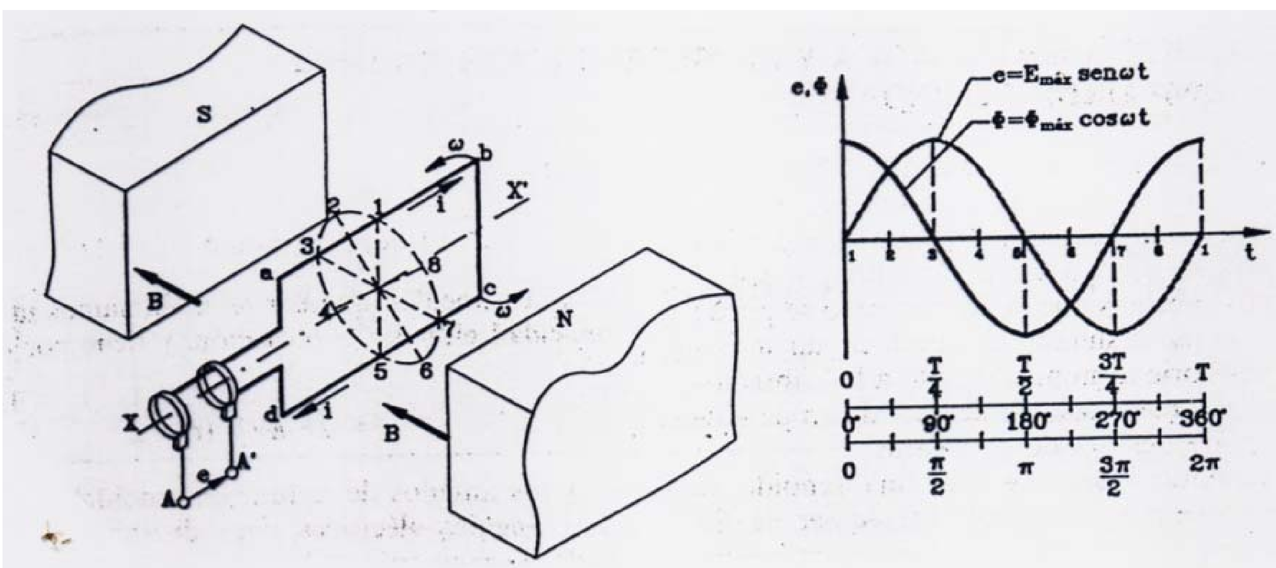
CAPITULO 3: CORRIENTE ALTERNA MONOFÁSICA

3.1. Introducción

En los capítulos anteriores, el análisis se ha limitado en su mayor parte a circuitos de corriente continua (excitados con fuentes constantes o invariables en el tiempo), por simplicidad, por razones pedagógicas y también por razones históricas. Ahora se inicia el análisis de circuitos en los que la tensión o la corriente de alimentación varían en el tiempo y, en particular, cuando esta variación es de tipo sinusoidal.

Una corriente sinusoidal se conoce usualmente como corriente alterna. Se invierte a intervalos regulares y tiene valores alternadamente positivos y negativos y es la forma dominante en que se entrega la energía eléctrica a las industrias y usuarios en general. Una excitación sinusoidal produce tanto una respuesta natural como una respuesta en estado estable. La respuesta natural (transitoria) se extingue en el tiempo, de modo que sólo la respuesta de estado estable permanece. Se dice que el circuito opera en estado estable o de régimen permanente cuando la respuesta transitoria se hace despreciable en comparación con la respuesta permanente. En este capítulo nos dedicaremos al análisis de la respuesta permanente sinusoidal.

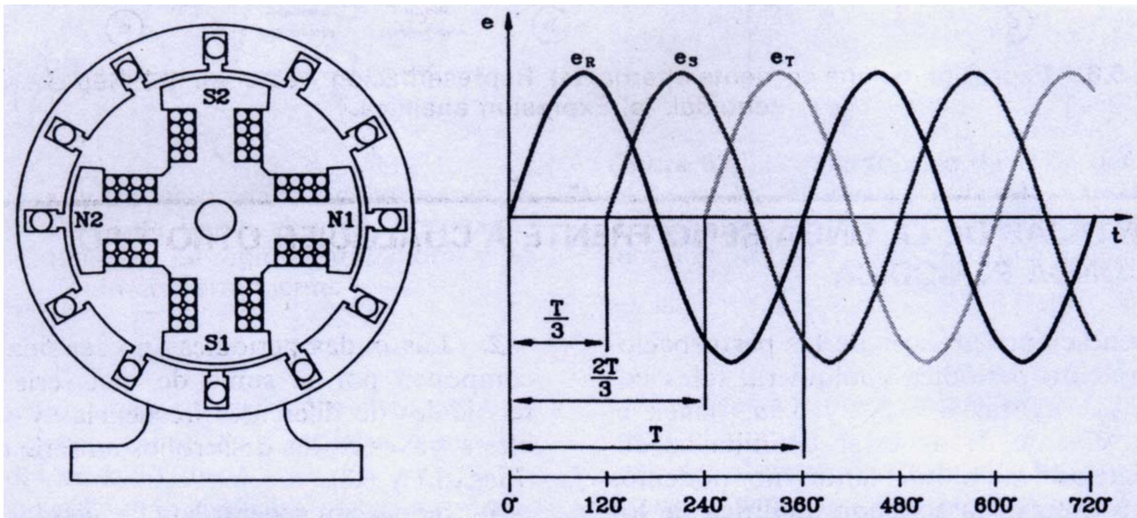
No entraremos en detalles respecto a la forma de generar un voltaje sinusoidal. Sin embargo, a manera de ejemplo, la Figura 3.1 muestra en forma esquemática un generador elemental de corriente alterna.



a) b)

Figura 3.1.- a) Alternador o generador elemental de fem; b) Ondas de flujo y de fem

Este generador elemental tiene la innegable ventaja de obtener una fem "e" perfectamente senoidal, como la de la Figura 3.1 b), pero tiene grandes inconvenientes de realización, como son: La dificultad de obtener un campo magnético uniforme y la necesidad de utilizar grandes alternadores que a la frecuencia industrial de 50 hertz giren a 3.000 rpm. Para evitar esos inconvenientes, el método más utilizado para generar grandes cantidades de electricidad, es el uso de alternadores con varios pares de polos en los que se pueden obtener ondas prácticamente senoidales a tensiones elevadas de hasta 15 kV y potencias de varias decenas de MW. En este caso, el campo magnético fijo lo establecen electroimanes que se ubican en la parte giratoria (rotor), ya que es más cómodo obtener la fem inducida en la parte fija (estator), tal como se muestra en la Figura 3.2 a), que corresponde a un alternador trifásico de 4 polos y cuyas ondas de fem generadas se muestran en la Figura 3.2 b).



a) b)

Figura 3.2.- a) Corte transversal de un alternador trifásico; b) Ondas de fem generadas

3.2. Definición matemática y representación gráfica de una onda senoidal

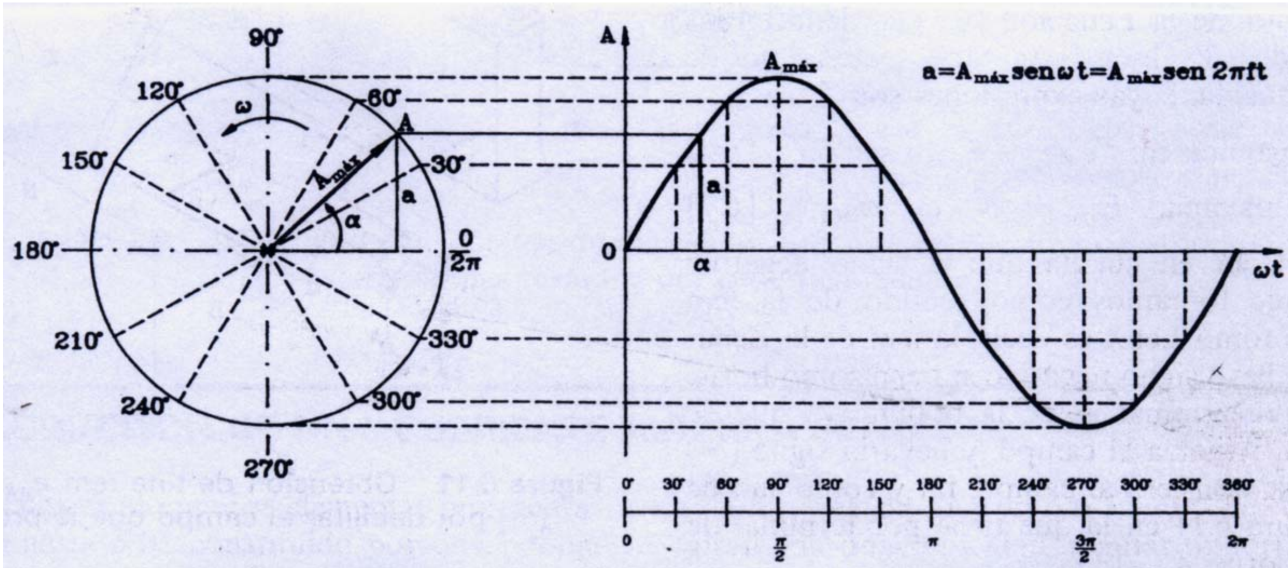
De acuerdo con lo planteado en el apartado anterior, la corriente alterna senoidal pertenece al grupo de corrientes de régimen periódico alterno puro, cuya expresión matemática es la función seno. Por física sabemos que la función seno se puede generar también como resultado de producir un movimiento vibratorio armónico en una lámina, ó las oscilaciones de un péndulo ó a las elongaciones de un muelle (resorte).

Matemáticamente, una función seno (senoide) se puede generar por la proyección sobre cualquier eje fijo de un vector giratorio, OA, tal como se indica en la Figura 3.3, en la que el punto A recorre la circunferencia de radio r con un movimiento circular uniforme de velocidad angular ω. Como la velocidad angular es el ángulo descrito en la unidad de tiempo (radianes/seg), podemos decir que; si en 1 seg describe ω radianes, en t seg describirá α radianes, es decir:

$$\alpha = \omega \cdot t \quad \text{rad} \qquad \text{donde} \quad 1\,\text{rad} = \frac{180}{\pi} = 57{,}2958^{\circ} \tag{3.1}$$

La velocidad angular ω, se denomina también velocidad o pulsación eléctrica, así como a los ángulos de la función senoidal se les llama ángulos eléctricos para distinguirlos de los reales o geométricos descritos por la espira o por el rotor de una máquina eléctrica.

La expresión matemática y gráfica de ese vector giratorio, OA, es la base para la aplicación del cálculo vectorial simbólico mediante el cual se resuelven los problemas de electrotecnia en corriente alterna.



a) b)

Figura 3.3.- Generación y representación de una onda senoidal. a) Diagrama vectorial; b) Diagrama cartesiano

3.3. Definiciones importantes en corriente alterna (CA)

Frecuencia: En general, llamamos **frecuencia de una magnitud periódica, en la que el tiempo es la variable independiente, al número de veces que la señal pasa por un determinado punto con un mismo sentido en la unidad de tiempo**. Si un móvil representado por el punto A de la Figura 3.3, lleva una velocidad angular de ω radianes/segundo, el número de vueltas o de veces que pasa por el mismo sitio en la unidad de tiempo es la frecuencia f y tiene por expresión

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \tag{3.2}$$

La unidad de frecuencia en el SI es el hertz (Hz) que se define como la frecuencia de un fenómeno periódico cuyo período es 1 segundo. La frecuencia industrial es de 50 Hz en Europa (y Chile) y de 60 Hz en Estados Unidos y Canadá.

Periodo: La magnitud inversa de la frecuencia es el período T que se define como**: el tiempo que demora la señal en completar un ciclo completo de valores de la onda**. Por lo anterior, el período es el recíproco de la frecuencia, es decir:

$$T = \frac{1}{f} \tag{3.3}$$

Valor instantáneo: Es el valor de la función senoidal en un instante determinado. Para determinarlo, basta con reemplazar el ángulo por su valor en grados o radianes.

Valor máximo: Se denomina valor máximo ó de peak ó de pico ó de cresta de una onda variable en el tiempo, al mayor valor que toma la onda en el intervalo de tiempo considerado. Se designa como $V_{máx}$ ó V_m. En el caso de la onda senoidal, el intervalo considerado es un período. Se usa también el llamado valor peak to peak, que en este caso es el doble del valor máximo.

