



Universidad Carlos III de Madrid
Escuela Politécnica Superior
Área de Ingeniería Eléctrica

APUNTES DE TEORÍA DE CIRCUITOS

Julio Usaola García

Leganés, septiembre 2002

1. FUNDAMENTOS.....	7
1.1 Unidades electromagnéticas	7
1.2 Magnitudes básicas.....	8
1.2.1 Carga eléctrica	8
1.2.2 Corriente.....	8
1.2.3 Tensión.....	9
1.2.4 Potencia.....	10
1.3 Leyes de Kirchhoff.....	11
1.4 Circuitos eléctricos.....	13
2. ELEMENTOS DE LOS CIRCUITOS.....	14
2.1 Resistencia.....	14
2.1.1 Definición.....	14
2.1.2 Resistencias reales	15
2.1.3 Potencia consumida por una resistencia.....	17
2.2 Condensadores.....	17
2.2.1 Definición. Condensadores ideales.....	17
2.2.2 Condensadores reales	19
2.2.3 Potencia consumida por un condensador.....	20
2.3 Bobinas o inductancias.....	21
2.3.1 Definición.....	21
2.3.2 Potencia consumida por una bobina ideal.....	22
2.4 Bobinas acopladas	23
2.4.1 Definición.....	23
2.4.2 Potencia consumida por las bobinas acopladas.....	25
2.5 Transformador ideal.....	26
2.5.1 Definición.....	26
2.5.2 Potencia consumida por un transformador ideal.....	27

2.6	Fuentes independientes ideales.....	28
2.6.1	Fuentes de tensión.	28
2.6.2	Fuentes de corriente.	30
2.7	Fuentes independientes reales.....	31
2.7.1	Fuentes de tensión.	31
2.7.2	Fuentes de corriente.	34
2.7.3	Equivalencia de fuentes reales.	36
2.8	Fuentes dependientes	37
3.	ASOCIACIONES DE ELEMENTOS.....	38
3.1	Introducción.....	38
3.2	Asociación de fuentes ideales.....	38
3.3	Asociaciones de resistencias.....	40
3.3.1	Asociación en serie. Divisor de tensión.	40
3.3.2	Asociación en paralelo. Divisor de corriente.	41
3.3.3	Transformaciones triángulo-estrella y estrella triángulo.....	42
3.4	Asociación en paralelo de fuentes de tensión reales.....	48
4.	PRINCIPIOS DE ANÁLISIS DE CIRCUITOS.....	50
4.1	Definiciones topológicas.....	50
4.2	Número de ecuaciones independientes.....	51
4.3	Método de nudos.....	52
4.4	Método de mallas	54
4.5	Resolución de circuitos con fuentes impropias.....	57
4.5.1	Resolución por cambio de las incógnitas del circuito.	57
4.5.2	Resolución mediante transformación de la geometría	59
4.6	Tratamiento de las fuentes dependientes	61

5.	TEOREMAS.....	62
5.1	Introducción.....	62
5.2	Teorema de superposición. Linealidad.....	62
5.3	Teorema de sustitución.	63
5.4	Teorema de Thévenin.....	63
5.5	Teorema de Tellegen.	65
5.6	Fórmula de Millman.....	66
5.7	Teorema de reciprocidad.....	66
6.	RÉGIMEN ESTACIONARIO SINUSOIDAL	69
6.1	Magnitudes características de una onda sinusoidal.....	69
6.2	Exposición del problema; régimen transitorio y permanente de un circuito eléctrico.....	71
6.3	Números complejos: notación y algunas propiedades.....	73
6.4	Resolución de circuitos de alterna mediante fasores.....	75
6.5	Respuesta de los elementos pasivos básicos.....	76
6.5.1	Respuesta de una resistencia	77
6.5.2	Respuesta de un condensador.....	78
6.5.3	Respuesta de las bobinas y bobinas acopladas.....	80
6.6	Concepto de impedancia.....	83
6.7	El transformador ideal como adaptador de impedancias	85
7.	TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN CORRIENTE ALTERNA.	87
7.1	Las leyes de Kirchhoff en corriente alterna	87

7.2	Asociaciones de elementos pasivos en corriente alterna	88
7.2.1	Asociación en serie	88
7.2.2	Asociación en paralelo	88
7.2.3	Conversión triángulo estrella y estrella - triángulo.	89
7.3	Resolución de un circuito R–L–C serie	90
7.4	Circuito R-L-C paralelo.....	94
7.5	Análisis de circuitos en corriente alterna.	96
7.5.1	Método de nudos.	97
7.5.2	Método de mallas	98
7.5.3	Fuentes dependientes e impropias	98
7.5.4	Tratamiento de los acoplamientos magnéticos.....	99
7.6	Teoremas en corriente alterna	100
8.	POTENCIA Y ENERGÍA EN EL RÉGIMEN ESTACIONARIO SINUSOIDAL.....	104
8.1	Potencia y energía consumidas por los elementos pasivos.	104
8.1.1	Resistencias.	104
8.1.2	Condensadores.	106
8.1.3	Bobinas y bobinas acopladas.....	107
8.2	Potencia consumida por un dipolo: potencia activa, reactiva y aparente.....	109
8.3	Distintas expresiones de la potencia en alterna.	111
8.4	Carácter de un dipolo	112
8.5	Teorema de Boucherot.....	114
8.6	Factor de potencia y su importancia en el suministro de energía eléctrica.....	115
9.	SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS	117
9.1	Introducción. Definiciones.....	117
9.2	Diagrama vectorial de tensiones	119

9.3	Corrientes en los sistemas trifásicos.....	121
9.4	Magnitudes de fase y de línea.....	123
9.5	Conversión de fuentes reales de estrella a triángulo y viceversa.....	124
9.6	Circuitos monofásicos equivalentes.....	128
10.	POTENCIA EN LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS	134
10.1	Potencias activa, reactiva y aparente.....	134
10.1.1	Potencia activa.....	134
10.1.2	Potencias reactiva y aparente. Factor de potencia.....	135
10.2	Potencia instantánea en los sistemas trifásicos equilibrados.....	136
10.3	Compensación del factor de potencia en los sistemas trifásicos.....	137
10.4	Determinación de la secuencia de fases.....	138
10.5	Medida de potencia en los sistemas trifásicos.....	140
10.5.1	Medida de potencia activa.....	140
10.5.2	Método de los dos vatímetros.....	143
10.5.3	Medida de la potencia reactiva.....	145
10.6	Comparación entre sistemas monofásicos y trifásicos.....	146
11.	RÉGIMEN TRANSITORIO EN CIRCUITOS DE PRIMER ORDEN.....	149
11.1	Introducción. Circuito R-L serie.....	149
11.2	Circuito R-C paralelo.....	151
11.3	Análisis sistemático de los transitorios de primer orden.	152
11.3.1	Cálculo del régimen permanente en circuitos con fuentes de corriente continua	153
11.3.2	Cálculo de condiciones iniciales.	154

1. FUNDAMENTOS

1.1 Unidades electromagnéticas

Las magnitudes que se utilizarán con más frecuencia en electricidad son, junto con sus unidades y su símbolo más frecuente en el Sistema Internacional:

q	carga eléctrica	culombio (C)
i	corriente	amperio (A)
u,v	tensión	voltio (V)
e	fuerza electromotriz	voltio (V)
P	potencia	vatio (W)
W	energía	julio (J)
f	frecuencia	hercios (Hz)

Prefijos antepuestos a las unidades

exa	E	10^{18}	mega	M	10^6	deci	d	10^{-1}	nano	n	10^{-9}
peta	P	10^{15}	kilo	k	10^3	centi	c	10^{-2}	pico	p	10^{-12}
tera	T	10^{12}	hecto	h	10^2	mili	m	10^{-3}	femto	f	10^{-15}
giga	G	10^9	deca	da	10^1	micro	μ	10^{-6}	atto	a	10^{-18}

1.2 Magnitudes básicas.

1.2.1 Carga eléctrica

La carga eléctrica es la base para describir todos los fenómenos eléctricos. La carga eléctrica es una propiedad de la materia que tienen todos los cuerpos. Es de naturaleza bipolar, y todos los cuerpos están cargados con carga positiva (+) o negativa (-), según predominen las cargas de uno u otro tipo, o bien las cargas pueden compensarse, y el cuerpo es eléctricamente neutro.

El trasvase de cargas entre unos cuerpos y otros es la raíz de cualquier fenómeno eléctrico, y este desplazamiento, y su capacidad para producirlo, se mide mediante dos magnitudes: corriente y tensión, o voltaje, que se describen a continuación.

1.2.2 Corriente.

Se define *corriente eléctrica* i como la variación de carga eléctrica con respecto al tiempo.

$$i = \frac{dq}{dt}$$

En general, la corriente eléctrica es dependiente del tiempo. Por convenio se entiende que el desplazamiento de cargas ideales positivas entre dos puntos produce una circulación de corriente en el sentido de este desplazamiento.

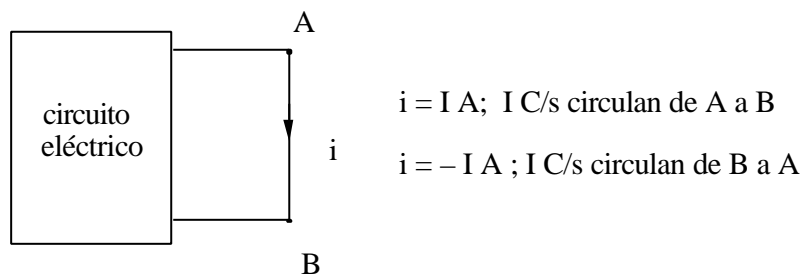


Figura 1.1

La corriente eléctrica es un fenómeno que se produce en los materiales conductores, y consiste en el desplazamiento de electrones libres en el seno de un material conductor. Puesto que los electrones son

cargas elementales negativas, la corriente tal como se ha definido tiene un sentido opuesto al del desplazamiento de los electrones.

La unidad de corriente eléctrica en el Sistema Internacional de unidades es el amperio (A)

1.2.3 Tensión.

Se entiende por *tensión eléctrica* o simplemente *tensión* la diferencia que existe entre los potenciales eléctricos de dos puntos A y B de un circuito.

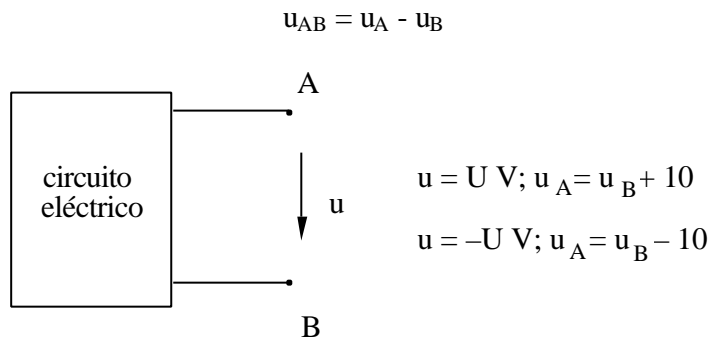


Figura 1.2

El sentido de la flecha de la figura es arbitrario e indica que, si la magnitud es positiva, el potencial eléctrico en el punto origen de la flecha es superior al potencial eléctrico en el final de la flecha.

La tensión o diferencia de potencial se puede definir también como la energía que es necesario aplicar a la unidad de carga para hacerla circular entre dos puntos

$$u = \frac{dw}{dq}$$

Por tanto, una tensión positiva significa que es necesario suministrar energía para hacer circular cargas elementales positivas entre esos dos puntos.

La unidad de tensión en el Sistema Internacional de unidades es el voltio (V).

1.2.4 Potencia.

Puesto que se define la diferencia de potencial entre dos puntos como el trabajo que hay que realizar para transportar un diferencial de carga entre ellos, se puede afirmar que:

$$dw = u dq$$

Y dado que la corriente eléctrica es la variación de la carga con respecto al tiempo,

$$dw = u i dt$$

Y si la potencia es la diferencial de trabajo con respecto al tiempo se tiene

$$p(t) = \frac{dw(t)}{dt} = u(t) \cdot i(t) \quad (1.1)$$

El trabajo realizado entre los instantes t_0 y t_1 se puede escribir como

$$w(t) = \int_{t_0}^{t_1} u(t) \cdot i(t) dt \quad (1.2)$$

Sea un dipolo con dos terminales accesibles, A y B. En la Figura 1.3 se indica la tensión u entre los terminales, y la corriente i entrante en el dipolo. Estas magnitudes determinan una potencia entrante en el dipolo. Si la potencia es mayor que cero, el dipolo absorbe potencia y se comporta como una carga.

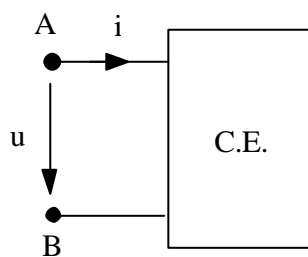


Figura 1.3 Dipolo con referencias de potencia entrante.

En la Figura 1.4 se representa el mismo dipolo, pero las referencias de tensión o de corriente han cambiado. En este caso la magnitud que resulta al multiplicar la tensión u por la corriente i es la potencia saliente del dipolo. Si la potencia es menor que cero, el dipolo será una carga. Si es mayor que cero, será un generador.

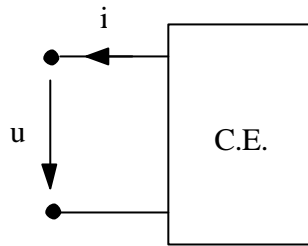


Figura 1.4. Dipolo con referencias de potencia saliente.

Si un dipolo puede dar energía a la red que no había absorbido previamente de esta, el dipolo es activo. Si sólo puede absorber energía y devolver la absorbida, el dipolo es pasivo. Matemáticamente, y con las referencias de la Figura 1.3, un dipolo es pasivo si:

$$w(t) = \int_{-8}^t u(\tau) \cdot i(\tau) d\tau = 0$$

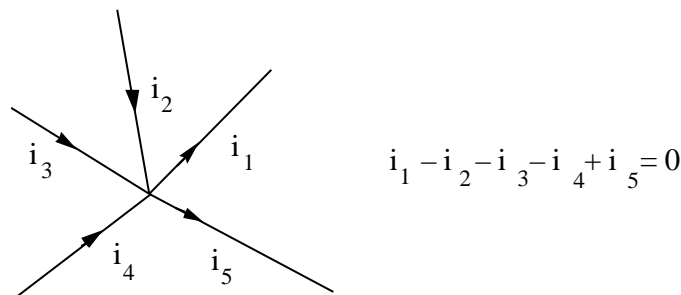
1.3 Leyes de Kirchhoff.

La teoría de circuitos eléctricos esta basada en las leyes de Kirchhoff. Estas leyes son consecuencia inmediata de leyes físicas. La primera ley, del principio de conservación de la carga, que proviene de las leyes de Maxwell, y la segunda del principio de conservación de la energía. Sin embargo, en este curso se prescinde de su demostración, por lo que se enunciarán como axiomas fundamentales.

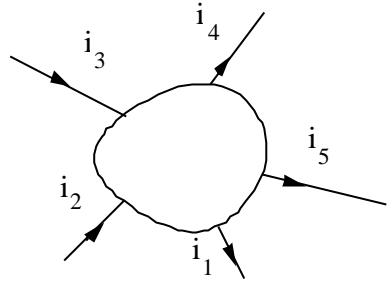
Definiendo rama como un elemento que presenta dos terminales, y nudo como la confluencia de varias ramas, los enunciados de las leyes de Kirchhoff son:

Primera ley de Kirchhoff

La suma algebraica de las intensidades entrantes en un nudo es nula en todo instante.



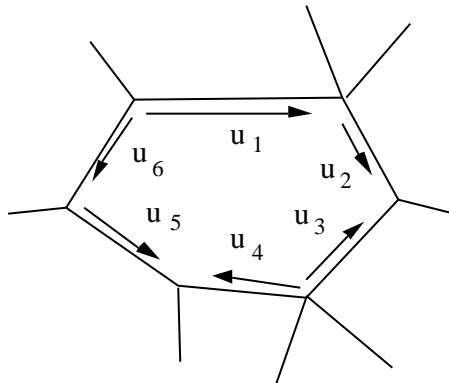
Esta ley puede aplicarse no sólo a nudos sino a cualquier región cerrada.



$$i_1 - i_2 - i_3 + i_4 + i_5 = 0$$

Segunda ley de Kirchhoff

La suma algebraica de las tensiones a lo largo de cualquier línea cerrada en un circuito es nula en todo instante.



$$u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 - u_6 = 0$$

Para que se cumpla esta ley no es necesario que el camino recorrido esté formada por ramas de un circuito físico, sino que pueden ser tensiones entre dos nudos arbitrarios.

1.4 Circuitos eléctricos.

Un circuito eléctrico consta de un conjunto de elementos, tanto consumidores de energía (pasivos) como posibles productores de energía (activos) conectados entre sí. Los elementos activos excitan al circuito de forma que éste produzca una determinada respuesta en forma de unos valores de tensión y de corriente en cada rama. Dependiendo de los datos y las incógnitas, los problemas que se presentan en la teoría de circuitos pueden ser de dos tipos:

- a) Análisis de circuitos: Conocidas la excitación y el circuito, hallar la respuesta
- b) Síntesis de circuitos. Conocidas la excitación y la respuesta, hallar el circuito.

Los circuitos se pueden clasificar en dos tipos:

- *Circuitos resistivos*: Aquellos en los que la relación entre las tensiones y corrientes en todas sus ramas vienen dadas por un sistema de ecuaciones algebraicas. Estos circuitos constan de fuentes y de elementos resistivos. Si todos los elementos resistivos y las fuentes dependientes tienen características lineales, el circuito será resistivo lineal y las ecuaciones que lo definen serán lineales. En caso contrario será un circuito no lineal, definido por ecuaciones no lineales.
- *Circuitos dinámicos*: Aquellos en los que la relación entre las tensiones y corrientes en todas sus ramas vienen dadas por un sistema de ecuaciones diferenciales. Estos circuitos pueden constar de fuentes, resistencias y elementos dinámicos (bobinas y condensadores). Si las características de todos los elementos son lineales el circuito es lineal, y estará definido por un sistema de ecuaciones lineales. Si no es así, tanto el sistema de ecuaciones diferenciales como el circuito serán no lineales.

En este curso se tratarán sólo circuitos lineales, tanto dinámicos como resistivos.

