Vectores

Espacio vectorial de las n-uplas de números reales.

La idea de emplear un número para situar un punto en una línea recta fue conocida por los antiguos griegos. En 1637 Descartes extendió esta idea, utilizando un par de números (a_1, a_2) para situar un punto en el plano, y una terna de números (a_1, a_2, a_3) para situar un punto en el espacio. En el siglo XIX los matemáticos A. Cayley (1821 –1895) y H.G.Grassmann (1809-1877) probaron que no era necesario detenerse en las ternas de números. Se puede también considerar una cuaterna de números
(a_1, a_2, a_3, a_4) , o más general, una n-upla de números reales $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ para todo entero $n \geq 1$. Una tal n-upla se llama punto n-dimensional o vector n-dimensional, siendo los números reales:
$a_1, a_2, \ldots, a_n$, las coordenadas o componentes del vector. El conjunto de todos los vectores n-dimensionales se llama espacio vectorial de n-uplas, o simplemente n-espacio, designándose por V_n

Notación : se designarán los vectores con letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$ y las componentes con las correspondientes minúsculas a, b, c..., de esta manera escribiremos : $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Para convertir V_n en una estructura algebraica , se introducen la definición de igualdad de vectores y dos operaciones : la adición de vectores y la multiplicación por escalares(números reales). De esta manera :

• Dos vectores A y B de V_n son iguales si sus componentes correspondientes son iguales:
es decir $A = B \Leftrightarrow a_1 = b_1; a_2 = b_2; a_3 = b_3; \ldots\ldots\ldots a_n = b_n$

• La suma $A + B$ se define como el vector obtenido sumando las componentes correspondientes : es decir $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots\ldots\ldots, a_n + b_n)$

• si $c \in \mathbb{R}$ (c es un escalar) se define el producto $A \cdot c$ o bien $c \cdot A$ por
$c \cdot A = (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n)$

A partir de estas definiciones es sencillo comprobar los siguientes teoremas :

• $A + B = B + A$
• $A + (B + C) = (A + B) + C$
• $c(dA) = (cd)A$
• $c(A + B) = cA + cB$

• $(c+d)A = cA + dA$

existencia del vector cero o nulo $O = (0,0,0,\ldots\ldots 0)$
existencia del vector opuesto de $A = (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ es el vector denotado por $-A = (-a_1, -a_2, \ldots\ldots, -a_n)$
posibilidad de la sustracción de vectores, definida por $A - B = A + (-B)$

Producto escalar o interior :

para dos vectores : $A = (a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_n)$ y $B = (b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, b_n)$
se define : $A \cdot B = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_nb_n$, siendo este resultado un número real.
otra manera de verlo es:
$A \cdot B = \|A\| \cdot \|B\| \cos\theta$ (para el caso específico de vectores en tres dimensiones)

Propiedades de este producto (teoremas)

1.- $A \bullet B = B \bullet A$
2.- $A \bullet (B + C) = A \bullet B + A \bullet C$
3.- $c(A \bullet B) = (cA) \bullet B = A \bullet (cB)$
4.- $A \bullet A \geq 0 \;\; si \;\; A \neq 0$
5.- $A \bullet A = 0 \; si \; A = O$
6.- desigualdad de Cauchy – Schwarz : $(A \bullet B)^2 = (A \bullet A)(B \bullet B)$
7.- Módulo o longitud o norma de un vector : $A = \sqrt{(A \bullet A)} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
ejemplo: la norma o módulo del vector $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ es igual a: $\|A\| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{38}$

Propiedades de la norma de un vector :

1.- $\|A\| \geq 0$
2.- $c\|A\| = \|cA\|$

Desigualdad triangular : $\|A + B\|^2 \leq \|A\| + \|B\|$

Ortogonalidad de vectores en V_n:
dos vectores A y B en V_n son ortogonales (perpendiculares) si A• B $=$ 0

Ángulo entre dos vectores: $\theta = \frac{arccos[(A \bullet B)}{\|A\| \cdot \|B\|}$,con: $0 \leq \theta \leq \pi$

Vectores coordenados unitarios :

En V_n , se definen los n vectores:
$e_1 = (1,0,0,0,\ldots 0)$; $e_2 = (0,1,0,0,\ldots,0)$; $e_3 = (0,0,1,0,\ldots,0)$; ....;
$e_n = (0,0,0,0,\ldots,1)$
como vectores coordenados unitarios.

