto B.

$$p_a + 0 + \rho g(h + d) = p_B + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g(h + d + H)$$

$$\Rightarrow p_B = p_a - \frac{1}{2}\rho v^2 - \rho gH$$

Reemplazando el valor de *v*, hallado en (a).

$$p_B = p_a - \frac{1}{2}\rho[2g(h + d)] - \rho gH$$

$$= p_a - \rho g(h + d + H)$$

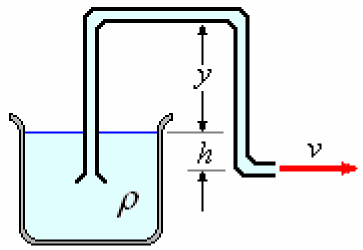
c) Cuando H es un máximo, la velocidad y la presión en ese punto se aproxima a cero, así que comparando la superficie y el punto B obtenemos:

$$p_a + 0 + \rho g(h + d) = 0 + 0 + \rho g(h + d + H)$$

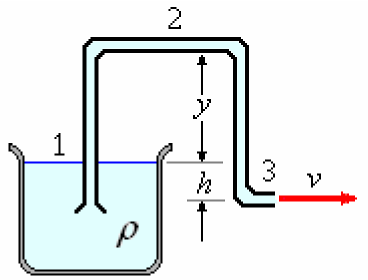
$\Rightarrow p_a = \rho gH$, de donde obtenemos:

$$H = \frac{p_a}{\rho g} = \frac{1{,}013\times 10^5\ N/m^2}{(1000\,kg/m^3)(9{,}8\,m/s^2)} = 10{,}3\text{ m}$$

Ejemplo 132. Un sifón es usado para drenar el agua de un tanque, como se ilustra en la figura. El sifón tiene un diámetro uniforme. Supongamos un flujo estacionario sin fricción.
a) Si la distancia *h* = 1,00 m, encontrar la velocidad de salida al final del sifón.
b) ¿Cuáles la altura límite del sifón sobre la superficie del agua? (Para que el flujo de líquido sea continuo, la presión no debe caer por debajo de la presión del vapor del líquido).



Solución.
a)



Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y 3

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g y_3$$

$$\Rightarrow p_a + 0 + \rho gh = p_a + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + 0$$

$$\Rightarrow v_3 = \sqrt{2gh}$$

Con h = 1,00 m v_3 = 4,43 m/s
b) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 2 y 3

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 = p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g y_3$$

$$\Rightarrow p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y = p_a + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + 0$$

Como $v_2 = v_3$ $\Rightarrow p_2 = p_a - \rho g y$

Ya que $p_2 \geq 0$ $\Rightarrow$

$$y \leq \frac{p_a}{\rho g} = \frac{1{,}013\times 10^5}{(1000)(9{,}8)} = 10{,}3\text{ m}$$

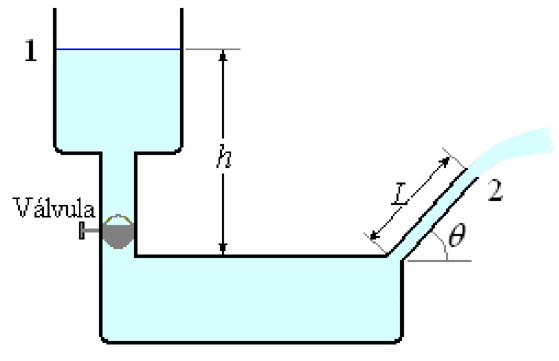
Ejemplo 133. Un tanque de almacenaje abierto grande se llena de agua. Se hace un agujero pequeño en un lado del tanque a una profundidad *h* debajo de la superficie del agua. ¿Con qué velocidad el agua fluirá del agujero?
Solución.
En la superficie $p = p_a$ y $v \approx 0$. En el agujero $p = p_a$ y $v = v$, tal que

$$p_a + 0 + \rho gh = p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 + 0$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\rho gh}$$

Ejemplo 134. La figura muestra un tanque de agua con una válvula en la parte inferior.
Si esta válvula se abre, ¿cuál es la altura máxima

alcanzada por la corriente de agua que sale del lado derecho de la cisterna?
Supongamos que h = 10,0 m, L = 2,00 m, y θ = 30,0 °.
La sección transversal en la zona 1 es muy grande en comparación con la de la zona 1.



Solución.
Aplicamos la ecuación de Bernoulli en los puntos 1 y 2

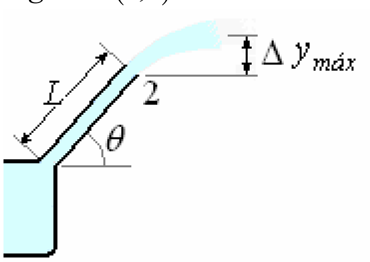
Siendo $p_1 = p_2 = p_a$, $v_1 = 0$, $y_2 = 0$
Tenemos:

$$p_a + 0 + \rho g(h - L\text{sen}\theta) = p_a + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + 0 \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{2\rho g(h - L\text{sen}\theta)}$$
$$= \sqrt{2(9,8)(10,0 - 2,00\text{sen}30,0^\circ)}$$
$$= 13,3 \text{ m/s}$$

Considerando como movimiento de un proyectil.
$v_{0y} = v_2\text{sen}30,0^\circ = 6,64$ m/s.
Luego
$v_{fy}^2 = v_{0y}^2 - 2g\Delta y$, la altura máxima se consigue con $v_{fy}^2 = 0$

$$\Delta y_{máx} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{6,64^2}{2(9,8)} = 2,25 \text{ m}$$



Ejemplo 135. Los bomberos utilizan una manguera del diámetro interior 6,0 centímetros para entregar 1000 litros de agua por minuto. Un inyector se une a la manguera, y se quiere lanzar el agua hasta una ventana que está 30 m sobre el inyector.
a) ¿Con qué velocidad debe el agua dejar el inyector?
b) ¿Cuál es el diámetro interior del inyector?
c) ¿Qué presión en la manguera se requiere?
Solución.

$$G = 1000\frac{\text{litros}}{\text{minuto}} = 1000\frac{10^{-3}\text{m}^3}{60\text{ s}} = 0,017$$
m^3/s

a) Cuando el agua deja el inyector, $p = p_a$ y $v = v$, en el punto más alto $v = 0$, tal que aplicando la ecuación de Bernoulli:

$$p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 + 0 = p_a + 0 + \rho g h$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9,8)(30)}$$
$$= 24,2 \text{ m/s}$$

b) El caudal $G = Av = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 v$

$$\Rightarrow D = \sqrt{\frac{4G}{\pi v}} = \sqrt{\frac{4(0,017\text{ m}^3/\text{s})}{\pi(24,2\, m/s)}}$$
$$= 0,03 \text{ m}$$

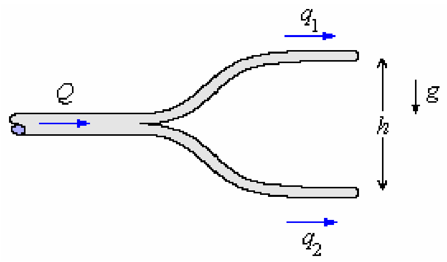
c) La velocidad en la manguera es v_m,
$A_m v_m = G \Rightarrow$

$$v_m = \frac{G}{A_m} = \frac{4G}{\pi D_m^2} = \frac{4(0,017)}{\pi(0,06)^2}$$
$$= 6,02 \text{ m/s}$$

$$p_m + \frac{1}{2}\rho v_m^2 + 0 = p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 + 0$$

$$\Rightarrow p_m - p_a = \frac{1}{2}\rho\left(v^2 - v_m^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}(1000)\left(24,2^2 - 6,02^2\right)$$
$$= 2,75 \text{ x } 10^5 \text{ Pa} = 2,71 \text{ atm}$$

Ejemplo 136. Un tubo horizontal por el que fluye líquido de densidad ρ_0 a razón de Q m^3/s, se bifurca en dos ramas en el plano vertical, una superior y otra inferior, de secciones transversales $a_1 = a_2 = a$, abiertas a la atmósfera (ver figura). Si la distancia entre las ramas es h, determinar:
a) Las cantidades q_1 y q_2 de líquido (en m^3/s) que fluyen por ambas ramas.
b) La condición que debe cumplir Q para que haya flujo en la rama superior.

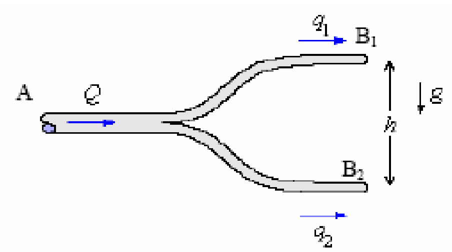


Solución.
a) La relación de Bernoulli se puede aplicar entre los puntos A y B_1 y también entre A y B_2. Por transitividad, la relación de Bernoulli también es valida entre los puntos B_1 y B_2. Se tiene

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Pero $p_1 = p_2 = p_a$ (la presión atmosférica), $h_1 = h$ y $h_2 = 0$, luego

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_2^2$$



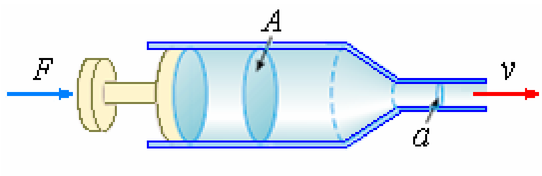
Los flujos que circulan por la rama superior e inferior vienen dados por $q_1 = av_1$ y $q_2 = av_2$, respectivamente. También se tiene que $Q = q_1 + q_2$. De las relaciones anteriores se deduce que

$$q_1 = \frac{Q^2 - 2a^2gh}{2Q} \text{ y } q_2 = \frac{Q^2 + 2a^2gh}{2Q}$$

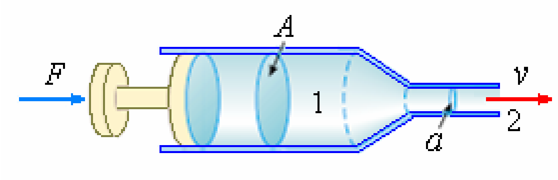
b) Para que circule líquido por la rama superior se debe tener que

$$Q > a\sqrt{2gh}\ .$$

Ejemplo 137. Una jeringa hipodérmica contiene un medicamento con la densidad de agua. El barril de la jeringa tiene una sección transversal $A = 2{,}50 \times 10^{-5}$ m^2, y la aguja tiene una sección transversal $a = 1{,}00 \times 10^{-8}$ m^2. En la ausencia de una fuerza sobre el émbolo, la presión es de 1 atm. Un fuerza F de magnitud 2,00 N actúa sobre el émbolo, saliendo un chorro horizontal de medicina de la aguja. Determinar la velocidad de la medicina, cuando deja la punta de la aguja.



Solución.