2. ELEMENTOS DE LOS CIRCUITOS

Una vez enunciadas las leyes de Kirchhoff, es necesario conocer las relaciones entre tensiones y corrientes en cada rama para analizar un circuito. Estas relaciones las definen los elementos conectados en dichas ramas, que en última instancia suelen reducirse a elementos ideales. Algunas de las características de estos elementos son que no ocupan espacio físico y que están conectados mediante conductores carentes de resistencia.

Un dispositivo eléctrico puede tener varios terminales que se conectan a distintos puntos del circuito. Con respecto al número de terminales (o polos) que tenga un dispositivo, éste puede ser un dipolo si tiene dos terminales, cuadripolo si tiene cuatro, o multipolo en general, si tiene varios. Un ejemplo de multipolo es el transistor.

2.1 Resistencia.

2.1.1 Definición

Una resistencia es un dipolo en el que en un instante t su tensión $u(t)$ y su corriente $i(t)$ satisfacen una relación definida por una curva en el plano $u-i$. Esta curva se conoce como *característica* de la resistencia en el instante t .

Dependiendo de cómo sea la característica de la resistencia, las resistencias se pueden clasificar en *resistencias lineales invariantes con el tiempo* (Figura 2.1 a), en las que la expresión de la característica tensión corriente es $u = R \cdot i$, *resistencias lineales variables con el tiempo* (Figura 2.1 b), en las que la expresión de la tensión en función de la corriente es $u(t) = R(t) \cdot i(t)$, y *resistencias no lineales*, variables o no con el tiempo. Una característica del primer tipo mencionado se representa en la Figura 2.1 c).

2. Elementos de los circuitos

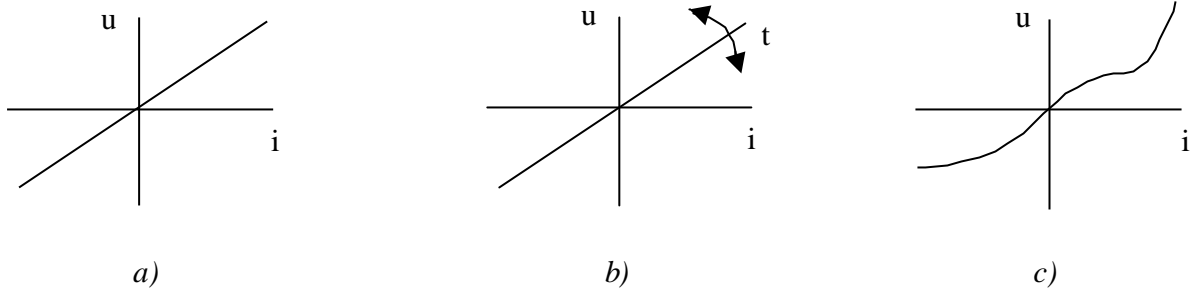


Figura 2.1

Experimentalmente se ha encontrado que en muchos conductores la corriente que circula por ellos es proporcional a la diferencia de potencial que haya entre sus extremos. Estas son resistencias lineales invariantes con el tiempo, y son los modelos de resistencia más comunes. A la relación que liga la tensión y la intensidad en las resistencias lineales se la conoce como *ley de Ohm*. La magnitud R se conoce como *resistencia* y se mide en *ohmios* (Ω).

Las resistencias se representan de la forma siguiente:

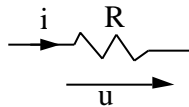


Figura 2.2

Con estas referencias de tensión y corriente, la Ley de Ohm se enuncia de la manera siguiente:

$$u = R \cdot i \quad (2.1)$$

Si una de las referencias cambiase, la ley de Ohm sería $u = -R \cdot i$.

La inversa de la resistencia se denomina *conductancia*, y se denota con la letra G y se mide en Siemens (S), o bien ohmios^{-1} (Ω^{-1}).

$$G = \frac{1}{R}$$

2.1.2 Resistencias reales

La resistencia eléctrica es una medida de la oposición que presenta un material al paso de la corriente. Cuando un campo eléctrico se establece en un conductor al conectar una fuente de tensión en sus extremos, los electrones libres en el material (conductor) experimentan una fuerza y se mueven en una

2. Elementos de los circuitos

dirección opuesta al campo. Cuando los electrones se mueven a través del conductor, chocan entre sí y con otros átomos. Estas colisiones entorpecen el flujo de cargas y reducen su magnitud. Por tanto, la resistencia de un conductor es, en primer lugar, una consecuencia de las colisiones aleatorias de los electrones libres. Precisamente la diferencia de tensión entre dos puntos es la energía que hay que suministrar a la unidad de carga para que recorra un circuito eléctrico entre esos dos puntos.

La resistencia de un cuerpo depende de su longitud y su sección, entendiendo esta última como el área de una superficie perpendicular a la dirección del campo eléctrico, así como la longitud es la distancia que recorre la carga en el conductor. Además, la resistencia depende del material de la que está construida. Estas dependencias se reflejan mediante la fórmula:

$$R = \rho \frac{l}{s} \quad (2.2)$$

En donde

R	resistencia (Ω)
ρ	resistividad (Ω · m)
l	longitud (m)
s	sección (m ²)

Valores típicos de la resistividad de los materiales son:

Material	ρ típica (Ω · m)
Plata	1,54 · 10 ⁻⁸
Cobre	1,72 · 10 ⁻⁸
Oro	2,45 · 10 ⁻⁸
Aluminio	2,83 · 10 ⁻⁸
Wolframio	5,50 · 10 ⁻⁸
Níquel	7,80 · 10 ⁻⁸
Constantán	49 · 10 ⁻⁸

2. Elementos de los circuitos

Carbón $3500 \cdot 10^{-8}$

Las resistencias que se emplean en la práctica se comportan como una resistencia ideal, con muy poca separación respecto de los valores esperados.

2.1.3 Potencia consumida por una resistencia.

Con las referencias de la Figura 2.3, el valor de la potencia entrante en una resistencia es:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2 = \frac{u^2}{R} \quad (2.3)$$

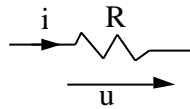


Figura 2.3. Resistencia con referencias de potencia entrante

Esta cantidad es siempre mayor que cero, es decir, la resistencia siempre absorbe potencia. La energía absorbida por una resistencia valdrá:

$$w(t) = \int_{-8}^t R \cdot i^2(\tau) d\tau = \int_{-8}^t \frac{u^2(\tau)}{R} d\tau \quad (2.4)$$

2.2 Condensadores.

2.2.1 Definición. Condensadores ideales.

Desde un punto de vista matemático se puede definir un condensador como un dipolo en el que en un instante t , la carga almacenada en él y la tensión en bornas satisfacen una relación definida por una curva en el plano (u - q).

2. Elementos de los circuitos

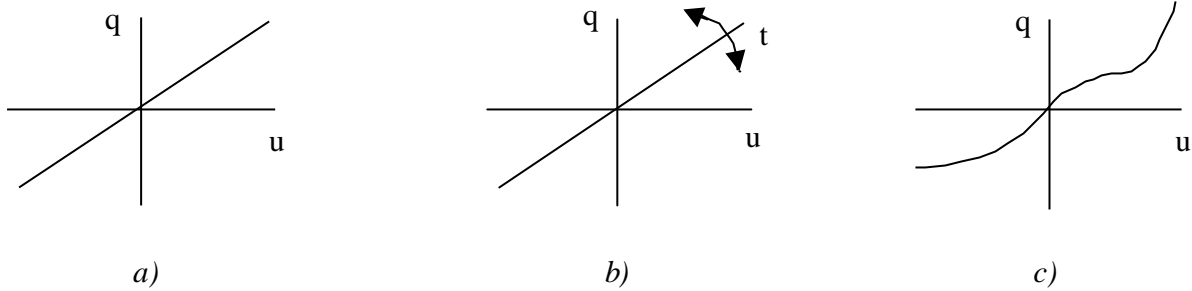


Figura 2.4

Esta curva es la característica del condensador en el instante t . Al igual que las resistencias, estas características se pueden clasificar en *lineales invariantes con el tiempo* (Figura 2.4 a), en las que la expresión de la carga en función de la tensión es $q = C \cdot u$, *lineales variables con el tiempo* (Figura 2.4 b), en las que la característica carga tensión es $q(t) = C(t) \cdot u(t)$, y *condensadores no lineales*, variables o no con el tiempo. El último caso, de una característica del tipo $q = f(u)$, se representa en la Figura 2.4 c).

Cuando el condensador es lineal, en la relación $q = C \cdot u$, el parámetro C es la constante de proporcionalidad entre la carga almacenada y la diferencia de potencial y se conoce como *capacidad* del condensador. Se mide en Faradios (F). Esta unidad es muy grande y normalmente se utilizan sus submúltiplos, mF, μ F, nF, pF. También los condensadores lineales e invariantes con el tiempo son los más corrientes. En éstos, la relación entre la corriente y la tensión viene dada por una ecuación diferencial,

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} \quad (2.5)$$

Esta ecuación es la ecuación de definición de un condensador lineal. Un condensador ideal es aquel que se comporta exactamente de acuerdo con esta definición.

El símbolo de los condensadores ideales es:

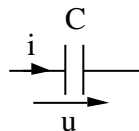


Figura 2.5

2. Elementos de los circuitos

Con las referencias indicadas en la Figura 2.5 la relación entre la tensión y la corriente en el condensador viene dada por la ecuación (2.3).

2.2.2 Condensadores reales

Físicamente, un condensador consiste en dos conductores separados por un dieléctrico que pueden almacenar cargas iguales y opuestas, de valor q , independientemente de si otros conductores del sistema están cargados. Cuando el condensador es lineal, la carga de cada uno de los conductores es proporcional al potencial que hay entre ellos, por lo que la relación entre la diferencia entre sus potenciales, u , y la carga de los conductores es, como ya se ha indicado:

$$q = C \cdot u \quad (2.6)$$

Las dimensiones físicas que afectan la capacidad de un condensador de placas paralelas son la superficie s de sus placas y la distancia d entre ellas. Cuanto mayor es la superficie de las placas, más grande es la superficie en la que la carga se puede almacenar, y más grande la capacidad de almacenamiento del condensador. La capacidad es directamente proporcional a la superficie s de cada placa paralela.

Por otra parte, puesto que la intensidad del campo eléctrico E entre dos superficies cargadas paralelas es V/d , donde V es la tensión entre las dos superficies y d , la distancia que las separa. Al aplicar esta relación al condensador de placas paralelas, se tiene $u = E \cdot d$. Sustituyendo $u = E \cdot d$ en (2.4), se tiene que:

$$C = \frac{q}{u} = \frac{q}{E \cdot d} \quad (2.7)$$

Si todos los otros factores no varían, la relación q/E es constante, de donde se concluye que la capacidad es inversamente proporcional a la distancia d entre placas paralelas. Esta relación es precisamente la permitividad del dieléctrico que separa las placas conductoras, por lo que la expresión de la capacidad de este tipo de condensadores es

$$C = \epsilon \frac{s}{d} \quad (2.8)$$

ϵ permitividad (F/m)

2. Elementos de los circuitos

s superficie (m^2)

d distancia entre placas (m)

Los condensadores se caracterizan en primer lugar por su capacidad. Existe una amplia gama de valores nominales de condensadores, pero el valor real depende de la tolerancia especificada por el fabricante. Los valores típicos de tolerancias oscilan entre un $\pm 5\%$ y un $\pm 20\%$.

Otro parámetro que caracteriza los condensadores es la tensión que puede aplicarse entre sus terminales sin que el dieléctrico se perfora. Esta tensión, para un dieléctrico dado, depende de la distancia entre placas. Puesto que la capacidad es inversamente proporcional a esta magnitud, será difícil conseguir condensadores de gran capacidad y de gran tensión al mismo tiempo.

El dieléctrico en un condensador ideal es un aislante perfecto, y por tanto tiene una resistencia infinita y la corriente que lo atraviesa es nula. El dieléctrico en un condensador real tiene una resistencia grande pero finita, por lo que una pequeña corriente circula entre las placas del condensador cuando se aplica una tensión entre ellas. Esta resistencia se denomina resistencia de pérdidas del condensador, y la corriente, corriente de pérdidas. Este fenómeno se representa mediante un circuito equivalente como el que se representa en la Figura 2.6.

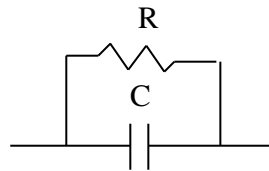


Figura 2.6

Los valores típicos de la resistencia de pérdidas pueden oscilar entre $1 M\Omega$ y $100.000 M\Omega$.

2.2.3 Potencia consumida por un condensador.

A partir de la definición de potencia, y con las referencias de la Figura 2.7, la potencia entrante en un condensador será:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = u \cdot C \frac{du}{dt}$$

2. Elementos de los circuitos

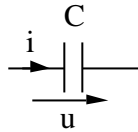


Figura 2.7. Condensador con referencia de potencia entrante

La energía almacenada en el condensador tendrá por valor:

$$w(t) = \int_{-8}^t C \cdot u(\tau) \cdot \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau = \frac{1}{2} C \cdot u^2(t) \quad (2.9)$$

De las expresiones de potencia y energía se puede deducir que la potencia entrante en un condensador puede ser tanto positiva como negativa, dependiendo de los valores de la tensión y de su derivada. Por consiguiente, un condensador puede tanto recibir como entregar potencia. Sin embargo, la energía almacenada en el condensador siempre será mayor o igual a cero, por lo que la potencia que cede el condensador será a expensas de la energía que tenga almacenada, sin que pueda producirla. Será por tanto un elemento pasivo.

2.3 Bobinas o inductancias

2.3.1 Definición

Desde el punto de vista de teoría de circuitos, una bobina, o inductancia, lineal e invariante con el tiempo es un dipolo en el cual la relación entre la tensión y la corriente está definida por la ecuación (2.10), con las referencias de la Figura 2.8:

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (2.10)$$

El símbolo de la bobina es:

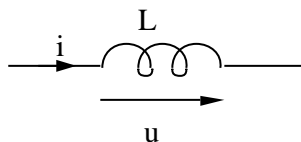


Figura 2.8

2. Elementos de los circuitos

El parámetro L se denomina *inductancia* de la bobina y se mide en Henrios. El Henrio es una unidad muy grande, y normalmente se usan sus submúltiplos, especialmente el mH.

También existen bobinas no lineales y dependientes con el tiempo, que no se tratarán en este curso.

Las bobinas están formadas por conductores arrollados sobre elementos ferromagnéticos. En las bobinas ideales estos conductores no presentan resistencia, pero en las bobinas reales hay que tener en cuenta la resistencia de los conductores, por lo que se pueden representar como en la Figura 2.9:

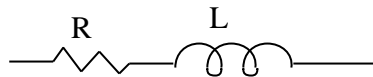


Figura 2.9

2.3.2 Potencia consumida por una bobina ideal.

La expresión de la potencia entrante en la bobina es:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = L \cdot \frac{di}{dt} \cdot i(t)$$

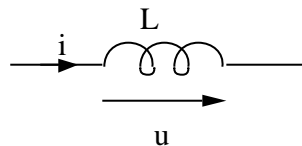


Figura 2.10. Bobina con referencia de potencia entrante

El valor de la energía almacenada en la bobina en un instante t es:

$$w(t) = \int_{-8}^t L \frac{di(\tau)}{d\tau} i(\tau) d\tau = \frac{1}{2} L \cdot i^2(t) \quad (2.11)$$

Al igual que los condensadores, las bobinas son elementos que pueden ceder y recibir potencia. Sin embargo la energía deberá venir de una fuente externa, puesto que al ser su expresión siempre mayor o igual que cero, sólo pueden almacenarla, y la cesión de potencia se efectúa a expensas de la ya existente en la bobina.

2.4 Bobinas acopladas

2.4.1 Definición

Un conjunto de bobinas pueden estar acopladas entre sí, en cuyo caso, las tensiones en cada una de ellas depende no sólo de la corriente circulante por la propia bobina, sino además de las corrientes circulantes por las otras bobinas acopladas con ellas. De esta forma, las ecuaciones que relacionan las tensiones y corrientes en una pareja de bobinas acopladas como las de la Figura 2.11 vienen dadas en las ecuaciones (2.8) y (2.9):

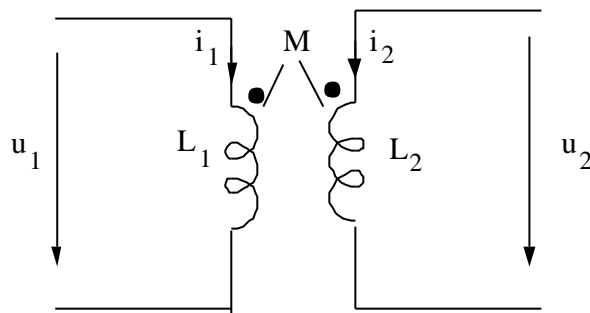


Figura 2.11

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (2.12)$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (2.13)$$

En estas ecuaciones el parámetro M se denomina *inductancia mutua* de la bobina, en tanto que L_1 o L_2 son las *inductancias propias* o *coeficientes de autoinducción*. Ambas se miden en Henrios. En la Figura 2.11 uno de los terminales de cada bobina está marcado por un punto. Estos terminales se denominan *terminales correspondientes*. Una corriente entrante por uno de estos terminales de la bobina 1 induce en la bobina 2 una tensión del mismo sentido que la que produciría una corriente que entrase por el terminal correspondiente de dicha bobina. De esta forma, si los terminales y las referencias están dispuestos de la forma indicada en la Figura 2.12, las ecuaciones serán las indicadas en (2.14) y (2.15).

2. Elementos de los circuitos

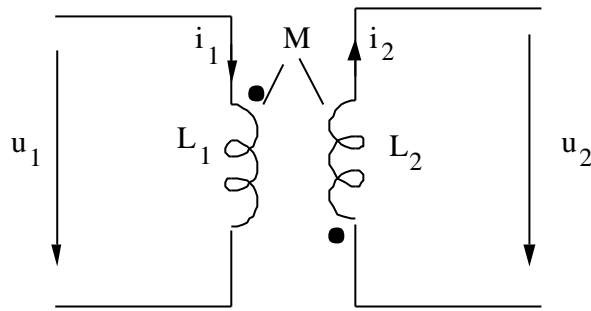


Figura 2.12

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (2.14)$$

$$u_2 = -M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (2.15)$$

Los terminales sólo son correspondientes entre parejas de bobinas, de forma que si hay más de dos bobinas, cada pareja de ellas tendrá sus terminales correspondientes entre sí. De esta forma, las tensiones y corrientes de las bobinas de la Figura 2.13 estarán relacionadas por las ecuaciones que se exponen a continuación.