en V_3 ,se acostumbra utilizar : i,j,k como letras representantes de los vectores coordenados unitarios, es decir : $i = (1,0,0)$; $j = (0,1,0)$; $k = (0,0,1)$

¿ Por qué se les llaman vectores unitarios ?
Con lo anterior: cualquier vector, por ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ se puede escribir como: $2i + j + 4k$
con la siguiente idea puesta en práctica:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 2i + 1j + 4k$$

Vector unitario según una direción: Se define el vector unitario en la dirección del vector A
como: $\hat{a} = \frac{1}{\|A\|} \cdot A$, en general, cualquier vector se puede escribir como: $A = \|A\|\hat{a}$
teorema : Un vector en V_n ; $A = (a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_n)$ se puede expresar en la forma :
$A = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + \ldots\ldots\ldots + a_ne_n$;
en particular en V_3 : $A = (a_1, a_2, a_3) = a_1i + a_2j + a_3k$
consecuencias : $i \bullet i = 1$; $j \bullet j = 1$; $k \bullet k = 1$; $i \bullet j = 0$; $j \bullet k = 0$; $k \bullet i = 0$
ejemplo: $\begin{pmatrix} 2i & 1j & 4k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3i & 4j & 1k \end{pmatrix} = 2$

Producto vectorial :

Siendo los vectores : $A = (a_1, a_2, a_3)\ y\ B = (b_1, b_2, b_3)$, vectores en V_3
se define como el producto A x B = (a2 b3 – a3 b2 , a3 b1 – a1 b3 , a1 b2 – a2 b1) que resulta ser un vector perpendicular a A y a B respectivamente.
teoremas :
1.- $A \times B = -(B \times A)$
2.- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
3.- $c(A \times B) = (cA) \times B = A \times (cB)$
4.- $A \bullet (A \times B) = 0$
5.- $A \times B = 0$ si y sólo si A y B son linealmente dependiente y si son ambos no

nulos se tiene que A y B son paralelos.

6.- identidad de Lagrange : $\|A+B\|^2 \leq \|A\|^2 \cdot \|B\|^2 - A \cdot B$

consecuencias :

$i \times i = 0 \qquad j \times j = 0 \qquad k \times k = 0 \qquad i \times j = k \qquad j \times k = i \qquad k \times i = j$

producto vectorial expresado como determinante :

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$A \times B = j(a_y b_z - a_z b_y) - j(a_x b_z - b_x a_z) + k(a_x b_y - a_y b_x)$

ejemplos:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -14 & 11 \end{pmatrix} = -15i - 14j + 11k$

producto $A \times B = (AB\sin\theta)\ \hat{e}$, con θ : $0 \leq \theta \leq \pi$ y en donde $\hat{e}$ es un vector unitario perpendicular al plano formado por los vectores A y B

Caso de un vector alojado en una línea recta(línea recta de acción)

Siempre se puede considerar un vector alojado en una línea, en particular si dos puntos de ella determinan respectivamente su inicio $P(a_x, a_y, a_z)$ y su final $Q(b_x, b_y, b_z)$, es decir el vector va del punto P al Q, entonces el vector PQ viene dado por: $PQ = (b_x - a_x)i + (b_y - a_y)j + (b_z - a_z)k$

De este modo si un vector de módulo $A = 20[N]$, tiene la dirección de M a N ; siendo los puntos en cuestión: $M(2,3,4)$ y $N(-3,5,1)$ entonces el vector A, escrito vectorialmente, viene dado por:

$\vec{A} = \left(\textit{módulo de } A\right) \cdot \left(\textit{vector unitario}\right.$ en la dirección de M a N$\left.\right)$

vector que va de M a N : $MN = (-3-2)i + (5-3)j + (1-4)k, \quad MN = -5i + 2j - 3k$

módulo de MN : $\|-5i + 2j - 3k\| = \sqrt{38}$

vector unitario en la dirección de M a N: $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{38}}(-5i + 2j - 3k)$

finalmente el vector A, viene dado por: $\vec{A} = A \cdot \hat{u} = 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{38}}(-5i + 2j - 3k)$

$\vec{A} = -\frac{50}{19}i\sqrt{38} + \frac{20}{19}j\sqrt{38} - \frac{30}{19}k\sqrt{38} \approx -16.222i + 6.4889j - 9.7333k$