Aplicando la ecuación de Bernoulli entre el depósito (1) y la salida (2):

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

En el reservorio, la presión manométrica es

$$p_1 - p_a = \frac{2{,}00}{2{,}50 \times 10^{-5}} = 8{,}00 \text{ x } 10^4 \text{ Pa} \Rightarrow$$

$p_1 = 8{,}00 \text{ x } 10^4 + p_a$

La presión en la salida es la presión atmosférica.
Por la ecuación de continuidad

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow$$

$$(2{,}50 \times 10^{-5})v_1 = (1{,}00 \times 10^{-8})v_2 \Rightarrow$$

$$v_1 = (4{,}0 \times 10^{-4})v_2$$

v_1^2 es muy pequeño en comparación con v_2^2, por consiguiente $v_1 \to 0$

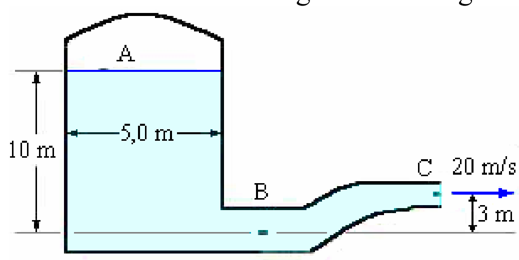
$y_1 = y_2$

Luego:

$$8{,}00 + p_a + 0 = p_a + \frac{1}{2}(1000)v_2^2 \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(8{,}00 \times 10^4)}{1000}} = 12{,}6 \text{ m/s}$$

Ejemplo 138. El tanque cilíndrico presurizado de 5,0 m de diámetro, contiene agua la que sale por el tubo en el punto C, con una velocidad de 20 m/s. El punto A está a 10 m sobre el punto B y el punto C está a 3 m sobre el punto B. El área del tubo en el punto B es 0,03 m^2 y el tubo se angosta a un área de 0,02 m^2 en el punto C. Asuma que el agua es un líquido ideal en flujo laminar. La densidad del agua es 1000 kg/m^3.



a) ¿Cuál es el gasto o flujo en el tubo ?:

b) ¿A que razón está bajando el nivel de agua del tanque?
c) ¿Cuál es la presión en B?
d) ¿Cuál es la presión absoluta del aire encerrado en el tanque?
Solución.
a) El gasto o flujo en el tubo:

$$G = A_C v_C = \pi R^2 v_C = (0{,}02)(20) = 0{,}4\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

b) La razón a la que está bajando el nivel de agua del tanque:

$$A_A v_A = G = 0{,}4\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$A_A = \pi\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 19{,}625\text{m}^2$$

$$v_A = \frac{G}{A_A} = \frac{0{,}4}{19{,}625} = 0{,}02\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) La presión en B:
Por Bernoulli

$$p_B + \rho g h_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_C + \rho g h_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2$$

$$p_B = ?$$

$$h_B = 0$$

$$v_B = \frac{0{,}4}{0{,}03} = 13{,}33\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$p_C = p_a = 1{,}013\times 10^5\,\text{Pa}$$

$$h_C = 3\text{m}$$

$$v_C = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$p_B + \frac{1}{2}(1000)(13{,}33)^2$$

$$= 1{,}013\times 10^5 + (1000)(9{,}8)(3) + \frac{1}{2}(1000)(20)^2$$

$$\Rightarrow p_B = \frac{1}{2}(1000)\left[(20)^2 - (13{,}33)^2\right]$$

$$+1{,}013\times 10^5 + (1000)(9{,}8)(3)$$

$$\Rightarrow p_B = 2{,}418 \text{ x } 10^5 \text{ Pa}$$

d) ¿Cuál es la presión absoluta del aire encerrado en el tanque (en atmósferas)?

$$p_A + \rho g h_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \rho g h_B + \frac{1}{2}\rho v_B$$

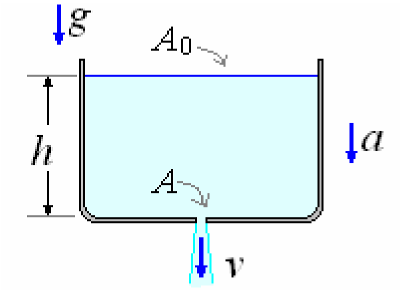
$$\Rightarrow p_A = p_B + \rho g (h B_B - h_A) + \frac{1}{2}\rho\left(v_B^2 - v_A^2\right)$$

$$\Rightarrow p_A = 2{,}418\times 10^5 + (1000)(9{,}8)(-10)$$

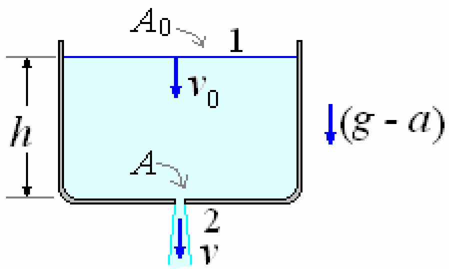
$$+ \frac{1}{2}(1000)\left(13{,}33^2 - 0{,}02^2\right)$$

$$\Rightarrow p_A = 2{,}32644 \text{ Pa}$$

Ejemplo 139. Un depósito lleno se mueve con la aceleración *a* en la vertical hacia abajo. Hallar la velocidad de salida *v* relativa al depósito.
A_0 área de la superficie, A, área de la salida.



Solución.



Sea v_0 la velocidad de la superficie respecto al depósito.
Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y 2:

$$p_1 + \rho(g-a)z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

$$= p_2 + \rho(g-a)z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Por se movimiento relativo la aceleración es $(g-a)$.

$$p_1 = p_2 = p_a$$

$$z_1 - z_2 = h$$

$$v_1 = v_0,\; v_2 = v$$

Reemplazando:

$$2(g-a)h = \left(v^2 - v_0^2\right)$$

Por la ecuación de la continuidad:

$$A_0 v_0 = Av \;\Rightarrow\; v_0 = v\frac{A}{A_0}$$

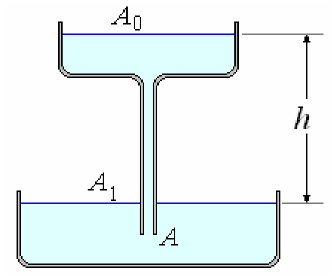
Luego

$$2(g-a)h = \left(v^2 - v^2\frac{A^2}{A_0^2}\right)$$

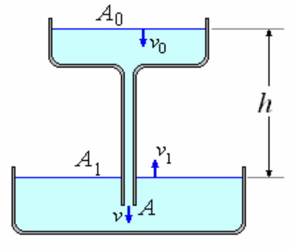
$$\Rightarrow 2(g-a)h = v^2\left(1 - \frac{A^2}{A_0^2}\right)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(g-a)h}{\left(1-\frac{A^2}{A_0^2}\right)}}$$

Ejemplo 140. De un depósito superior de sección A_0 circula líquido por un tubo de sección A, desaguando en uno inferior de sección A_1. Calcular la velocidad de salida en A, siendo h la diferencia de niveles.



Solución.
Este problema vamos a resolverlo por conservación de energía, porque la aplicación del principio de Bernoulli no es evidente.

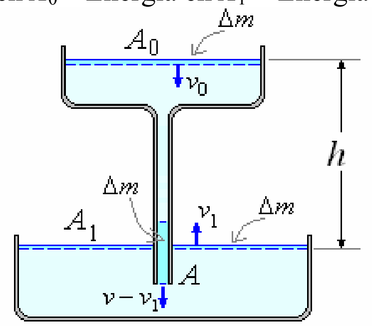


En un determinado instante se mueve la masa Δm .

En A_2 baja la masa Δm (altura h y velocidad v_0).

Al mismo tiempo sale por A la misma masa Δm con velocidad v y en A_1, la masa Δm sube con velocidad v_1

Por conservación de la energía
Energía en A_0 = Energía en A_1 + Energía perdida



Energía en A_0. Es la energía de la masa Δm que está a la altura h y baja con una velocidad v_0, luego:

$$E_{A_0} = \frac{1}{2}\Delta m v_0^2 + \Delta m g h$$

Energía en A_1. Es la energía de la masa Δm que está en el nivel 0 y sube con velocidad v_1 .

$$E_{A_1} = \frac{1}{2}\Delta m v_1^2$$

Energía perdida. Es la energía de la masa Δm también a nivel 0, que sale en ese instante por A con velocidad relativa a A_1, $(v - v_1)$.
Energía que queda destruida en el líquido en reposo del segundo depósito.

$$E_p = \frac{1}{2}\Delta m (v - v_1)^2$$

Reemplazando obtenemos:

$$\frac{1}{2}\Delta m v_0^2 + \Delta m g h = \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m (v - v_1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\Delta m\left(v_1^2 - v_0^2\right) + \frac{1}{2}\Delta m (v - v_1)^2 = \Delta m g h$$

$$\Rightarrow \left(v_1^2 - v_0^2\right) + (v - v_1)^2 = 2gh \qquad (1)$$

Por la ecuación de la continuidad

$$A_0 v_0 = A v = A_1 v_1 \Rightarrow$$

$$v_0 = \frac{A}{A_0} v \qquad (2) \text{ y}$$

$$v_1 = \frac{A}{A_1} v \qquad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1)

$$\left[\left(\frac{A}{A_1}\right)^2 - \left(\frac{A}{A_0}\right)^2 + \left(1 - \frac{A}{A_1}\right)^2\right] v^2 = 2gh$$

$$\Rightarrow \left[1 - \left(\frac{A}{A_0}\right)^2 - 2\frac{A}{A_1}\left(1 - \frac{A}{A_1}\right)\right] v^2 = 2gh$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{A}{A_0}\right)^2 - 2\frac{A}{A_1}\left(1 - \frac{A}{A_1}\right)^2}}$$

Ejemplo 141. Un legendario niño holandés salvo su pueblo tapando un agujero en un dique con el dedo, que es de 1,20 cm de diámetro. Si el agujero está 2,00m por debajo de la superficie del Mar del Norte (densidad de 1030 kg/m^3),
a) ¿cuál es la fuerza sobre su dedo?
b) En caso de que sacara el dedo del agujero, ¿cuánto tiempo tomaría para llenar de agua 1 acre de tierra a una profundidad de 1 pie, suponiendo que el agujero se mantiene constante en tamaño? (1 acre-pie de agua, 1234 m^3).

Solución.
a) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre la superficie del mar y el agujero tapado:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$p_a + 0 + (1030)(9,8)(2) = (p_a + p_{dedo}) + 0 + 0$$

$$\Rightarrow \; p_{dedo} = 0,0202 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Luego la fuerza sobre su dedo:

$$F = p_{dedo} A_2 = (0,0202 \times 10^5)\pi \left(\frac{1,2 \times 10^{-2}}{2}\right)^2$$

$$= 2,28 \text{ N}$$

b) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre la superficie del mar y el agujero abierto:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$p_a + 0 + (1030)(9,8)(2) = p_a + \frac{1}{2}(1030)v_2^2 + 0$$

$$\Rightarrow \; v_2 = 6,26 \text{ m/s}$$

El gasto es

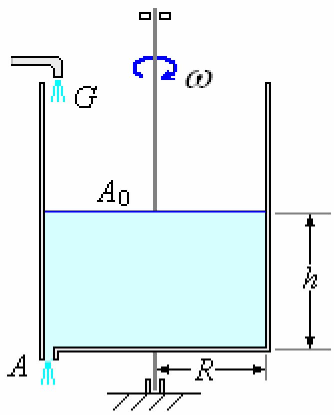
$$A_2 v_2 = \pi \left(\frac{1,2 \times 10^{-2}}{2}\right)^2 6,26 \; = 7,08 \text{ m/s}$$

El volumen de un acre pie es 1234 m^3
El tiempo requerido para llenar este volumen es

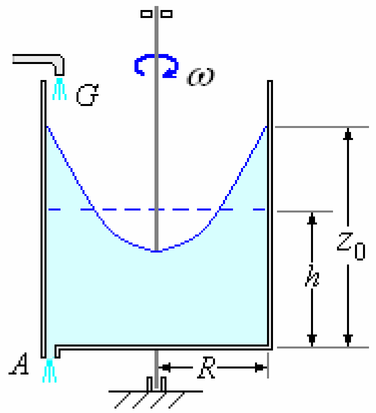
$$\frac{1234}{7,08 \times 10^{-4}} = 1,74 \text{ x } 10^6 \text{ s} = 20,2 \text{ días}$$

Ejemplo 142. Un depósito cilíndrico de sección *A*0, lleno de líquido hasta la altura *h*, gira con una velocidad angular ω constante alrededor de un eje vertical. Se abre entonces en el fondo el orificio *A*. Calcular la cantidad *G* de líquido con que debe alimentarse para que el líquido permanezca estacionario.
Volumen de un paraboloide generado por un líquido al girar con velocidad angular ω.

$$V = \frac{\omega^2}{2g}\pi R^4$$



Solución.