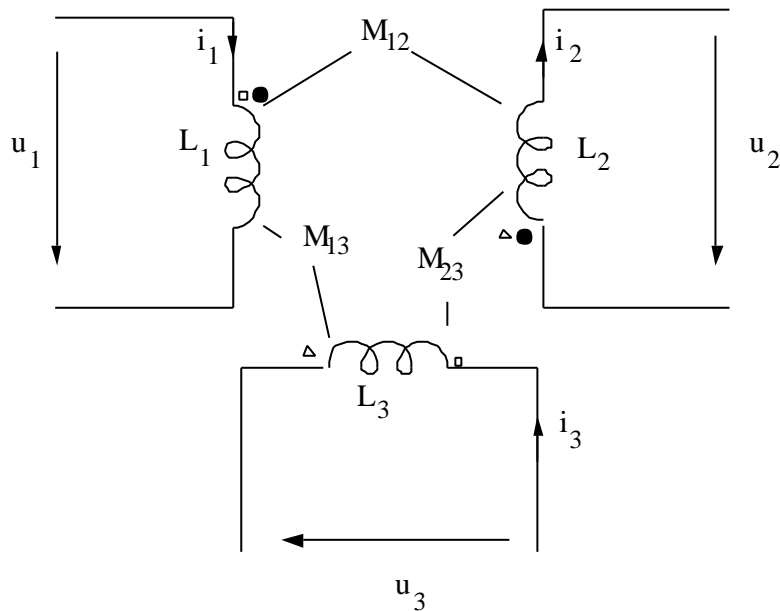


Figura 2.13

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} + M_{13} \frac{di_3}{dt} \quad (2.16)$$

2. Elementos de los circuitos

$$u_2 = -M_{12} \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{23} \frac{di_3}{dt} \quad (2.17)$$

$$u_3 = M_{31} \frac{di_1}{dt} - M_{23} \frac{di_2}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt} \quad (2.18)$$

2.4.2 Potencia consumida por las bobinas acopladas.

La potencia entrante en un cuadripolo como el de la Figura 2.14 viene dado por la ecuación

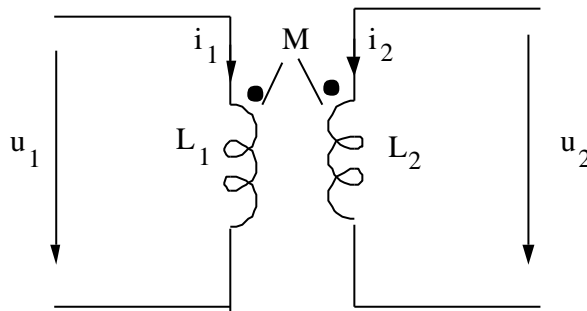


Figura 2.14

$$p = u_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot i_2 = L_1 \cdot i_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \left[i_1 \cdot \frac{di_2}{dt} + i_2 \cdot \frac{di_1}{dt} \right] + L_2 \cdot i_2 \cdot \frac{di_2}{dt} \quad (2.19)$$

Esta expresión se puede poner de la forma:

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} L_1 \cdot i_1^2 + M \cdot i_1 \cdot i_2 + \frac{1}{2} L_2 \cdot i_2^2 \right] \quad (2.20)$$

Al integrar esta expresión, si las corrientes circulantes por las bobinas en $t = -8$ son nulas, se obtiene la expresión de la energía almacenada en las bobinas acopladas:

2. Elementos de los circuitos

$$w(t) = \int_{-8}^t p(\tau) d\tau = \frac{1}{2} L_1 \cdot i_1^2 + M \cdot i_1 \cdot i_2 + \frac{1}{2} L_2 \cdot i_2^2 \quad (2.21)$$

Esta energía siempre tiene que ser positiva puesto que el conjunto de bobinas acopladas es un elemento pasivo. A partir de la ecuación (3.9), haciendo $x = \frac{i_2}{i_1}$

$$w(t) = i_1^2 \cdot \left[\frac{1}{2} L_1 \pm Mx + \frac{1}{2} L_2 x^2 \right]$$

Puesto que la energía tiene que ser siempre igual o mayor que cero

$$\left[\frac{1}{2} L_1 \pm Mx + \frac{1}{2} L_2 x^2 \right] = 0$$

Para lo cual es discriminante de esta ecuación de segundo grado deberá ser mayor que cero, lo que equivale a

$$M^2 = L_1 \cdot L_2$$

2.5 Transformador ideal.

2.5.1 Definición

Un transformador ideal es un cuadripolo cuyo esquema y relaciones entre sus parámetros vienen dados por la Figura 2.15 y la ecuación (2.15)

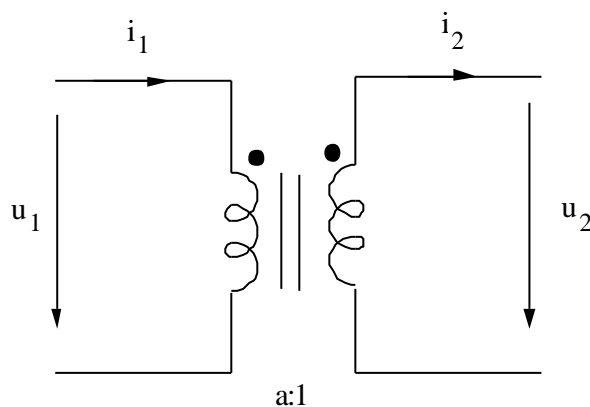


Figura 2.15

2. Elementos de los circuitos

$$\frac{u_1}{u_2} = a \qquad \frac{i_1}{i_2} = \frac{1}{a} \qquad (2.22)$$

El parámetro a se denomina *relación de transformación*, y es un dato del transformador ideal. Si las referencias cambian, los signos de las relaciones (2.15) cambiarán. Así, por ejemplo, en la Figura 2.16 las relaciones son:

$$\frac{u_1}{u_2} = -a \qquad \frac{i_1}{i_2} = -\frac{1}{a}$$

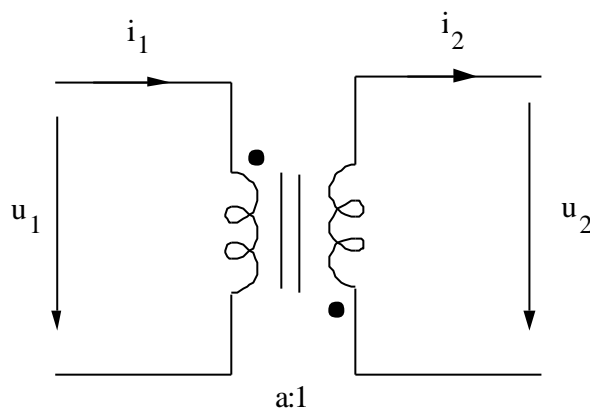


Figura 2.16

2.5.2 Potencia consumida por un transformador ideal

En un transformador ideal como el que se muestra en la Figura 2.17 la potencia entrante será la que se muestra en la ecuación (2.23)

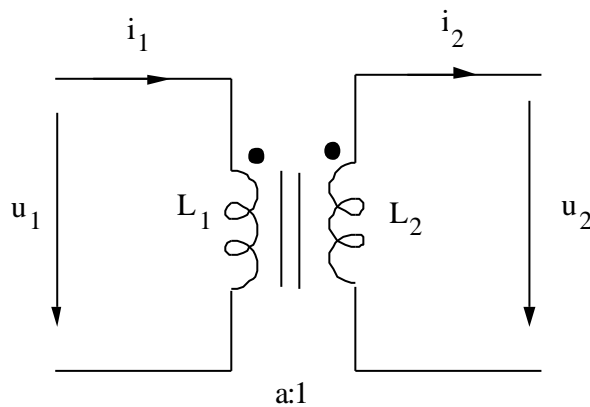


Figura 2.17

2. Elementos de los circuitos

$$p = u_1 \cdot i_1 - u_2 \cdot i_2 = u_1 \cdot i_1 - \frac{u_1}{a} \cdot a \cdot i_1 = 0 \quad (2.23)$$

Es decir, en un transformador ideal, la potencia consumida en todo instante es nula, y por tanto también la energía almacenada o disipada en él.

2.6 Fuentes independientes ideales.

2.6.1 Fuentes de tensión.

2.6.1.1 Definición

Una fuente de tensión *ideal* es un dispositivo que mantiene una tensión entre sus terminales independientemente de la corriente que circule por ellos. Se representa como:

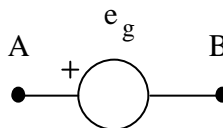


Figura 2.18

El signo + indica que la tensión en A es superior a la tensión en B en e_g V.

Ejemplo:

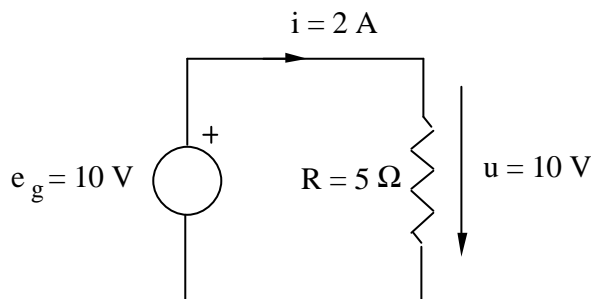


Figura 2.19

La característica tensión - intensidad de este dispositivo es como la representada en la Figura 2.20.

2. Elementos de los circuitos

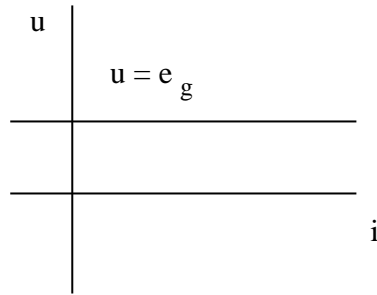


Figura 2.20

2.6.1.2 Potencia entregada por una fuente de tensión.

Sea una fuente ideal de tensión de valor e_g ; la potencia transferida a una resistencia R será:

$$p = u \cdot i = e_g \cdot \frac{e_g}{R} = \frac{e_g^2}{R} \quad (2.24)$$

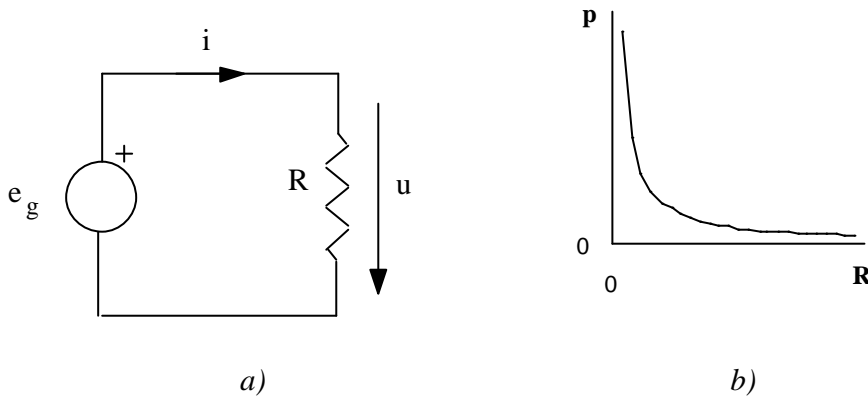


Figura 2.21

Si se representa la potencia entregada por la fuente ideal en función de la resistencia se obtiene la curva de la Figura 2.21 b). En ella se puede observar que la potencia entregada por la fuente a una resistencia cuyo valor tiende a cero, tiende a infinito.

2. Elementos de los circuitos

2.6.2 Fuentes de corriente.

2.6.2.1 Definición

Una fuente de corriente *ideal* es un dispositivo por el que circula una corriente dada para cualquier tensión entre sus terminales. Se representa como en la Figura 2.22:

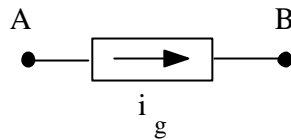


Figura 2.22

La flecha indica el sentido de circulación de la corriente i_g

Ejemplo:

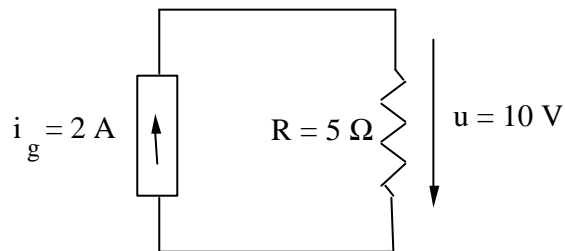


Figura 2.23

Se puede obtener una característica tensión intensidad de este tipo de fuentes, tal como se hizo en la resistencia, que será como se indica en la Figura 2.24.

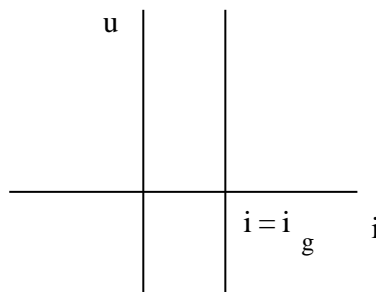


Figura 2.24

2. Elementos de los circuitos

2.6.2.2 Potencia entregada por las fuentes independientes de corriente

La potencia transferida a una conductancia G por una fuente ideal de corriente de valor i_g es:

$$p = u \cdot i = \frac{i_g}{G} = \frac{i_g^2}{G}$$

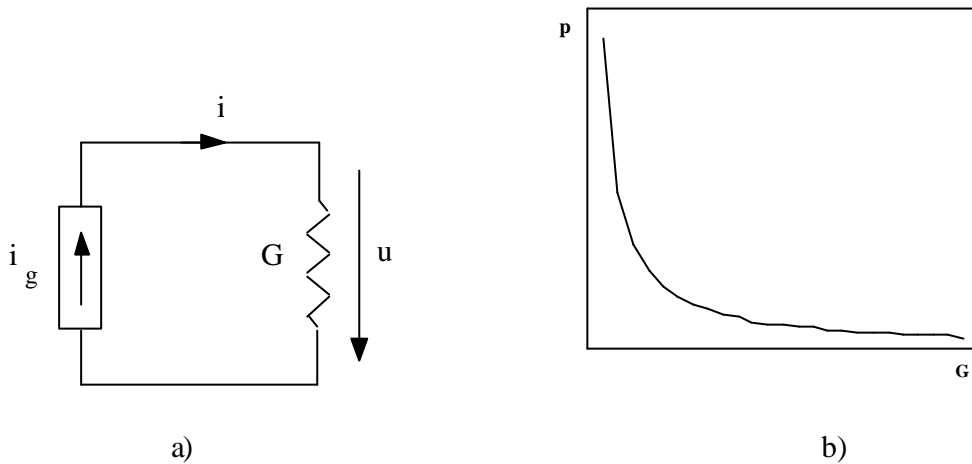


Figura 2.25

Al representar la potencia entregada por la fuente ideal en función de la resistencia se obtiene la curva de la Figura 2.25b).

2.7 Fuentes independientes reales.

2.7.1 Fuentes de tensión.

2.7.1.1 Definición

Una fuente de tensión real no mantiene la diferencia de potencial entre sus bornes independientemente de la corriente que suministre. En general, cuanto mayor es la corriente la diferencia de tensión que aparece entre sus terminales se hace menor. En las fuentes de corriente continua esto se representa mediante una resistencia en serie con una fuente ideal que reproduce este fenómeno, como se indica en la figura siguiente,

2. Elementos de los circuitos

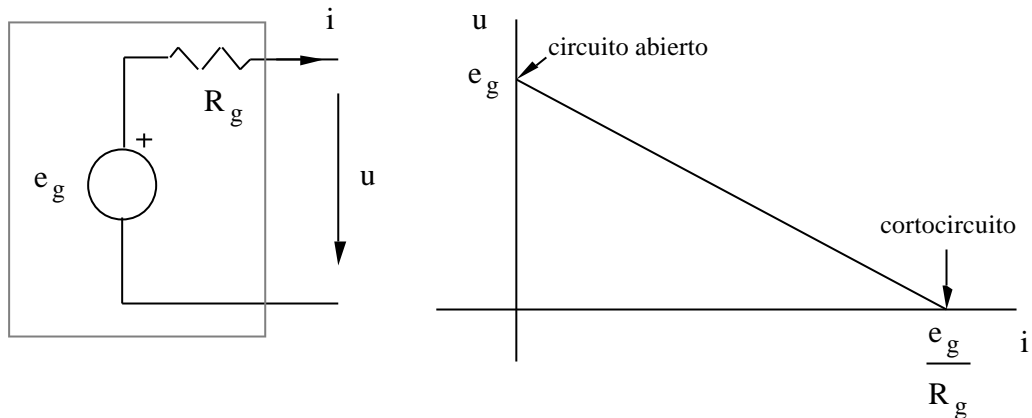


Figura 2.26

En esta figura se puede observar que la corriente es saliente del dipolo de la fuente real. Esto corresponde al criterio normalmente usado para dipolos activos. Asimismo puede observarse la característica tensión - corriente de la fuente real. Esta característica es una recta de pendiente negativa y de expresión

$$u = e_g - R_g i \quad (2.25)$$

Cuando la corriente es nula, la tensión corresponde a la de la fuente ideal. Este punto se llama de *circuito abierto*. Cuando los dos terminales se conectan mediante una resistencia nula, la tensión a la salida de la fuente real es nula, y su corriente vale e_g/R_g . Este punto se conoce como punto de *cortocircuito*. En cuanto a la expresión (2.25), se conoce como *ecuación terminal del dipolo* formado por la asociación en serie de la fuente y la resistencia, y pone en relación la tensión con la corriente.

