Centroide,Centro de masa y Centro de gravedad

Definiciones:
Centroide: Centro geométrico.
Centro de masa: El punto en donde se puede considerar que se concentra toda la masa del cuerpo.
Centro de gravedad: es el punto por donde pasa el vector peso del cuerpo

1.- Calcular el C.M. de un sistema de partículas cuyas masas y posiciones en el plan,se resumen en la tabla adjunta.

$masa$	$posición\ en\ [m]$
$m_1 = 2[kg]$	$(2,4)$
$m_2 = 3[kg]$	$(-3,5)$
$m_3 = 4[kg]$	$(3,-6)$
$m_3 = 5[kg]$	$(-1,-2)$

$$C_x = \frac{\sum(m_i x_i)}{\sum(m_i)} = \frac{2\cdot2+3\cdot(-3)+4\cdot3+5\cdot(-1)}{2+3+4+5} = \frac{1}{7} = 0.14286$$

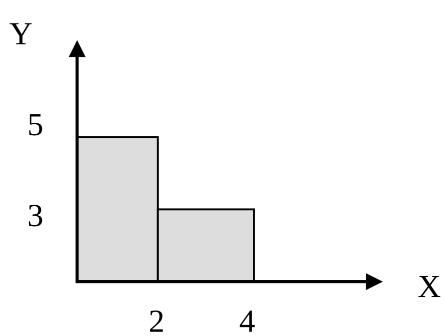
$$C_y = \frac{\sum(m_i y_i)}{\sum(m_i)} = \frac{2\cdot4+3\cdot(5)+4\cdot(-6)+5\cdot(-2)}{2+3+4+5} = -\frac{11}{14} = -0.78572$$

luego : $C\left(\frac{1}{7}[m], -\frac{11}{14}[m]\right)$

Notabene: Este tipo de cálculo, debería recordarle la forma cómo se calcula un promedio ponderado.En Estadística se puede observar frecuentemente este tipo de cálculo, cuando se trabaja con una tabla de frecuencias.

Otro ejemplo interesante es el cálculo del centroide de una figura plana compuesta:

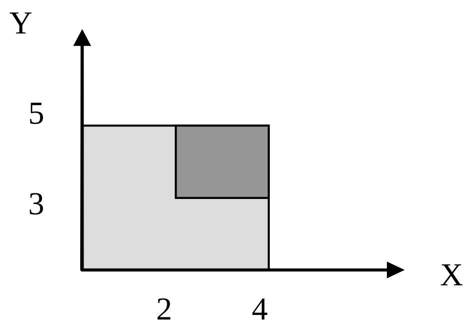
2.- Calcular el centroide de la figura plana que se muestra en la figura, siendo todas las medidas en $[cm]$

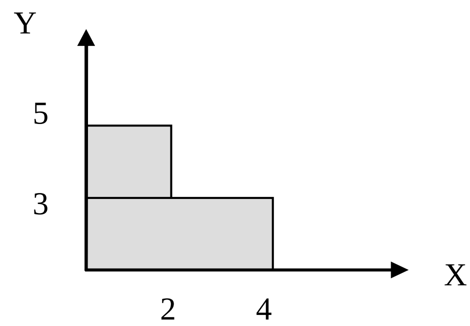


Para un rectángulo el centroide viene dado por $C\left(\frac{base}{2}, \frac{altura}{2}\right)$

Hay que recordar que se stá trabajando con un sistema de coordenadas, y todas las distancias son referidas al origen de coordenadas.

Este ejercicio se puede resolver de varias maneras:¿Cuáles son ellas?





Utilizando la primera división: $C_x = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2}$; $C_y = \frac{A_1 . y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2}$

realizando los cálculos necesarios en forma separada:

área	*eje x*	*eje y*
$A_1 = 2 \cdot 5 = 10[cm^2]$	$x_1 = 1[cm]$	$y_1 = \frac{5}{2}[cm]$
$A_2 = 2 \cdot 3 = 6[cm^2]$	$x_2 = 2 + 1 = 3[cm]$	$y_2 = \frac{3}{2}[cm]$

$C_x = \frac{10 \cdot 1 + 6 \cdot 3}{10 + 6} = \frac{7}{4}$

$C_y = \frac{10 \cdot \frac{5}{2} + 6 \cdot \frac{3}{2}}{10 + 6} = \frac{17}{8}$

finalmente: $C\left(\frac{7}{4}[cm], \frac{17}{8}[cm]\right)$

Tarea: Resolver el mismo ejercicio usando las otras formas posibles.

Cabe hacer notar que : Centroide, Centro de gravedad y Centro de masa, para un determinado cuerpo no siempre se ubican en el mismo punto.

Centroide: centro geométrico.

Centro de masa: el punto en donde se puede considerar que se concentra toda la masa del cuerpo.

