Cantidad de movimiento Angular:

1.- Una partícula de masa 2kg se mueve en el plano XY con una velocidad constante igual a $\vec{v} = (-\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})[\frac{m}{s}]$, si en cierto instante se halla en el punto $(3,4)$, Calcular su cantidad de movimiento con respecto a los siguientes puntos:(las distancias están medidas en metros.)

a) con respecto al origen de coordenadas.

b) con respecto al punto $(7,3)$

Resolución:

Su cantidad de movimiento es: $\vec{p} = 2\vec{v} \to \vec{p} = 2(-\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}) \to \vec{p} = -2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$

a) El vector posición del punto $(3,4)$ con respecto al origen es: $\vec{R} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$

Luego: $\vec{L} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 20k[J \cdot s]$

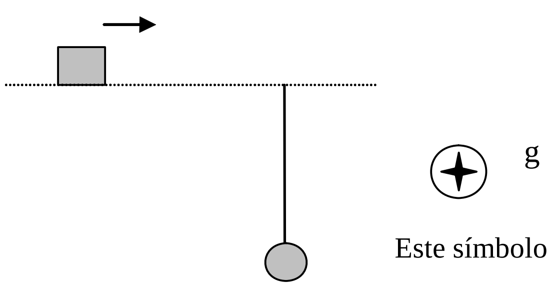
b) El vector posición del punto $(3,4)$ con respecto al punto $(7,3)$ es:

$\vec{R} = (3-7)\hat{\imath} + (4-3)\hat{\jmath} \to \vec{R} = (-4)\hat{\imath} + (-1)\hat{\jmath}$

Luego: $\vec{L} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -18\hat{k}[J \cdot s]$

....

2.- Un bloque de masa "m" se mueve con rapidez "v" choca y queda pegado en el extremo de la barra de masa despreciable y longitud "b" que está unida a un objeto de masa "m" en su otro extremo(según figura), inicialmente en reposo. Demuestre que la velocidad angular de rotación en torno a un eje que pasa por el centro de masa del conjunto así formado después del choque es: $\frac{v}{b}$



Este símbolo indica, vector g entrante

Por conservación de la cantidad de movimiento angular:

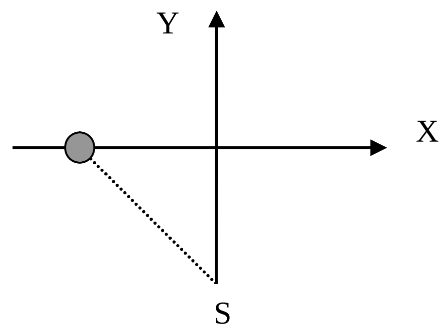
$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \to$

$m(\frac{b}{2})^2\left(\frac{v}{\frac{b}{2}}\right) = \left(2m(\frac{b}{2})^2\right)\omega_2 \to m\left(\frac{v}{\frac{b}{2}}\right) = (2m)\omega_2$, Solution is: $\omega_2 = \frac{1}{b}v$

....

3.- Una partícula de masa $m = 1[kg]$ se mueve sobre el eje x con rapidez $v = 12[\frac{m}{s}]$ tal como se indica en la figura. Entonces el momentum angular de la partícula respecto al punto S es en unidades S.I. igual a: $-60\hat{k}$

Otros datos: El punto S, se encuentra en $(0,-5)$ y el ángulo entre el eje Y y la línea punteada es de 60°



Como $\vec{p} = m\vec{v} \to \vec{p} = 1 \cdot 12\ \hat{\imath}\left[\frac{kg{\cdot}m}{s}\right] \to \vec{p} = 12\ \hat{\imath}\left[\frac{kg{\cdot}m}{s}\right]$

y el vector $\vec{R}$ de posición dela partícula con respecto al punto S es :$\vec{R} = -5\tan 60^\circ\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$

y ya que $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} = [-5\tan 60^\circ, 5, 0] \times [12, 0, 0] = -60\ \hat{k}\left[m \cdot \frac{kg{\cdot}m}{s}\right]$