2.7.1.2 Potencia entregada

La potencia que entrega una fuente real de tensión como la representada en la Figura 2.21 a) a una resistencia conectada a ella toma un valor distinto. Puesto que $p = u \cdot i$, el valor de estas magnitudes será:

$$i = \frac{e_g}{R_g + R} \quad u = R \cdot i = R \frac{e_g}{R_g + R} \quad p = u \cdot i = \frac{R \cdot e_g^2}{(R_g + R)^2}$$

La potencia entregada a la resistencia R varía en función del valor de ésta, tal como se representa en la Figura 2.27 b). Esta potencia es máxima para un valor de R que se obtiene derivando la expresión de la potencia con respecto a R e igualándola a cero. Efectuando estas operaciones se obtiene el siguiente valor de la resistencia $R_{\text{máx}} = R_g$. La potencia recibida por la resistencia R será:

2. Elementos de los circuitos

$$p_{\text{máx}} = \frac{e_g^2}{4R_g}$$

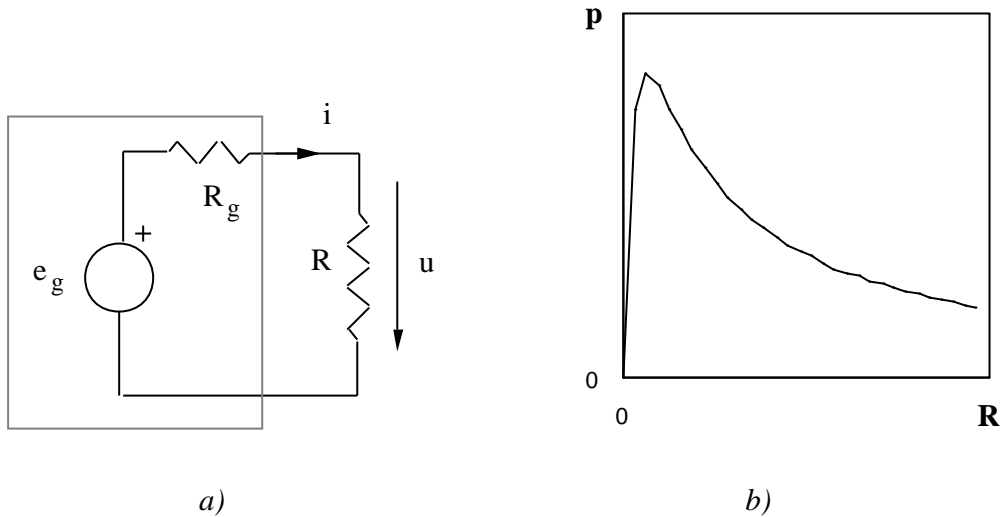


Figura 2.27

Aunque esta sea la potencia máxima que puede recibir la resistencia no es el punto en el que se debe operar, puesto que el rendimiento de la fuente en estas condiciones es muy bajo. En efecto, si se efectúa el cociente entre la potencia que entrega la fuente y la que recibe la resistencia el rendimiento tiene la expresión:

$$\eta = \frac{u \cdot i}{e_g \cdot i} = \frac{R}{R + R_g}$$

Para un valor de $R = R_g$ el rendimiento es del 50 %. Esto significa que la mitad de la potencia cedida por la fuente se está perdiendo en la propia resistencia interna de la fuente. La expresión de este rendimiento en función del valor de R viene dado en la Figura 2.28. Aquí se puede observar que el rendimiento de la fuente se hace cada vez más alto conforme la resistencia conectada es mayor, y aun cuando la potencia entregada sea menor es más aconsejable trabajar en esta zona de rendimientos altos.

2. Elementos de los circuitos

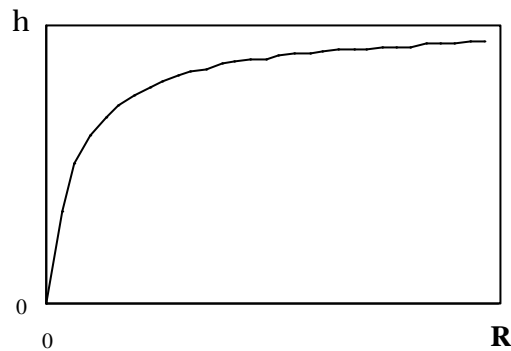


Figura 2.28

2.7.2 Fuentes de corriente.

2.7.2.1 Definición

Como las fuentes reales de tensión, una fuente real de corriente no suministra la corriente especificada independientemente del valor de la tensión en bornes. Este fenómeno se representa en las fuentes de corriente continua como una resistencia en paralelo con una fuente de corriente ideal, de forma que el conjunto reproduzca lo que sucede en las fuentes reales. Esto se representa en la figura siguiente, junto con su característica corriente - tensión, que tiene la expresión:

$$i = i_g - G_g \cdot u$$

En esta gráfica se pueden observar también los puntos de circuito abierto, en el que la corriente suministrada es nula, y el de cortocircuito, en el que la corriente suministrada es la especificada, como si la fuente fuera ideal.

2. Elementos de los circuitos

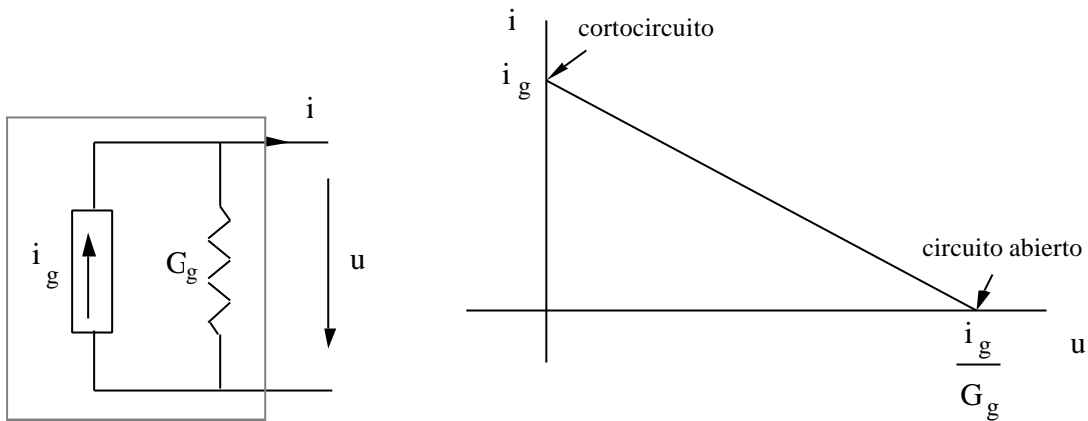


Figura 2.29

2.7.2.2 Potencia entregada

Se pueden hacer observaciones similares a las de la fuente ideal de tensión: la potencia entregada por la fuente tiende a infinito cuando la conductancia tiende a cero. Sin embargo la expresión de la potencia entregada a una conductancia por una fuente de corriente real como la representada en la Figura 2.30 a) tiene una expresión distinta que se representa en la Figura 2.30 b). Esta expresión, junto con las de la tensión y corriente en la resistencia se reflejan a continuación:

$$u = \frac{i_g}{G_g} \quad i = G \cdot u = G \cdot \frac{i_g}{G_g + G} \quad p = u \cdot i = \frac{i_g^2}{G_g + G}$$

Esta potencia alcanza un máximo para un valor de la conductancia $G = G_g$. Este valor se obtiene de manera semejante a como se obtuvo en las fuentes reales de tensión, y su expresión es la siguiente

$$p = u \cdot i = \frac{G \cdot i_g^2}{(G_g + G)^2} = \frac{i_g^2}{4G_g}$$

2. Elementos de los circuitos

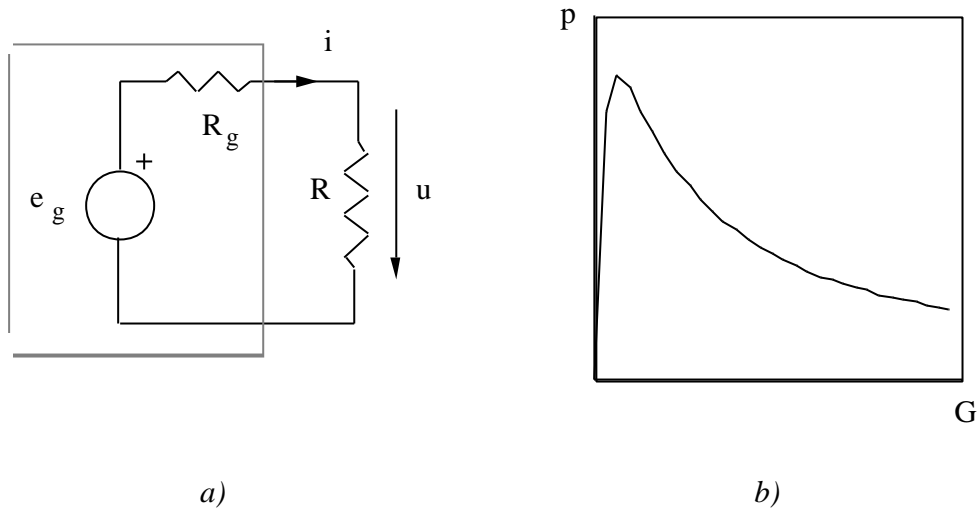


Figura 2.30

Las conclusiones son también parecidas: si bien la potencia entregada es máxima para ese valor de conductancia, el rendimiento de la fuente es del 50 % en este caso, por lo que es más recomendable emplear valores mayores de conductancia que aseguren un valor mayor del rendimiento de la fuente, y por tanto un mayor aprovechamiento de ésta.

2.7.3 Equivalencia de fuentes reales.

Dos fuentes reales son equivalentes si para cualquier tensión aplicada a las dos, suministran la misma corriente. Por tanto, si dos fuentes son equivalentes, las ecuaciones que ligan tensión con corriente

$$u = e_g - R_g \cdot i$$

$$i = i_g - G_g \cdot u$$

deben ser también equivalentes. Si estas ecuaciones se agrupan de la manera siguiente

$$i = \frac{e_g}{R_g} - \frac{u}{R_g}$$

$$i = i_g - G_g \cdot u$$

y se iguala término a término en esta ecuación, las condiciones de equivalencia son:

2. Elementos de los circuitos

$$i_g = \frac{e_g}{R_g} \qquad G_g = \frac{1}{R_g}$$

Esto significa que para el resto del circuito no importa que la fuente real sea de tensión o de corriente con tal de que sus parámetros sigan la relación indicada. Por consiguiente se podrá cambiar el tipo de fuente según convenga, sin que varíen las tensiones y corrientes del resto de los elementos del circuito.

2.8 Fuentes dependientes

Las fuentes dependientes son fuentes ideales de tensión o corriente cuya magnitud viene determinada por la tensión entre dos puntos, o la corriente que circula por una rama. Las fuentes dependientes pueden ser, por tanto, de cuatro tipos: fuentes de corriente dependientes de corriente o de tensión, y fuentes de tensión dependientes de tensión o corriente. En la Figura 2.31 se representan todos ellos. En dicha figura las magnitudes de las fuentes de tensión y de corriente dependen de otras magnitudes de un cierto circuito eléctrico (C.E.).

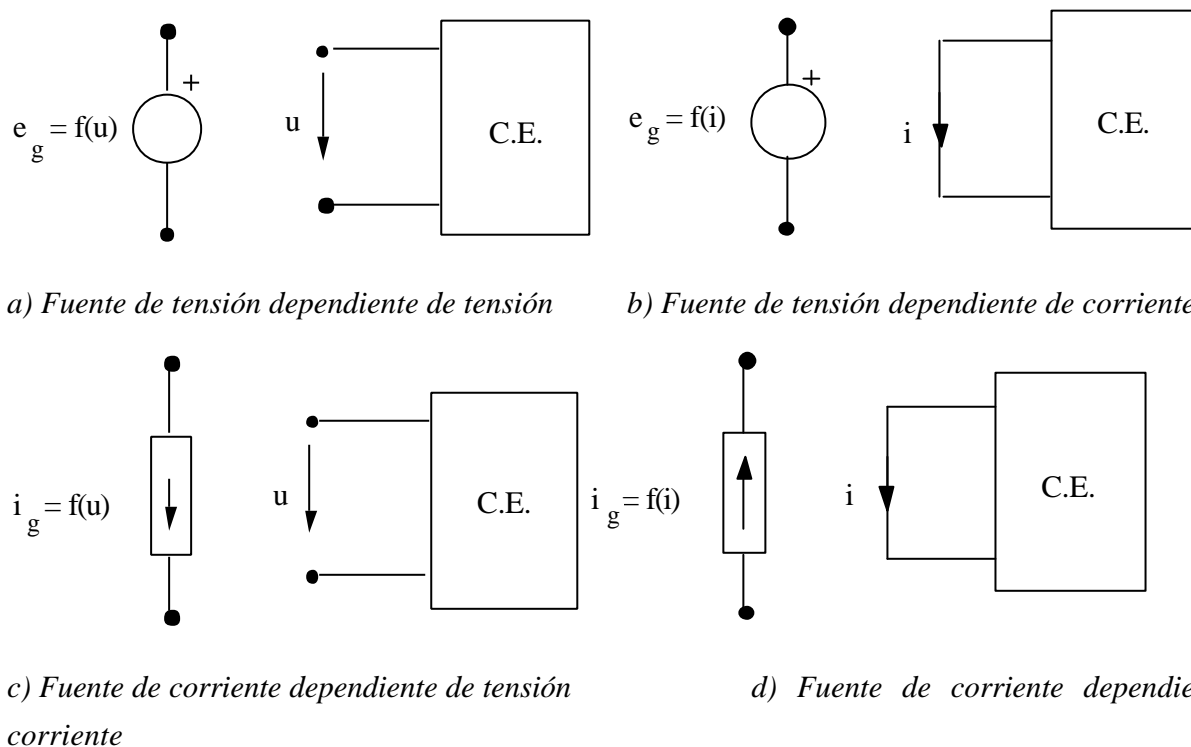


Figura 2.31

3. ASOCIACIONES DE ELEMENTOS.

3.1 Introducción.

En este capítulo se van a ver modos de asociación de elementos activos y pasivos. Esta es una manera de simplificar los cálculos conducentes a la resolución de un circuito. Por esta razón, mediante las técnicas que se describen en este capítulo, un conjunto de elementos activos o pasivos se van a sustituir por un elemento equivalente, con la condición de que este tenga la misma ecuación terminal que el del conjunto de elementos, con lo cual el resultado del análisis del circuito será el mismo en los dos casos, o bien, el resto del circuito no varía.

Las asociaciones más frecuentes son *en serie*, que se produce cuando circula la misma intensidad por todos los elementos que van a asociarse, o *en paralelo*, en la cual todos los elementos están sometidos a la misma tensión

3.2 Asociación de fuentes ideales.

Las fuentes ideales no pueden conectarse entre sí de forma arbitraria. Las fuentes de tensión ideales no pueden conectarse en paralelo cuando tienen distintos valores puesto que por definición deberían mantener entre sus extremos dos tensiones distintas, lo que es contradictorio. Por otra parte, la conexión en paralelo de fuentes ideales de distinto valor no tiene sentido, puesto que una fuente ideal puede proporcionar una potencia infinita, y por tanto la conexión de otra en paralelo con ella no cambia nada su comportamiento.

Analógicamente, las fuentes de corriente ideales no pueden conectarse en serie si tienen el mismo valor, puesto que entraría en contradicción con la definición de fuente ideal. Tampoco tiene sentido la conexión en serie de fuentes de corriente del mismo valor.

En cambio, sí se pueden conectar fuentes de tensión en serie, independientemente del valor que tengan, y fuentes de corriente en paralelo. En ambos casos se suman sus valores, y por tanto las fuentes equivalentes tienen el valor resultante de sumar algebraicamente los valores de las fuentes parciales. Por ejemplo, las fuentes de tensión representadas en la Figura 3.1 se pueden sustituir por una fuente equivalente como la mostrada en la Figura 3.2

3. Asociaciones de elementos

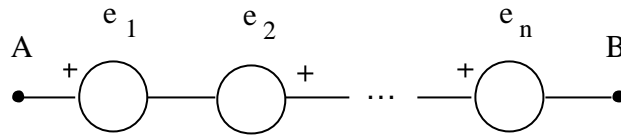


Figura 3.1

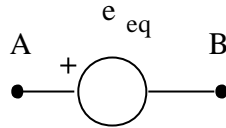


Figura 3.2

El valor de esta fuente será:

$$e_{eq} = e_1 - e_2 + \dots + e_n \quad (3.1)$$

Análogamente sucede con las fuentes de corriente en paralelo, como se muestra en la Figura 3.3 y en la Figura 3.4.

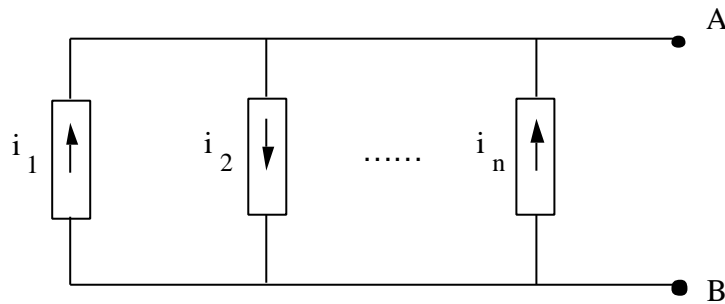


Figura 3.3

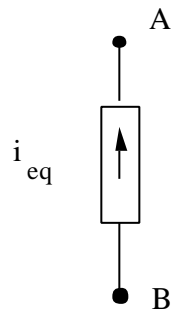


Figura 3.4

3. Asociaciones de elementos

En esta ocasión, el valor de la fuente equivalente es:

$$i_{e,q} = i_1 - i_2 + \dots + i_n \quad (3.2)$$

Las fuentes ideales también pueden asociarse con elementos pasivos. Esta asociación sí es libre, si bien hay que recalcar que en todos los elementos conectados en serie con una fuente de corriente y en paralelo con una fuente de tensión tanto la tensión como la corriente son conocidas, y por tanto pueden eliminarse cuando se esté resolviendo el resto del circuito. Sin embargo, forman parte de él, y deben tenerse en cuenta para otros cálculos, como el balance de potencias generadas y consumidas.

3.3 Asociaciones de resistencias.

A continuación se van a presentar diversas formas de transformar circuitos resistivos de manera que se puedan obtener circuitos equivalentes a uno dado más simples. Mediante las tres transformaciones que se describen a continuación: asociación en serie, asociación en paralelo y transformaciones estrella-triángulo y triángulo-estrella, se puede obtener una resistencia equivalente de cualquier conjunto de ellas.

3.3.1 Asociación en serie. Divisor de tensión.

Un conjunto de resistencias están asociadas en serie cuando por ellas circula la misma corriente, tal como se muestra en la Figura 3.5.