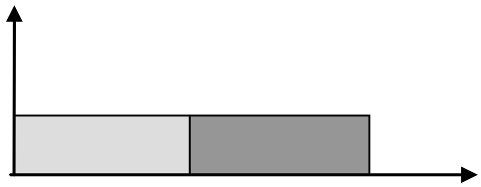
Centro de gravedad: es el punto por donde pasa el vector peso.

Para que los tres puntos coincidan se debe cumplir:

1.- que la masa del cuerpo esté distribuido uniformemente en toda la extensión del cuerpo.

2.- que el valor de la aceleración de gravedad sea constante en el sector en que se halla el cuerpo.

Pensemos en una lámina delgada formada por otras dos de distinta densidad, según muestra la figura:



Si las dos láminas tienen exactamente las mismas dimensiones, entonces el centro geométrico se ubica en el centro,es decir $C_{geométrico} = L$ sin embargo el centro de masa se ubica más cerca del extremo de la lámina de mayor densidad.(simbolizada por el rectángulo más obscuro.)

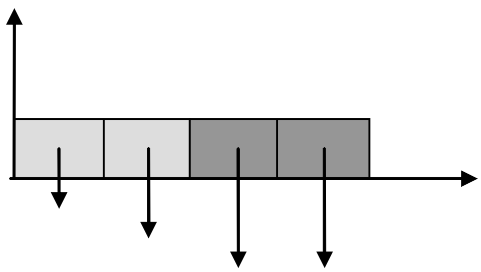
Con los datos : $m_1 = 2m$ y $m_2 = 6m$

y $L_1 = L_2 = L$

se tendrá para el centro de masa:

$C_m = \frac{m_1 \cdot \frac{L_1}{2} + m_2 \cdot \left(L_1 + \frac{L_2}{2}\right)}{m_1 + m_2} = \frac{5}{4}L = 1.25L$

Si dividimos la lámina compuesta en cuatro sectores iguales(cuestión arbitraria ésta, para ilustrar la idea que se quier analizar.)



Y suponemos que la aceleración de gravedad no es constante a lo largo de la lámina, pero sí dentro de cada sector. El centro de gravedad, se puede comprobar que está en un punto diferente del centroide o del centro de masa.

$C_G = \frac{\sum(x_i \cdot m_i . g_i)}{\sum(m_i . g_i)} = \frac{\frac{m_1}{2} \cdot \frac{L_1}{2} \cdot g_1 + \frac{m_1}{2} \cdot \left(\frac{L_1}{2} + \frac{L_1}{4}\right) \cdot g_2 + \frac{m_2}{2} \cdot \left(L_1 + \frac{L_1}{2}\right) \cdot g_3 + \frac{m_2}{2} \cdot \left(L_1 + \frac{L_1}{2} + \frac{L_1}{4}\right) \cdot g_3}{\frac{m_1}{2} \cdot g_1 + \frac{m_1}{2} \cdot g_2 + \frac{m_2}{2} g_3 + \frac{m_2}{2} \cdot g_3}$

y suponiendo que: $g_1 = 9.79; g_2 = 9.8; g_3 = 9.81$ (distintos valores de la aceleración de

gravedad.)

$C_G = 1.3753L$

Resumimos estos resultados en la siguiente Tabla:

Centroide	$C_{geométrico} = L$
Centro de Masa	$C_m = \frac{5}{4}L = 1.25L$
Centro de Gravedad	$C_G = 1.3753L$

Para cuerpos pequeños, la variación de la aceleración de gravedad (que también es pequeña) punto a punto sobre la supeficie terrestre, normalmente se desprecia, de allí tal vez la confusión existente entre el común de la gente tomar estos puntos como sinónimos, lo cual es un error.

Podría ser de importancia considerar las variaciones de la aceleración de gravedad en el diseño de un puente(un cuerpo muy grande), por ejemplo, de gran longitud, en una zona donde la variación de "g" sea notable.

En la práctica entonces centro de masa y centro de gravedad, se pueden considerar como coincidentes, no así con relación al centroide, ya que la diferencia allí sí es notable.

Una pequeña comparación:

$$\frac{C_m=\frac{5}{4}L=1.25L-C_{geométrico}=L}{C_{geométrico}=L} \rightarrow \frac{1.25L-L}{L} \times 100 = 25.0\%$$

$$\frac{C_m=\frac{5}{4}L=1.25L-C_G=1.3753L}{C_m=\frac{5}{4}L=1.25L} \rightarrow \left|\frac{1.25L-1.3753L}{1.25L}\right| \times 100 = 10.024\%$$

3.- Calcular el centroide de la figura plana compuesta mostrada en la figura,siendo todas las medidas en $[cm]$

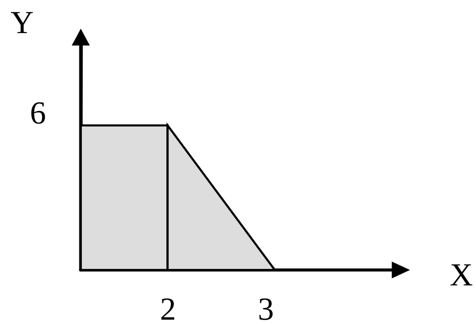


figura elemental considerada	$área\ cm^2$	$x_i[cm]$	$y_i[cm]$
para el rectángulo(fig1)	12	1	3
para el triángulo(fig2)	3	$2+1=3$	2

$C_x = \frac{12\cdot1+3\cdot3}{12+3} \rightarrow C_x = \frac{7}{5}cm = 1.4cm$

$C_y = \frac{12\cdot3+3\cdot2}{12+3} \rightarrow C_y = \frac{14}{5}cm = 2.8cm$

Como se observa, el Centroide se ubica en la zona donde hay "más área" que es la zona baja del triángulo.