$\vec{L} = -60\ \hat{k}\left[\frac{kg{\cdot}m^2}{s}\right]$

Recuerde que:$\left[\frac{kg{\cdot}m^2}{s}\right] = \left[\frac{kg{\cdot}m^2{\cdot}s}{s^2}\right] = \left[\frac{kg{\cdot}m}{s^2} \cdot m \cdot s\right] = [N \cdot m \cdot s] = [J \cdot s]$

Adicicionalmente, se puede demostrar que este resultado no depende de la distancia entre la partícula y el origen de coordenadas, si ésta se mide a lo largo del eje X. Para el cálculo de $\vec{L}$, es bueno recordar la multiplicación usando determinante.

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -5\tan 60^\circ & 5 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -60k$$

....

4.- Demuestre que el momento angular de una partícula de masa "m", que lleva una velocidad constante $\vec{v} = (a\hat{\imath} + b\hat{\jmath})[\frac{m}{s}]$, con respecto a un punto cualquiera de la línea recta: $y - b = k(x - a)$, es cero. ¿Por qué se da siempre este resultado?

Sea (q, r) un punto de la línea recta $y - b = \frac{b}{a}(x - a)$, entonces se cumple: $r - b = \frac{b}{a}(q - a)$, Solution is: $r = b + \frac{b}{a}(q - a)$ y el vector posición es entonces: $\vec{R} = q\hat{\imath} + (b + \frac{b}{a}(q - a))\hat{\jmath}$

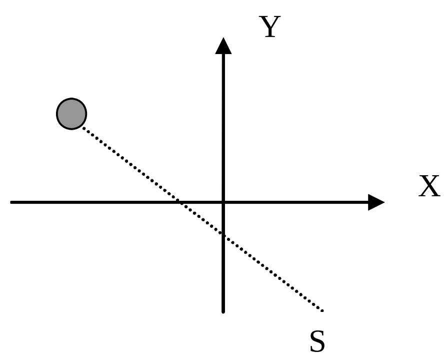
$$\vec{L} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ q & b + \frac{b}{a}(q-a) & 0 \\ ma & mb & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Resulta que $\vec{v}$ y $\vec{R}$, son paralelos, y el producto cruz de dos vectores paralelos o alojados en la misma línea recta, es siempre nulo

....

5.- Demuestre que el momento angular de una partícula de masa "m" constante,y que lleva una velocidad constante $\vec{v} = (a\hat{\imath})[\frac{m}{s}]$ a lo largo de la línea recta $y = h$ con una posición en cualquier punto de ella , con respecto al punto (c,d). depende solamente de la distancia entre la línea recta $y = h$ y el punto (c,d); es decir sólo del valor $|h-d|$ ¿Por qué se da siempre este resultado?

Esta aseveración es una generalización del resultado obtenido en el problema anterior.



Sea el punto (a,h) la posición de la partícula en un cierto instante.

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a-c & h-d & 0 \\ ma & 0 & 0 \end{vmatrix} = -ma(h-d)\hat{k}$$

....

6.- Un estudiante de masa $m_h = 75[kg]$ se encuentra en el Laboratorio . Inicialmente en reposo sobre el borde de una plataforma circular de radio $R = 2[m]$ y masa $m_p = 10[kg]$ para verificar la conservación de la cantidad de movimiento angular lanza con una velocidad tangencial al borde de la plataforma un objeto de masa $m_{obj} = 2[kg]$, adquiriendo una velocidad de rotación $\omega = \frac{1}{4}[\frac{rad}{s}]$ ¿Cuál es la velocidad del objeto respecto del laboratorio?