Cálculo de la altura z_0

$$\pi R^2 z_0 - \frac{\omega^2}{2g}\pi R^4 = \pi R^2 h \;\Rightarrow\; z_0 - \frac{\omega^2 R^2}{2g} = h$$

$$\Rightarrow z_0 = h + \frac{\omega^2 R^2}{2g}$$

Aplicando la ecuación de Bernouilli

$$p_a + \rho g z_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho v^2$$

Por la ecuación de continuidad

$$A_0 v_0 = A v \;\Rightarrow\; v_0 = \frac{A}{A_0} v$$

Reemplazando z_0 y v_0 en función de v:

$$2g\left(h + \frac{\omega^2 R^2}{2g}\right) + \left(\frac{A}{A_0}\right)^2 v^2 = v^2$$

$$\Rightarrow \left[1 - \left(\frac{A}{A_0}\right)^2\right] v^2 = 2g\left(h + \frac{\omega^2 R^2}{2g}\right)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{\omega^2 R^2}{2g}\right)}{\left[1 - \left(\frac{A}{A_0}\right)^2\right]}}$$

El gasto de salida de agua es

$$Av = A\sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{\omega^2 R^2}{2g}\right)}{\left[1 - \left(\frac{A}{A_0}\right)^2\right]}}$$

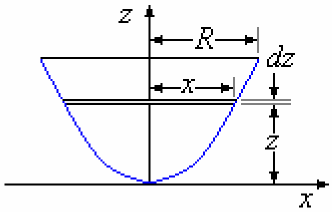
El valor de G para mantener el líquido estacionario es:

$$G = A\sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{\omega^2 R^2}{2g}\right)}{\left[1 - \left(\frac{A}{A_0}\right)^2\right]}}$$

Cálculo del volumen del paraboloide

$dV = \pi x^2 dz =$

$$dV = 2\pi x^2 \frac{\omega^2}{g} x dx = 2\pi \frac{\omega^2}{g} x^3 dx$$



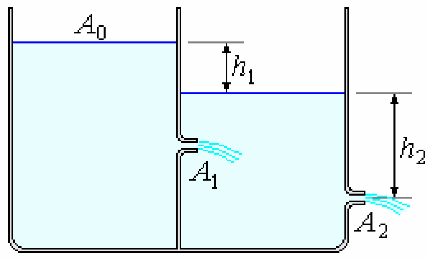
$$V = \int dV = \int_{x=0}^{x=R} \pi x^2 dz$$

$$z = \frac{\omega^2}{g} x^2$$

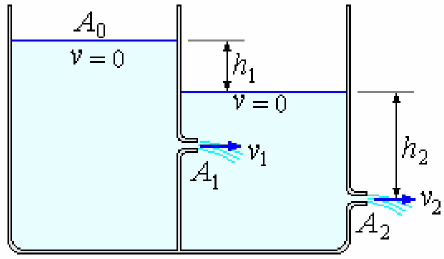
$$dz = 2\frac{\omega^2}{g} x dx$$

$$V = \int dV = \int_{x=0}^{x=R} 2\pi \frac{\omega^2}{g} x^3 dx = \frac{\omega^2}{2g}\pi R^4$$

Ejemplo 143. Dos grandes depósitos contiguos tienen en sus paredes los orificios A_1 y A_2, por los que circula el líquido.
a) Hallar las velocidades de salida v_1 y v_2, en A_1 y A_2.
b) Calcular la relación que ha de existir entre h_1 y h_2 al establecerse el régimen permanente.



Solución.
a)



En el régimen permanente (las alturas h_1 y h_2 no cambian) se tiene:
El líquido Δm en A_0 respecto a la salida A_2, tiene una energía:

$E_0 = \Delta mg(h_1 + h_2)$

En A_1 pierde energía porque queda destruida en el líquido en reposo del segundo depósito.

$$E_p = \frac{1}{2}\Delta m v_1^2$$

La energía que se tiene en la salida A_2 es

$$E_2 = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2$$

Por conservación de la energía
Energía en A_0 = Energía en A_2 + Energía perdida

$E_0 = E_2 + E_p$

$$\Delta mg(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 + \frac{1}{2}\Delta m v_1^2$$

$$\Rightarrow v_1^2 + v_2^2 = 2gh_1 + 2gh_2 \quad (1)$$

También tenemos que la velocidad de salida v_2 en A_2 depende solamente la altura h_2 del líquido en el depósito.

$v_2 = \sqrt{2gh_2} \quad \Rightarrow v_2^2 = 2gh_2$ (2)

De (1) y (2) obtenemos:

$v_1 = \sqrt{2gh_1}$

Las velocidades de salida v_1 y v_2, en A_1 y A_2 son

$v_1 = \sqrt{2gh_1}$ y $v_2 = \sqrt{2gh_2}$, respectivamente.

b) dividiendo v_1 entre v_2:

$$\frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_2}} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2}$$

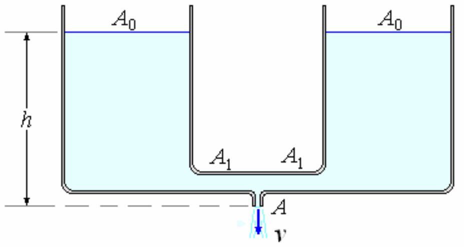
Por la ecuación de la continuidad

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

Finalmente:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{A_2^2}{A_1^2}$$

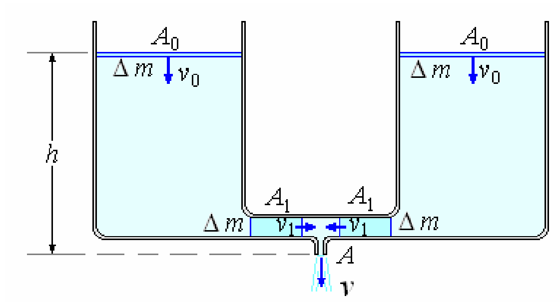
Ejemplo 144. Dos depósitos de agua idénticos, de sección A_0, están unidos por una tubería de sección A_1, por la que sale el líquido a través de un orificio A con la carga h. calcular la velocidad v de salida.



Solución.

Durante un tiempo Δt, desciende un Δm de líquido en cada depósito

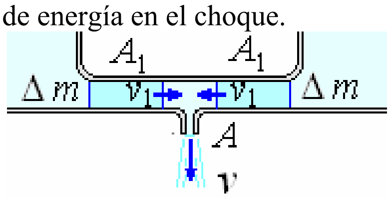
Por A sale $2\Delta m$



La energía en la parte superior es:

$$E_0 = \left(\frac{1}{2}\Delta m v_0^2 + \Delta m g h\right) + \left(\frac{1}{2}\Delta m v_0^2 + \Delta m g h\right)$$

Perdida de energía en el choque.



Los elementos Δm que circulan por las secciones A_1, con velocidad v_1 chocan entre si produciéndose una pérdida de energía

$$E_p = \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m(-v_1)^2 = \Delta m v_1^2$$

Por la ecuación de continuidad

$$A_1 v_1 + A_1 v_1 = A v \Rightarrow 2A_1 v_1 = A v$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{A}{2A_1} v$$

Poniendo v_1 en función de v_2, la pérdida de energía es:

$$E_p = \Delta m v_1^2 = \Delta m \frac{A^2}{4A_1^2} v^2$$

Energía en la salida

$$E_s = \frac{1}{2} 2\Delta m v^2$$

Por conservación de la energía

Energía en la parte superior = Energía en la salida + energía perdida.

$$E_0 = E_s + E_p$$

$$2\frac{1}{2}\Delta m v_0^2 + 2\Delta m g h = \frac{1}{2}2\Delta m v^2 + \Delta m \frac{A^2}{4A_1^2} v^2$$

$$\Rightarrow v_0^2 + 2gh = v^2 + \frac{A^2}{4A_1^2} v^2 \Rightarrow$$

$$v_0^2 + 2gh = v^2 + \frac{A^2}{4A_1^2} v^2$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{A^2}{4A_0^2} v^2 + 2gh = v^2 + \frac{A^2}{4A_1^2} v^2 \Rightarrow$$

$$v^2 + \frac{A^2}{4A_1^2} v^2 - \frac{A^2}{4A_0^2} v^2 = 2gh$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{A^2}{4A_1^2} - \frac{A^2}{4A_0^2}\right) v^2 = 2gh$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{A^2}{4}\left(1 + \frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_0^2}\right)}}$$

Ejemplo 145. Un bombero lanza agua con su manguera hacia un incendio formando un ángulo de 45º con la horizontal. El agua que emerge del pitón penetra horizontalmente por una ventana del tercer piso que se encuentra a una altura h = 10 m.

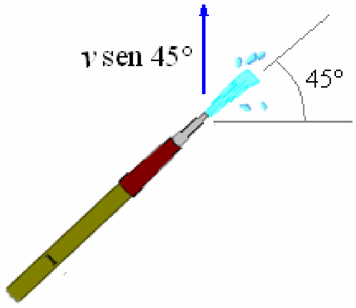
La manguera que transporta el agua desde el carro bomba tiene un diámetro D de 6 cm y concluye en un pitón cuya abertura tiene un diámetro d de 1,5 cm.

a) ¿Cuantos litros de agua emergen del pitón por minuto?

b) ¿Cuál es la presión p que debe soportar la manguera (en atmósferas)?

Solución.

a) Sea v la velocidad con que emerge el agua del pitón.



La velocidad hacia arriba será:

$$v_v = v\,\text{sen}45° = v\frac{\sqrt{2}}{2}$$

El agua alcanza a subir una altura h = 10 m, luego su velocidad es:

$$v_v = \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

Luego: $v\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2gh} \Rightarrow$

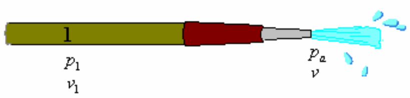
$$v\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2(9,8)(10)} \Rightarrow v = 19,8 \text{ m/s}$$

El volumen de agua que emerge del pitón por minuto:

$$V = vt\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = (19,8)(60)\pi\left(\frac{0,015}{2}\right)^2$$

$= 0,212\ \text{m}^3$ =212 litros.

b) A la salida del pitón la presión es la atmosférica



Aplicando el principio de Bernoulli:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho g v_1^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho g v^2$$

Aplicando la ecuación de la continuidad:

$$A_1 v_1 = Av \Rightarrow v_1 = v\frac{A}{A_1} = v\left(\frac{1,5}{6}\right)^2 = \frac{v}{16}$$

Luego tenemos:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho g\left(\frac{v}{16}\right)^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho g v^2 \Rightarrow$$

$$p_1 - p_a = \frac{1}{2}\rho g v^2\left(1 - \frac{1}{16^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1000)(9,8)(19,8)^2(0,996)$$

$= 1913312,16$ Pa

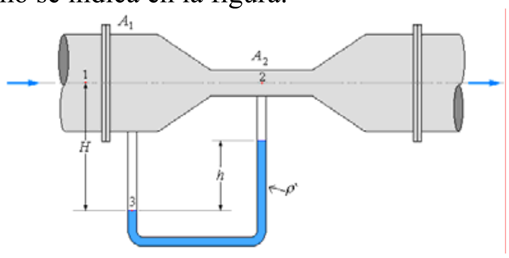
Como p_a = 101325 Pa

p_1 = 2014637,16 Pa

Aproximadamente 2 atm.

Ejemplo 146. El medidor de Venturi es un manómetro colocado en el tubo para medir la velocidad de flujo líquido

Un líquido de densidad ρ fluye por un tubo de sección transversal A_1. En el cuello el área se reduce a A_2 y se instala el tubo manométrico como se indica en la figura.



Solución.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y 2

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Como están a la misma altura

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

Por la ecuación de la continuidad

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2}v_1$$

Luego

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2}\right) \qquad (1)$$

Por otra parte, la presión en el, nivel 3 por la rama 1 es

$$p_3 = p_1 + \rho g H$$

y por la rama 2 es

$$p_3 = p_2 + \rho g(H - h) + \rho' g h$$

Luego

$$p_1 + \rho g H = p_2 + \rho g(H - h) + \rho' g h \qquad (2)$$

y $p_1 - p_2 = gh(\rho' - \rho)$

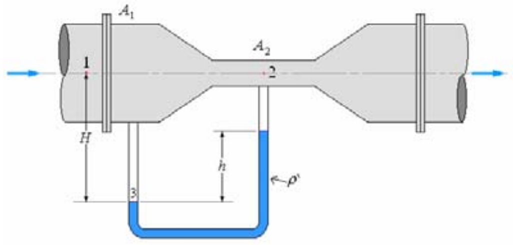
Igualando las expresiones (1) y (2)

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2\left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2}\right) = gh(\rho' - \rho)$$

Finalmente

$$v_1 = A_2\sqrt{\frac{2gh(\rho' - \rho)}{\rho\left(A_1^2 - A_2^2\right)}}$$

Ejemplo 147. La sección transversal del tubo de la figura tiene 8 cm^2 en las partes anchas y 4 cm^2 en el estrechamiento. Cada segundo salen del tubo 4 litros de agua a la atmósfera.



a) ¿Cuál es la velocidad en A_1 ?
b) El agua proviene de un gran depósito abierto. ¿A qué altura se encuentra el nivel de agua?
c) ¿Cuál es la diferencia de presión entre 1 y 2?
d) ¿Cuál es la diferencia de alturas entre las columnas de mercurio del tubo en U?