Valor medio: El valor medio V_{med} de una onda senoidal es cero, dado que la semionda positiva es igual y de signo contrario a la semionda negativa. Por ello, **el valor medio se refiere a una semionda y se define como la media algebraica de los valores instantáneos durante un semiperíodo**. Su relación con el valor máximo, para una onda senoidal pura es:

$$V_{med} = \frac{2}{\pi} \cdot V_{máx} = 0{,}637 \cdot V_{máx} \tag{3.4}$$

Valor eficaz: Este valor es característico de la intensidad de la corriente eléctrica y se define como el valor de corriente alterna que al circular a través de una resistencia óhmica determinada, desarrolla el mismo efecto calórico que la correspondiente corriente continua. Se conoce también con el nombre de valor rms (del inglés: root means square) y es el que normalmente miden los instrumentos en corriente alterna. Se aplica también a los voltajes y tensiones inducidas. **En general, el valor eficaz de una magnitud variable en el tiempo se define como la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de los valores instantáneos alcanzados durante un período ó ciclo completo.** Se designa con la letra mayúscula de la variable (E, V, I) y su relación con el valor máximo es:

$$E = \frac{E_{máx}}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \cdot E_{máx} \ \text{ ó bien}: I = \frac{I_{máx}}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \cdot I_{máx} \ \text{ ó bien}: V = \frac{V_{máx}}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \cdot V_{máx} \tag{3.5}$$

3.4. Fase, ángulo de fase y diferencia de fase

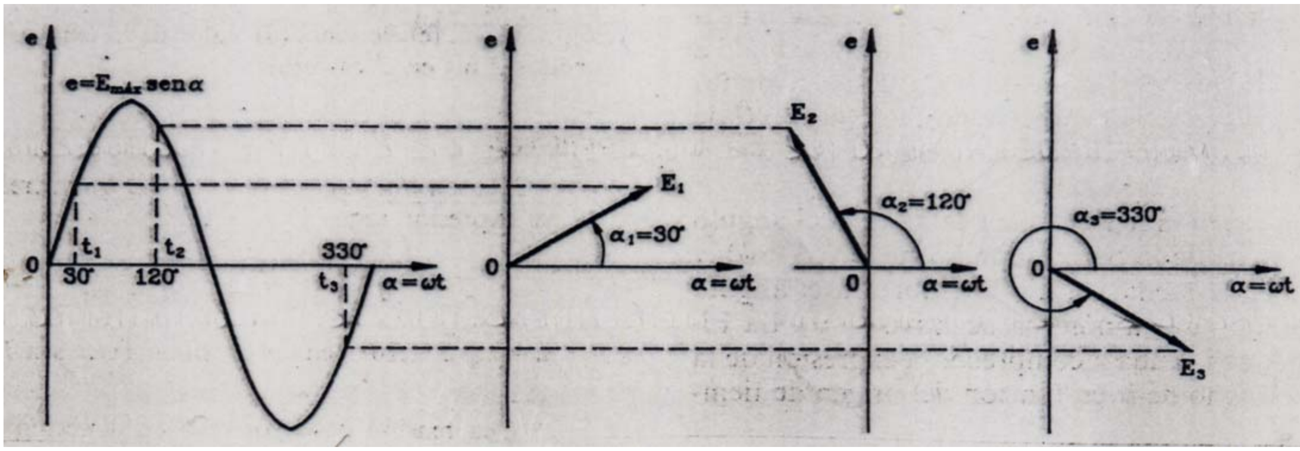
La rotación de la bobina del rotor de un alternador a través de los 360º geométricos o sea una revolución, genera un ciclo de voltaje alterno, si el generador tiene dos polos (Figura 3.1). Sin embargo, en un generador real, como el de la Figura 3.2 (de 4 polos), la rotación de la armadura a través de 180º geométricos genera un ciclo completo de valores de voltaje alterno o sea 360º eléctricos. Es decir, si α es el ángulo eléctrico y α_{mec} es el ángulo mecánico ó geométrico, se tiene que para una cantidad de polos P, la relación entre ellos es:

$$\alpha = \frac{P}{2} \cdot \alpha_{mec} \tag{3.6}$$

Por lo anterior y, con el fin de no crear confusión, las curvas de corriente y voltaje alternos sinusoidales, se referirán siempre a grados eléctricos en vez de grados mecánicos ó geométricos.

Además, y tal como se planteó en el apartado 3.2, una función seno se puede generar por la proyección sobre cualquier eje fijo de un vector giratorio (Figura 3.3). Por lo tanto, las definiciones siguientes deben considerar tanto la onda senoidal como su representación como vector rotatorio.

Fase: En un fenómeno cuya magnitud varía periódicamente en función del tiempo, se denomina fase al instante, posición o estado en el que se está analizando el fenómeno. La Figura 3.4 a) presenta una función seno de fem y en b), c), d), distintas fases que corresponden a los instantes t_1, t_2 y t_3.



a) b) c) d)

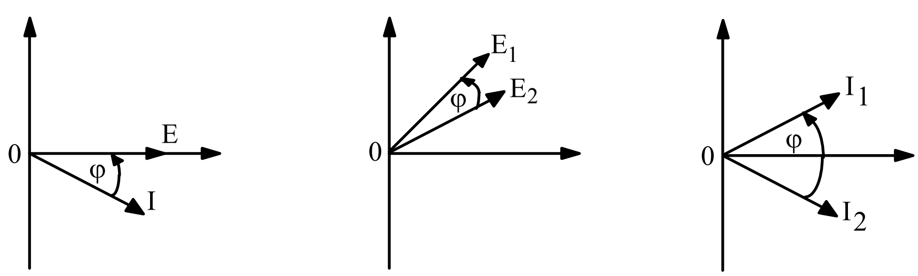
Figura 3.4.- Función seno: a), b),c), d) Distintas posiciones o fases

La expresión general de una onda de fem se puede expresar como:

$$e = E_{máx} \sin(\omega t \pm \psi) \tag{3.7}$$

Donde ψ es el ángulo de fase inicial para ωt=0, y se mide a lo largo del eje ωt, desde el punto de tensión cero con pendiente positiva de la onda, hasta la línea de ωt=0, de manera que si la medición se hace hacia la derecha, es positivo y negativo en caso contrario. Si el origen coincide con el punto de tensión cero, ψ=0, que es lo usual en la mayoría de los casos en que la resolución se hace a partir de un voltaje de referencia. La Figura 3.5 a) muestra esta situación para la fem E. Se ha operado con la fem E, pero el razonamiento vale para cualquier magnitud que varíe en función del tiempo, según una ley senoidal.

Angulo de fase o diferencia de fase: Es el ángulo que existe entre dos magnitudes periódicas simples. Cuando existe una diferencia de fase entre dos magnitudes decimos que se ha producido un desfase. Por ejemplo, el que existe entre una fem E y una corriente I, entre dos fem E_1 y E_2 o entre dos corrientes I_1 e I_2, representadas en la Figura 3.5. El ángulo de fase, es muy importante para la resolución de problemas en circuitos de corriente alterna. Además de su valor absoluto, hay que asignarle un sentido vectorial que indique si una magnitud está adelantada o retrasada en el tiempo, con respecto a otra de referencia; es decir, si existe desfase positivo o negativo, respectivamente. Igual que en matemáticas, para los vectores giratorios adoptaremos como sentido de giro positivo el contrario al de las agujas del reloj; de esta forma, por ejemplo, en la Figura 3.5 a) el vector E adelanta φ grados eléctricos al vector I.



a) b) c)

Figura 3.5.- Angulo de fase entre dos magnitudes senoidales

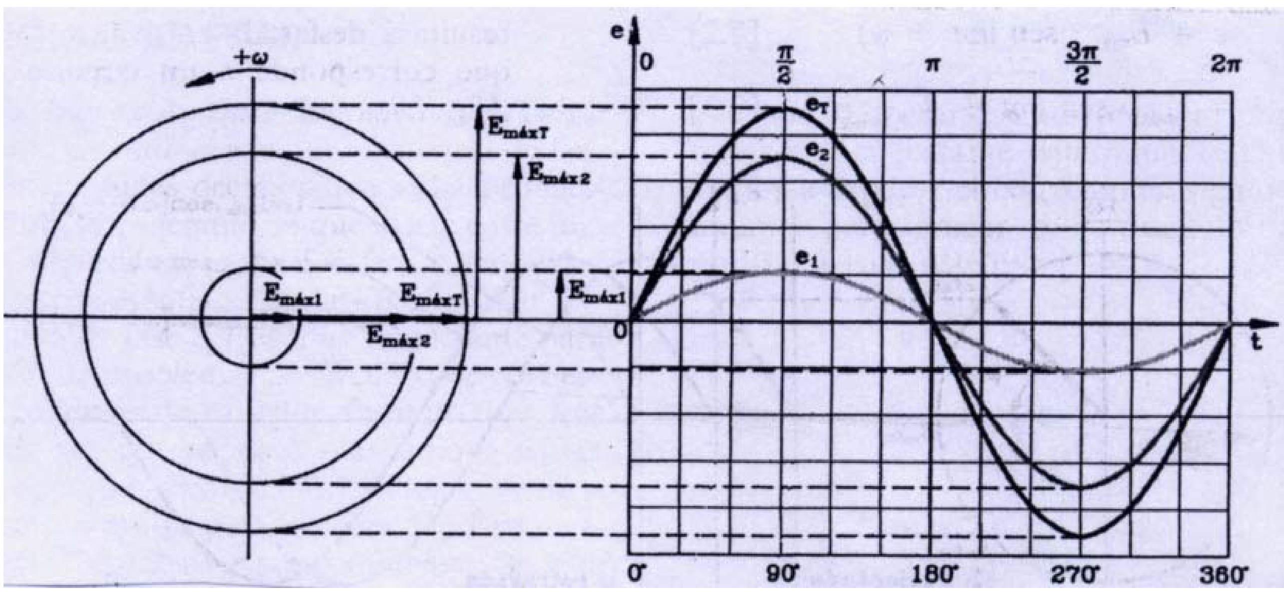
3.5. Suma de dos ondas senoidales en fase

Sean dos ondas de fem e_1 y e_2, de igual frecuencia f, cuyo ángulo de fase es cero, $\varphi = 0$, y cuyas expresiones algebraicas son:

$$e_1 = E_{máx\,1} \cdot \sin \omega t \qquad y \qquad e_2 = E_{máx\,2} \cdot \sin \omega t \tag{3.8}$$

Se dice que estas ondas están en fase. La suma de ellas determina otra de igual frecuencia f, también en fase, y con una amplitud igual a la suma de la amplitud de cada una de las dos tal como se aprecia en la Figura 3.6 y según lo indica la expresión (3.9)

$$e_T = e_1 + e_2 = E_{máx\,1} \cdot \sin \omega t + E_{máx\,2} \cdot \sin \omega t = (E_{máx\,1} + E_{máx\,2}) \cdot \sin \omega t \tag{3.9}$$



a) b)

Figura 3.6.- Suma de dos ondas de fem en fase. a) Diagrama vectorial; b) Diagrama cartesiano

3.6. Suma de dos ondas desfasadas

Sean dos fem tales que:

$$e_1 = E_{máx\,1} \cdot \sin \omega t \qquad y \qquad e_2 = E_{máx\,2} \cdot \sin (\omega t + \varphi) \tag{3.10}$$

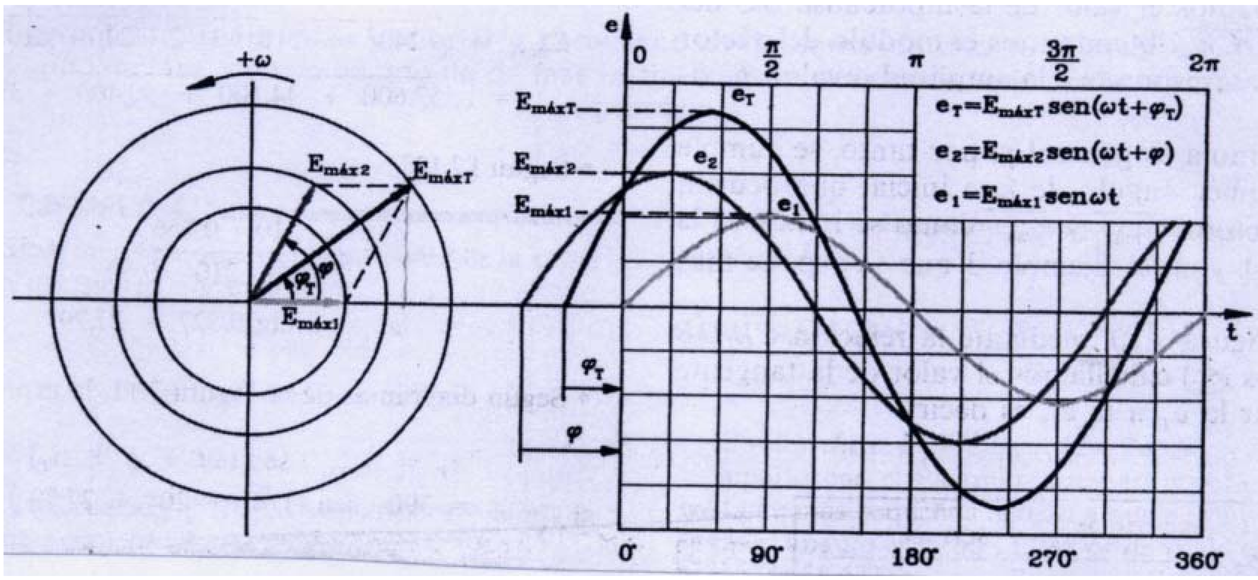
En este caso el proceso es el mismo, pero los resultados son distintos y dependen en gran medida del valor del ángulo φ de desfase que tengan las dos ondas. Los resultados se muestran en la Figura 3.7 y la ecuación (3.11).