$$(I\omega)_i = (I\omega)_F \rightarrow 0 = (\tfrac{1}{2} \cdot m_p \cdot R^2 + m_h \cdot R^2) \cdot \tfrac{1}{4} - m_{obj}R^2\omega_{obj}$$
$$(\tfrac{1}{2} \cdot m_p \cdot R^2 + m_h \cdot R^2) \cdot \tfrac{1}{4} = m_{obj}R^2\omega_{obj}$$
$$(\tfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot R^2 + 75 \cdot R^2) \cdot \tfrac{1}{4} = 2R^2\omega_{obj} \rightarrow 20R^2 = 2R^2\omega_{obj}$$

$\omega_{obj} = 10[\frac{rad}{s}] \to v_{obj} = R\omega_{obj} \to v_{obj} = 2 \cdot 10 \to v_{obj} = 20[\frac{m}{s}]$

....

7.- Una partícula de 0.4 kg es lanzada desde el origen con una velocidad $v = 100\frac{m}{s}$ y un ángulo $\theta = 15^{\circ}$. Cuando pasa por el punto más alto de su trayectoria , la magnitud del torque respecto del origen es $1000[N \cdot m]$. Comprobar esta aseveración.

El vector posición de la partícula en cualquier instante viene dado por: $\vec{R} = (xi + yj)[m]$, estando ella sometida a la fuerza peso igual a $\vec{F} = -4j[N]$ (observación: $mg = 0.4 \times 10 = 4.0\ [N]$)

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -4x\hat{k}[N \cdot m]$$

en donde "x" es la distancia del origen a la proyección del punto más alto sobre el eje X.

De la ecuación: $v_y = v_{oy} - gt \to 0 = 100\sin 15^{\circ} - 10t$,Solution is: $t = \frac{5}{2}\sqrt{6} - \frac{5}{2}\sqrt{2} = 2.5882$, es el tiempo necesario para llegar al punto más alto.

Y de la ecuación: $y = v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$ →se puede calcular la altura, pero por resultado obtenido, no es necesario calcularla.

Y de la ecuación: $x = v_{ox} \cdot t \to x = (100\cos 15^{\circ}) \cdot \left(\frac{5}{2}\sqrt{6} - \frac{5}{2}\sqrt{2}\right) = 250.0[m]$

por lo tanto:$\vec{\tau} = -4x\hat{k}[N \cdot m] \to \vec{\tau} = -4 \cdot 250\hat{k}[N \cdot m] \to \vec{\tau} = -1000\hat{k}[N \cdot m]$

....

8.- Un disco homogéneo (masa m y radio R)puede girar sin roce alrededor de su eje de simetría, manteniéndose horizontal.Una persona (masa $\frac{m}{3}$) está de pié en el borde del disco.El disco y la persona se encuentran inicialmente en reposo .Si la persona camina a lo largo del borde, desde P a Q (puntos diametralmente opuestos marcados en el disco), entonces el disco gira un ángulo igual a $\frac{2\pi}{5}[rad]$

$(I\omega)_{persona} = (I_{persona+disco})\omega_{disco} \to \left(\frac{m}{3}\right)R^2(\frac{\pi}{t}) = \left(\frac{1}{3}mR^2 + \frac{1}{2}mR^2\right)(\frac{\theta}{t})$, Solution is: $\theta = \frac{2}{5}\pi$

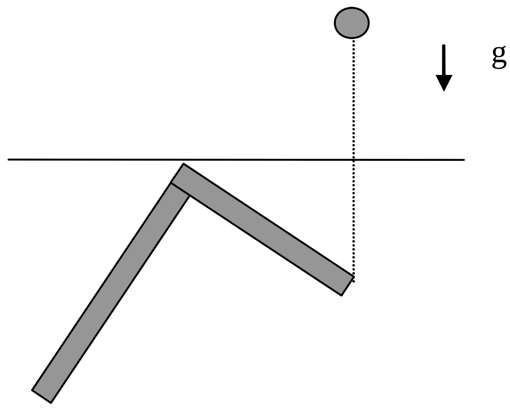
....