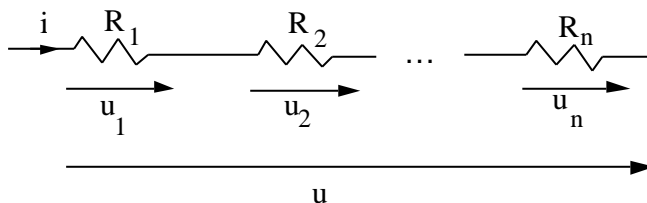


Figura 3.5

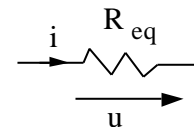


Figura 3.6

En la Figura 3.6 se muestra su resistencia equivalente, cuyo valor se deduce de la siguiente forma:

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n = R_1 \cdot i + R_2 \cdot i + \dots + R_n \cdot i = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) \cdot i = R_{eq} \cdot i$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (3.3)$$

Si se quiere conocer la tensión en la resistencia k, esta será

3. Asociaciones de elementos

$$u_k = R_k \cdot i = R_k \cdot \frac{u}{R_1 + R_2 + \dots + R_n} = \frac{R_k}{R_1 + R_2 + \dots + R_n} \cdot u \quad (3.4)$$

Un conjunto de resistencias en serie se denomina *divisor de tensión*, puesto que la tensión del conjunto de resistencias en serie se divide en cada una de ellas proporcionalmente a su valor, tal como se muestra en (3.4). Esta última expresión es la fórmula del divisor de tensión que da la tensión en una resistencia directamente en función de la tensión aplicada al conjunto de todas ellas.

También se puede hallar la conductancia equivalente de un conjunto de resistencias en serie, en función de la conductancia de cada una de ellas de la siguiente manera:

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{G_1} \cdot i + \frac{1}{G_2} \cdot i + \dots + \frac{1}{G_n} \cdot i = \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \dots + \frac{1}{G_n} \right) \cdot i = \frac{1}{G_{eq}} \cdot i$$

$$\frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \dots + \frac{1}{G_n} \quad (3.5)$$

3.3.2 Asociación en paralelo. Divisor de corriente.

Un conjunto de resistencias se dice que están asociadas en paralelo cuando todas ellas están sometidas a la misma tensión. Un conjunto de resistencias en paralelo se muestra en la Figura 3.7

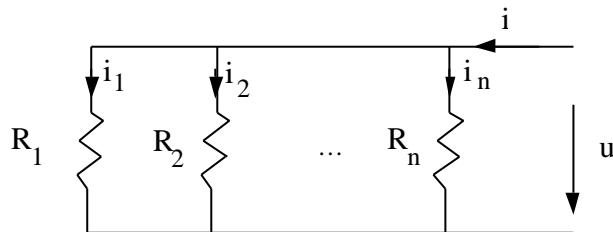


Figura 3.7

La resistencia equivalente es como la mostrada en la Figura 3.6. Su expresión es la siguiente:

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n = \frac{1}{R_1} \cdot u + \frac{1}{R_2} \cdot u + \dots + \frac{1}{R_n} \cdot u = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) \cdot u = \frac{1}{R_{eq}} \cdot u$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (3.6)$$

La corriente que circula por la resistencia k es

3. Asociaciones de elementos

$$i_k = \frac{u}{R_k} = \frac{\frac{1}{R_k}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}} \cdot i \quad (3.7)$$

De forma semejante al divisor de tensión, un conjunto de resistencias en paralelo se denomina *divisor de corriente*, puesto que la corriente del conjunto de resistencias en paralelo se divide en cada una de ellas de forma inversamente proporcional a su valor. La expresión (3.7) es la fórmula del divisor de corriente, que da la corriente que circula por una resistencia directamente en función de la corriente que circula por la resistencia equivalente.

Cuando las resistencias en paralelo son dos, la fórmula (3.7) se simplifica y las expresiones de las corrientes son como sigue

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot i \quad i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot i \quad (3.8)$$

Cuando se aplican estas fórmulas en función de las conductancias, se obtiene las siguientes expresiones.

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n = G_1 \cdot u + G_2 \cdot u + \dots + G_n \cdot u = (G_1 + G_2 + \dots + G_n) \cdot u = G_{eq} \cdot u$$
$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \dots + G_n \quad (3.9)$$

La fórmula del divisor de corriente viene dada por la ecuación (3.10)

$$i_k = G_k \cdot u = G_k \cdot \frac{u}{G_1 + G_2 + \dots + G_n} = \frac{G_k}{G_1 + G_2 + \dots + G_n} \cdot i \quad (3.10)$$

3.3.3 Transformaciones triángulo-estrella y estrella triángulo.

Cuando tres resistencias están conectadas como se indica en la Figura 3.8, no es posible la simplificación por transformaciones serie o paralelo. Sin embargo, se puede pasar de una configuración a otra. La configuración de la Figura 3.8 a) se denomina *configuración en estrella*, y la de la Figura 3.8 b) *configuración en triángulo*. A continuación se obtendrá la forma de obtener unos valores en función de otros

3. Asociaciones de elementos

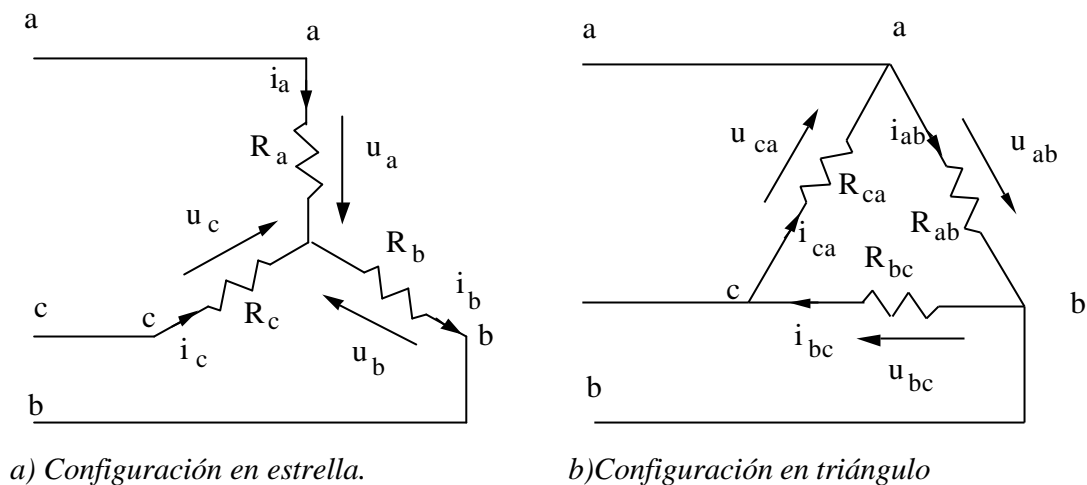


Figura 3.8

- **Transformación triángulo-estrella**

Para que dos configuraciones sean equivalentes, las dos deben proporcionar la misma respuesta ante el mismo estímulo, es decir, alimentadas las dos con la misma corriente, la tensión debe ser idéntica, y viceversa, alimentadas a la misma tensión, deben demandar la misma corriente.

Así pues, sean las configuraciones presentadas en la Figura 3.9. Para que las dos sean equivalentes, la tensión u_{ab} debe ser la misma en los dos casos, puesto que la alimentación es la misma.

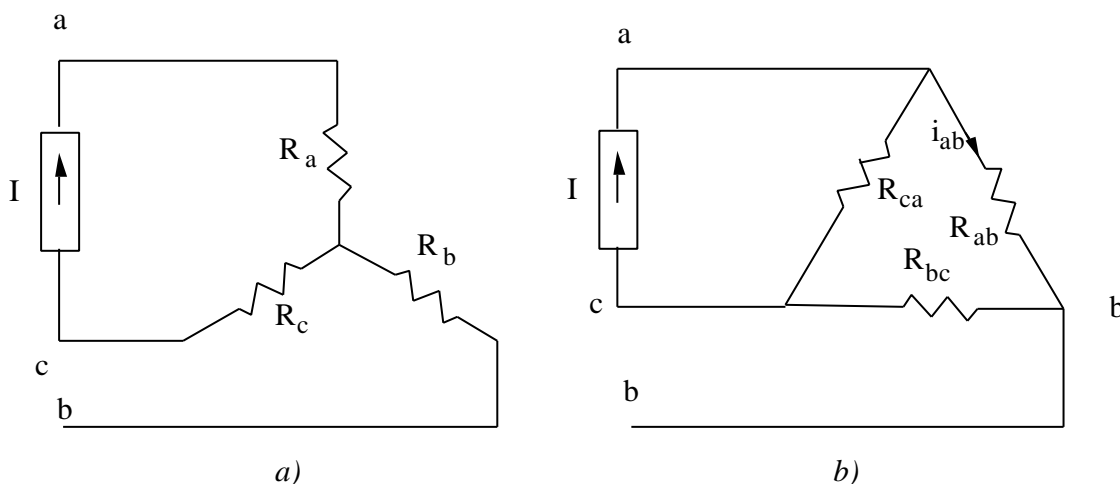


Figura 3.9

En la Figura 3.9 a), dicha tensión vale

3. Asociaciones de elementos

$$u_{ab} = R_a \cdot I \quad (3.11)$$

En la Figura 3.9 b), la tensión tiene por expresión:

$$u_{ab} = R_{ab} \cdot i_{ab} = R_{ab} \cdot \frac{R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \cdot I \quad (3.12)$$

Igualando las expresiones (3.11) y (3.12) se obtiene la expresión de R_a en función de las resistencias del triángulo.

$$R_a = \frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \quad (3.13)$$

A continuación se realiza el mismo procedimiento para obtener R_b .

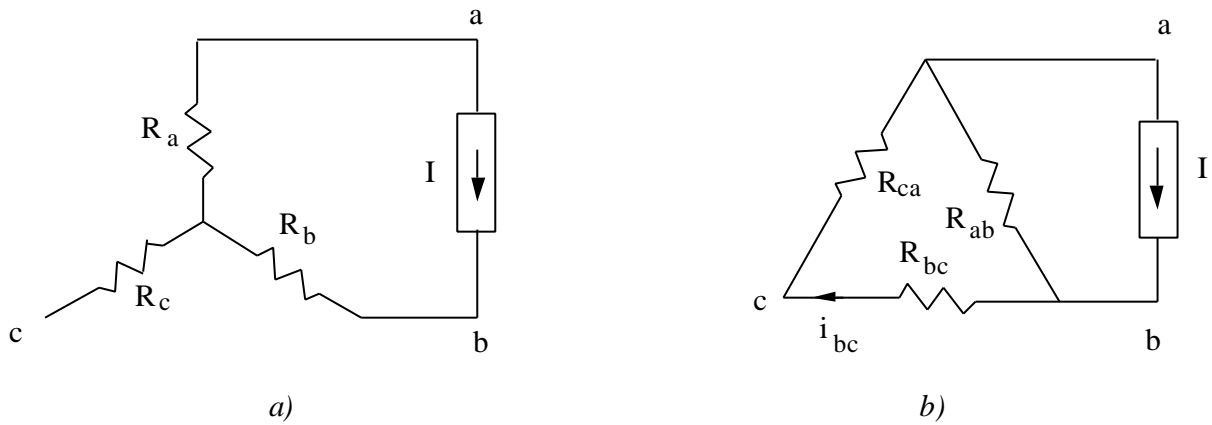


Figura 3.10

La tensión u_{bc} en la Figura 3.10 a) tiene el valor.

$$u_{bc} = R_b \cdot I \quad (3.14)$$

Si se obtiene en la Figura 3.10 b), su valor es:

$$u_{bc} = R_{bc} \cdot i_{bc} = R_{bc} \cdot \frac{R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \cdot I \quad (3.15)$$

Al igualar (3.14) y (3.15) se tiene:

$$R_b = \frac{R_{bc} \cdot R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \quad (3.16)$$

Por último, queda la obtención de R_c en función de las resistencias del triángulo

3. Asociaciones de elementos

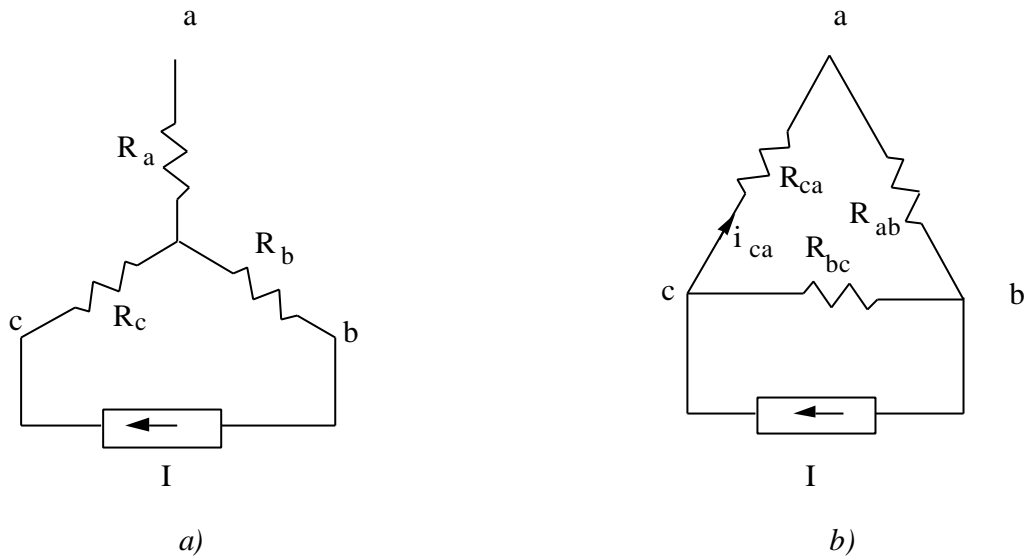


Figura 3.11

En la Figura 3.11 a)

$$u_{ca} = R_c \cdot I \quad (3.17)$$

Y en la Figura 3.11 b)

$$u_{ca} = R_{ca} \cdot i_{ca} = R_{ca} \cdot \frac{R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \cdot I \quad (3.18)$$

Al igualar las expresiones (3.17) y (3.18) se obtiene el valor de R_c

$$R_c = \frac{R_{ca} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \quad (3.19)$$

- **Transformación estrella-triángulo**

Al igual que en la transformación anterior, se trata de obtener la respuesta de las dos configuraciones ante un mismo estímulo, y comparar los resultados a fin de obtener equivalencias. En primer lugar se van a analizar las configuraciones de las Figuras 4.16 y 4.17.

3. Asociaciones de elementos

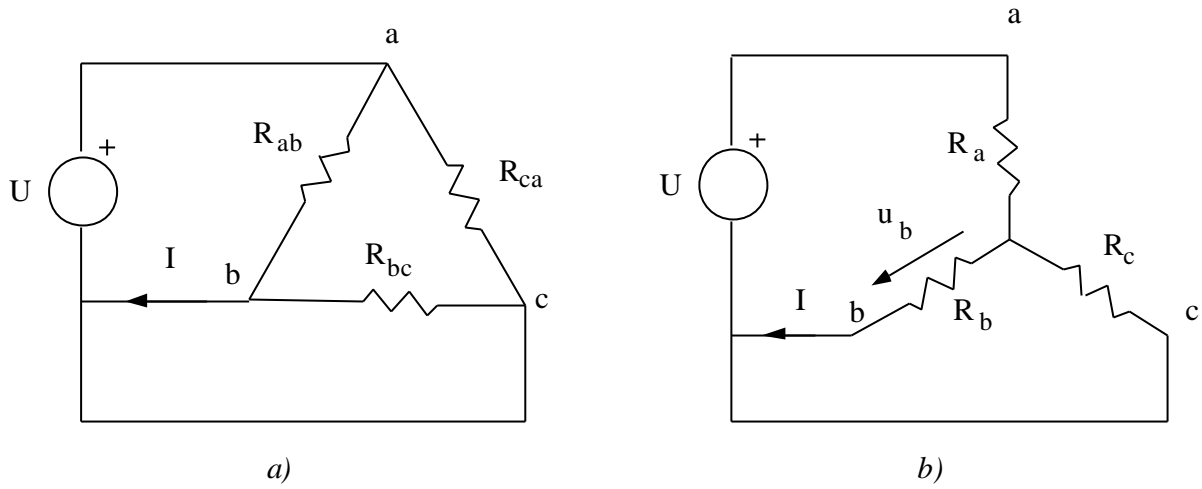


Figura 3.12

La corriente I en la Figura 3.12 a) vale:

$$I = \frac{U}{R_{ab}} \quad (3.20)$$

En tanto que en la Figura 3.12 b) su valor es:

$$I = \frac{u_b}{R_b} = \frac{\frac{R_b \cdot R_c}{R_b + R_c}}{R_b \left(R_a + \frac{R_b \cdot R_c}{R_b + R_c} \right)} \cdot U = \frac{U}{R_a + R_b + \frac{R_a R_b}{R_c}} \quad (3.21)$$

Al igualar las fórmulas (3.20) y (3.21) se obtiene la expresión de la resistencia R_{ab}

$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a R_b}{R_c} \quad (3.22)$$

A continuación se obtiene el valor de R_{bc} de manera análoga:

3. Asociaciones de elementos

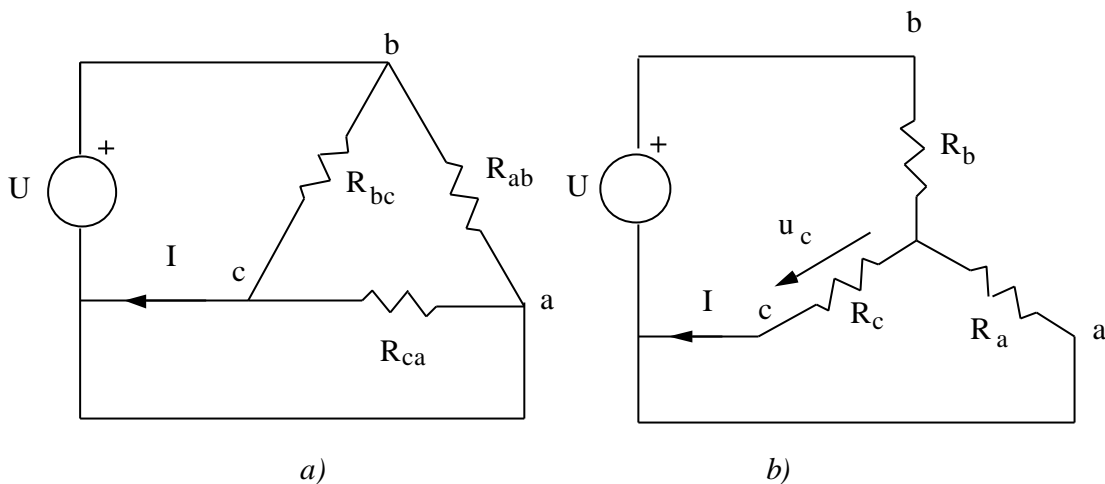


Figura 3.13

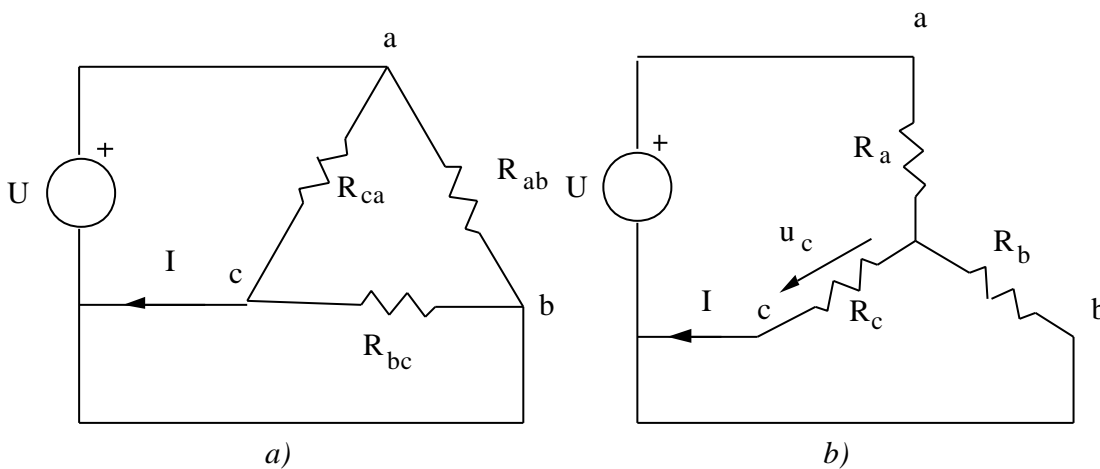
De la Figura 3.13 a):

$$I = \frac{U}{R_{bc}} \tag{3.23}$$

$$I = \frac{u_c}{R_c} = \frac{\frac{R_a \cdot R_c}{R_a + R_c}}{R_c \left(R_b + \frac{R_a \cdot R_c}{R_a + R_c} \right)} \cdot U = \frac{U}{R_b + R_c + \frac{R_b R_c}{R_a}} \tag{3.24}$$

Se igualan las fórmulas (3.23) y (3.24)

$$R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b R_c}{R_a} \tag{3.25}$$



3. Asociaciones de elementos

Figura 3.14

Por último, se halla el valor de R_{ca} , partiendo de la Figura 3.14.

$$I = \frac{U}{R_{ca}} \quad (3.26)$$

$$I = \frac{u_c}{R_c} = \frac{\frac{R_b \cdot R_c}{R_b + R_c}}{R_b \left(R_a + \frac{R_b \cdot R_c}{R_b + R_c} \right)} \cdot U = \frac{U}{R_a + R_c + \frac{R_a R_c}{R_b}} \quad (3.27)$$

Al igualar las fórmulas (3.26) y (3.27)

$$R_{ca} = R_a + R_c + \frac{R_a R_c}{R_b} \quad (3.28)$$

3.4 Asociación en paralelo de fuentes de tensión reales.

Sea la asociación de fuentes reales de tensión que se muestra en la Figura 3.15.

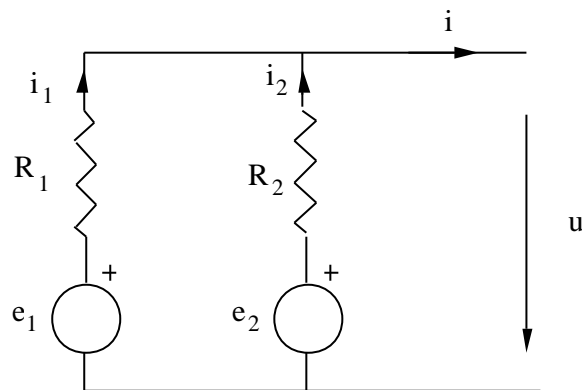


Figura 3.15

La ecuación terminal del dipolo resultante se obtiene de la siguiente manera:

$$i = i_1 + i_2 = \left(\frac{e_1}{R_1} - \frac{u}{R_1} \right) + \left(\frac{e_2}{R_2} - \frac{u}{R_2} \right) \quad (3.29)$$

Se despeja u y queda:

$$u = \frac{R_2 e_1 + R_1 e_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.30)$$

3. Asociaciones de elementos

Si las dos fuentes son iguales, $e_1 = e_2 = e$, $R_1 = R_2 = R$, y por tanto

$$u = e - \frac{R}{2} \cdot i \quad (3.31)$$

Por tanto, al asociar dos fuentes en paralelo de igual valor se obtiene una fuente con el mismo valor en vacío, pero con una resistencia menor, y por tanto, más parecida a una fuente ideal de tensión.

Por el contrario, si las fuentes que se asocian en paralelo tienen distinto valor, la corriente que cada una de ellas suministra será la siguiente, obtenida a partir de (3.29) y (3.30).

$$i_1 = \frac{e_1 - e_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot i \quad (3.32)$$

$$i_2 = \frac{e_2 - e_1}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot i \quad (3.33)$$

Se puede observar en las expresiones (3.32) y (3.33) que la corriente en cada una de ellas consta de dos términos, uno que depende de la corriente absorbida por el dispositivo que se conecte al dipolo, y otro que depende de la diferencia de las tensiones en vacío de las fuentes reales. Por tanto, aun cuando no haya corriente demandada, existirá una corriente de circulación que producirá pérdidas innecesarias. Será conveniente, por tanto, que ambas fuentes tengan el mismo valor en vacío para evitar esta componente inútil de la corriente.

4. PRINCIPIOS DE ANÁLISIS DE CIRCUITOS.

4.1 Definiciones topológicas.

- Rama: Es un elemento o grupo de elementos que presenta dos terminales. Queda definida por una relación entre la tensión que hay entre sus extremos, u , y la corriente que circula por ella i . La rama resistiva más general se muestra en la Figura 4.1

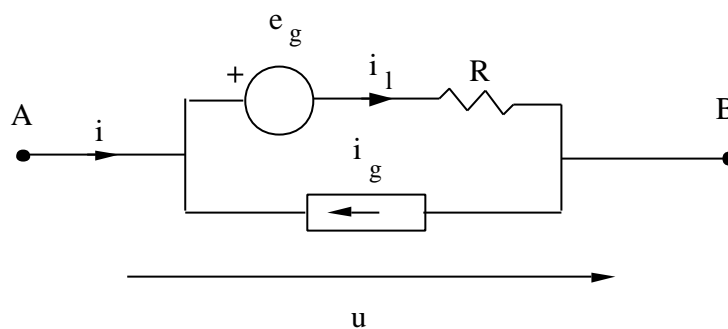


Figura 4.1

La relación entre la tensión y la intensidad de esta rama se obtiene aplicando las leyes de Kirchhoff, y se puede escribir como:

$$u = e_g + R \cdot (i + i_g) \quad (4.1)$$

o bien, haciendo $G = 1/R$, como

$$i = -i_g + G \cdot (u + e_g) \quad (4.2)$$

Anulando R , e_g , i_g o cualquiera de estos parámetros se pueden obtener otros tipos de rama.

- Nudo: Es el punto de unión de dos o más ramas
- Circuito conexo: Aquel circuito en el que se puede pasar de uno de sus nudos a otro cualquiera de ellos mediante al menos una línea continua formada por ramas del propio circuito.
- Circuito plano: Aquel que puede dibujarse en un plano sin que se corten las ramas más que en los nudos.

4. Principios de análisis de circuitos

- Malla: Sólo está definida en circuitos planos. Es un conjunto de ramas que forma una línea cerrada y que no contiene otra en su interior.

4.2 Número de ecuaciones independientes.

En un problema de análisis de circuitos normalmente se desea conocer las tensiones y corrientes en los elementos que lo componen partiendo de los valores de las fuentes. La forma sistemática de resolverlo es planteando un sistema de ecuaciones, que en los circuitos lineales y resistivos serán lineales y algebraicas, y resolviéndolo. Se supondrá en este apartado que cada rama consta de un solo elemento de los representados en la Figura 4.1.

Si el circuito tiene r ramas, el circuito tendrá $2r$ incógnitas, una tensión y una corriente por rama. Se necesitarán, por tanto, $2r$ ecuaciones linealmente independientes para que el sistema sea compatible determinado, y por tanto tenga una única solución.

De estas $2r$ ecuaciones, r son las relaciones entre tensión e intensidad de cada uno de los elementos que forman el circuito. En las ramas con fuentes ideales, la tensión o la corriente están determinadas, según sea el tipo de fuente, y en las resistencias, se conoce la relación entre ambas magnitudes. Por tanto, habrá que obtener las r ecuaciones restantes.

De estas r ecuaciones, se pueden obtener $n - 1$ linealmente independientes, donde n es el número de nudos del circuito, de la aplicación de la primera ley de Kirchhoff a todos los nudos menos 1 del circuito.

Además, se pueden obtener m ecuaciones de la aplicación de la segunda ley de Kirchhoff a las m mallas del circuito. El número de mallas de un circuito es:

$$m = r - (n - 1) \quad (4.3)$$

La fórmula (4.3) se puede demostrar fácilmente por inducción. Cuando el número de mallas es igual a 1 es evidente que el número de ramas es el mismo que el de nudos, por lo que la ecuación (4.3) se cumple.

Si se supone que se cumple para m mallas y se añade una más formada por k ramas, se añadirán $k - 1$ nudos, por lo que:

$$r + k - (n + k - 1 - 1) = m + 1$$

4. Principios de análisis de circuitos

Como se quería demostrar. Por tanto, el número de ecuaciones de que se dispone es:

$$r + (n - 1) + r - (n - 1) = 2 \cdot r$$

Al haber tantas ecuaciones linealmente independientes como incógnitas, será posible la resolución de cualquier problema de análisis de circuitos.

En los apartados siguientes no se aplicarán de forma explícita todas las ecuaciones a la resolución de circuitos, sino que se resolverá un sistema de un orden menor que $2r$, tratando de buscar incógnitas que reduzcan el orden del sistema de ecuaciones que se va a plantear, y a partir de estas incógnitas se obtienen las verdaderas incógnitas del circuito, esto es, las tensiones y corrientes en cada uno de los elementos. Será entonces cuando haya que acudir a las ecuaciones que no estaban explícitamente aplicadas en el sistema original. Además, la obtención de estas ecuaciones deberá ser sistemática.

Existen varios métodos para obtener las ecuaciones del circuito, de los que se van a explicar dos en los apartados sucesivos: el método de mallas y el método de nudos.

4.3 Método de nudos.

Este método se basa en la aplicación de la primera ley de Kirchhoff a todos los nudos menos uno del circuito. El nudo al que no se aplica esta ley se denomina *nudo de referencia*, que se denotará con el subíndice o .

Las incógnitas del sistema de ecuaciones que se forma al aplicar este método de resolución de circuitos son las tensiones entre el nudo k y el de referencia, u_{ko} . Estas tensiones se denominan *tensiones nodales*, y se denotarán, para abreviar, eliminando el subíndice o , u_k . A partir de estas tensiones se pueden obtener todas las tensiones de rama. Si una rama está situada entre un nudo k y la referencia, su tensión de rama coincide con la tensión del nudo k . Si está situada entre los nudos k y j , por aplicación de la segunda ley de Kirchhoff la tensión en la rama será $u_j = u_k - u_j$. A partir de las tensiones de rama se obtienen las corrientes de rama a través de las relaciones constitutivas de los elementos de cada rama.

Sea un circuito con $n+1$ nudos. Para obtener las ecuaciones nodales se aplicará la primera ley de Kirchhoff a un nudo k , en el que concurren p ramas resistivas, y m fuentes de corriente ideales. Las fuentes de tensión reales pueden convertirse en fuentes de corriente reales, y por ahora no se

4. Principios de análisis de circuitos

considerará el tratamiento de fuentes de tensión ideales. Tampoco se considerarán fuentes dependientes. El nudo generalizado se muestra en la Figura 4.2.

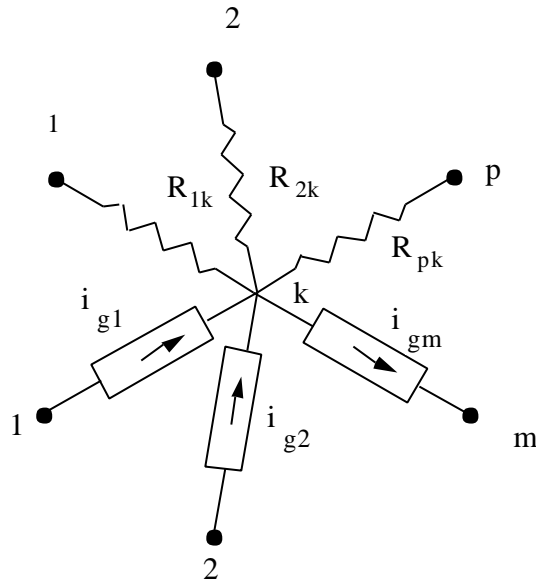


Figura 4.2

Según la primera ley de Kirchhoff, la suma de todas las corrientes entrantes en el nudo es igual a cero, o bien, la suma de corrientes entrantes es igual a la de corrientes salientes. Si se toma el criterio de tomar positivas las corrientes provenientes de fuentes de corriente entrantes en el nudo, y se consideran las corrientes que circulan por las resistencias como salientes, la aplicación de la primera ley de Kirchhoff al nudo k produce la ecuación siguiente:

$$i_{g1} + i_{g2} + \dots - i_{gm} = \frac{u_k - u_1}{R_{1k}} + \frac{u_k - u_2}{R_{2k}} + \dots + \frac{u_k - u_p}{R_{pk}} \quad (4.4)$$

Si se toman las conductancias de la rama en lugar de las resistencias, la ecuación (4.4) se transforma en la (4.5)

$$I_k = \sum_{j=0}^m i_{gj} = (g_{1k} + g_{2k} + \dots + g_{pk}) \cdot u_k - g_{1k}u_1 - g_{2k}u_2 - \dots - g_{pk}u_p \quad (4.5)$$

Si se aplica la primera ley de Kirchhoff de igual modo a los n nodos de los que se puede obtener un sistema de ecuaciones linealmente independientes, el sistema resultante se puede expresar matricialmente, obteniéndose la ecuación (4.6)

4. Principios de análisis de circuitos

$$\begin{bmatrix} g_{n1,1} & g_{n1,2} & \dots & g_{n1,n} \\ g_{n2,1} & g_{n2,2} & \dots & g_{n2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{nn,1} & g_{nn,2} & \dots & g_{nn,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_n \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

De forma abreviada se puede escribir:

$$[G] \cdot [u_n] = [I] \quad (4.7)$$

[G] es una matriz de coeficientes denominada *matriz de conductancias nodales*. Sus términos tienen el siguiente valor:

$$g_{ni,i} = \sum_j g_{ij}$$

$$g_{ni,j} = -g_{ij} \quad (i \neq j)$$

La matriz [G] es una matriz simétrica, siempre y cuando no haya fuentes dependientes, que se tratan como se verá posteriormente. En las fórmulas anteriores se observa que el término (i,i) de la diagonal de la matriz [G] está formado por la suma de todas las conductancias confluyentes en el nudo i, en tanto que el término (i,j) es la conductancia, cambiada de signo, de la rama que conecta el nudo i con el j (si hay más de una rama, será la suma de todas ellas).

El vector [u] es el vector de tensiones de nudo, esto es las diferencias entre la tensión de un nudo y la del nudo de referencia.

[I] es el vector de corrientes de nudo, que está formado por las corrientes entrantes en un nudo provenientes de fuentes de corriente. Cada uno de los elementos se forma de la siguiente manera:

$$I_k = \sum_j i_{kj}$$

El orden del sistema formado con este método será de orden n, que es un número bastante menor que 2r.

4.4 Método de mallas

Este método es el resultante de aplicar la segunda ley de Kirchhoff a todas las mallas del circuito. Puesto que hay m mallas, el sistema será de orden m. Para su aplicación se va a tomar un nudo

4. Principios de análisis de circuitos

generalizada en la que hay p resistencias y n fuentes de tensión ideales. Por el momento tampoco se considerarán fuentes de corriente ideales ni fuentes dependientes. La malla generalizada se muestra en la Figura 4.3.

Las incógnitas del sistema formado serán las corrientes de malla. Esta magnitud puede coincidir con una corriente de rama o no. No coincidirá cuando la malla sea interior, es decir cuando esté rodeada por otras mallas. La corriente de cada rama será la diferencia de las corrientes de las dos mallas adyacentes, y la caída de tensión que se produce en cada una de las ramas resistivas será el valor de la resistencia multiplicado por la corriente de rama.