$$e_T = e_1 + e_2 = (E_{máx\,1} + E_{máx\,2} \cdot \cos \varphi) \cdot \sin \omega t + (E_{máx\,2} \cdot \sin \varphi) \cdot \cos \omega t \tag{3.11}$$

Además de la expresión algebraica y la representación cartesiana de los valores instantáneos, es necesario conocer en la mayoría de los problemas el valor máximo $E_{máx}$ de la fem total e_T, para después calcular su correspondiente valor eficaz, E. Esto se puede hacer: a) sustituyendo el valor del ángulo ωt que hace máxima la ecuación (3.11), cosa que a primera vista no es fácil; b) resolviendo el diagrama vectorial de la Figura 3.7 a) utilizando el método del paralelogramo de suma de dos vectores. En este último caso, los resultados son:

$$E_{máx\,T} = \sqrt{E^2_{máx\,1} + E^2_{máx\,2} + 2 \cdot E_{máx\,1} \cdot E_{máx\,2} \cdot \cos\varphi} \quad (3.12)$$

$$\varphi_T = \mathrm{arctg}\left[\frac{E_{máx\,2} \cdot \sin\varphi}{E_{máx\,1} + E_{máx\,2} \cdot \cos\varphi}\right] \quad (3.13)$$



a) b)

Figura 3.7.- Suma de dos fem desfasadas un ángulo φ. a) Diagrama vectorial; b) Gráfico cartesiano

3.7. Producto de dos ondas en fase

Si multiplicamos las dos ondas del Apartado 3.5, ecuación (3.8), se obtiene la onda producto que muestra la Figura 3.8 y que tiene por expresión:

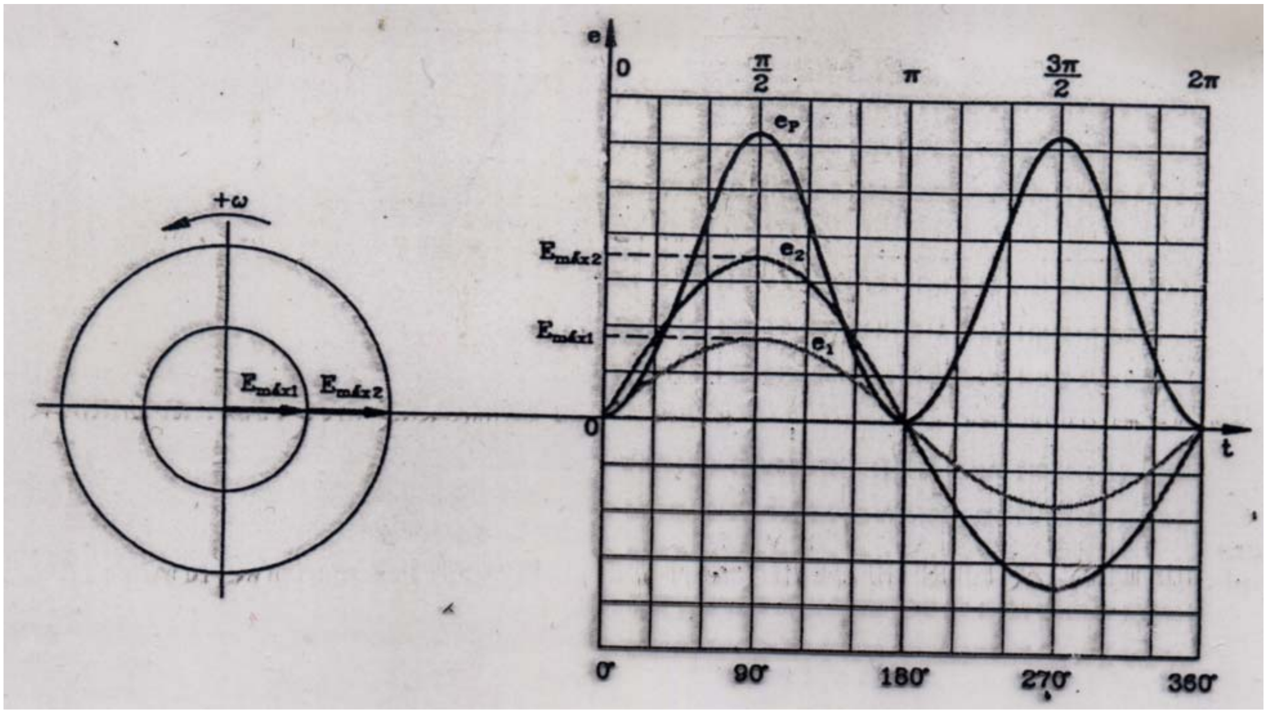
$$e_p = e_1 \cdot e_2 = \frac{E_{máx\,1} \cdot E_{máx\,2}}{2} - \frac{E_{máx\,1} \cdot E_{máx\,2}}{2} \cdot \cos\ 2 \cdot \omega t \quad (3.14)$$

3.8. Producto de ondas desfasadas

Si multiplicamos miembro a miembro las Ecuaciones (3.10), que expresan dos fem desfasadas un ángulo φ, se obtiene la onda producto que muestra la Figura 3.9 cuya expresión es:

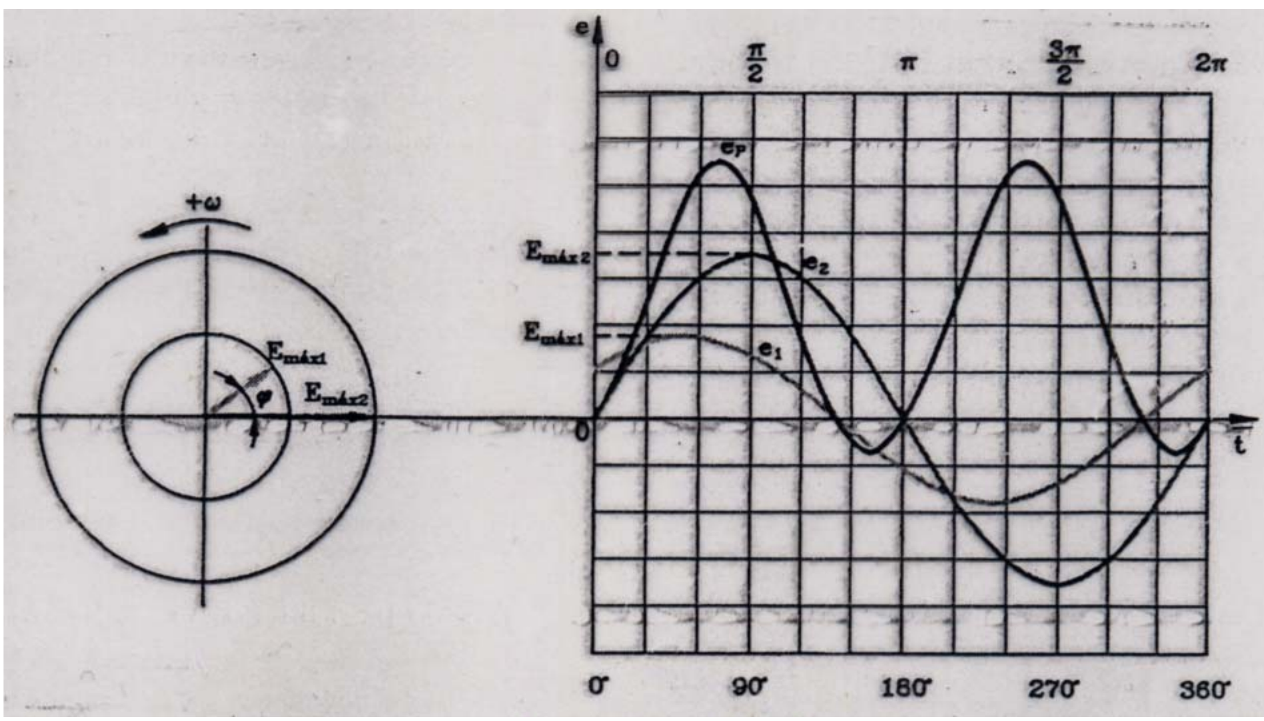
$$e_p = e_1 \cdot e_2 = \frac{E_{máx1} \cdot E_{máx2}}{2} \cdot \cos\varphi - \frac{E_{máx1} \cdot E_{máx2}}{2} \cdot (\cos\ 2 \cdot \omega t \cdot \cos\varphi - \sin 2 \cdot \omega t \cdot \sin\varphi) \quad (3.15)$$

En la práctica, todas estas expresiones gráficas son de gran ayuda para ver la evolución de los fenómenos o sus magnitudes a través del tiempo, así como para ver la interrelación entre magnitudes tales como la tensión y la corriente, o entre la tensión, la corriente y la potencia. Sin embargo, para el cálculo analítico, excepto para determinar los valores instantáneos, no suele tener aplicación y lo que se utiliza es el cálculo vectorial simbólico trabajando con valores eficaces, como veremos en apartados siguientes. Como el cálculo vectorial simbólico se basa en las operaciones con números complejos, explicaremos a continuación, en forma breve, su base matemática.



a) b)

Figura 3.8.- Producto de dos ondas en fase. a) Diagrama vectorial; b) Diagrama cartesiano



a) b)

Figura 3.9.- Producto de dos ondas desfasadas un ángulo φ. a) Diagrama vectorial; b) Diagrama cartesiano

3.9. Cálculo vectorial simbólico

3.9.1. Números reales, imaginarios y complejos

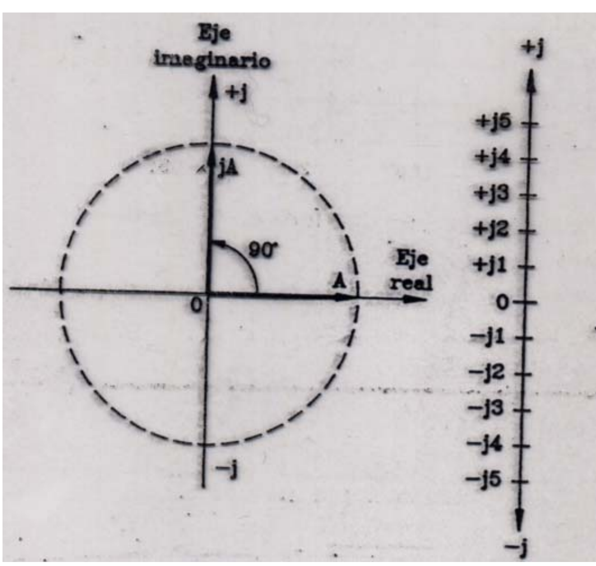
Números reales: El conjunto de los números reales lo forman los números racionales y los irracionales, y se pueden poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números de una recta que se llama eje real, donde cada punto de la recta representa un número real y cualquier número real se representa por un único punto de la recta. La suma, resta, multiplicación y división de dos números reales es otro número real, pero la raíz cuadrada de un número real negativo no es número real y no corresponde a ningún punto de la recta; es el caso de los números imaginarios.

Números imaginarios: La raíz cuadrada de un número real negativo es un número imaginario; por ejemplo, son números imaginarios: $\sqrt{-1}$; $\sqrt{-3}$; $\sqrt{-4}$; $\sqrt{-5}$; $\sqrt{-9}$; etc. Si hacemos j $=\sqrt{-1}$, tenemos la unidad imaginaria, llamado también operador j. De esta forma podemos escribir: $\sqrt{-1} = \mathrm{j}$; $\sqrt{-3} = \mathrm{j}\sqrt{3}$; $\sqrt{-4} = \mathrm{j}2$; $\sqrt{-5} = \mathrm{j}\sqrt{5}$; $\sqrt{-9} = \mathrm{j}3$; etc.