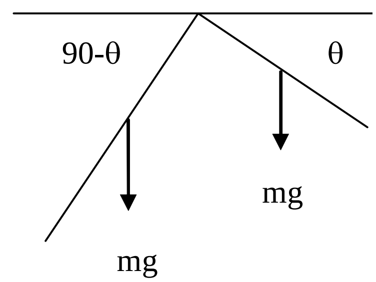
9.- Dos varillas homogéneas de igual masa m=3kg y de longitudes 4m y 3m respectivamnente , se sueldan por uno de sus extremos, formando una escuadra, la cual se cuelga de un clavo (sin roce), quedando en equilibrio. Una masa de 2 kg cae verticalmenteimpactando con rapidez v= 20 $\frac{m}{s}$ el extremo del lado más corto de la escuadra, donde queda pegada.

a) Calcule la tangente del ángulo que el lado corto forma con la horizontal en la posición de equilibrio antes del impacto.

b) Calcule la cantidad de movimiento angular del sistema respecto al clavo justo antes del impacto.

c) Calcule la pérdida de energía cinética del sistema durante el impacto





a)
$\sum M = 0 \to 2mg\cos(90^\circ - \theta) - \frac{3}{2}mg\cos\theta = 0 \to 2\cos(90^\circ - \theta) = \frac{3}{2}\cos\theta \to 2\sin(\theta) = \frac{3}{2}\cos\theta \to$
$\frac{\sin(\theta)}{\cos\theta} = \frac{3}{4} \to \tan\theta = \frac{3}{4}$, Solution is: $\theta = \pi X + (\arctan\frac{3}{4}) \mid X \in \mathbb{Z}$

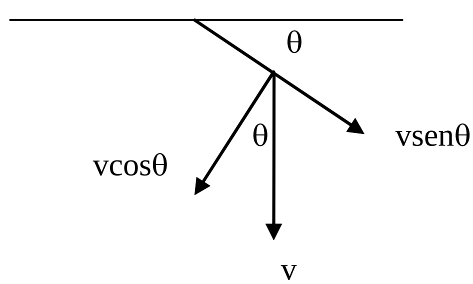
b) El vector posición de la masa antes del impacto, con respecto al clavo:
$\vec{R} = 3\cos\theta\hat{\imath} - 3\sin\theta\hat{\jmath}$

su velocidad es : $\vec{v} = -20j[\frac{m}{s}]$

su cantidad d movimiento lineal: $\vec{p} = 2\vec{v} \to \vec{p} = 2(-20j[\frac{m}{s}]) \to \vec{p} = -40j[\frac{m}{s}]$

luego : $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3\cos\theta & -3\sin\theta & 0 \\ 0 & -40 & 0 \end{vmatrix} = -(120\cos\theta)\hat{k}$

$\vec{L} = -120\cos(\arctan(\frac{3}{4}))\hat{k} = -96\hat{k}[J \cdot s]$



c) a partir de $(I\omega)_i = (I\omega)_F \to 2 \cdot 3^2 \cdot \frac{20}{3}\cos\theta = \left(\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4^2 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^2\right)\omega \to$

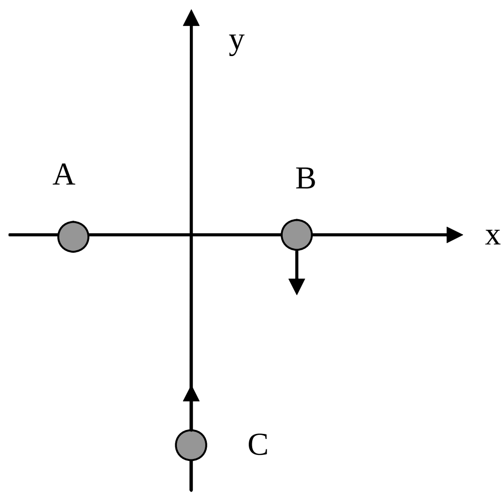
$120\cos\theta = 43\omega$, Solution is: $\omega = \frac{120}{43}\cos\theta$
$\omega = \frac{120}{43}\cos(\arctan\frac{3}{4}) = \frac{96}{43} = 2.2326[\frac{rad}{s}]$

Pérdida de Energía Cinética: $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}I\omega^2$
$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 20^2 - \frac{1}{2}\cdot 43\cdot\left(\frac{96}{43}\right)^2 = \frac{12\,592}{43} = 292.84[J]$

....