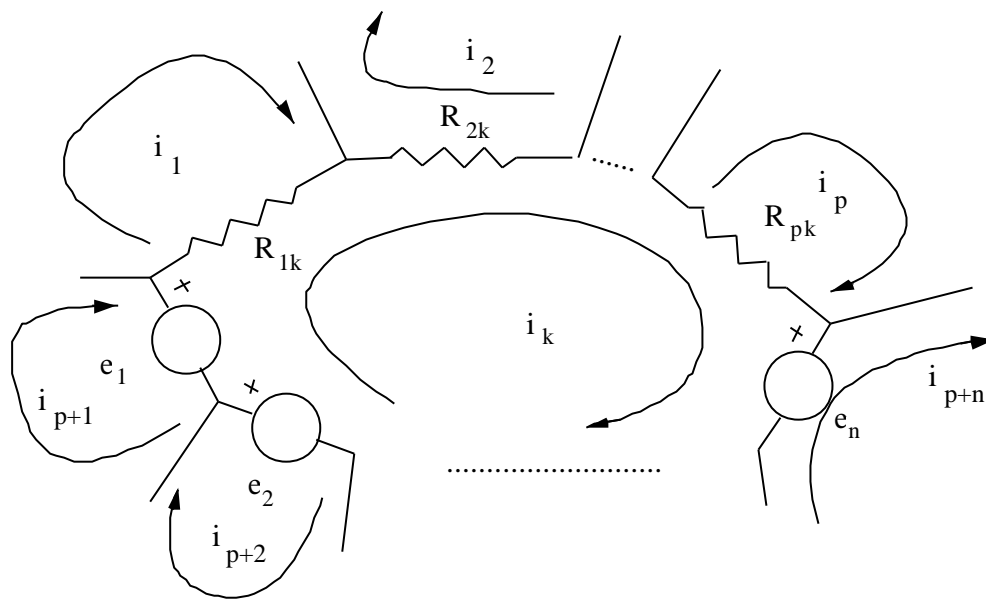


Figura 4.3

En la Figura 4.3 se muestra un sentido arbitrario para la corriente de cada malla. Cualquier caída de tensión que coincida con este sentido será positivo, en tanto que aquellas fuentes cuya caída de tensión sea opuesto al sentido de circulación elegido aparecerán con signo opuesto en el término de la derecha de la ecuación. Por tanto, la aplicación de la segunda ley de Kirchhoff a la malla de la Figura 4.3 se obtiene la siguiente ecuación:

$$R_{1k} \cdot (i_k - i_1) + R_{2k} \cdot (i_k - i_2) + \dots + R_{pk} \cdot (i_k - i_p) = e_1 + e_2 + \dots - e_n \quad (4.8)$$

Al reordenar los términos se obtiene la ecuación siguiente:

4. Principios de análisis de circuitos

$$-R_{1k} \cdot i_1 - R_{2k} \cdot i_2 - \dots + (R_{1k} + R_{2k} + \dots + R_{pk}) \cdot i_k = \sum_j^n e_j \quad (4.9)$$

Estas ecuaciones también se pueden expresar de forma matricial, tal como se muestra en (4.10)

$$\begin{bmatrix} R_{m1,1} & R_{m1,2} & \dots & R_{m1,m} \\ R_{m2,1} & R_{m2,2} & \dots & R_{m2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{mn,1} & R_{mn,2} & \dots & R_{mn,m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_m \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Esta ecuación se puede escribir:

$$[R] \cdot [i_m] = [E] \quad (4.11)$$

Los términos de [R], llamada *matriz de resistencias de malla* tienen el siguiente valor:

$$R_{mi,i} = \sum_j R_{ij}$$

$$R_{mi,j} = -R_{ij} \quad (i \neq j)$$

La matriz [R] es una matriz simétrica, siempre y cuando no haya fuentes dependientes, y los sentidos de corrientes sean los mismos en todas las mallas. En las fórmulas anteriores se observa que el término (i,i) de la diagonal de la matriz [R] está formado por la suma de todas las resistencias de la malla i, en tanto que el término (i,j) es la resistencia, cambiada de signo, de la rama que pertenece a las mallas i y j.

El vector [i_m] es el vector de corrientes de malla.

[E] es el vector de fuentes de tensión de malla, que está formado por las fuentes de tensión con sentidos opuestos al de referencia dentro de una malla. Si el sentido es el contrario, el signo con el que aparecen en la expresión final es negativo. Las componentes de este vector se obtienen de la siguiente manera

$$E_k = \sum_j e_{ij}$$

4.5 Resolución de circuitos con fuentes impropias.

Se llamarán fuentes impropias a las fuentes de tensión ideales en el análisis por nudos de un circuito y las fuentes de corriente ideales en el análisis por mallas. Ambos tipos de fuentes tienen un tratamiento muy parecido, que puede ser de dos tipos: por modificación de la topología del circuito y por cambio de las incógnitas del circuito.

4.5.1 Resolución por cambio de las incógnitas del circuito.

Cuando existe una fuente de tensión ideal en un circuito que se desea analizar por nudos, la tensión entre los nudos entre los que está conectada la fuente es conocida, quedando en cambio como incógnita la corriente que la atraviesa. Por tanto, se aplicará la primera ley de Kirchhoff en los nudos entre los que está conectada la fuente, dejando como incógnita dicha intensidad I . Puesto que hay una incógnita más, habrá que añadir una ecuación más que consiste precisamente en igualar la diferencia de tensión entre nudos al valor de la fuente. Si uno de los nudos entre los que está conectada la fuente es el de referencia, la tensión de ese nudo, lógicamente, ya es conocida. Un ejemplo se muestra en la Figura 4.4.

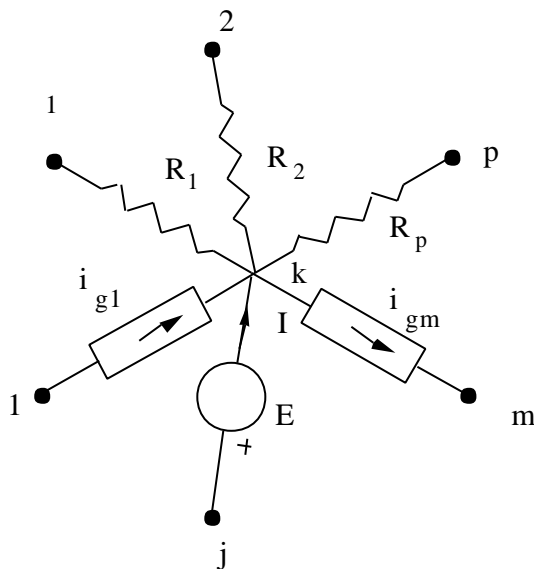


Figura 4.4

La ecuación resultante de aplicar la primera ley de Kirchhoff será

4. Principios de análisis de circuitos

$$i_{g1} + I + \dots - i_{gm} = \frac{u_k - u_1}{R_{1k}} + \frac{u_k - u_2}{R_{2k}} + \dots + \frac{u_k - u_p}{R_{pk}} \quad (4.12)$$

Y la nueva ecuación que se añade al sistema:

$$u_j - u_k = E \quad (4.13)$$

De forma análoga se plantean las ecuaciones por mallas cuando en la rama de una malla hay una fuente de corriente ideal. Al aplicar la segunda ley de Kirchhoff a las mallas adyacentes entre las que está colocada la fuente se deja como incógnita la tensión en bornes de la misma y posteriormente se añade una nueva ecuación igualando la diferencia de las correspondientes corrientes de malla al valor de la fuente. Así se muestra en la Figura 4.5.

La ecuación resultante de aplicar la segunda ley de Kirchhoff al circuito es (4.14), y la nueva ecuación que hay que añadir, la (4.15).

$$R_{1k} \cdot (i_k - i_1) + R_{2k} \cdot (i_k - i_2) + \dots + R_{pk} \cdot (i_k - i_p) = e_1 - U + \dots - e_n \quad (4.14)$$

$$i_k - i_{p+2} = -I \quad (4.15)$$

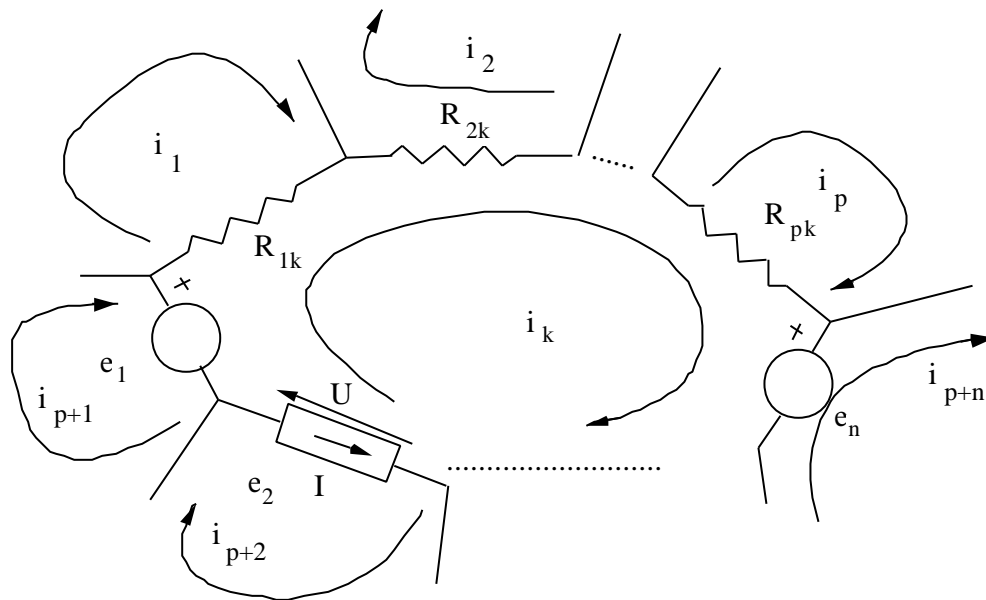


Figura 4.5

4. Principios de análisis de circuitos

4.5.2 Resolución mediante transformación de la geometría

Otra forma de resolver el problema de fuentes impropias es mediante la transformación de la geometría del circuito, teniendo en cuenta que no deben modificarse las corrientes y tensiones en los restantes elementos del circuito. En primer lugar, se verá cómo transformar los circuitos con fuentes de corriente, y en segundo lugar, los circuitos con fuentes de tensión.

- **Transformación de fuentes de corriente**

Sea un circuito que se desea analizar por ramas, y en el que hay una rama con una fuente de corriente. La parte del circuito con fuente de corriente se muestra en la Figura 4.6.

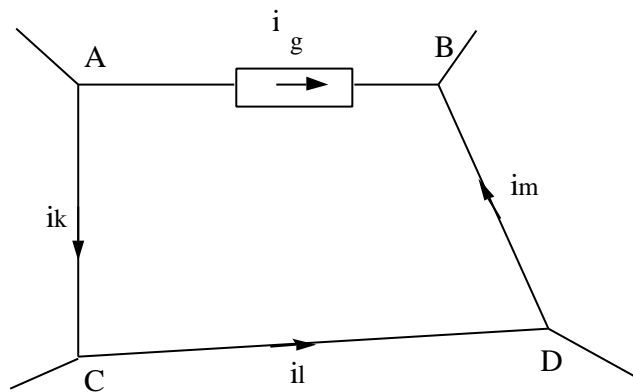


Figura 4.6

Si se transforma la geometría del circuito tal como se indica en la Figura 4.7, no se altera ninguna de las magnitudes restantes del circuito.

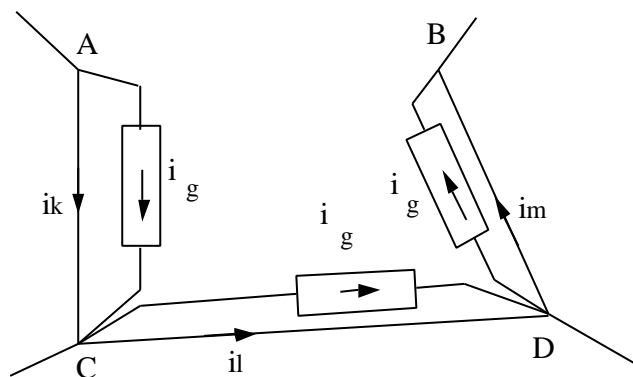


Figura 4.7

4. Principios de análisis de circuitos

En efecto, en ninguno de los nudos se produce variación del balance de corrientes, y por tanto las corrientes i_k , i_l e i_m se mantienen iguales que en el circuito de la Figura 4.6, por lo que las tensiones en cada una de las ramas no han variado. Esto implica que la tensión entre los nudos A y B sigue siendo la misma que anteriormente por aplicación directa de la segunda ley de Kirchoff, por lo que las restantes magnitudes del circuito quedan como estaban, y el balance de potencia tampoco varía: la potencia que suministraba la fuente de la Figura 4.6 es la misma que la suma de las que suministran las fuentes de la Figura 4.7.

$$u_{AB} = u_{AC} + u_{CD} + u_{DA}$$

$$u_{AB} \cdot i_g = u_{AC} \cdot i_g + u_{CD} \cdot i_g + u_{DA} \cdot i_g$$

Una vez con esta geometría, se puede transformar la fuente de corriente en paralelo con una resistencia en fuente de tensión en serie con resistencia, con lo que la aplicación del método de mallas es inmediata.

- **Transformación de fuentes de tensión.**

Sea el circuito representado en la Figura 4.8, que contiene una fuente ideal de tensión como elemento único en una rama. Si se desea resolver el circuito utilizando el método de nudos, se puede realizar la transformación de geometría que se indica en la Figura 4.9

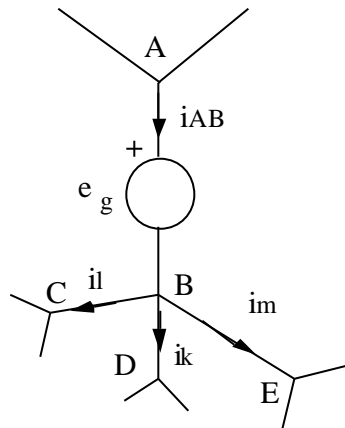


Figura 4.8

4. Principios de análisis de circuitos

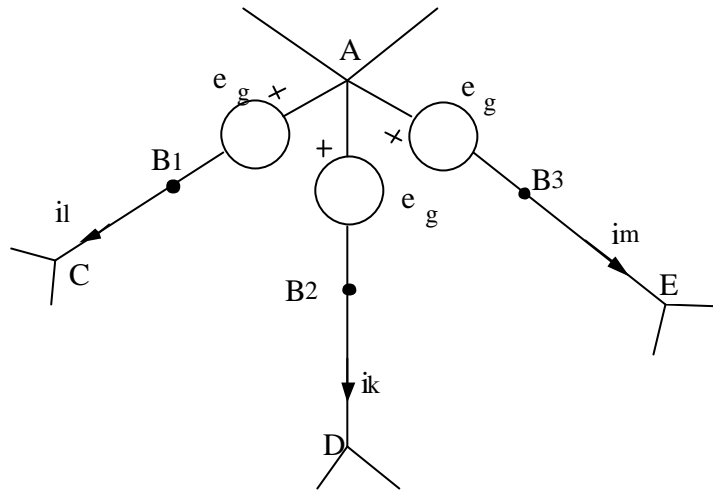


Figura 4.9

En la Figura 4.9 las tensiones en los puntos B_1 , B_2 y B_3 son las mismas respecto de A, puesto que son las de dicho punto menos la tensión de la fuente, por lo que las tensiones entre B_1 y C, B_2 y D, y B_3 y E son las mismas que las anteriores tensiones entre B y C, B y D, y B y E, y las magnitudes restantes del circuito no varían. La potencia consumida por la fuente de la Figura 4.8 es la suma de las potencias de las fuentes de la Figura 4.9.

$$i_{AB} = i_k + i_l + i_m$$

$$e_g \cdot i_{AB} = e_g \cdot i_k + e_g \cdot i_l + e_g \cdot i_m$$

4.6 Tratamiento de las fuentes dependientes

Plantear las ecuaciones nodales o de mallas en circuitos con fuentes dependientes consiste en incluir las ecuaciones de definición de la fuente dependiente en el término de fuentes. Puesto que estas ecuaciones incluirán magnitudes que pueden ser o no incógnitas del sistema plan, habrá que expresar las magnitudes que no sean incógnitas en función de estas. Una vez hecho esto, se incluyen los nuevos términos en las ecuaciones existentes, quedando un sistema de ecuaciones en el que se ha perdido la simetría de la matriz de coeficientes.

5. TEOREMAS.

5.1 Introducción.

A continuación se enuncian unas propiedades de los circuitos, que se aplicarán en este capítulo a los circuitos resistivos exclusivamente. Su aplicación permite la resolución de este tipo de circuitos de una forma que en ocasiones puede resultar más sencilla que mediante la utilización de métodos sistemáticos como mallas y nudos.

De estas propiedades, que tradicionalmente se han denominado *teoremas* de los circuitos, se utilizarán especialmente dos: el principio de superposición, y sobre todo el Teorema de Thévenin, que resulta imprescindible para estudios de naturaleza local en los que la representación de toda la red conectada sería enormemente compleja.

5.2 Teorema de superposición. Linealidad.

Enunciado

1. La respuesta de un circuito lineal a varias fuentes de excitación actuando simultáneamente es igual a la suma de las respuestas que se tendrían cuando actuase cada una de ellas por separado (Principio de superposición).
2. Si todas las excitaciones de un circuito lineal se multiplican por una constante, todas las respuestas de dicho circuito vienen multiplicadas por esa misma constante.

El comportamiento de cualquier sistema lineal se puede expresar por medio de ecuaciones lineales, que en el caso de circuitos resistivos son algebraicas. En la formulación de estas ecuaciones, como por ejemplo, mediante el método de nudos, se puede observar claramente cómo la tensión en un nudo u es la suma de las tensiones producidas por cada excitación individual i_j .

$$[u] = [R] \cdot [i]$$

$$u_i = \sum_j R_{ij} \cdot i_j$$

5. Teoremas.

en donde $[R]$ es la matriz de resistencias nodales e $[i]$ es el vector de corrientes inyectadas en los nudos.

5.3 Teorema de sustitución.

El enunciado de este teorema es como sigue:

Si en un circuito se sustituye un elemento cualquiera por una fuente de corriente del valor de la corriente circulante en la rama, las magnitudes del circuito no varían. Lo mismo sucede si se sustituye el elemento por una fuente de tensión del valor de la tensión en bornes de este elemento.

De esta forma, cualquier elemento de un circuito se puede sustituir como se muestra en la Figura 5.1.

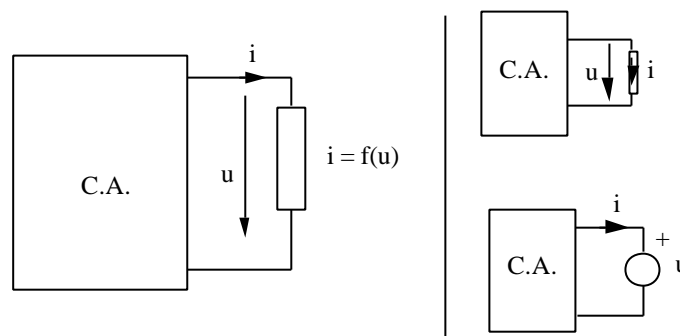


Figura 5.1

5.4 Teorema de Thévenin.

Sea un circuito resistivo que se puede dividir en dos partes, A y B, como se indica en la Figura 5.2. Supóngase que se quiere estudiar sólo la parte B del circuito, y por tanto, se querría simplificar la red A lo más posible. Pues bien, en determinadas condiciones es posible sustituir una red por un equivalente que consta de una fuente de tensión en serie con una resistencia, cuyo valor es necesario obtener. Este equivalente se denomina equivalente Thévenin.