Al multiplicar un vector por j, el vector queda girado 90º en el sentido contrario al de giro de los punteros del reloj (sentido positivo), tal como se muestra en la Figura 3.10 a). El conjunto de los números imaginarios se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los puntos de otra recta que llamamos eje imaginario, en cuadratura con el eje real. (Figura 3.10 b).

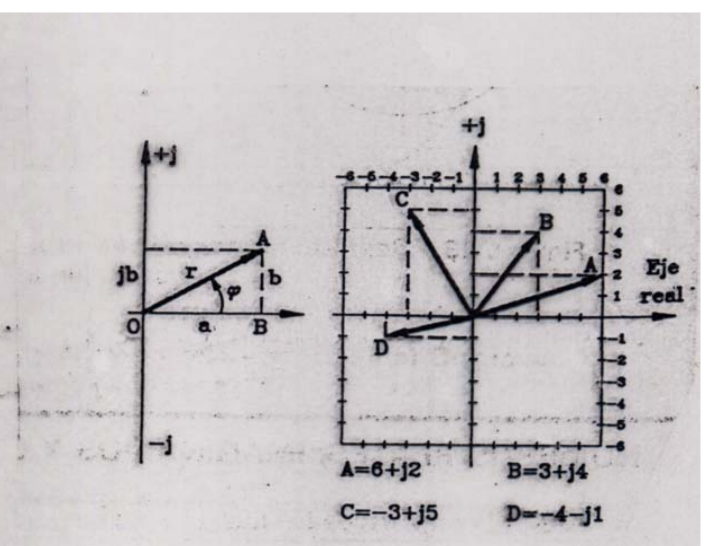
Para las operaciones es importante conocer las sucesivas potencias de j así como su inverso 1/j, algunos de los cuales son: $j^2=-1$; $j^3=-j$; $j^4=1$; $1/j=-j$.

Números complejos: Un número complejo $\dot{\mathbf{A}}$ es de la forma **a+jb**, en donde **a** y **b** son números reales y **j** es la unidad imaginaria ya definida. Al número real **a** se le denomina parte real o componente real y se dibuja sobre el eje de abscisas. A la parte **jb** se le llama parte imaginaria o componente imaginaria y se dibuja sobre el eje de ordenadas (Figura 3.11 a). La longitud **r** del número complejo $\dot{\mathbf{A}}$, o del vector **OA** de la Figura 3.11 a) se denomina módulo y el ángulo **φ,** argumento. La Figura 3.11 b) muestra diversos números complejos.



a) b)

Figura 3.10.- Conjunto de números imaginarios



a) b)

Figura 3.11.- Ejemplos de números complejos

3.9.2. Diversas formas de expresar un número complejo

El número complejo $\dot{A}$ de la Figura 3.11 a) se expresa como: $\mathbf{\dot{A} = a+jb = r\,(\cos\varphi + j\sin\varphi)}$, en la que el módulo **r** y el argumento φ, valen respectivamente:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{y} \qquad \varphi = \text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \tag{3. 16}$$

La fórmula trigonométrica o de Euler, $\mathbf{e^{j\varphi} = (\cos\varphi + j\sin\varphi)}$, permite expresar el número complejo $\mathbf{\dot{A} = r\,(\cos\varphi + j\sin\varphi)}$ en la forma: $\mathbf{\dot{A} = r\,e^{j\varphi}}$**,** llamada forma exponencial. La forma exponencial, conjunta o indistintamente con la forma polar o de Steinmetz, $\mathbf{\dot{A} = r\,\angle\varphi}$, se suele emplear bastante en Electrotecnia cuando se debe multiplicar o dividir números complejos.

Conjugado de un número complejo: Corresponde al mismo vector pero con argumento negativo; es decir, para el complejo $\dot{A}$**,** su conjugado designado como **A*** será: $\mathbf{A^* = r\,\angle{-\varphi} = e^{-j\varphi}}$**.** En la Tabla 3.1 se resumen las fórmulas y la utilización según la operación a realizar.

Tabla 3.1.- Diversas formas de representación de números complejos

NOTACION	DENOMINACIÓN	SE UTILIZA PARA
$\dot{A} = a + j\,b$	Binómico	Sumar o restar
$\dot{A} = r\,(\cos\varphi + j\sin\varphi)$	Trigonométrica	llevar la exponencial a binómica
$\dot{A} = r\,e^{j\varphi}$	Exponencial	Multiplicar o dividir
$\dot{A} = r\,\angle\varphi$	Polar	Multiplicar o dividir
$\mathbf{A^*} = r\,\angle{-\varphi} = e^{-j\varphi}$	Conjugado de $\dot{A}$	Obtener la potencia compleja

3.9.3. Operaciones con números complejos

Suma y resta: Para sumar o restar dos o más números complejos, se suman o restan sus partes reales y sus partes imaginarias independientemente. Es importante recordar que en cualquier ecuación que se relacionen cantidades complejas, las partes reales de ambos miembros de la ecuación deben ser iguales independientemente de las partes imaginarias que, a su vez, deben también ser iguales.

Multiplicación: Para multiplicar dos números complejos, conviene expresarlos en forma exponencial o polar. El resultado es otro número complejo, cuyo módulo es el producto de los módulos, y su argumento es la suma de los argumentos.

División: La división de dos números complejos, expresados en forma exponencial o polar es otro número complejo, cuyo módulo es el cuociente de los módulos, y su argumento es la diferencia entre sus argumentos.

3.10. Parámetros R L y C. Ley de Ohm en Corriente alterna

3.10.1 Resistencia en Corriente Alterna

En los capítulos anteriores, hemos visto que la resistencia es una magnitud medible. La ofrece el conductor al circular una corriente eléctrica no cambiante, sin tener en cuenta sus efectos electromagnéticos ni la inducción de fem en el conductor debida a campos magnéticos externos. A esta resistencia la llamamos resistencia óhmica o resistencia de corriente continua.

A la resistencia que ofrece el mismo conductor al paso de una corriente alterna se llama resistencia en corriente alterna o resistencia efectiva. La resistencia efectiva es mayor que la resistencia óhmica debido al efecto pelicular o efecto piel. Esto hace que en corriente alterna los conductores presenten una densidad de corriente mayor en la superficie que en el centro, lo que se debe a que la variación del campo magnético es mayor en el centro, lo que da lugar a una reactancia inductiva mayor y, por tanto, a una corriente menor en el centro del conductor y mayor en la periferia. El efecto pelicular es apreciable en conductores de grandes secciones, sobre todo si son macizos. Es mayor a altas frecuencias y también aumenta en conductores con cubierta metálica o si están arrollados sobre un núcleo ferromagnético.

Además del efecto pelicular, en las líneas aéreas la intensidad de campo eléctrico ioniza el aire circundante y se produce un efecto radiante que rodea al conductor con la correspondiente descarga eléctrica y pérdida de energía. Este fenómeno se conoce como el efecto corona.

Tanto el efecto pelicular como el efecto corona no serán considerados aquí, pues corresponde a los temas específicos indicados. De todas formas definiremos lo que entendemos por resistencia efectiva en corriente alterna como: La resistencia total ofrecida al paso de la corriente alterna, incluyendo la resistencia de corriente continua u óhmica y la resistencia debida a corrientes parásitas, por histéresis, dieléctricas y por efecto corona. En lo sucesivo, y a lo largo de todo el libro, trabajaremos, salvo indicación de lo contrario, con la resistencia óhmica.

3.10.2. Circuito resistivo puro. Relación entre la tensión, la corriente y la potencia

Relación tensión-corriente: Los efectos que produce la corriente alterna en régimen permanente (campo electrocinético) dependen de la naturaleza de los elementos pasivos del circuito. En este capítulo vamos a analizar esos efectos según que los componentes del circuito sean resistivos puros, inductivos puros o capacitivos puros. Es decir, aquí vamos a estudiar los parámetros R, L, C.

Llamamos circuito resistivo puro a aquel cuyos elementos pasivos tienen sólo resistencia óhmica, es decir, circuito con parámetro R. En ellos se puede aplicar la Ley de Ohm ya vista, es decir; si a la Resistencia R del circuito de la Figura 3.12 a) se le aplica una tensión alterna senoidal de la forma $v_R = V_{máx} \cdot \sin \omega t$, en cada instante se produce una corriente alterna senoidal que vale:

$$i_R = \frac{V_{máx} \cdot \sin \omega t}{R} = I_{máx} \cdot \sin \omega t \qquad (3.22)$$

Que queda en fase con la tensión que la produce y donde:

$$R = \frac{v_R}{i_R} = \frac{V_{máx} \cdot \sin \omega t}{I_{máx} \cdot \sin \omega t} = \frac{V_{máx}}{I_{máx}} \qquad (3.23)$$

La Figura 3.12 b) muestra las ondas de voltaje $\mathbf{v_R}$ y corriente $\mathbf{i_R}$ respectivas, además de la curva de potencia instantánea $\mathbf{p_R}$.

En Electrotecnia, para hallar el valor de la resistencia óhmica; sin embargo, no se emplea la ecuación (3.23), ya que se prefiere operar con valores eficaces del voltaje V y de la corriente I, mediante la fórmula ya conocida de la ley de Ohm; es decir:

$$R = \frac{V}{I} \qquad (3.24)$$

Potencia en C.A. de un circuito resistivo puro: Recordemos que en general, la potencia es el producto del voltaje por la corriente. Si consideramos las ondas de corriente y voltaje de la Figura 3.12 b) y las multiplicamos punto a punto, obtenemos la onda de potencia instantánea que muestra la misma Figura. Como se observa, la onda de potencia p_R queda en fase con las de corriente y tensión, y tiene el doble de la frecuencia de ellas y se puede demostrar que su valor instantáneo tiene la forma dada por la expresión (3.19), que para este caso queda:

$$p_R = v_R \cdot i_R = \frac{V_{máx} \cdot I_{máx}}{2} - \frac{V_{máx} \cdot I_{máx}}{2} \cdot \cos 2 \cdot \omega t \qquad (3.25)$$

El primer término de la expresión anterior corresponde a **la potencia promedio o potencia media P_{med}** y es igual a la mitad de su valor máximo **$P_{máx}$** (igual al producto de los valores máximos de la corriente y el voltaje). A este valor medio de la potencia se le **denomina Potencia Activa** ó **Potencia Eficaz P** que por definición corresponde al producto de los valores eficaces del voltaje V y de la corriente I, el que se expresa en Watt; es decir:

$$P = V \cdot I \qquad (3.26)$$

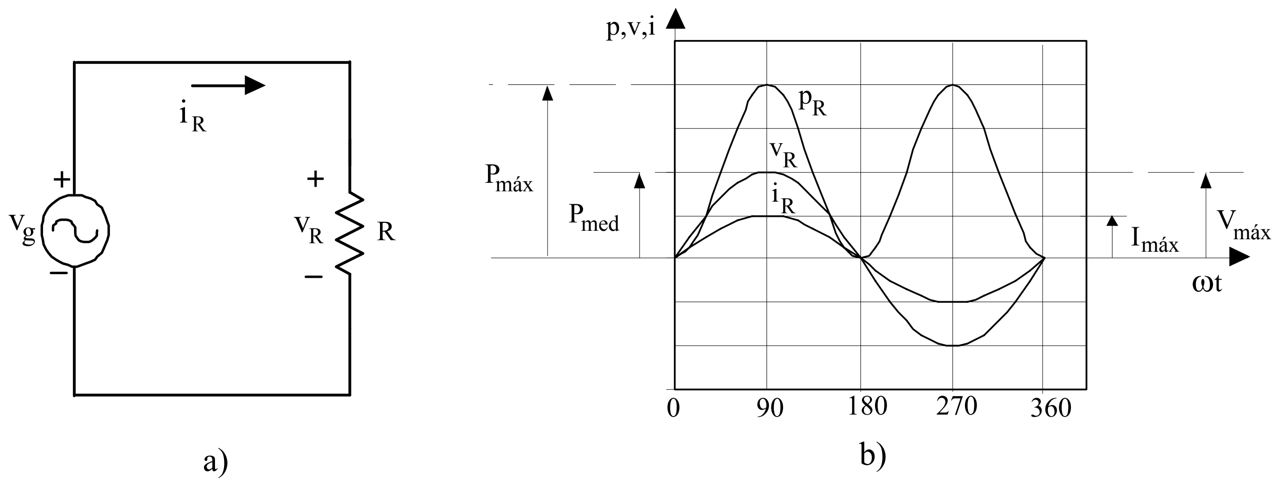


Figura 3.12.- Circuito resistivo puro: a) Circuito; b) Curvas de corriente, voltaje y potencia

3.10.3 Circuito inductivo puro. Efecto de la frecuencia y relación entre tensión y corriente y potencia

Relación tensión-corriente: Llamamos inductancia a la propiedad de un circuito o elemento de un circuito para retardar el cambio en la corriente que circula por él. Es decir, retarda la variación de la corriente, y no la corriente misma. El retardo está acompañado por la absorción o cesión de energía, y se asocia con la variación en la magnitud del campo magnético que rodea los conductores.