Realizar la siguiente experiencia práctica.

1.- Recortar en un cartón la figura antes estudiada, con las mismas medidas(o bien multiplicadas por un factor cualquiera, por ejemplo 2)

2.- Practicar dos agujeros muy pequeños(con una aguja) en dos lugares cualesquiera de la figura compuesta.

3.- Pasar un hilo por uno de los agujeros y colgarla sobre una pared.

4.- Trazar con un lápiz la línea recta que sigue el hilo vertical sobre la figura recortada en cartón.

5.- Repetir los pasos 3 y 4 , con el otro agujero.

6.- Si ha tenido cuidado en dibujar las dos líneas rectas, puede verificar que el centroide calculado coincide con el punto de intersección de las dos líneas rectas.

7.- Esta experiencia se puede realizar con cualquiera figura plana.

8.- En este caso, centroide, centro de masa y centro de gravedad coinciden, siempre que el cartón sea homogéneo.

9.- Lo interesante de esto es que puede equilibrar esta figura en cartón sobre un clavo, si la cabeza de éste se hace coincidir con el punto marcado.

10.- Puede reptir esta experiencia con otras figuras.

Tarea:

Para la determinación el centro de masa (de gravedad más exactamente) de una papa (cuerpo con volumen, ya no es asimilable a una superficie plana.), se puede realizar el mismo procedimiento, pero se debe colgar de tres puntos diferentes, uno a la vez. (¿por qué?) (¿Cómo lo debe realizar?)(seguramente va a necesitar un cuchillo cartonero en un cierto momento.¿cuándo?)

4.- Calcular el centroide de la figura plana compuesta mostrada en la figura,siendo todas las medidas en $[cm]$

(se trata de un rectángulo unido con un semicírculo)

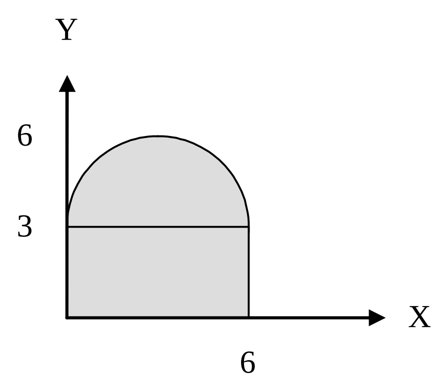


figura elemental considerada	$área\ cm^2$	$x_i[cm]$	$y_i[cm]$
para el rectángulo(fig1)	18	3	$\frac{3}{2}$
para el semicírculo(fig2)	$\frac{9}{2}\pi$	3	$3 + \frac{4 \cdot 3}{3\pi} = \frac{4}{\pi} + 3$

$C_x = \frac{18 \cdot 3 + \frac{9}{2}\pi \cdot 3}{18 + \frac{9}{2}\pi} = \frac{1}{\frac{9}{2}\pi + 18}\left(\frac{27}{2}\pi + 54\right) = 3.0 \rightarrow C_x = 3[cm]$ (este resultado es obvio por la simetría de la figura)

$C_y = \frac{18 \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{2}\pi \cdot \left(\frac{4}{\pi} + 3\right)}{18 + \frac{9}{2}\pi} = \frac{1}{\frac{9}{2}\pi + 18}\left(\frac{9}{2}\pi\left(\frac{4}{\pi} + 3\right) + 27\right) \rightarrow C_y = 2.72[cm]$

Relación entre centroide y centro de masa para una cuerpo homogéneo plano y de espesor despreciable.

La abscisa del centro de masa viene dado por:

$$C_x\left(centro\ de\ masa\right) = \frac{\int_R xdm}{\int_R dm} = \frac{\int_R x\rho dA}{\int_R \rho dA} = \frac{\rho\int_R xdA}{\rho\int_R dA} = \frac{\int_R xdA}{\int_R dA} = C_x(centroide)$$

en donde $dm = \rho dA,$ y considerando ρ que es constante.

análogamente se puede considerar $C_y\left(centro\ de\ masa\right) = C_y(centroide)$

El sub índice "R" indica la región en donde se va a integrar.

Como es de hacer notar, el centroide y el centro de masa coinciden si y solamente si el cuerpo es homogéneo(masa uniformemente distribuida)