Solución.

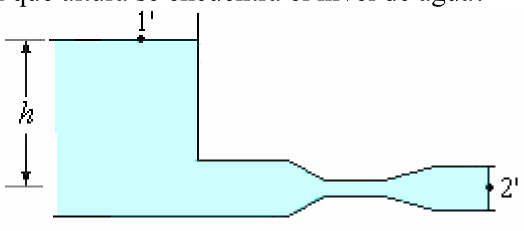
a) $G = 4\dfrac{\text{litros}}{\text{s}} = 4\dfrac{\text{dm}^3}{\text{s}}$ = 4 x 10^{-3} m^3/s

$$A_1 = 8\,\text{cm}^2 = 8\times10^{-4}\ \text{m}^2$$

$$G = Av \Rightarrow$$

$$v_1 = \frac{G}{A_1} = \frac{4\times10^{-3}}{8\times10^{-4}} = 5\ \text{m/s}$$

b) El agua proviene de un gran depósito abierto. ¿A qué altura se encuentra el nivel de agua?



$$p_{1'} + \rho g y_{1'} + \frac{1}{2}\rho v_{1'}^2 = p_{2'} + \rho g y_{2'} + \frac{1}{2}\rho v_{2'}^2$$

$p_{1'} = p_{2'} = p_a$, $y_{'1} = h$, $y_{2'} = 0$. $v_{'1} = 0$,

$$v_{2'} = v_2 = \frac{4\times10^{-3}}{8\times10^{-4}} = 5$$

Reemplazando:

$$p_a + \rho h + \frac{1}{2}\rho v(0)^2 = p_a + \rho g(0) + \frac{1}{2}\rho(5)^2$$

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho(5)^2 \Rightarrow h = \frac{25}{2g} = 1{,}28\ \text{m.}$$

c)

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$y_1 = y_2 = 0$,

$v_1 = 5$ m/s , $v_2 = \dfrac{A_1}{A_2}v_1 = \dfrac{8}{4}5$ = 10 m/s

$$p_1 + \rho g(0) + \frac{1}{2}\rho(5)^2 = p_2 + \rho g(0) + \frac{1}{2}\rho(10)^2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(100 - 25) = \frac{1000}{2}(75)$$

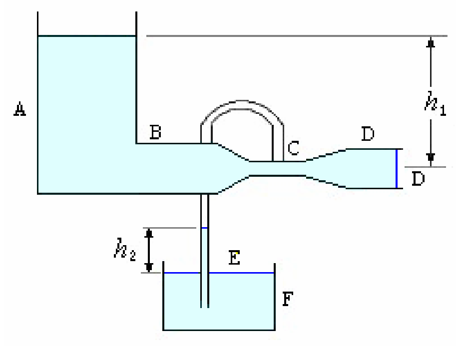
= 37500 Pa

d) ¿Cuál es la diferencia de alturas entre las columnas de mercurio del tubo en U?

$$p_1 - p_2 = \rho_{Hg} g\Delta y$$

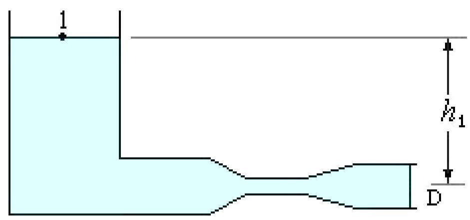
$$\Rightarrow \Delta y = \frac{p_1 - p_2}{\rho_{Hg} g} = \frac{37500}{(13600)(9{,}8)} = 0{,}28\ \text{m.}$$

Ejemplo 148. Dos depósitos abiertos muy grandes A y F, véase la figura, contienen el mismo líquido. Un tubo horizontal BCD que tiene un estrechamiento en C, descarga agua del fondo del depósito A, y un tubo vertical E se abre en C en el estrechamiento y se introduce en el líquido del depósito F. Si la sección transversal en C es la mitad que en D, y si D se encuentra a una distancia h_1 por debajo del nivel del líquido en A.
a) ¿Cuál es la velocidad de salida del líquido?
b) ¿Cuál es la presión en el estrechamiento (C)?
c) ¿A qué altura h_2 alcanzará el líquido en el tubo E? Expresar la respuesta en función de h_1.



Solución.

a) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y D:



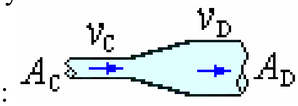
$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Con $p_1 = p_2 = p_{atm}$, $h_2 = 0$, $v_1 \approx 0$

$$p_{atm} + \rho g h_1 + 0 = p_{atm} + 0 + \frac{1}{2}\rho v_D^2 \Rightarrow$$

$$v_D = \sqrt{2gh_1}$$

b) Por la ecuación de continuidad entre las secciones C y D



:

$$A_C v_C = A_D v_D$$

Como $A_D = 2A_C \Rightarrow v_C = 2v_D$

Por la ecuación de Bernoulli:

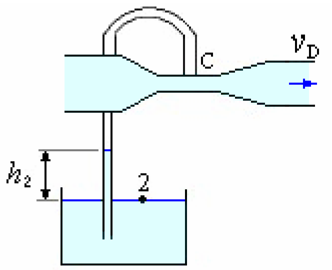
$$p_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2 = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_D^2 \Rightarrow$$

$$p_C = p_{atm} - \frac{1}{2}\rho\left(4v_D^2 - v_D^2\right) \Rightarrow$$

$$p_C = p_{atm} - \frac{3}{2}\rho v_D^2$$

Finalmente $p_C = p_{atm} - 3\rho g h_1$

c) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 2 y C:



Como $p_{atm} = p_C + \rho g h_2$

Comparando con $p_C = p_{atm} - 3\rho g h_1$

Obtenemos $h_2 = 3h_1$

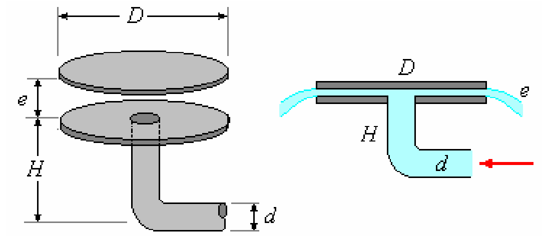
Ejemplo 149. Una regadera de jardín tipo hongo de las características mostradas en la figura, tiene la velocidad de salida del agua de 1m/s. El diámetro del hongo *D* es de 30cm, el diámetro de la tubería horizontal *d* es de 5 cm, la altura *H* del tramo vertical es de 20 cm, y el espacio entre los platos del hongo *e* es igual a 2 cm.

a) Encontrar el caudal de agua en la tubería horizontal.

b) Calcular la velocidad en el tramo horizontal

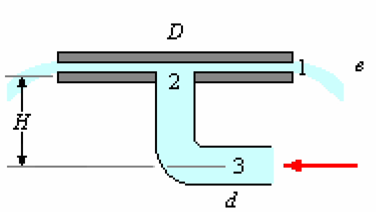
c) Calcular la presión en la parte más alta del tubo vertical

d) Calcular la presión en cualquier punto del tramo horizontal.



Solución.

El gráfico indica los puntos de interés del problema.



a) El caudal de agua en la tubería horizontal.

$$G = A_1 v_1 = A_2 v_2 = A_3 v_3$$

$$A_1 v_1 = \pi D e = (\pi 0{,}3)(0{,}02)$$

$= 0{,}019$ m³/s

b) La velocidad en el tramo horizontal

Como $A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{0{,}006\pi}{0{,}025^2\pi} = 9{,}6 \text{ m/s}$$

Siendo $A_2 = A_3 \Rightarrow$

$v_3 = v_2 = 9{,}6$ m/s

c) La presión en la parte más alta del tubo vertical

Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$y_1 = y_2$$

$$p_a + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\Rightarrow p_2 = p_a - \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

$v_1 = 1$ m/s, $v_2 = 9{,}6$ m/s, $p_a = 1{,}013 \text{ x } 10^5$ Pa

Reemplazando valores:

$$p_2 = 1{,}013 \times 10^5 - \frac{1}{2}10^3\left(9{,}6^2 - 1^2\right)$$

$= 0{,}5572 \text{ x } 10^5$ Pa

d) La presión en cualquier punto del tramo horizontal.

$p_3 = p_2 + \rho g H = 0{,}5572 \text{ x } 10^5 - 10^3$ (9,8)(0,20)

$= 0{,}5376 \text{ x } 10^5$ Pa

Ejemplo 150. Un tubo que conduce un fluido incompresible cuya densidad es $1{,}30 \text{ x } 10^3$

kg/m^3 es horizontal en h_0 = 0 m. Para evitar un obstáculo, el tubo se debe doblar hacia arriba, hasta alcanzar una altura de h_1 = 1,00 m. El tubo tiene área transversal constante. Si la presión en la sección inferior es p_0 = 1,50 atm, calcule la presión p_1 en la parte superior.

Solución.

Según lo que predice la ecuación de continuidad, al tener área transversal constante, no debe cambiar la velocidad del fluido en su interior, por tanto:

$v_0 = v_1 = v$

En consecuencia, aplicando la ecuación de Bernouilli a puntos en la parte superior y la parte inferior, se tiene:

$$p_0 + \rho g h_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$p_0 + \rho g h_0 = p_1 + \rho g h_1$$

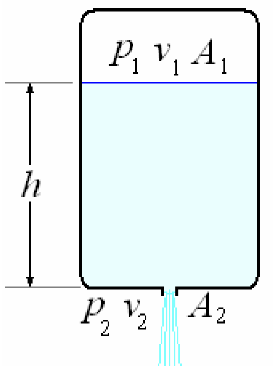
De donde

$$p_1 = p_0 + \rho g (h_0 - h_1)$$

p_1 = 1,5 (1,013 x 10^5) + 1300 x 9,8 (0 -1,0) = 1,374 x 10^5 N/m^2

¡La presión bajó desde 1,5 atm hasta 1,37 atm! Esta conclusión parece contradecir lo encontrado en el efecto Venturi, donde las presiones eran inversamente proporcionales a las velocidades. Sin embargo, ha de recordarse que aquel era cierto bajo la restricción de líneas de flujo horizontales, en las que no hubiera diferencias significativas en la energía potencial del fluido en movimiento.

Ejemplo 151. Un tanque cilíndrico de 1,2 m de diámetro se llena hasta 0,3 m de profundidad con agua. El espacio encima del agua está ocupado con aire, comprimido a la presión de 2,026 x 10^5 N/m^2. De un orificio en el fondo se quita un tapón que cierra un área de 2,5 cm^3. Calcular la velocidad inicial de la corriente que fluye a través de este orificio. Encontrar la fuerza vertical hacia arriba que experimenta el tanque cuando se quita el tapón.



Solución.

Cuando el fluido sale del tanque, de acuerdo al tercer principio de Newton, reacciona con una fuerza hacia arriba sobre el tanque de igual magnitud, pero de dirección opuesta a la fuerza con que es expulsado. Por otro lado, el segundo principio de Newton establece que el impuso que recibe el fluido expulsado, debe ser equivalente al cambio en su cantidad de movimiento.

Justo al ser soltado la cantidad de movimiento del líquido es cero, pero dt segundos más tarde, habrá sido expulsado un elemento de líquido de masa dm, que tendrá una velocidad v_2 en dirección hacia abajo.

En consecuencia:

$$dp = v_2 dm = v_2(\rho dm) = v_2 \rho (A_2 dy)$$

$$\Rightarrow dp = v_2 \rho A_2 (v_2 dt) = v_2^2 \rho A_2 dt$$

Esta cantidad de movimiento dirigida hacia arriba será la comunicada al tanque, la que debe ser igual al impulso de la fuerza que actúa sobre él, de modo que:

$$F dt = v_2^2 \rho A_2 dt$$

De donde:

$$F = v_2^2 \rho A_2$$

La velocidad de salida puede calcularse con la ecuación de Bernouilli:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Pero podemos suponer v_1 = 0 por continuidad y h_2 = 0, usándola como referencia:

De aquí:

$$v_2^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} + 2 g h_1$$

Por lo que:

$$F = \rho A_2 \left[\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} + 2 g h_1\right]$$

Reemplazando

p_1 = 2,026 x 10^5 N/m^2.