Un circuito inductivo puro corresponde a una bobina o devanado en el que su resistencia óhmica es nula (Inductancia pura). Esta es una hipótesis de trabajo teórica en la que idealmente se opera con el parámetro L ó coeficiente de autoinducción o simplemente **Autoinducción** ó **Inductancia** que relaciona la fuerza electromotriz autoinducida con las variaciones de corriente, de la siguiente forma (Ley de Faraday-Henry):

$$e_L = -N \cdot \frac{d\phi}{dt} = -L \cdot \frac{di}{dt} \qquad (3.27)$$

El signo menos quiere decir que en cualquier bobina la fem inducida e_L por un flujo magnético ϕ o corriente i, variables, se opone a la variación que la produce (Ley de Lenz).

La unidad de autoinducción en el Sistema Internacional de unidades es el Henry ó henrio (H), el que se puede definir a partir de la expresión (3.27).

Definición: La autoinductancia de una bobina (o circuito) es de 1 Henry, si un cambio en la corriente de 1 ampere por segundo, induce un fem de 1 volt en ella.

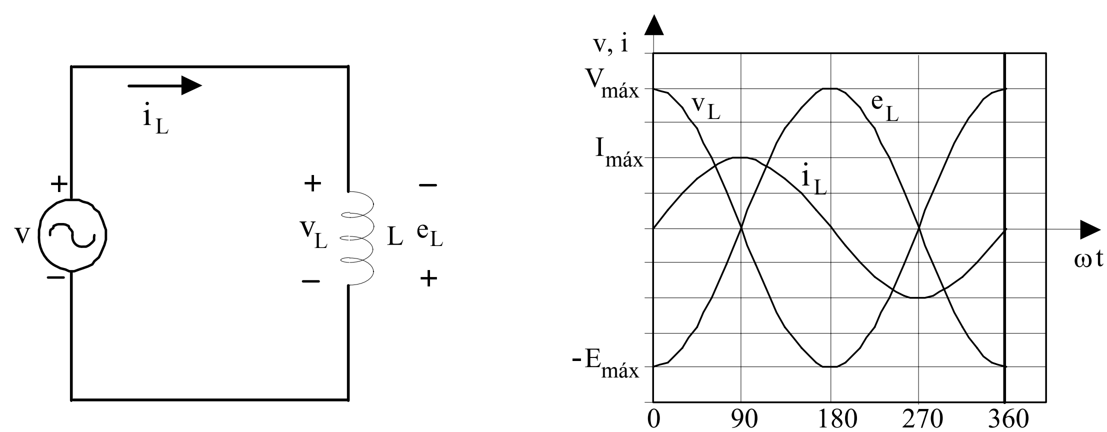
Cuando el circuito inductivo puro se conecta a un generador, fuente de tensión o red de alimentación, la tensión en bornes de la red v fuerza a la corriente i_L que se produce en contra de la fem e_L, inducida por el cambio del flujo. De esta forma, la tensión de la red se consume en una caída de tensión igual en magnitud, pero de signo contrario de la fem inducida. En esas condiciones, el comportamiento del circuito de la Figura 3.13 a) nos indica las representaciones gráficas y expresiones matemáticas que indicamos a continuación. Según la ley de tensiones de Kirchhoff:

$$v + e_L = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v = L \cdot \frac{di}{dt} \tag{3.28}$$

Si en este circuito, se establece una corriente variable $\mathbf{i = I_{máx} \cdot \sin \omega t}$, la expresión (3.28) queda:

$$v = L \cdot I_{máx} \cdot \omega \cdot \cos \omega t = L \cdot I_{máx} \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + 90^{o}) \tag{3.29}$$

A partir de la expresión anterior, se aprecia que la tensión v de la red o en bornes de la bobina pura, va adelantada 90º grados ($\pi/2$ radianes), con respecto a la corriente que produce en dicha bobina (Figura 3.13 b). Es decir, la ecuación (3.29) nos confirma que la inductancia pura retrasa 90º la corriente con respecto a la tensión que la produce. La inductancia retrasa la variación de la corriente y limita su valor, como veremos a continuación. Por otra parte, según la ecuación (3.27), se puede demostrar también que la tensión inducida en la bobina pura e_L, atrasa 90º a la corriente que la produce, tal como se muestra en la Figura 3.13 b).



a) b)

Figura 3.13.- Circuito inductivo puro: a) Circuito; b) Curvas de corriente y voltaje

Por todo lo anterior, para un circuito inductivo puro en que se tome **como referencia la tensión aplicada v = v_L**, se pueden escribir las siguientes expresiones:

$$v = v_L = V_{máx} \cdot \sin \omega t \tag{3.30}$$

$$i_L = \frac{V_{máx}}{\omega \cdot L} \cdot \sin(\omega t - 90^o) = I_{máx} \cdot \sin(\omega t - 90^o) \tag{3.31}$$

Reactancia inductiva. Efecto de la frecuencia: La inductancia de un circuito sirve para retardar el aumento o disminución de la corriente, pero en ningún caso previene ni limita el cambio. Ahora bien, la frecuencia limita la amplitud de la corriente en un valor igual a **$\omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$**, que denominaremos **reactancia inductiva X_L**, la que crece al aumentar la frecuencia y disminuye si esta también lo hace. De ahí que en corriente continua, como f= 0 Hz, su valor es cero.

De la Ecuación (3.31) y considerando valores eficaces, se puede escribir entonces:

$$X_L = \frac{V_L}{I_L} = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \tag{3.32}$$

La reactancia inductiva X_L se expresa en ohm, si la frecuencia está en Hertz (Hz) y la autoinducción en Henry (H).

Potencia de un circuito inductivo puro: Para el circuito inductivo puro de la Figura 3.13 a), considerando las expresiones de la tensión y la corriente dadas respectivamente por (3.30) y (3.31), la potencia instantánea queda de la forma:

$$q_L = v_L \cdot i_L = -\frac{V_{máx} \cdot I_{máx}}{2} \cdot \sin\ 2 \cdot \omega t \tag{3.33}$$

La Figura 3.14 muestra esta onda, la que como se observa es de doble frecuencia que la tensión y corriente que la producen y tiene un valor medio resultante igual a cero, es decir, la potencia activa es cero y por lo tanto no tiene sentido hablar de potencia reactiva inductiva media. El valor eficaz que designaremos por Q_L, queda medido en Volt-Amperes reactivos (VAr), si se utiliza el S.I. de unidades y vale:

$$Q_L = V_L \cdot I_L = X_L \cdot I_L^2 = \frac{V_L^2}{X_L} \tag{3.34}$$

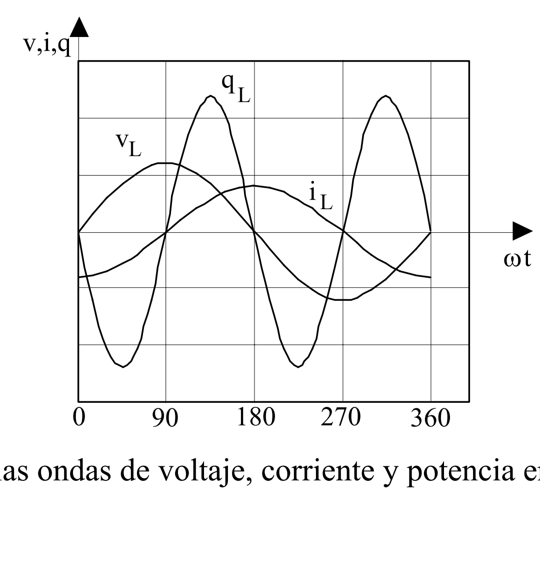


Figura 3.14.- Gráfico de las ondas de voltaje, corriente y potencia en un circuito inductivo puro

3.10.4. Circuito capacitivo puro, efecto de la frecuencia y relación entre la tensión, la corriente y la potencia

La capacidad (capacitancia) de un circuito eléctrico o elemento de circuito sirve para retardar una variación en la tensión que se aplica entre sus bornes. Ese retardo es causado por la obsorción o cesión de energía y está asociado con la variación en la carga de electricidad.

Un circuito capacitivo puro es aquel cuya resistencia óhmica es cero. Por las leyes del campo eléctrico sabemos que la corriente en un condensador de capacitancia C es proporcional al cambio del voltaje en el tiempo, es decir:

$$i = C\frac{dv}{dt} \tag{3.35}$$

Si al circuito de la Figura 3.15 le aplicamos una tensión alterna senoidal de la forma:

$$v = V_{máz} \cdot \sin \omega t \tag{3.36}$$

Al reemplazar (3.36) en (3.35) se obtiene:

$$i = \omega \cdot C \cdot V_{máx} \cdot \cos \omega t = \omega \cdot C \cdot V_{máx} \cdot \sin(\omega t + 90^{o}) \tag{3.37}$$

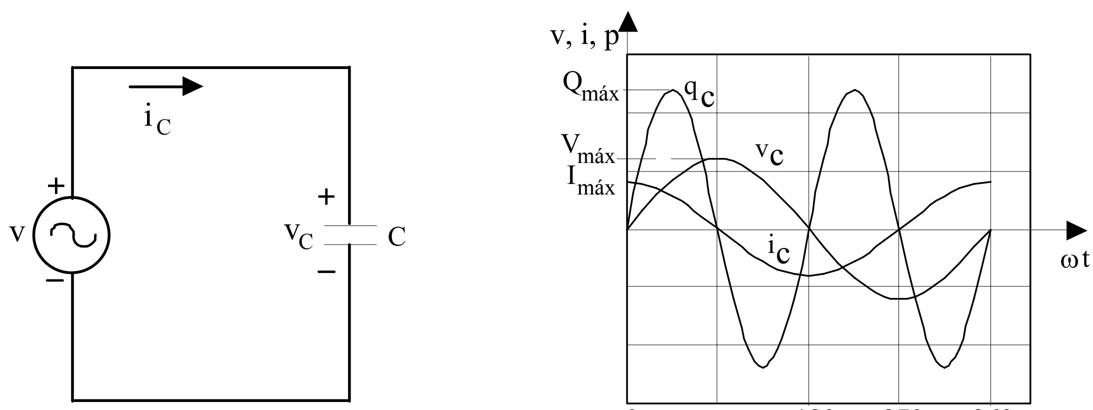
La ecuación (3.37) indica que la corriente adelanta 90º a la tensión que la produce. Es decir; para un circuito capacitivo puro podemos escribir, tal como se muestra en la Figura 3.15 b):

$$v = v_C = V_{máz} \cdot \sin \omega t \tag{3.38}$$

$$i = i_C = I_{máx} \cdot \sin(\omega t + 90^{o}) \tag{3.39}$$

Donde:

$$I_{máx} = V_{máx} \cdot \omega \cdot C = \frac{V_{máx}}{1/(\omega \cdot C)} \tag{3.40}$$



a) b)

Figura 3.15.- Circuito capacitivo puro. a) Circuito; b) Ondas de voltaje, corriente y potencia

Reactancia capacitiva. Efecto de la frecuencia: La capacitancia de un circuito sirve para retardar el aumento o disminución de la tensión, pero en ningún caso previene ni limita el cambio. Ahora bien, la frecuencia limita la amplitud de la corriente, tal como se deduce de la ecuación (3.40); donde se puede definir la reactancia capacitiva X_C de la siguiente forma:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} \tag{3.41}$$

Se aprecia que la reactancia capacitiva crece al disminuir la frecuencia y disminuye si ésta aumenta. De ahí que en corriente continua como f=0 Hz, la reactancia capacitiva sea infinito y la corriente cero amperes. Si en (3.41) operamos con valores eficaces, la reactancia capacitiva vale:

$$X_C = \frac{V_C}{I_C} = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} \tag{3.42}$$

Potencia en un circuito capacitivo puro: Si multiplicamos en cada instante de tiempo el voltaje v_C y la corriente i_C, ecuaciones (3.38) y (3.39) obtenemos la curva de potencia q_C que se muestra en la Figura 3.15 b), cuya expresión es de la forma:

$$q_C = v_C \cdot i_C = \frac{V_{máx} \cdot I_{máx}}{2} \cdot \sin\ 2 \cdot \omega t \tag{3.43}$$

Como se observa, la curva de potencia q_C es de doble frecuencia que la tensión y corriente que la producen y tiene un valor medio resultante igual a cero, es decir, la potencia activa es cero y por lo tanto no tiene sentido hablar de potencia reactiva capacitiva media. Por otra parte, la ecuación (3.43) es de la misma forma que la indicada para el circuito inductivo en (3.33), pero de signo contrario, lo que se puede apreciar si comparamos las Figuras 3.14 y Figura 3.15 b).