10.- Sobre una mesa horizontal lisa se encuentran tres masas puntuales tal como se muestra en la figura.Calcular el momentum angular del sistema respecto al centro de masa del mismo.Con los siguientes datos:

cuerpo	*masa*	*posición*
A	m	$(-b,0)$
B	m	$(b,0)$
C	m	$(0,-2b)$



Determinación del Centro de Masa:
Por simetría $C_x = 0$
$C_y = \frac{-bm+bm+2bm}{3m} = \frac{2}{3}b$
Determinación de la cantidad de movimiento lineal:
$\vec{p}_A = 0$
$\vec{p}_B = -mb\hat{j}$
$\vec{p}_C = 2mb\hat{j}$
Determinación de los vectores posición de cada masa con respecto al centro de masa:

cuerpo	*posición*	*centro de masa*	*vector posición*	*cant. de mov. lineal* $\vec{p}$
A	$(-b,0)$	$\left(0,\frac{2}{3}b\right)$	$\vec{R}_A = -bi - \frac{2}{3}bj$	0
B	$(b,0)$	$\left(0,\frac{2}{3}b\right)$	$\vec{R}_B = bi - \frac{2}{3}bj$	$-mvj$
C	$(0,-2b)$	$\left(0,\frac{2}{3}b\right)$	$\vec{R}_C = -\frac{8}{3}bj$	mvj

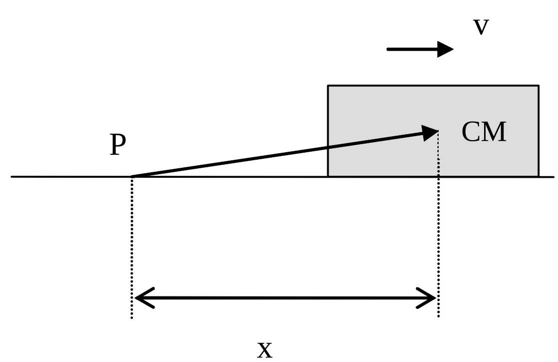
Cálculo del momentum angular: $\vec{L} = \sum\left(\vec{R}_i \times \vec{p}_i\right)$

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -b & -\frac{2}{3}b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -mv & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -\frac{8}{3}b & 0 \\ 0 & mv & 0 \end{vmatrix} = -bmvk$$

$$\vec{L} = -bmvk[J \cdot s]$$

....

11.- Un bloque homogéneo de masa m= 5kg , altura 10 cm y ancho 20 cm se desplaza con velocidad constante de 10 $\frac{m}{s}$ sobre una supeficie horizontal.Calcular la cantidad de movimiento angular con respecto al punto P.



$$\vec{p} = m\vec{v} \to \vec{p} = 5 \cdot 10i \to \vec{p} = 50i\left[\frac{kg \cdot m}{s}\right]$$

Tomemos como vector posición del centro de masa: $\vec{R} = (xi + 0.05j)[m]$

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & 0.05 & 0 \\ 50 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2.5k[J \cdot s]$$

Notabene: la distancia "x" no se conoce, pero no interviene en el cálculo por ser independiente de ella como se puede observar.

....

12.- Demuestre que el momento angular para una partícula de masa m que se mueve en una trayectoria circular de radio R con velocidad angular ω , se puede escribir como $I\omega$

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} \to \vec{L} = \vec{R} \times (m\vec{v}) \to L = R \cdot (mv) \cdot \sin 90^\circ \to$$
$$L = R \cdot (mv) \to L = R \cdot (mR\omega) \to L = mR^2\omega \to L = I\omega$$