P_2 = 1,013 x 10^5 N/m^2.

Obtenemos:

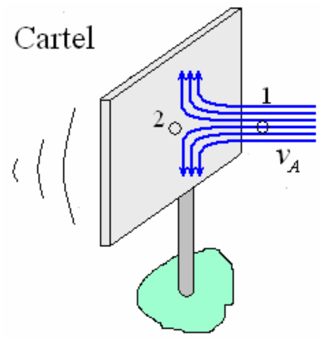
$$F = 10^3 (2,5 \times 10^{-6}) \left[\frac{2(2,026 - 1,013)10^5}{10^3} + 2(9,8)(0,3)\right]$$

$$= 52,12 \text{ N}$$

Cuando la presión p_1 es suficientemente grande, este es básicamente el mecanismo de propulsión de un cohete

Ejemplo 152. Calcular que fuerza ejerce un viento de 36 km / h sobre un cartel de 1 m^2 de superficie.

Solución.



ρ_{aire} es la densidad del aire ρ_{aire} = 1,3 kg/m^3.

v_A es la velocidad del aire en m/s

A_{cartel} es la superficie del cartel en m^2 .

El viento ejerce una fuerza al pegar sobre el cartel. Esa fuerza se puede calcular por Bernoulli.

Aplicando la ecuación de Bernoulli a 1 y 2.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$p_2 = p_a$, $v_2 = 0$, $y_1 = y_2$, $v_1 = v_A$

y_1 = 7,50 m, v_1 = 0, y_2 = 0, v_2 = 0

$$p_a + \frac{1}{2}\rho_{aire} v_A^2 = p_2 + 0$$

$$p_2 - p_a = \frac{1}{2}\rho_{aire} v_A^2$$

La fuerza del aire sobre el cartel es:

$$F = (p_2 - p_a)A_{cartel}$$

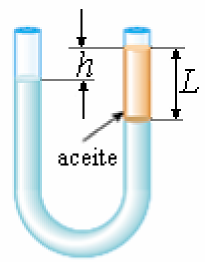
$$= \frac{1}{2}\rho_{aire} v_{aire}^2 A_{cartel}$$

Reemplazando valores:

$$F = \frac{1}{2}(1{,}29)(10)^2(1) = 65 \text{ N}$$

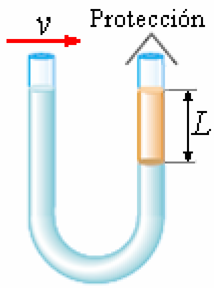
Ejemplo 153. Un tubo en U con ambos lados abiertos está parcialmente lleno con agua.

Aceite de densidad 750 kg/m^3 se echa al brazo derecho y forma una columna de alto L = 5,00 cm



a) Determine la diferencia h en las Alturas de las superficies de los dos líquidos.

b) El brazo derecho está protegido de cualquier movimiento de aire, mientras que el aire sopla en la parte superior del brazo izquierdo hasta que las superficies de los dos líquidos alcanzan la misma altura.

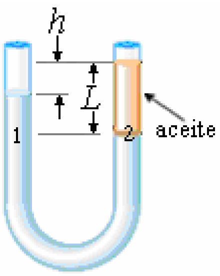


Determinar la velocidad del aire que sopla en el brazo izquierdo. Tome la densidad del aire como 1,29 kg/m^3

Solución.

Nota: Variación de la presión atmosférica con la altitud no se incluye en esta solución. Debido a las pequeñas distancias involucradas, este efecto no es importante en la respuesta final.

a) Considere la presión en los puntos 1 y 2 de la figura.



En el tubo de la izquierda

$$p_1 = p_a + \rho_{H_2O} g (L - h)$$

En el tubo de la derecha

$$p_2 = p_a + \rho_a g L$$

Por el principio de Pascal $p_1 = p_2$

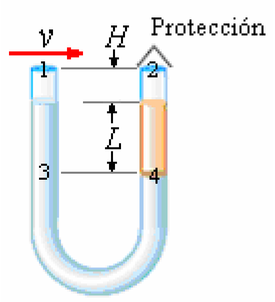
Luego, $p_a + \rho_{H_2O} g (L - h) = p_a + \rho_a g L \Rightarrow$

$$\rho_{H_2O} g (L - h) = \rho_a g L \Rightarrow$$

$$h = \frac{(\rho_{H_2O} - \rho_a)}{\rho_{H_2O}} L = \frac{(1000 - 750)}{1000}(0{,}05)$$

$= 0{,}0125$ m

b)



Aplicamos la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$y_1 = y_2,\ v_1 = v,\ v_2 = 0$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_{aire} v^2 = p_2 + 0 \Rightarrow$$

$$p_1 - p_2 = -\frac{1}{2}\rho_{aire} v^2 \qquad (1)$$

Ahora consideremos los puntos 3 y 4, ambos al nivel de la interfase aceite-agua del tubo derecho. Uso de la variación de presión con la profundidad en los fluidos estáticos, tenemos:

$$p_3 = p_1 + \rho_{aire} gH + \rho_{H_2O} gL \text{ y}$$

$$p_4 = p_2 + \rho_{aire} gH + \rho_{aceite} gL$$

Por el principio de Pascal $p_3 = p_4$

$$p_1 + \rho_{aire} gH + \rho_{H_2O} gL$$
$$= p_2 + \rho_{aire} gH + \rho_{aceite} gL \Rightarrow$$

$$p_2 - p_1 = \left(\rho_{H_2O} - \rho_{aceite}\right) gL \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2), obtenemos:

$$\frac{1}{2}\rho_{aire} v^2 = \left(\rho_{H_2O} - \rho_{aceite}\right) gL \Rightarrow$$

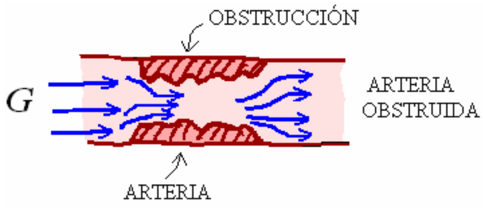
$$v = \sqrt{\frac{2gL\left(\rho_{H_2O} - \rho_{aceite}\right)}{\rho_{aire}}}$$

$$= \sqrt{2(9{,}8)(0{,}050)\left(\frac{1000 - 750}{1{,}29}\right)} = 13{,}8 \text{ m/s}$$

ARTERIA O VENA CON UNA OBSTRUCCIÓN

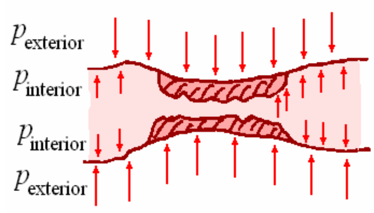
Parece que en la medicina es bastante común que las arterias o las venas se taponen con cosas tipo colesterol y demás.

Concretamente la situación es esta:



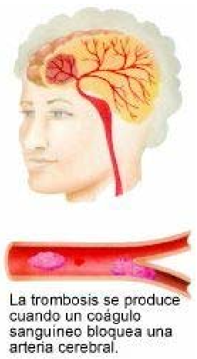
Si se le pregunta a una persona que cree que va a ocurrir con la arteria cuando se obstruye, la respuesta más común es esta: La sangre se va a frenar al chocar con la obstrucción, y va a empezar a presionar hacia fuera porque quiere pasar. Por lo tanto la arteria se va a dilatar y se va a formar como un globo.
Este razonamiento es muy lindo y muy intuitivo pero está MAL. Lo que pasa es justo al revés. El caudal que manda el corazón es constante. Este caudal no se frena por ningún motivo.
Para poder pasar por la obstrucción lo que hace la sangre es aumentar su velocidad.
(La velocidad aumenta porque el diámetro de la arteria disminuye).
Al aumentar la velocidad dentro de la arteria, la presión adentro tiene que disminuir. Pero afuera de la arteria la presión sigue siendo la misma. Entonces la presión de afuera le gana a la presión de adentro y la arteria se comprime.
¿Y qué pasa al comprimirse la arteria?

La obstrucción se cierra más. Esto provoca un aumento de la velocidad dentro de la obstrucción, lo que a su vez obliga a la arteria a cerrarse más todavía.
De esta manera, la arteria se va cerrando más y más hasta que sobreviene el COLAPSO.
Esto significa que la arteria tiende a cerrarse del todo e impide el pasaje de sangre.



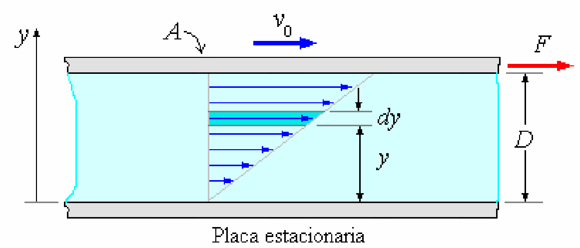
SITUACIÓN FINAL DE LA ARTERIA OBSTRUIDA

Esto es lo que ocurre cuando una persona tiene un ataque cardíaco. También pasa en el cerebro y en otros lados. Los médicos lo llaman trombosis. Dependiendo del tamaño y localización del trombo pueden variar algunos de los síntomas, dolor, isquemia, frialdad, ausencia de pulso, etc.



VISCOSIDAD

Viscosidad de un fluido es la resistencia de un fluido a una fuerza cortante. Propiedad que se debe fundamentalmente al tipo de interacción entre las moléculas del fluido.
Para poder definirla, debemos considerar el estudio de la ley de Newton de la viscosidad. Consideremos dos placas paralelas muy grandes como se muestra en la figura, el espacio entre las placas esta lleno con un fluido



La placa superior bajo la acción de una fuerza constan te F se mueve con una velocidad constante v_0. El fluido en contacto con la placa superior se adherirá y se moverá con velocidad v_0, y el fluido en contacto con la placa fija tendrá velocidad cero si la distancia D y la velocidad v_0 no son muy grandes, la variación de velocidad será lineal.
Experimentalmente se ha demostrado que la fuerza F varía directamente con la superficie A de la placa, con la velocidad v_0, e inversamente con la distancia D, o sea: $F \propto \dfrac{Av_0}{D}$

Más aún, en general, depende como varía v_0 con respecto a D, esto es: $\dfrac{v_0}{D} \Rightarrow \dfrac{dv}{dy}$

Luego: $F \propto A\dfrac{dv}{dy}$

Aquí introducimos una constante de proporcionalidad η, llamada la viscosidad absoluta (dinámica).

$$F = \eta A\frac{dv}{dy}$$

O sea la fuerza de viscosidad es proporcional al área A y al gradiente (derivada) de la velocidad. Los fluidos que cumplen con esta relación se llaman fluidos newtonianos.

Como $\eta = \dfrac{\dfrac{F}{A}}{\dfrac{dv}{dy}}$, sus unidades son: $\dfrac{N.s}{m^2}$

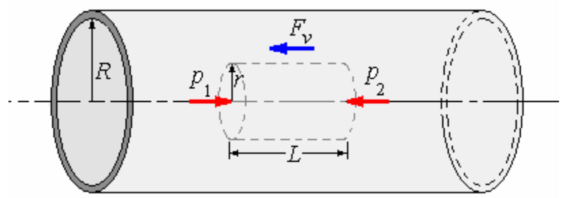
Otra unidad usada para medir la viscosidad es el poise (p): 1 p = 0,1 Ns/m^2
La siguiente tabla da la viscosidad para algunas sustancias:

Fluido	**Temp. ºC**	η **(N.s/m^2)**
Agua	0	1,79 x 10^{-3}
Agua	20	1,00 x 10^{-3}
Agua	100	0,28 x 10^{-3}
Alcohol	20	1,2 x 10^{-3}
Glicerina	0	12,11
Glicerina	20	1,49
Aire	-31,6	1,54 x 10^{-5}
Aire	20	1,83 x 10^{-5}
Aire	230	2,64 x 10^{-5}
Helio	20	1,94 x 10^{-5}

De la tabla se observa que la viscosidad es mucho mayor para los líquidos que para los gases. También se observa una fuerte dependencia de la temperatura. Para los líquidos la viscosidad disminuye al aumentar la temperatura, mientras que para los gases aumenta.

FLUJO VISCOSO EN UNA TUBERÍA CIRCULAR. La fórmula de Poiseuille.