El valor eficaz que designaremos por Q_C, queda medido en Volt-Amperes reactivos (VAr), si se utiliza el S.I. de unidades y vale:

$$Q_C = V_C \cdot I_C = X_C \cdot I_C^2 = \frac{V_C^2}{X_C} \tag{3.44}$$

3.10.5. Representación fasorial de la corriente y la tensión

De acuerdo a lo planteado en los apartados 3.10.2 a 3.10.4, es posible representar las tensiones y corrientes en forma fasorial para cada uno de los circuitos estudiados. La Figura 3.16 muestra las tres situaciones, cuando se considera como referencia el fasor tensión V.

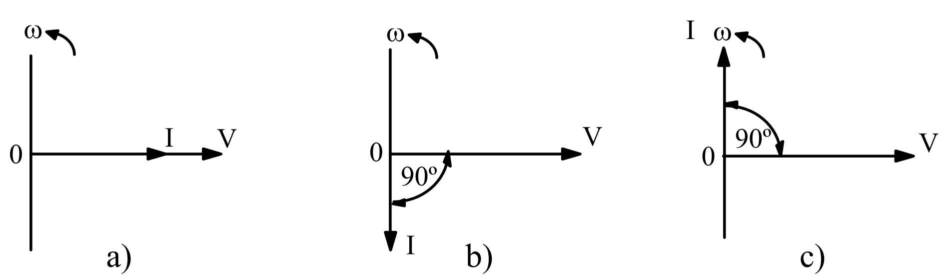


Figura 3.16.- Diagramas fasoriales V-I en elementos puros. a) Resistivo; b) Inductivo; c) Capacitivo

3.11. Ley de Ohm generalizada para corriente alterna

Impedancia: Hasta ahora hemos aplicado la Ley de Ohm a circuitos de corriente continua, tal y como se explicó en el Capítulo 2. También se ha aplicado la ley de Ohm a los parámetros R, L, C, o circuitos puros R, L, C; a los que individualmente les hemos aplicado una tensión alterna senoidal. En esos circuitos hemos visto que la corriente quedaba limitada por el valor de la resistencia R, la reactancia inductiva (X_L) ó la reactancia capacitiva (X_C), según el caso.

Ahora bien, los receptores reales en corriente alterna están formados por uno o varios circuitos puros, parámetros R, L, C. Es decir, son de naturaleza resistiva-inductiva, resistiva-capacitiva o resistiva-inductiva-capacitiva. A todos ellos se les puede someter a una tensión alterna senoidal que, en régimen permanente, les hace circular una corriente alterna de la misma forma y frecuencia. Igualmente, en todos ellos se verifica la ley de Ohm generalizada por corriente alterna, cuya expresión se puede escribir:

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} \tag{3.45}$$

Donde $\dot{Z}$ se denomina impedancia del circuito y se mide en ohm (Ω). La Figura 3.17 muestra el "triángulo de impedancias", para tres tipos de cargas. La impedancia $\dot{Z}$ se calcula vectorialmente como un número complejo, tal y como se explicó en el Apartado 3.9, y da lugar a las magnitudes de Steinmetz para corriente alterna, cuyas expresiones, considerando el fasor voltaje como referencia (Figura 3.17), y en valores eficaces, son:

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{V\,e^{j\omega t}}{I\,e^{j(\omega t - \varphi)}} = \frac{V\angle 0}{I\angle -\varphi} = Z\angle\varphi \tag{3.46}$$

La impedancia $\dot{Z}$ expresada en forma exponencial trigonométrica y binómica es:

$$\dot{Z} = Z\angle\varphi = Z\,(\cos\varphi + j\sin\varphi) = R + j\,X \tag{3.47}$$

La parte real de $\dot{Z}$ es la resistencia, R (se representa en el eje real) y la parte imaginaria es la reactancia X (se representa en el eje imaginario). Sus valores son:

$$R = Z\ \cos\varphi \qquad \text{y} \qquad X = Z\ \sin\varphi \tag{3.48}$$

El ángulo φ se puede determinar también a partir de los valores de R y X como:

$$\varphi = \text{arc tg}\left(\frac{X}{R}\right) \tag{3.49}$$

La parte imaginaria de $\dot{Z}$, puede ser negativa o positiva, dependiendo de su naturaleza. Es decir; si es inductiva es positiva, +j X y si es capacitiva resulta negativa, -j X. El ángulo φ ó argumento, es el ángulo de desfase entre la tensión y la corriente, el que como se verá posteriormente, determina el Factor de Potencia y nos da información acerca de la naturaleza de la potencia reactiva y nos permite cuantificarla.

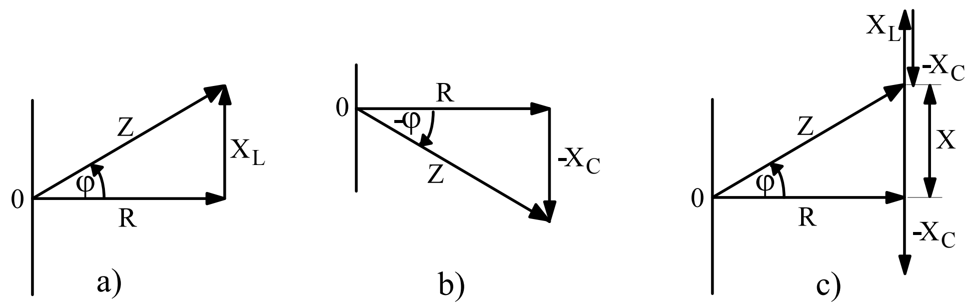


Figura 3.17.- Representación vectorial de una impedancia. a) Inductiva; b) Capacitiva; c) Inductiva-capacitiva en que predomina el carácter inductivo $X_L > X_C$

Admitancia: La magnitud inversa de la impedancia, Z, se llama admitancia, Y, se mide en Siemens (S) y se puede expresar como:

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{\dot{I}}{\dot{V}} = \frac{I\,e^{j(\omega t-\varphi)}}{V\,e^{j\omega t}} = \frac{I\angle-\varphi}{V\angle 0} = \frac{1}{Z}\angle-\varphi \tag{3.50}$$

La admitancia $\dot{Y}$ expresada en forma exponencial trigonométrica y binómica es:

$$\dot{Y} = \frac{1}{Z}\,(\cos\varphi - j\sin\varphi) \tag{3.51}$$

Amplificando la expresión (3.51) por Z, se obtiene:

$$\dot{Y} = \frac{R}{Z^2} - j\frac{X}{Z^2} = G - jB \tag{3.52}$$

El signo asociado a la parte imaginaria de Y en la ecuación (3.52) será negativo si el circuito es inductivo y positivo en caso contrario. G es la conductancia del circuito y B es la susceptancia.

3.12. Potencia en circuitos de corriente alterna

Triángulo de Potencias: Consideremos el circuito con impedancia inductiva que se muestra en la Figura 3.18 a). Si el triángulo de impedancias (Figura 3.18. c) se multiplica por el cuadrado de la corriente (I^2), se obtiene el correspondiente triángulo de potencias, en el que S (VA) es la potencia aparente, P (W) es la potencia activa y Q (VAr) es la potencia reactiva, donde se puede escribir:

$$S = Z\cdot I^2 = V\cdot I \tag{3.53}$$

$$P = R\cdot I^2 = S\cdot\cos\varphi = V\cdot I\cdot\cos\varphi \tag{3.54}$$

$$Q = X\cdot I^2 = S\cdot\sin\varphi = V\cdot I\cdot\sin\varphi \tag{3.55}$$

La naturaleza inductiva o capacitiva de Q en (3.55) la da la reactancia inductiva X_L ó capacitiva X_C, respectivamente. Si la potencia reactiva es inductiva, (3.55) tiene signo positivo, y si es capacitiva tiene signo negativo. Nótese que si comparamos los fasores corriente $\dot{I}$ y potencia aparente $\dot{S}$, éstos son complejos conjugados ya que la corriente atrasa φ grados al voltaje V, que es el mismo ángulo en que $\dot{S}$ adelanta a P, estando P y V en fase. De acuerdo con ello y considerando I^* (conjugado de $\dot{I}$) se puede escribir el fasor potencia aparente $\dot{S}$ (potencia compleja) como sigue:

$$\dot{S} = \dot{V} \cdot I^{*} = P + jQ \tag{3.56}$$

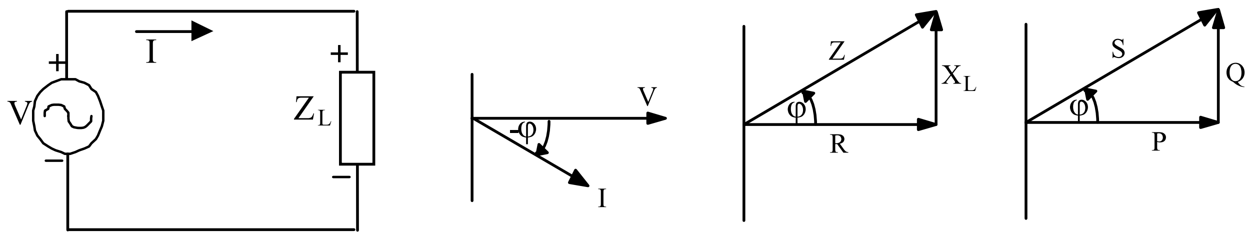


Figura 3.18.- Circuito con impedancia inductiva: a) Circuito; b) Diagrama vectorial de Voltaje-corriente; c) Triángulo de impedancias; d) Triángulo de potencias

Factor de potencia (F. de P.): Se denomina así al coseno del ángulo de desfase φ existente entre la tensión y la corriente absorbida por una carga ya sea de tipo impedancia u otro (motores, por ejemplo). El F. de P. está directamente relacionado con la potencia activa P, tal como se planteó en la ecuación (3.54). El factor de potencia se puede determinar a partir de la potencia aparente S y la potencia activa P, según (3.54); es decir:

$$\text{F. de P.} = \cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{V \cdot I} \tag{3.57}$$

Mejoramiento del Factor de Potencia: La utilidad de las aplicaciones de la electricidad se debe a que los receptores transforman la energía eléctrica que absorben en otro tipo de energía, como es la motriz, la luminosa o la calórica. La mayoría de los receptores eléctricos son normalmente inductivos y, por tanto, trabajan con cargas en las que la corriente está retrasada un ángulo φ con respecto a la tensión aplicada. En consecuencia, la potencia aparente en VA que absorben de la red tiene una componente activa y otra componente reactiva de carácter inductivo.

La potencia activa P, en W, es entregada a la carga y representa la medida del trabajo útil por unidad de tiempo que puede realizar ésta; mientras que la potencia reactiva inductiva Q, en VAr, representa un bombeo de energía necesario para el propio funcionamiento del receptor, que no da ninguna energía útil, pero repercute en aumentar la potencia aparente que se tiene que transportar a través de las líneas. Por tanto, desde el punto de vista de la economía en el transporte de energía eléctrica, para una misma potencia útil o activa P, interesa que el Factor de Potencia sea lo más próximo a la unidad. Esto se consigue anulando total o parcialmente los efectos sobre la red de la potencia inductiva mediante la instalación de condensadores en paralelo con la carga o receptor.