Para poder encontrar la expresión para la caída de presión en una tubería circular debido a la viscosidad consideremos un elemento de fluido que se desplaza a velocidad constante como se muestra en la figura, corno el fluido no está acelerado, las fuerzas asociadas con la presión y la viscosidad se cancelan.



Aplicando la segunda ley de Newton al elemento, se tiene;

$$\sum F_x = 0$$

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - F_v = 0$$

Donde F_v e s la fuerza viscosa (Tangencial).

$$F_V = \left(\frac{F}{A}\right) \times (\text{área})$$

Por viscosidad $\eta = -\dfrac{F/A}{dv/dr} \Rightarrow \dfrac{F}{A} = -\eta \dfrac{dv}{dr}$

El signo menos indica que la velocidad disminuye con un incremento del radio r.
Siendo el área = $2\pi r L$, tenemos:

$$F_v = -\eta 2\pi r L \frac{dv}{dr}$$

Reemplazando

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 + 2\pi \eta L r \frac{dv}{dr} = 0$$

Sim1ificando y agrupando términos

$$(p_1 - p_2) = -\frac{2\eta L}{r} \frac{dv}{dr}$$

$$\Rightarrow -dv = \frac{(p_1 - p_2)}{2\eta L} r dr$$

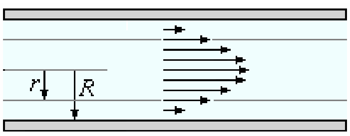
Integrando de r a R,

$$-\int_v^0 dv = \frac{(p_1 - p_2)}{2\eta L} \int_r^R r dr$$

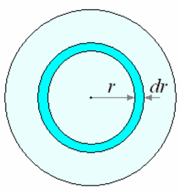
$$\Rightarrow v = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta L} \left(R^2 - r^2\right)$$

Esta ecuación corresponde a una parábola.
La velocidad máxima en la parte central ($r = 0$) es:

$$v_{\max} = \frac{(p_1 - p_2) R^2}{4\eta L}$$



Para determinar el gasto G, consideremos el fluido que pasa por un elemento diferencial de sección como se muestra en la figura siguiente:



El volumen que atraviesa el elemento en un tiempo dt es

$dV = v dA dt$, donde $dA = 2\pi r dr$

Luego

$$dV = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta L} \left(R^2 - r^2\right)(2\pi r dr) dt$$

y el gasto en la sección diferencial es

$$dG = \frac{dV}{dt} = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta L} \left(R^2 - r^2\right)(2\pi r dr)$$

Por lo tanto el gasto total, será

$$G = \int dG = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta L} \int_0^R \left(R^2 - r^2\right)(2\pi r dr)$$

$$= \frac{\pi}{8} \frac{R^4 (p_1 - p_2)}{\eta L}$$

Expresión conocida como la fórmula de Poiseuille.

Esta expresión podemos escribirla como

$$G = \pi R^2 \frac{\left[\dfrac{(p_1 - p_2) R^2}{4\eta L}\right]}{2}$$

La expresión entre corchetes corresponde a $v_{máx}$, luego

$$G = \pi R^2 \left(\frac{v_{máx}}{2}\right)$$

Como la velocidad promedio es $\bar{v} = \dfrac{v_{máx}}{2}$

Finalmente

$G = \pi R^2 \bar{v}$ = Área de la sección x velocidad promedio

Ejemplo 154. Un oleoducto de 30 cm de diámetro y con seis estaciones de bombeo igualmente espaciadas en sus 7,2 x 10^5 m, la primera estación está al inicio del oleoducto. El petróleo a presión atmosférica pasa en cada una de las estaciones y es lanzado a la siguiente estación a la a la máxima presión permitida, el petróleo finalmente llega al final a la presión atmosférica. La densidad y la viscosidad del petróleo son 850 kg/m^3 1 poise respectivamente, y 10^6 kg de petróleo son conducidos diariamente. ¿Cuál es la presión máxima permitida por el oleoducto?


Solución.

$$G = \frac{10^6 \text{ kg/dia}}{\left(850 \text{kg/m}^3\right)(24 \text{hr/dia})(60 \text{min/hr})(66 \text{s/min})}$$

$= 1{,}36 \times 10^{-2}$ m^3/s

La fórmula de Poiseuille:

$$G = \frac{\pi}{8}\frac{R^4}{\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}$$

$$\Rightarrow\ p_1 - p_2 = \frac{8G\eta L}{\pi R^4}$$

Entre dos estaciones de bombeo la distancia es:

$\dfrac{7{,}2\times 10^5}{6}$ = 1,2 x 10^5 m.

1 poise = 0,1 Ns/m^2

Luego la diferencia de presión entre las estaciones de bombeo es:

$$p_1 - p_2 = \frac{8\left(1{,}36\times 10^{-2}\,\text{m}^3/\text{s}\right)\left(0{,}1\text{Ns/m}^2\right)\left(1{,}2\times 10^5\,\text{m}\right)}{\pi(0{,}15\text{m})^4}$$

= 8,2 x 10^5N/m^2 = 8,1 atm

Como el oleoducto finalmente da el petróleo a presión atmosférica, la presión máxima permisible es 9,1 atm.

Ejemplo 155. Considere un oleoducto de 5 km y 50 cm de diámetro por el cual se desea bombear 1 m^3 por segundo. Si uno de los extremos está abierto a la presión atmosférica.

a) ¿Qué presión p_1 debe existir en el otro extremo? Suponga que la densidad del petróleo es 950 kg/m^3 y el coeficiente de viscosidad es 2 poises aproximadamente.

b) ¿Cual es la potencia *dW/dt (*energía por unidad de tiempo) disipada por la fricción interna originada por la viscosidad?

Solución.

a) La fórmula de Poiseuille:

$$G = \frac{\pi}{8}\frac{R^4}{\eta}\frac{(p_1 - p_2)}{L}$$

$$\Rightarrow\ p_1 - p_2 = \frac{8G\eta L}{\pi R^4}$$

$$G = 1\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

η = 2 poise = 0,2 Ns/m^2

R = 0,25 m

L = 5000 m

p_2 = 1 atmósfera = 1,013 x 10^5 Pa

Luego la diferencia de presión entre las estaciones de bombeo es:

$$p_1 - p_2 = \frac{8\left(1\,\text{m}^3/\text{s}\right)\left(0{,}2\text{Ns/m}^2\right)\left(5\times 10^3\,\text{m}\right)}{\pi(0{,}25\text{m})^4}$$

= 6,52 x 10^5N/m^2 = 6,44 atm

Como el oleoducto finalmente da el petróleo a presión atmosférica, la presión p_1 que debe existir en el otro extremo es 7,44 atm.

b) La potencia es

$$P = \frac{dW}{dt} = F\frac{dx}{dt} = Fv$$

Como $\sum F_x = 0$

La fuera de viscosidad la encontramos a partir de

$$p_1\pi R^2 - p_2\pi R^2 - F_v = 0\ \Rightarrow$$

$$F_v = (p_1 - p_2)\pi R^2$$

La velocidad media es

$$\bar{v} = \frac{R^2(p_1 - p_2)}{8\eta L}$$

Luego

$$P = F_v\bar{v} = (p_1 - p_2)\pi R^2\frac{R^2(p_1 - p_2)}{8\eta L}$$

$$= \frac{\pi R^4(p_1 - p_2)^2}{8\eta L} = G(p_1 - p_2)$$

Reemplazando valores:

$$G = \left(1\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right)\left(6{,}52\times 10^5\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)$$

= 6,52 x 10^3 W = 652 kW

La potencia es 652 kW.

FÓRMULA DE STOKES

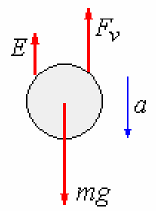
Una burbuja de aire el agua, partículas de polvo cayendo en el aire, objetos que caen en fluidos todos ellos experimentan la oposición de fuerzas viscosas. George Stokes encontró la relación para esta fuerza viscosa sobre un cuerpo en un fluido

$F_v = 6\pi R\eta v$, donde r es el radio, v la velocidad de la esfera y η el coeficiente de viscosidad.

Esta expresión se denomina fórmula de Stokes.

Medida del coeficiente de viscosidad

La fórmula de Stokes permite determinar el coeficiente de viscosidad de un líquido, midiendo la velocidad terminal de esferas cayendo en el fluido.



La esfera se mueve bajo la acción de las siguientes fuerzas: el peso, el empuje (se supone que el cuerpo está completamente sumergido en el seno de un fluido), y una fuerza de viscosidad.

El peso es el producto de la masa por la aceleración de la gravedad g. La masa es el producto de la densidad del material ρ' por el volumen de la esfera de radio R.

$$mg = \rho' \frac{4}{3}\pi R^3 g$$

De acuerdo con el principio de Arquímedes, el empuje es igual al producto de la densidad del fluido ρ, por el volumen del cuerpo sumergido, y por la aceleración de la gravedad.

$$E = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 g$$

La ecuación del movimiento será, por tanto:

$$mg - E - F_v = ma .$$

La velocidad límite, se alcanza cuando la aceleración sea cero, es decir, cuando la resultante de las fuerzas que actúan sobre la esfera es cero.

$$mg - E = F_v$$

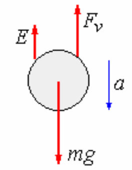
$$\rho' \frac{4}{3}\pi R^3 g - \rho \frac{4}{3}\pi R^3 g = 6\pi R \eta v_l$$

Despejamos la velocidad límite v_l

$$v_l = \frac{2g(\rho' - \rho)R^2}{9\eta}$$

De aquí: $\eta = \dfrac{2g(\rho' - \rho)R^2}{9v_l}$, ecuación que permite determinar el coeficiente de viscosidad de un líquido de densidad ρ, midiendo la velocidad límite de una esfera de radio R y densidad ρ'

Ejemplo 156. Una esfera de metal tiene una masa de 7,5 x 10^{-3} kg y un radio de 8,0 x 10^{-3} m. Un líquido viscoso tiene una densidad de 2,4 x 10^3 kg/m^3 y una viscosidad de 0,8 Ns/m^2. La esfera se suelta del reposo en el líquido.
a) Calcular la aceleración inicial de la esfera es.
b) Calcular la fuerza de viscosidad sobre la esfera, cuando la velocidad es 0,05 m/s
c) Calcular la velocidad Terminal de la esfera.
Solución.
a) La ecuación del movimiento de la esfera



$$mg - E - F_v = ma .$$

$$E = \rho_{li} \frac{4}{3}\pi R^3 g =$$

$$E = (2{,}4 \times 10^3)\frac{4}{3}\pi(8{,}0 \times 10^{-3})^3 g = 5{,}2 \text{ x } 10^{-3} g$$

$$F_v = 6\pi R \eta v$$

La velocidad inicial es cero, luego

$$mg - E = ma \Rightarrow$$

$$a = \frac{mg - E}{m} = \frac{(7{,}5 \times 10^{-3} - 5{,}2 \times 10^{-3})}{7{,}5 \times 10^{-3}} g$$

$$= 0{,}306 g = 3{,}0 \text{ m/s}^2$$

b) La fuerza de viscosidad sobre la esfera, cuando la velocidad es 0,05 m/s

$$F_v = 6\pi R \eta v = 6\pi(8{,}0 \times 10^{-3})(0{,}8)(0{,}05) = 6{,}0 \text{ x } 10^{-3} \text{ N}$$

c) Calcular la velocidad Terminal de la esfera.
La velocidad límite, se alcanza cuando la aceleración es cero, es decir, cuando la resultante de las fuerzas que actúan sobre la esfera es cero.

$$mg - E - F_v = 0 \Rightarrow mg - E = F_v$$

$$7{,}5 \times 10^{-3} g - 5{,}2 \times 10^{-3} g = 6\pi R \eta v_l$$

$$2{,}3 \times 10^{-3} g = 6\pi(8{,}0 \times 10^{-3})(0{,}8) v_l$$

Despejamos la velocidad límite v_l

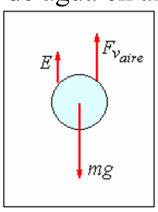
$$v_l = \frac{2{,}3 \times 10^{-3} g}{6\pi(8{,}0 \times 10^{-3})(0{,}8)} = 0{,}19 \text{ m/s}$$

Ejemplo 157. Deduzca la razón entre las velocidades límites para una gota microscópica de lluvia que desciende a través del aire en relación a la de una gota de aire también microscópica de igual tamaño, que asciende en un vaso de agua
Datos: Viscosidades a 20º C
η_{agua}= 0,1005 x10^{-3} kg/ms, η_{aire} = 0,018x10^{-2} kg/m s
Fuerza debido a la viscosidad del medio sobre un objeto esférico de radio R.

$$F_v = 6\pi R \eta v$$

Solución.
La velocidad límite, se alcanza cuando la aceleración sea cero, es decir, cuando la resultante de las fuerzas que actúan sobre la esfera es cero.

Caída de una gota de agua en aire.



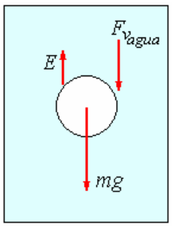
$$mg - E = F_v$$

$$\rho_{agua}\frac{4}{3}\pi R^3 g - \rho_{aire}\frac{4}{3}\pi R^3 g = 6\pi R\eta_{aire} v_{lGota}$$

Despejamos la velocidad límite v_{lGota}

$$v_{lGota} = \frac{2g(\rho_{agua} - \rho_{aire})R^2}{9\eta_{aire}}$$

Burbuja de aire que asciende en el aire.



$$mg - E = -F_v$$

$$\rho_{aire}\frac{4}{3}\pi R^3 g - \rho_{agua}\frac{4}{3}\pi R^3 g - = -6\pi R\eta_{agua} v_{lBurbuja}$$

Despejamos la velocidad límite $v_{lBurbuja}$

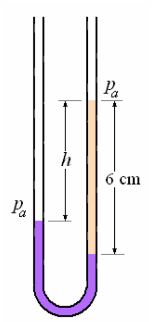
$$v_{lBurbuja} = -\frac{2g(\rho_{aire} - \rho_{agua})R^2}{9\eta_{agua}} = \frac{2g(\rho_{agua} - \rho_{aire})R^2}{9\eta_{agua}}$$

$$\frac{v_{lGota}}{v_{lBurbuja}} = \frac{\dfrac{2g(\rho_{agua} - \rho_{aire})R^2}{9\eta_{aire}}}{\dfrac{2g(\rho_{agua} - \rho_{aire})R^2}{9\eta_{agua}}} = \frac{\eta_{agua}}{\eta_{aire}}$$

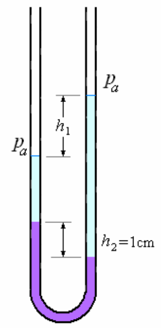
$$= \frac{1,005\times 10^{-3}}{0,018\times 10^{-3}} = 55,83$$

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

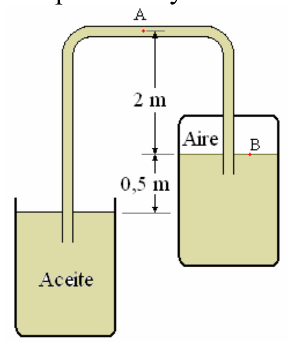
1. Un tubo en U que está abierto en ambos extremos se llena parcialmente con agua. Después se vierte kerosén de densidad 0,82 g/cm^3 en uno de los lados que forma una columna de 6 cm de altura. Determine la diferencia de altura h entre las superficies de los dos líquidos.



2. Un tubo en U que está abierto en ambos extremos se llena parcialmente con mercurio. Después se vierte agua en ambos lados obteniéndose una situación de equilibrio ilustrada en la figura, donde h_2 = 1 cm. Determine la diferencia de altura h_1 entre las superficies de los dos niveles de agua.



3. Considere el sistema de la figura donde el tubo está lleno de aceite de densidad ρ = 0,85gcm^3. Uno de los recipientes está abierto a la atmósfera y el otro está cerrado y contiene aire. Determine la presión en los puntos A y B.

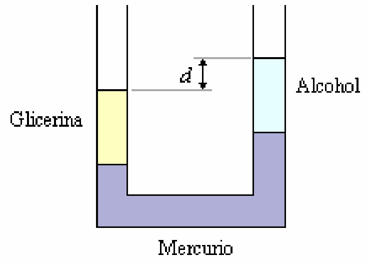


Respuesta

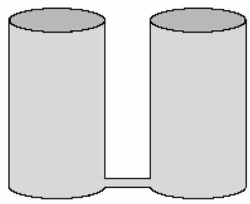
p_A = 82475 Pa

p_B = 99135 Pa

4. Considere un vaso comunicante de 2 cm^2 de sección transversal que contiene mercurio ρ_{Hg} = 13,6 g/cm^3). A un lado se echan 360 gramos de glicerina ρ_{gl} = 1,2 g/cm^3) y en el otro 1/4 de litro de alcohol ρ_{al} = 0,8 g/cm^3). Encuentre el desnivel *d* que existe entre los niveles superiores de la glicerina y el alcohol. Haga un grafico cualitativo de la presión "hidrostática" en función de la profundidad para cada uno de los dos "brazos" del vaso comunicante (grafique las dos curvas en el mismo grafico).

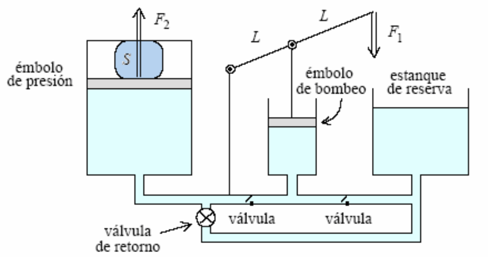


5. Considere un sistema de vasos comunicantes formado por dos tubos de sección transversal de 50 cm^2 que están unidos por un tubito corto de sección transversal muy pequeña (o sea, para efectos de este problema podemos despreciar la cantidad de fluido que se encontrará en el tubito). Inicialmente en este sistema de vasos comunicantes se encuentran dos litros de agua.



a) Encuentre la altura en que se encontrarán las interfases entre los líquidos y el aire en cada uno de los tubos si en uno de los tubos se le agregan 2 litros de un líquido cuya densidad es 0,8 g/cm^3.
b) Para la situación descrita en la parte a), encuentre la presión en el fondo de los vasos comunicantes.
c) Encuentre la altura en que se encontrarán las interfases entre los líquidos y el aire en cada uno de los tubos si en uno de los tubos, en lugar de 2, se le agregan 3 litros de un líquido cuya densidad es 0,8 g/cm^3.

6. Considere una prensa hidráulica (ver figura adjunta). Sean R_1 = 25 cm y R_2 = 150 cm los radios de los émbolos de bombeo y de presión, respectivamente.
Si de la palanca que actúa sobre el embolo de bombeo se tira con una fuerza F_1 = 100 N, ¿qué fuerza ejercerá el émbolo de presión sobre el objeto S?



7. Un cuerpo de material desconocido pesa 4N en el aire y 2,52 N sumergido en agua. Encuentre la densidad del material.

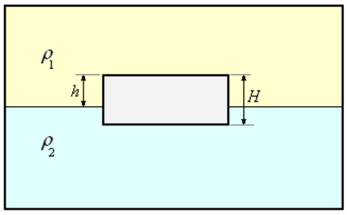
8. Una balsa de área *A*, espesor *h* y masa 400kg flota en aguas tranquilas con una inmersión de 5cm. Cuando se le coloca una carga sobre ella, la inmersión es de 7,2 cm. Encuentre la masa de la carga.

9. Un cuerpo homogéneo prismático de 20cm de espesor, 20 cm de ancho y 40 cm de longitud se mantiene en reposo sumergido en agua a 50cm de profundidad a aplicar sobre él una tensión de 50 N.
¿Cuánto pesa en aire y cuál es su densidad relativa?

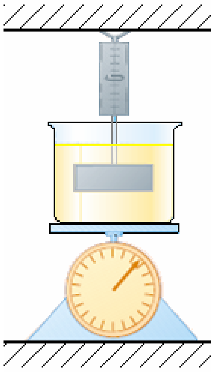
10. ¿Qué fracción del volumen de una pieza sólida de metal de densidad relativa al agua 7,25 flotará sobre un mercurio de densidad relativa 13,57?

11. Un tarro cilíndrico de 20cm de diámetro flota en agua con 10cm de su altura por encima del nivel del agua cuando se suspende un bloque de hierro de 100 N de peso de su fondo. Si el bloque se coloca ahora dentro del cilindro ¿qué parte de la altura del cilindro se encontrará por encima de la superficie del agua? Considere la densidad del hierro 7,8gcm^3.

12. Un bloque con una sección transversal de área *A*, altura *H* y densidad ρ, está en equilibrio entre dos fluidos de densidades ρ_1 y ρ_2 con $\rho_1 < \rho < \rho_2$. Suponga que los fluidos no se mezclan. Determine la fuerza de empuje sobre el bloque y encuentre la densidad del bloque en función de ρ_1, ρ_2, *H* y *h*.



13. Un vaso de 1,00 kg que contiene 2,00 kg de aceite (densidad = 916,0 kg/m^3) reposa sobre una balanza. Un bloque de hierro de 2,00 kg se suspende de un dinamómetro y se sumerge completamente en el aceite como se muestra en la figura. Determinar las lecturas de la balanza y del dinamómetro.



Respuesta
Lectura del dinamómetro. 17,3 N.
Lectura de la balanza 31,7 N

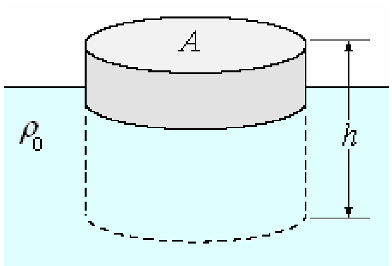
14, En una piscina se encuentra flotando una balsa que tiene forma de un paralelepípedo de densidad relativa (al agua) de 0,3 y cuyas dimensiones son 120 cm de largo, 100 cm de ancho y 25 cm de alto. Determine
a) La fuerza de empuje.
b) La altura medida desde el fondo de la balsa a la que se encuentra la línea de flotación.
c) El peso que debería colocarse sobre la balsa para que esta se hundiera 6cm más.

15. El rey Hierón de Siracusa pidió a Arquímedes que examinara una corona maciza que había ordenado hacer de oro puro. La corona pesaba 10 kg en el aire y 9,375 kg sumergida en agua. Arquímedes concluyó que la corona no era de puro oro. Asumiendo que en su interior contenía plata, ¿cuánto oro tenia la corona de Hierón? La densidad del oro es 19,3 g/cm^3; la de la plata, 10,5 g/cm^3.

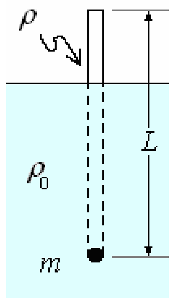
16. Considere un vaso de agua lleno hasta el borde, con un trozo de hielo flotando en el. Por supuesto que el hielo, al flotar, sobrepasará por encima del borde del vaso. A medida que el hielo se derrite. ¿Se derramará el vaso?

Suponga ahora que en el mismo vaso flota un pequeño barco de juguete hecho de latón. Suponga además que el barquito tiene un pequeño orificio por el cual penetra agua, haciendo que el barquito lentamente se llene de agua. Durante este proceso, o sea mientras el barco se llena de agua pero aún no se hunde, el nivel del agua del vaso ¿baja, queda a igual altura o sube? Cuando finalmente el barquito se hunde, que pasa con el nivel del agua?

17. Considere un cilindro de masa M, área A y altura h, que flota "parado" en un liquido de densidad ρ_0.
a) ¿Hasta qué alguna estará sumergido el cilindro en el líquido?
b) Si el recipiente que contiene le líquido es muy grande (por ejemplo, un lago), ¿qué trabajo debe realizarse para sacar el cilindro del líquido?
c) ¿Varía la respuesta si el recipiente que contiene el líquido es un tambor cilíndrico de área A_0?



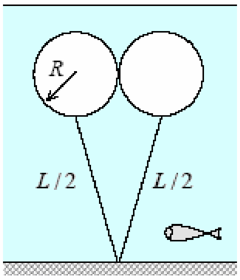
18. Considere una varilla de madera muy liviana, de largo L, sección transversal A y densidad ρ, que se hace flotar en el agua (designe la densidad del agua por ρ_0).
a) Convénzase de que no es posible que la varilla flote "parada".
b) Para lograr que la varilla flote parada, agreguémosle una masa puntual m en el extremo inferior.
¿Cual es la mínima masa m que debe agregarse para lograr el objetivo?