Consideremos una carga inductiva RL, con Factor de Potencia dado por el ángulo de desfase φ entre V e I, tal como se muestra en la Figura 3.19. La potencia reactiva de la carga es:

$$Q = S \cdot \sin\varphi = V \cdot I \cdot \sin\varphi \tag{3.58}$$

Se quiere mejorar el Factor de Potencia de un valor cos φ a otro cos φ', por lo tanto la nueva potencia Q' que se debe absorber de la red será:

$$Q' = S' \cdot \sin\varphi' \tag{3.59}$$

El condensador a conectar en paralelo con la carga debe suministrar una potencia reactiva Q_C cuyo valor es:

$$Q_C = Q - Q' = S \cdot \sin \varphi - S' \cdot \sin \varphi' \qquad (3.60)$$

O bien, a partir de la potencia activa P:

$$Q_C = P \cdot (\mathrm{tg}\, \varphi - \mathrm{tg}\, \varphi') \qquad (3.61)$$

La capacitancia en Farad es:

$$C = \frac{P \cdot (\mathrm{tg}\, \varphi - \mathrm{tg}\, \varphi')}{\omega \cdot V^2} \qquad (3.62)$$

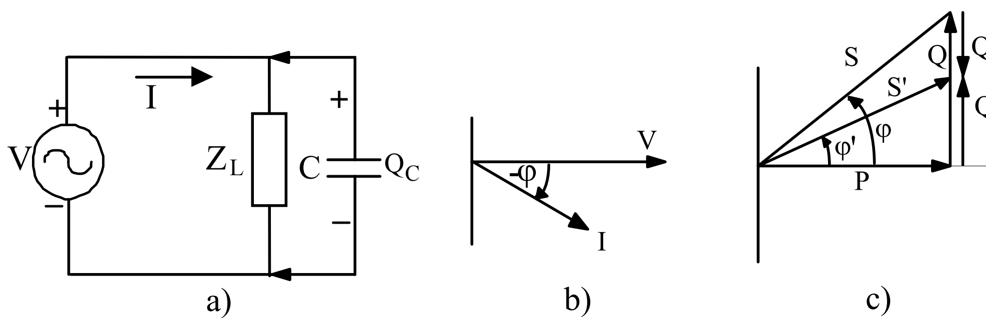


Figura 3.19.- Carga inductiva y condensador para mejorar el F. de P.: a) Circuito; b) Diagrama fasorial de voltaje y corriente de la carga antes; c) Triángulo de potencias antes y después

3.13. Circuitos con resistencia, inductancia y capacitancia en corriente alterna

3.13.1. Introducción

En corriente alterna, un circuito que presente al mismo tiempo resistencia, autoinducción y capacidad puede tener sus elementos conectados serie, en paralelo ó en forma combinada (mixta). Los efectos producidos por la capacidad y la autoinducción son opuestos. La autoinducción produce un desfase de la corriente en retraso, y la capacidad lo produce en adelanto, como ya hemos visto en los apartados anteriores.

Para el análisis de las caídas de tensión, de la corriente y de la tensión resultante o aplicada, así como de la impedancia y la potencia en un circuito RLC, utilizaremos el cálculo complejo ó vectorial simbólico. Los diagramas vectoriales y cartesianos determinan de forma clara la expresión gráfica de las relaciones mutuas entre las distintas magnitudes que se analizan, pero no facilitan la resolución analítica o numérica de los problemas. Son un eficaz medio conceptual para comprender los fenómenos eléctricos y para obtener los valores instantáneos de las magnitudes que intervienen, pero no son la herramienta adecuada para obtener las magnitudes en estado estacionario.

Para circuitos relativamente simples, la trigonometría ayuda conceptualmente y facilita el cálculo para obtener las soluciones de circuitos eléctricos en estado estacionario. Para circuitos complicados conduce a procesos muy pesados, cuando no imposibles. De ahí, que se tenga que recurrir a herramientas más potentes, como sucede con el álgebra compleja que se ha explicado en el Apartado 3.9.

Para el estado estacionario se puede prescindir de la variación periódica senoidal (vector giratorio) de la tensión y de la corriente. En estas condiciones, se considera el vector giratorio como si fuera fijo, de valor absoluto igual a su valor eficaz si se trata de tensión, corriente ó potencia, e igual a un valor medio si se trata de flujo o inducción. De esa forma, es legítimo emplear vectores fijos para representar magnitudes eléctricas senoidales. Como la tensión y la corriente y sobre todo, la potencia e impedancia, son magnitudes físicas escalares, estos vectores fijos deben considerarse simbólicos. Hay autores que a estos vectores fijos les llaman fasores, que es la designación que haremos en este curso. Así se tienen los fasores de tensión y de corriente, por ejemplo.

Como herramienta matemática, el cálculo vectorial simbólico goza de todas las propiedades del cálculo con números complejos. Tiene la ventaja de su sencillez y potente utilidad por trabajar con valores eficaces y ángulo de fase de las magnitudes tensión, corriente, impedancia y potencia, en todas las ecuaciones relacionadas con las leyes de Ohm y de Joule en corriente alterna.

3.13.2. Circuito serie RLC

Caídas de voltaje e impedancia total: Consideremos el circuito RLC serie de la Figura 3.20 a). En este circuito, al igual que lo visto para un circuito de corriente continua con resistencias en serie, la corriente es la misma en cada uno de los componentes y la tensión aplicada corresponde a la suma de las caídas de voltaje en cada elemento. Aplicando la Ley de Ohm a cada elemento se tiene:

$$\dot{V}_R = R \cdot \dot{I} \qquad \dot{V}_L = jX_L \cdot \dot{I} \qquad \dot{V}_C = -jX_C \cdot \dot{I} \tag{3.63}$$

Aplicando “fasorialmente” la II Ley de Kirchhoff en la Figura 3.20 b), con $X_L > X_C$ se tiene:

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L + \dot{V}_C = R \cdot \dot{I} + jX_L \cdot \dot{I} - jX_C \cdot \dot{I} = (R + jX_L - jX_C) \cdot \dot{I} \tag{3.64}$$

De la expresión (3.64), la impedancia compleja $\dot{Z}$ queda **(Ley de Ohm en C.A.)**:

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = R + jX_L - jX_C = Z\angle\varphi \tag{3.65}$$

Donde $Z = |\dot{Z}|$ es el módulo del fasor $\dot{Z}$ y φ es el argumento (ángulo) del fasor $\dot{Z}$. Según el triángulo de impedancias de la Figura 3.20 c) sus valores son:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad \text{y} \qquad \varphi = \text{arctg}\left(\frac{X}{R}\right) = \text{arctg}\left(\frac{(X_L - X_C)}{R}\right) \tag{3.66}$$

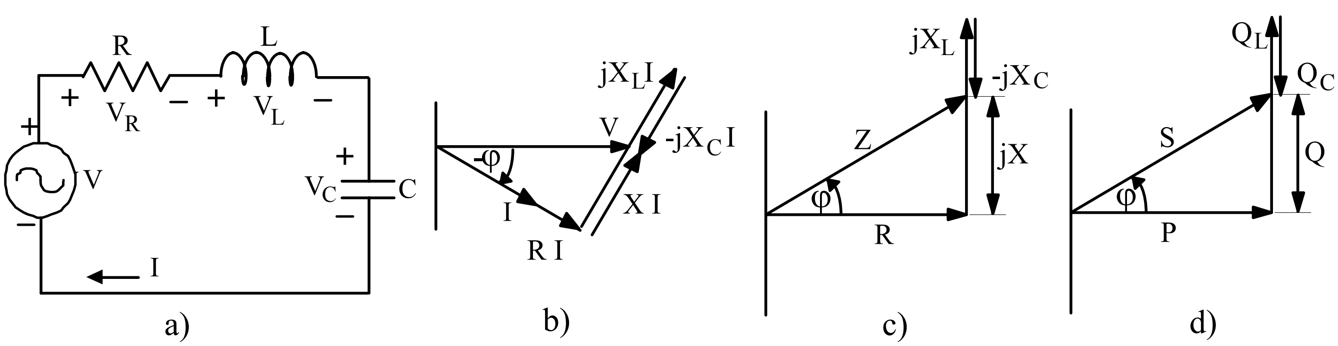


Figura 3.20.- Circuito RLC serie: a) Circuito, b) Diagrama fasorial Voltaje-Corriente; c) Triángulo de impedancias, d) Triángulo de potencias

Potencia compleja y triángulo de potencias: En el Apartado 3.12, ecuación (3.56), se indicó que la potencia compleja se puede escribir como el producto del fasor voltaje, por el conjugado de la corriente. Esto tiene por objeto que la expresión matemática sea consistente con la naturaleza inductiva o capacitiva de la potencia y corresponde a la **Ley de Joule en C.A., es decir**:

$$\dot{S} = \dot{V} \cdot I^{*} \tag{3.67}$$

Por otra parte, y de acuerdo con la Figura 3.20 d) se tiene:

$$\dot{S} = \dot{V} \cdot I^{*} = P + jQ = P + j(Q_L - Q_C) = S\angle\varphi \tag{3.68}$$

Donde $S = \left|\dot{S}\right|$ es el módulo del fasor $\dot{S}$ y φ es el argumento (ángulo) del fasor $\dot{S}$. Según la Figura 3.20 d) sus valores son:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2} \qquad \text{y} \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{Q}{P}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{Q_L - Q_C}{P}\right) \tag{3.69}$$

Para las admitancias se aplicará el mismo método en el apartado siguiente.

Resonancia serie: En todos los circuitos de corriente alterna se ha supuesto que se alimenta el circuito con un voltaje V a frecuencia constante. Por otra parte, el factor de potencia del circuito RLC depende de los valores relativos de X_L y de X_C, los que son fijos para un valor determinado de frecuencia. Si se varía la frecuencia de alimentación del circuito serie RLC hasta hacer coincidir el valor de las reactancias inductiva y capacitiva, el Factor de Potencia será la unidad, el circuito absorberá el máximo valor de la corriente, pues su impedancia total será mínima (igual a la resistencia R pues la reactancia neta es cero), las caídas de voltaje en las reactancias inductiva y capacitiva puede tomar valores muy elevados y entrará en estado **resonante** ó **en resonancia**.

La frecuencia a la que produce la resonancia se denomina frecuencia de resonancia, f_r y vale:

$$f_r = \frac{1}{2 \cdot \pi \sqrt{L \cdot C}} \tag{3.70}$$

La corriente del circuito y las caídas de voltaje en las reactancias inductiva y capacitiva son:

$$I = \frac{V}{R} \qquad \text{y} \qquad V_L = V_C = \frac{V}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{3.71}$$

3.13.3. Circuito paralelo RLC

Corriente total y corrientes parciales: En un circuito paralelo RLC como el que se indica en la Figura 3.21, la tensión total aplicada es única e idéntica para los tres elementos, mientras la corriente que circula por cada uno de ellos es distinta y depende de los valores de R, L, C y la frecuencia, tal como se explicó en los Apartados anteriores; es decir, la corriente que circula por la resistencia está en fase con la tensión aplicada y está limitada por el valor de R (independiente de la frecuencia); la corriente que circula por la autoinducción $\dot{I}_L$ está retrasada un ángulo de 90º respecto a la tensión aplicada y está limitada por un valor X_L que es directamente proporcional a la frecuencia y la corriente que circula por la capacidad $\dot{I}_C$ está adelantada un ángulo de 90º respecto a la tensión aplicada y está limitada por un valor X_C, inversamente proporcional a la frecuencia. Es decir:

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{V}}{R} \qquad \dot{I}_L = \frac{\dot{V}}{jX_L} \qquad \dot{I}_C = \frac{\dot{V}}{-jX_C} \tag{3.72}$$

De acuerdo con la primera ley de Kirchhoff, y considerando el diagrama fasorial de la Figura 3.21 b); el fasor corriente total del circuito $\dot{I}_T$ es:

$$\dot{I}_T = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C \tag{3.73}$$

Por lo tanto:

$$\dot{I}_T = \frac{\dot{V}}{R} + \frac{\dot{V}}{jX_L} + \frac{\dot{V}}{-jX_C} \tag{3.74}$$

Impedancia del circuito: A partir de la ecuación (3.74) se puede escribir:

$$\frac{\dot{I}_T}{\dot{V}} = \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} + \frac{1}{-jX_C} \tag{3.75}$$

Donde $\dot{Z}$ es el fasor impedancia total del circuito, el que a partir de (3.75) nos da:

$$\dot{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)} = Z\angle\varphi \tag{3.76}$$

El fasor $\dot{Z}$, tiene un módulo Z y un argumento φ que se determinan de (3.76):

$$Z = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}} \qquad \text{y} \qquad \varphi = \text{arctg}\left\{-\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)\cdot R\right\} \tag{3.77}$$

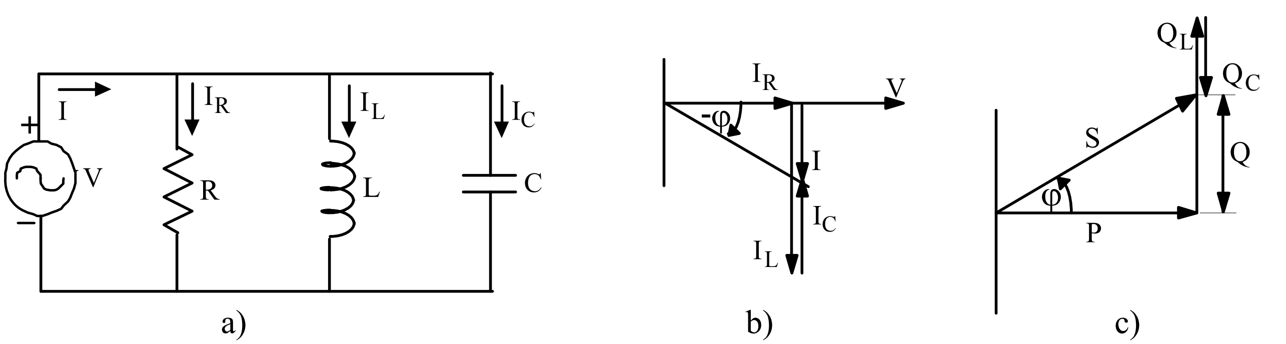


Figura 3.21.- Circuito RLC paralelo: a) Circuito; b) Diagrama fasorial Voltaje-Corriente; c) Triángulo de potencias

El signo de φ, que determina el factor de potencia, depende de los valores relativos de X_L y X_C. Si estos valores son tales que la corriente en la rama inductiva es mayor, la corriente total está retrasada respecto de la tensión aplicada, φ es negativo (Figura 3.21 b) y el ángulo de la impedancia es positivo. Si la corriente en la rama capacitiva es mayor, ocurre lo contrario, y por lo tanto, φ es positivo.

Admitancia del circuito: Para resolver los circuitos RLC en paralelo es práctico convertir la impedancia de cada rama en su admitancia respectiva, para después obtener la admitancia equivalente y, por último, hallar la impedancia total del circuito.

Para el circuito de la Figura 3.21 a), considerando las ecuaciones (3.50) y (3.75), se tiene:

$$\dot{Y} = \frac{\dot{I}_T}{\dot{V}} = \dot{Y}_R + \dot{Y}_L + \dot{Y}_C = \frac{1}{R} + j\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right) = Y\angle\varphi = G + jB \tag{3.78}$$

Donde:

$$G = \frac{1}{R} \qquad \text{y} \qquad B = \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \tag{3.79}$$

Por otra parte, según (3.78), el módulo Y y el argumento φ de la admitancia compleja $\dot{Y}$ son:

$$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2} \qquad \text{y} \qquad \varphi = \text{arctg}\left\{\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)\cdot R\right\} \tag{3.80}$$

A esta admitancia se le llama de entrada o equivalente y su unidad, es el siemens (S).

Caso particular de dos impedancias conectadas en paralelo: Al igual que lo indicado en el Apartado 2.7.2, ecuación (2.31), cuando dos impedancias complejas $\dot{Z}_1$ y $\dot{Z}_2$ se conectan en paralelo, se puede escribir:

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \tag{3.81}$$

Potencia compleja y triángulo de potencias: En la Figura 3.21 c) se aprecia que el triángulo de potencias es el mismo que para el circuito RLC serie y, por lo tanto son válidas todas las expresiones planteadas en el Apartado 3.13.2.

Resonancia en paralelo. Antirresonancia: Si se varía la frecuencia de la red de alimentación en el circuito paralelo RLC puede ocurrir que se anulen mutuamente las corrientes en la rama de la autoinducción y en la rama de la capacidad. Ello es posible si se varía la frecuencia de la red hasta hacer coincidir el valor de la susceptancia inductiva con el valor de la susceptancia capacitiva. De esta forma se anulan, por ser de signos opuestos, y queda en el circuito sólo el efecto de la resistencia, por lo que en este caso, la corriente total será la mínima.

Es decir, un circuito paralelo RLC estará en resonancia si la frecuencia es tal que hace que la admitancia de entrada sea equivalente a la conductancia del circuito, o sea, cuando el valor de B dado por la ecuación (3.79) es cero y por lo tanto:

$$B = \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} = 0 \Rightarrow f_r = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}} \tag{3.82}$$

Como se aprecia, la frecuencia de resonancia en el circuito paralelo RLC tiene la misma expresión que para el caso RLC serie.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Determinar el período de una onda senoidal de:
a) 50 Hz.
b) 1000 Hz.
c) 100 GHz.
d) 500 kHz.

2.- Una onda de corriente alterna tiene por expresión i = 10 · sin α [A]. Determinar los valores instantáneos para los siguientes valores de α:
a) α_1=30º.
b) α_2=1 rad.
c) α_3=120º.
d) α_4=2 rad.

3.- Una onda de tensión alterna senoidal tiene la forma $v = 220 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \omega t$. Determina su expresión algebraica para las siguientes frecuencias:
a) 50 Hz.
b) 100 Hz.
c) 500 Hz.
d) 30 kHz.

4.- En una onda de tensión de la forma, v = 10 · sin 377· t [V], determinar:
a) La frecuencia.
b) El periodo.
c) El valor de la tensión al cabo de 0,01 s.

5.- Una onda de corriente alterna senoidal tiene un valor eficaz de 18 A y pasa dos veces consecutivas por el valor cero en un tiempo de 10 ms. Determinar:
a) El valor máximo.
b) El valor medio.
c) La expresión algebraica.

6.- Considerar los números complejos siguientes: $\dot{A} = 3 + j4;\ \dot{B} = -2 + j4;\ \dot{C} = 4 - j5$ y realizar las siguientes operaciones, expresando los resultados en forma polar:
a) Exprese cada uno de ellos en la forma polar.]
b) Escriba el conjugado de cada uno de ellos.
c) $\dot{A} + \dot{B};\ \dot{C} + \dot{A};\ \dot{B} + \dot{C}$ y $\dot{A} + \dot{B} + \dot{C}$.
d) $\dot{A} - \dot{B};\ \dot{C} - \dot{A}$ y $\dot{B} - \dot{C}$.
e) $\dot{A} \cdot \dot{B};\ \dot{C} \cdot \dot{A};\ \dot{B} \cdot \dot{C};\ \dot{A} \cdot \dot{B} \cdot \dot{C};\ (\dot{A} + \dot{B}) \cdot \dot{C}$.
f) $\dot{A} / \dot{B};\ \dot{C} / \dot{A};\ \dot{B} / C\ (\dot{A} \cdot \dot{B}) / \dot{C};\ (\dot{A} + \dot{B}) / \dot{C}$.

7.- Considerar los números complejos: $\dot{A} = 10\angle 30^{o};\ \dot{B} = 5\angle -45^{o};\ \dot{C} = 12\angle 240^{o}; D = 15\angle -120^{o}$. Expresarlos en forma rectangular (binómica).

8.- A una resistencia de 484 Ω se le aplica una tensión $v = \sqrt{2} \cdot 220 \cdot \sin 377t$ V. Determinar:

a) La frecuencia.
b) La corriente eficaz
c) Las potencias: Aparente, activa y reactiva.
d) La potencia máxima.
e) La potencia instantánea para t=1 ms.

9.- Una inductancia de 10 H se somete a una tensión senoidal de 220 V, 50 Hz. Determinar:

a) La reactancia
b) La corriente efectiva
c) La potencia aparente, activa y reactiva.]

10.- Un condensador de 3.000 VAr absorbe una corriente de 7,5 A. Determinar:

a) La tensión.
b) La reactancia.
c) La capacitancia a 50 Hz.

11.- A una inductancia de 22 mH se le aplica una tensión alterna senoidal $v = 200 \cdot \sin 314.000\, t$ V. Determinar:

a) La reactancia inductiva.
b) La corriente efectiva.
c) La expresión instantánea de la corriente.
d) La expresión instantánea de la potencia.
e) La potencia reactiva.
f) La potencia reactiva cuando ha transcurrido 1 μs después que la onda de potencia ha pasado por cero en dirección negativa.

12.- Un condensador de 240 μF está conectado a un generador de C.A. Si la corriente que circula por el condensador es $i_C = 10 \cdot \sin 6{,}28\, t$ A, determinar:

a) La frecuencia.
b) La reactancia capacitiva.
c) La potencia del condensador.
d) La expresión instantánea de la tensión.
e) La expresión instantánea de la potencia.
f) El valor de la potencia en el instante t=0,0002 segundos una vez que la onda de potencia ha pasado por cero en dirección positiva.

13.- Una impedancia absorbe una potencia activa de 6.800 W, con un Factor de Potencia 0,85 inductivo. La tensión de la red es de 220 V y la frecuencia de 50 Hz. Determinar:

a) El ángulo de desfase entre V e I.
b) Las potencias aparente y reactiva.
c) La corriente (módulo y ángulo).
d) Las impedancia, resistencia y reactancia.

14.- El módulo de una impedancia es de 5 Ω y el Factor de Potencia es de 0,6 inductivo. Si se le aplica una tensión alterna de 220 V; 50 Hz. Suponiendo como fasor de referencia al voltaje V, determinar:

a) Resistencia, reactancia y triángulo de impedancias.

b) Corriente que absorbe (Módulo y ángulo)
c) Potencias aparente, activa y reactiva
d) Energía activa y reactiva consumida en 8 horas.

15.- Un circuito serie formado por una inductancia pura de 318,47 mH, un condensador puro de 300 μF y un resistor puro de 10 Ω; se conectan a un generador de 220 V, 50 Hz. Suponiendo como fasor de referencia al voltaje V, determinar:
a) La corriente absorbida por el circuito.
b) El voltaje en cada uno de los componentes.
c) La potencia absorbida por cada componente.
d) Las potencias aparente, activa y reactiva consumidas por el circuito.
e) El factor de potencia del circuito completo.

16.- A un circuito serie formado por tres impedancias Z_1=6+j8 Ω; Z_2=20+j10 Ω y Z_3=15-j5 Ω se le aplica un voltaje de 220 V, 50 Hz. Determinar, suponiendo como fasor de referencia al voltaje V:
a) La corriente del circuito (módulo y ángulo).
b) Las tensiones en cada una de las impedancias.
c) Las potencias aparente, activa y reactiva disipadas en cada impedancia.
d) Las potencias aparente, activa y reactiva totales.
e) El Factor de potencia del circuito.

17.- Considere un circuito serie formado por una resistencia de 500 Ω, una inductancia de 200 mH y un condensador de 0,2 μF. Si la tensión de la red es de 200 V a 500 Hz, determinar:
a) La impedancia del circuito.
b) La corriente absorbida.
c) Las potencias aparente, activa y reactiva del circuito.
d) El factor de potencia del circuito.
e) La frecuencia de resonancia.
f) Los voltajes en la inductancia y en la capacitancia a la frecuencia de resonancia.

18. Se conectan en paralelo una resistencia de 10 Ω, una inductancia de 0,03 H y un condensador de 350 μF, a una red de 240 V, 60 Hz. Determinar:
a) La impedancia y la admitancia total.
b) La corriente total.
c) Las corrientes en cada componente.
d) Las potencias aparente, activa y reactiva, absorbidas por cada componente.
e) Las potencias aparente, activa y reactiva, totales.
f) El Factor de Potencia del circuito completo.**]**
g) La frecuencia de resonancia.
h) La corriente total y las corrientes en la inductancia y en la capacitancia a la frecuencia de resonancia.

19.- Un circuito está formado por tres impedancias Z_1=6+j8 Ω; Z_2=20+j10 Ω y Z_3=15-j5 Ω, las que se conectan en paralelo entre si y se les aplica un voltaje de 220 V, 50 Hz. Determinar, suponiendo como fasor de referencia al voltaje V:
a) La admitancia del circuito.
b) La impedancia del circuito.
c) La corriente total del circuito (módulo y ángulo).

d) Las corrientes en cada una de las impedancias.
e) Las potencias aparente, activa y reactiva, totales.
f) El Factor de potencia del circuito.

20.- Las tres impedancias del problema 19 se conectan de manera que Z_2 y Z_3 quedan en paralelo entre si y en serie con Z_1. El conjunto se alimenta a 220 V, 50 Hz. Determinar:

a) La impedancia equivalente.
b) La admitancia equivalente.
c) La corriente total.
d) Las potencias aparente, activa y reactiva, totales.
e) El Factor de Potencia del circuito.

21.- Un motor monofásico de 220 V; 50 Hz; 1,6 CV tiene un rendimiento del 80% y un Factor de Potencia de 0,6. Determinar el condensador a conectar en paralelo para mejorar el factor de potencia a 0,9.

22.- Las energías activa y reactiva medidas en una instalación eléctrica durante un mes son: 4.000 kW-h y 7.000 kVAr-h. Determinar la potencia y la capacitancia del condensador que se debe conectar en paralelo con la instalación con el fin de mejorar el factor de potencia a 0,93. Considere constante la potencia activa en el periodo de medición e igual a su valor promedio.

23.- Una carga consume 120 kW a 2300 V, 60 Hz, con Factor de Potencia 0,65 inductivo. Determinar:

a) La corriente consumida.
b) Las potencias aparente y reactiva.
c) El condensador que equilibre la potencia reactiva consumida por la carga.
d) La corriente consumida luego de instalar el condensador.