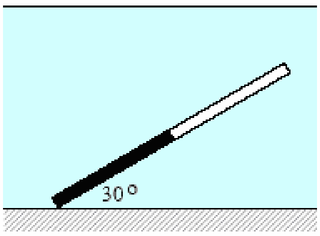
19. ¿Qué volumen de helio se requiere si debe elevarse un globo con una carga de 800 kg (incluido el peso del globo vacío)? Las densidades del aire y del helio, a la presión de una atmósfera, son ρ_{aire} = 1,29 kg/m^3 y ρ_{He} = 0,18 kg/m^3, respectivamente.

20. Se quiere confeccionar aluminio poroso (algo así como queso suizo) que se mantenga en suspensión en agua. Determine la razón entre el volumen de los poros y el volumen del aluminio poroso. (La densidad del aluminio 2700 kg/m^3).

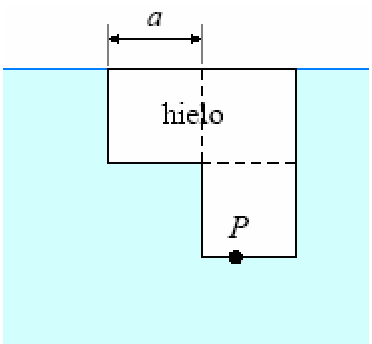
21. Dos globos esféricos inflados con aire, ambos de radio R, se unen mediante una cuerda de longitud L. Los dos globos se mantienen bajo el agua con el punto medio de la cuerda fijo al fondo. Calcular la fuerza de contacto entre los globos.



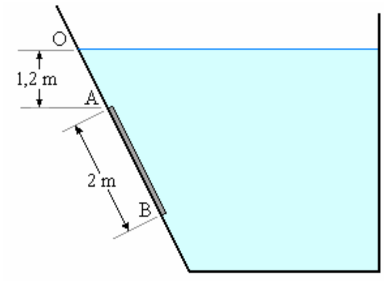
22. Una varilla yace en el fondo de un recipiente con agua formando un ángulo de 60º con la vertical. La varilla es de sección uniforme y está formada por dos pedazos iguales en longitud pero de distinta densidad. La densidad de una de las porciones de la varilla es la mitad de la del agua. Determine la densidad de la otra porción.



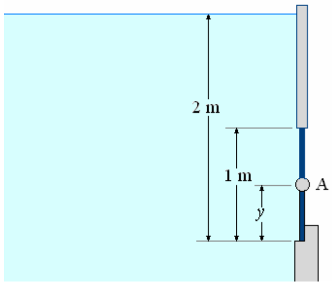
23. Considere un bloque de hielo (densidad = 920 kg/m^3) en forma de "L", formado de tres cubos de 25 cm por lado. Mediante un peso se desea sumergir el hielo en agua como se indica en la figura.
Determine la masa del peso y la ubicación en el hielo donde debería adherirse de modo que el hielo se mantenga justo sumergido lo más estable posible.



24. Repita el problema anterior si la línea OAB forma un ángulo de 30° respecto a la vertical.



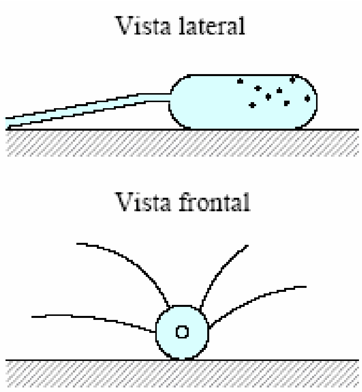
25. Determine la ubicación "y "del pivote fijo A de manera que justo se abra cuando el agua está como se indica en la figura.



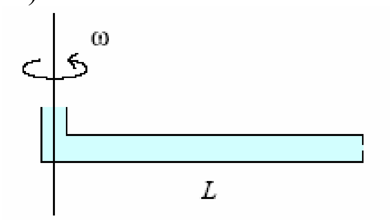
25. Una gotita de agua de 1 mm de radio se pulveriza en gotitas de 10^{-4} mm de radio. ¿En qué factor aumenta la energía superficial (debido a la tensión superficial)?

27. Considere dos placas planas de vidrio, separadas por una distancia de 0,1 mm, con un extremo sumergidas en agua en forma vertical. ¿Qué distancia se elevará el agua entre las placas debido a la capilaridad?

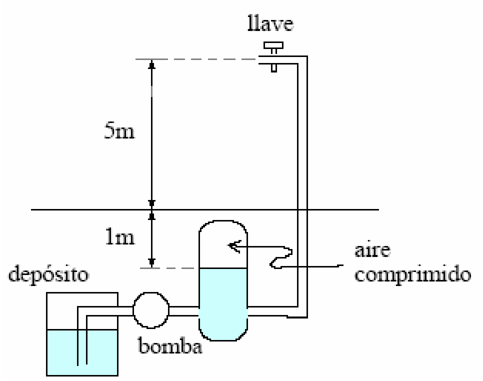
28. Un jardín es regado con un regador casero que consiste en una botella plástica, con numerosos agujeros de 1 mm de diámetro, acostada sobre el jardín y conectada aun a manguera. Asuma que una bomba de agua se encarga de generar un flujo de agua constante de 0,2 litros por segundo. ¿Cuántos agujeros debe tener la botella para que el agua llegue a mojar el prado a 8 metros de distancia de la botella? ¿Cuál es la presión al interior de la manguera si ésta tiene una sección transversal de 4 cm^2?



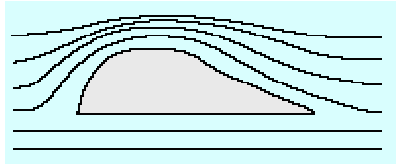
29. Un tubo de largo L, lleno de agua, gira en el plano horizontal en torno a un eje vertical que pasa por uno de sus extremos. En el extremo junto al eje, el tubo está abierto, coincidiendo por lo tanto la presión del fluido con la presión atmosférica. El tubo gira con velocidad angular constante ω. Si en el otro extremo, en cierto instante, se abre un pequeño orificio, ¿con qué velocidad emergerá el agua del tubo? (Especifique la rapidez y dirección de la velocidad.)



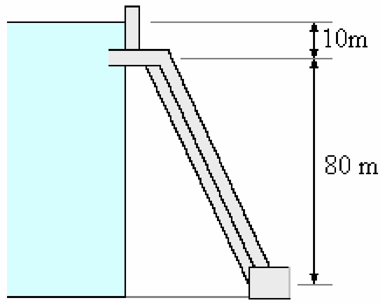
30. Para abastecer de agua a una casa de dos pisos se recurre a un "hidropack".
Este sistema consiste en un depósito subterráneo, una bomba y un cilindro con agua y aire. La bomba inyecta agua a presión al cilindro, que en su parte superior queda con aire comprimido. Un medidor de presión detiene la bomba cuando la presión del cilindro alcanza el valor deseado (el mismo medidor vuelve a encender la bomba cuando la presión baja de cierto nivel). Si el nivel del agua en el cilindro se sitúa 1 metro por debajo del suelo, calcule la presión necesaria en el aire comprimido para que una llave de 1 cm^2 de sección, a una altura de 5 metros sobre el suelo, entregue un caudal de 12 litros por minuto. (La sección transversal del cilindro es grande respecto a la de la llave.)
También encuentre la presión del aire al interior del cilindro.



31. La fuerza de sustentación de un avión moderno es del orden de 1000 N por metro cuadrado de ala. Suponiendo que el aire es un fluido ideal y que la velocidad del aire por debajo del ala es de 100 m/s, ¿cuál debe ser la velocidad requerida por sobre el ala para tener la sustentación deseada? (La densidad del aire es 1, kg/m^3.)

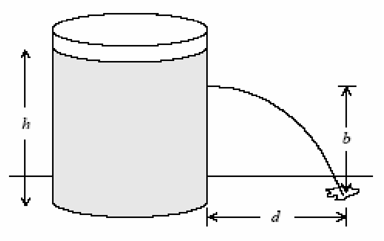


32. Considere la tubería que lleva el agua de una represa hacia una turbina. Suponga que la bocatoma se encuentra a 10 metros bajo el nivel de las aguas y que la turbina se encuentra 80 metros por debajo de ese nivel. Al inicio, es decir a la salida de la represa, la tubería tiene un diámetro de 40 cm. Suponga que el fluido se comporta como un fluido ideal.
a) ¿Cuál es el diámetro máximo que puede tener la tubería en su extremo inferior para que no se produzcan cortes de la columna de agua al interior de la tubería?
b) ¿Cual sería la cantidad de agua que pasaría en ese caso por la tubería y cuál la velocidad del agua emergente?
c) Si el proceso de generación de energía eléctrica usando la presente turbina fuese 100% eficiente, ¿cuál sería la potencia de esta central? ¿Esto corresponde al consumo promedio de cuántas casas?
d) Haga un grafico cualitativo de la presión al interior de la tubería en función de la altura. ¿Cómo cambia esta presión si la sección de la tubería, en el punto emergente, se disminuye a la mitad? ¿A la centésima parte?



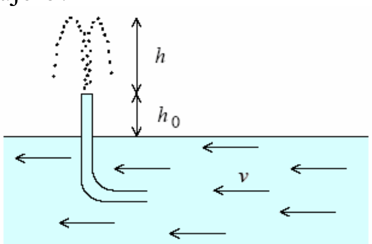
33. Considere una tubería de una calefacción. En el sótano su diámetro es de 4,0 cm y en el segundo piso, 5 metros más arriba, la tubería tiene un diámetro de sólo 2,6 cm. Si en el sótano una bomba se encarga de bombear el agua con una velocidad de 0,5 m/s bajo una presión de 3,0 atmósferas, ¿cuál será la rapidez de flujo y la presión en el segundo piso?

34. Suponga que el nivel de un líquido (agua) en un tambor tiene una altura h. A una altura b se hace una pequeña perforación lateral que permite que el agua emerja horizontalmente. ¿A qué altura debe hacerse la perforación para que el alcance d del agua se máximo?



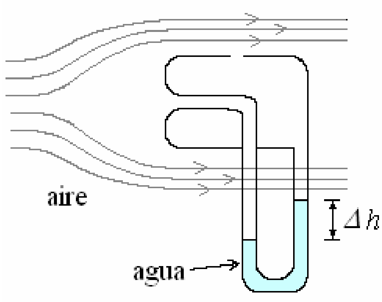
Respuesta
$b = h/2$.

35. En un torrente de agua se sumerge un tubo doblado, tal como se muestra en la figura adjunta. La velocidad de la corriente con respecto al tubo es v = 2,5 m/s.
La parte superior del tubo se encuentra a h_0 = 12 cm sobre el nivel del agua del torrente y tiene un pequeño agujero.
¿A qué altura h subirá el chorro de agua que sale por el agujero?



Respuesta
Llegará a 20 cm.

36. La figura muestra un tubo de Pitot, instrumento que se usa para medir la velocidad del aire. Si el líquido que indica el nivel es agua y Δh = 12 cm, encuentre la velocidad del aire. La densidad del aire es 1,25 kg/m^3.



Respuesta
43, m/s = 156 km/h.

37. Considere un oleoducto de 5 km y 50 cm de diámetro por el cual se desea bombear 1 m^3 por segundo. Si uno de los extremos está abierto a la presión atmosférica, ¿qué presión p_1 debe existir en el otro extremo? Suponga que la densidad del petróleo es 950 kg/m^3 y el coeficiente de viscosidad es 0,2 Pa s aproximadamente. ¿Cual es la potencia dW/dt (energía por unidad de tiempo) disipada por la fricción interna originada por la viscosidad?
Respuesta
p_1 7,5 atm; potencia 650 kW.

38. Un líquido viscoso, teniendo una viscosidad del equilibrio 80 poises, está entre dos placas separadas 4,0 centímetros. Ambas placas están en el movimiento, en direcciones opuestas, con velocidades de 3,0 centímetros/s, y el líquido entre ellas está en flujo laminar. El esfuerzo cortante aplicado al líquido, en unidades SI, es:
Respuesta
12

39. Encuentre la velocidad terminal que adquiere una esfera de cobre de 0,5 cm de diámetro, cuando cae en agua (ρ_{Cu} = 8,92 g/cm^3). ¿En qué factor disminuye la velocidad terminal si el diámetro se achica en un factor 10?