5. Teoremas.

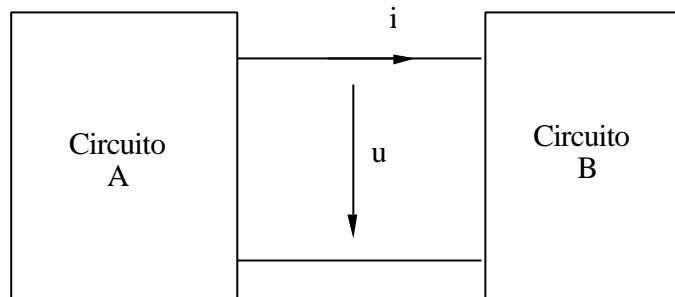


Figura 5.2

El enunciado del teorema de Thévenin es como sigue:

Sea una carga conectada a un dipolo. La carga no está acoplada con el dipolo a través de fuentes dependientes, y el dipolo no contiene más que resistencias lineales y fuentes dependientes e independientes. Pues bien, dicho dipolo se puede representar como una fuente de tensión y una resistencia en serie con ella. El valor de la fuente es la tensión a circuito abierto del dipolo entre los terminales, en tanto que la resistencia es la resistencia de entrada del dipolo con todas las fuentes independientes anuladas

El teorema de Norton es análogo al de Thévenin, y especifica que cualquier red que cumpla determinadas condiciones, puede representarse como una fuente ideal de corriente en paralelo con una resistencia. El teorema se podría enunciar de la forma siguiente

Sea una carga conectada a un dipolo. La carga no está acoplada con el dipolo a través de fuentes dependientes, y el dipolo no contiene más que resistencias lineales y fuentes dependientes e independientes. Pues bien, dicho dipolo se puede representar como una fuente de corriente y una resistencia en paralelo con ella. El valor de la fuente es la corriente que circula entre los terminales del dipolo cuando estos están en cortocircuito, en tanto que la resistencia es la resistencia de entrada del dipolo con todas las fuentes independientes anuladas.

En la Figura 5.3 se muestran los equivalentes Thévenin y Norton de un circuito. Naturalmente, una vez conocido el equivalente Thévenin se puede determinar el equivalente Norton por la simple transformación de fuentes reales, tal como se indica a continuación.

$$R_{th} = R_N$$

$$e_{th} = R_{th} \cdot i_N$$

5. Teoremas.

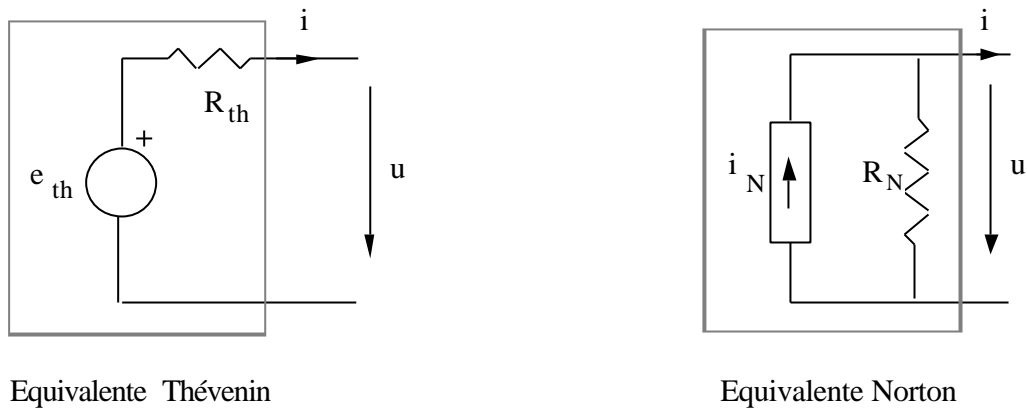


Figura 5.3

5.5 Teorema de Tellegen.

El enunciado del teorema es como sigue:

En un circuito arbitrario de parámetros concentrados en el que se cumplen las leyes de Kirchhoff con unas referencias dadas, la suma de los productos de las tensiones de rama por las corrientes de rama, con los sentidos coincidentes, es igual a cero.

Esto se resume en la expresión

$$\sum_{k=1}^b u_k \cdot i_k = 0$$

en donde b es el número de ramas, y u e i son las tensiones y corrientes, respectivamente de cada rama.

Hay que hacer notar que el conjunto de tensiones de rama elegido no tiene por qué estar relacionado con el de intensidades de rama para que se cumpla este teorema. Se pueden imaginar dos circuitos distintos, con el mismo grafo, y el teorema se cumple si se eligen las tensiones de uno de ellos y las intensidades del otro.

5. Teoremas.

5.6 Fórmula de Millman

Esta fórmula es aplicable a un circuito como el de la Figura 5.4.

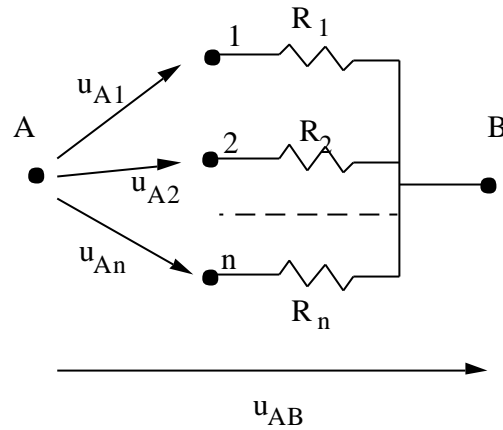


Figura 5.4

La suma de las corrientes concurrentes en el nudo B será nula

$$i_1 + i_2 + \dots + i_n = 0$$

Las corrientes se pueden expresar de la forma siguiente

$$G_1 u_1 + G_2 u_2 + \dots + G_n u_n = 0$$

$$G_1 (u_{AB} - u_{A1}) + G_2 (u_{AB} - u_{A2}) + \dots + G_n (u_{AB} - u_{An}) = 0$$

De aquí se obtiene la Fórmula de Millman, que es:

$$u_{AB} = \frac{G_1 u_{A1} + G_2 u_{A2} + \dots + G_n u_{An}}{G_1 + G_2 + \dots + G_n} \quad (5.1)$$

5.7 Teorema de reciprocidad

Este teorema no se puede aplicar a todos los circuitos, sino sólo a los lineales y a aquellos que no tengan ninguna fuente dependiente. Además, en general, no se aplica a circuitos con bobinas acopladas. Estos circuitos se denominan *recíprocos*. El teorema tiene dos enunciados, que se referirán a la Figura 5.5, el primero de ellos, y a la Figura 5.6, el segundo:

5. Teoremas.

1. La tensión u que aparece entre dos nudos (p,q) de un circuito lineal y pasivo cuando se aplica una fuente de intensidad i entre otro par de nudos (m,n), es igual a la tensión u que origina la misma fuente trasladada al par de nudos (p,q).
2. La intensidad i que circula por una rama de un circuito lineal y pasivo, cuando se intercala una fuente de tensión en otra rama, es la misma que circularía por esta última si la fuente de tensión se intercalase en la primera.

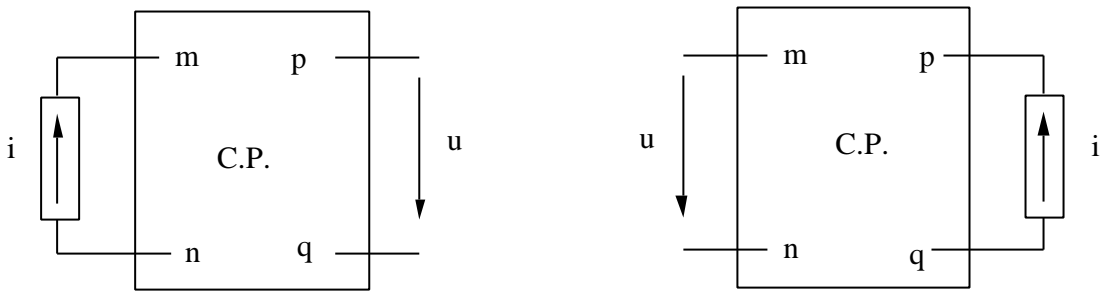


Figura 5.5

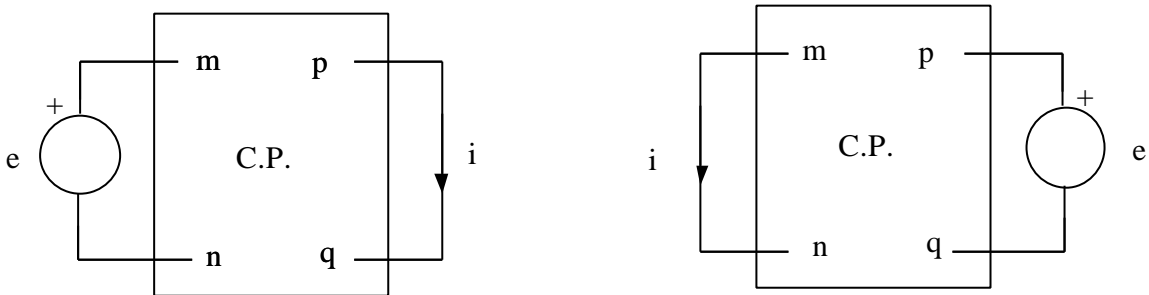


Figura 5.6

La demostración de este teorema es sencilla. En cuanto al primer enunciado, la tensión que aparece entre los terminales p y q , u_{pq} , se expresa del modo siguiente

$$u_{pq} = u_p - u_q = R_{pm} \cdot i - R_{pn} \cdot i - R_{qm} \cdot i + R_{qn} \cdot i = (R_{pm} - R_{pn} - R_{qm} + R_{qn}) \cdot i \quad (5.2)$$

en tanto que la tensión entre los nudos m y n , u_{mn} , tiene la expresión

$$u_{mn} = u_m - u_n = R_{mp} \cdot i - R_{np} \cdot i - R_{mq} \cdot i + R_{nq} \cdot i = (R_{mp} - R_{np} - R_{mq} + R_{nq}) \cdot i \quad (5.3)$$

En ambas fórmulas los términos R_{ij} son los términos de la matriz de resistencias nodales $R(i,j)$. Si los circuitos no tienen fuentes dependientes, el algoritmo de formación de la matriz de conductancias nodales, expuesto en (5.4) y (5.5) asegura que la matriz de conductancias nodales $[G]$ es simétrica.

5. Teoremas.

$$g_{i,i} = \sum_j g_{ij} \quad (5.4)$$

$$g_{i,j} = -g_{j,i} \quad (i \neq j) \quad (5.5)$$

Puesto que la inversa de una matriz simétrica es una matriz simétrica, la matriz de resistencias nodales también lo será, y por tanto las ecuaciones (5.2) y (5.3) son equivalentes.

En lo que respecta al segundo enunciado, la corriente que circula por la rama p y q, i_{pq} , se puede poner en función de las corrientes de las mallas adyacentes i y j. Por su parte, la fuente e pertenecerá a dos mallas también adyacentes, h y k. Con estas aclaraciones, la expresión de dicha corriente es (5.6):

$$i_{pq} = i_i - i_j = G_{ih} \cdot e - G_{ik} \cdot e - G_{jh} \cdot e + G_{jk} \cdot e = (G_{ih} - G_{ik} - G_{jh} + G_{jk}) \cdot e \quad (5.6)$$

Cuando la fuente se conecta entre los nudos p y q, estará entre las mallas i y j, en tanto que la corriente será la diferencia entre las corrientes de las mallas h y k

$$i_{mn} = i_h - i_k = G_{hi} \cdot e - G_{hj} \cdot e - G_{ki} \cdot e + G_{kj} \cdot e = (G_{hi} - G_{hj} - G_{ki} + G_{kj}) \cdot e \quad (5.7)$$

En ambas fórmulas los términos G son los términos de la matriz de conductancia de mallas. El algoritmo de formación de esta matriz también garantiza su simetría (v. capítulo 5). Por esto, las expresiones (5.6) y (5.7) son equivalentes.

Es importante observar que en el teorema de reciprocidad, una de las funciones excitación o respuesta debe ser una tensión y la otra una intensidad. En general, la reciprocidad no es aplicable cuando la excitación y la respuesta son ambas tensiones o cuando son ambas intensidades.

6. RÉGIMEN ESTACIONARIO SINUSOIDAL

6.1 Magnitudes características de una onda sinusoidal

Sea una tensión cuyo valor depende del tiempo de forma sinusoidal según la expresión

$$u(t) = U_o \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.1)$$

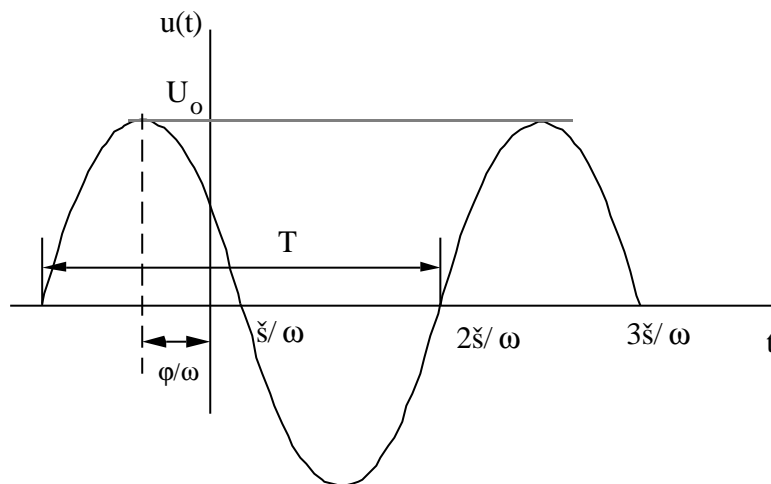


Figura 6.1

Las magnitudes que caracterizan a esta onda son las siguientes:

ω pulsación (rad/s)

T periodo (s)

f frecuencia (Hz) $f = \frac{1}{T}$ $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

φ desfase con respecto al origen (rad)

también se puede medir en grados, o en segundos

6. Régimen estacionario sinusoidal

U_o valor máximo, o amplitud (V)

u valor instantáneo (V)

Las ondas sinusoidales tienen valor medio nulo. Sin embargo, son capaces de transmitir energía y potencia. Si una corriente sinusoidal circula por una resistencia, ésta se calentará, disipando una potencia media a lo largo de un ciclo de:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) \cdot R \, dt = R \cdot \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) \, dt \quad (6.2)$$

Se define **valor eficaz** de una onda periódica, sinusoidal o no a la expresión

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) \, dt} \quad (6.3)$$

De esta forma, la potencia consumida por la resistencia se puede expresar como:

$$P = R \cdot I^2 \quad (6.4)$$

En el caso de una onda sinusoidal

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I_o^2 \cos^2 \omega t \, dt = I_o^2 \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \, dt = \frac{I_o^2}{T} \left(\frac{t}{2} \Big|_0^T + \frac{1}{4\omega} \cdot \sin 2\omega t \Big|_0^T \right)$$

$$I^2 = \frac{I_o^2}{2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{I_o}{\sqrt{2}} \quad (6.5)$$

A partir de ahora, y dada la importancia del valor eficaz, se escribirán en la mayor parte de los casos las expresiones de tensiones e intensidades de la forma siguiente

$$i(t) = \sqrt{2} \, I \cos(\omega t + \varphi)$$

$$u(t) = \sqrt{2} \, U \cos(\omega t + \varphi)$$

en donde U, I son los valores eficaces de las ondas respectivas.

6. Régimen estacionario sinusoidal

6.2 Exposición del problema; régimen transitorio y permanente de un circuito eléctrico.

Sea el circuito de la Figura 6.2, alimentado por una fuente de tensión sinusoidal

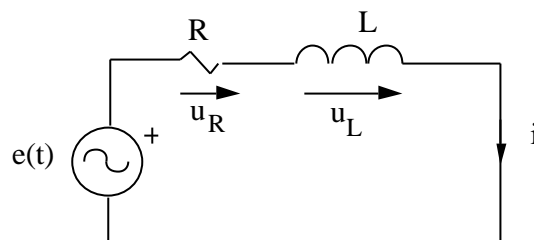


Figura 6.2

Al aplicar la segunda ley de Kirchhoff se obtiene la ecuación.

$$e(t) = R \cdot i + L \frac{di}{dt} \quad (6.6)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes. Su solución constará de dos términos, la solución a la ecuación homogénea $i_h(t)$ y una ecuación particular, $i_p(t)$, esto es:

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) \quad (6.7)$$

La solución de la ecuación homogénea tiene la expresión

$$i_h(t) = i(0) \cdot e^{-(R/L)t} \quad (6.8)$$

Esta parte de la solución es una exponencial decreciente, es decir, que a medida que pasa el tiempo, su valor es menor, hasta que su valor es despreciable. Por esta razón se le denomina *respuesta transitoria del sistema*.

La solución particular, sin embargo, depende de la expresión de $e(t)$, y será la que permanezca cuando $t \rightarrow \infty$. Si la fuente es una fuente de tensión continua el efecto de la bobina es nulo.

6. Régimen estacionario sinusoidal

$$e(t) = E \qquad i_p(t) = \frac{E}{R}$$

Este será el régimen permanente del circuito, o estado estacionario, que será el que ahora se estudiará, ya que es el estado normal de las redes eléctricas. En régimen permanente en continua no hay que considerar los elementos dinámicos, (bobinas y condensadores), ya que

$$u = L \frac{di}{dt} = 0 \qquad i = C \frac{du}{dt} = 0$$

Sin embargo, cuando $e(t)$ es una función sinusoidal, esto ya no sucede así, y será necesario tener en cuenta estos elementos.

Para hallar la solución particular, en régimen permanente, del circuito habría que utilizar el método de los coeficientes indeterminados, es decir, suponer que:

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

y obtener las incógnitas: I_0 y φ .

Para determinar perfectamente una onda sinusoidal hacen falta tres valores, amplitud, frecuencia y desfase. En los sistemas industriales la frecuencia es constante, y en España tiene el de valor 50 Hz.

Así pues, una onda sinusoidal de tensión o corriente, para una frecuencia dada viene definida por un módulo y un ángulo. Por tanto se escogerá una función sinusoidal para definir la corriente cuyos parámetros, excepto la frecuencia, se hallarán por el método de coeficientes indeterminados. Sea, pues, una fuente de tensión y una corriente con las expresiones:

$$e(t) = E_0 \cos \omega t$$

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Se sustituyen estas expresiones en la ecuación diferencial

$$E_0 \cos \omega t = R \cdot I_0 \cos(\omega t + \varphi) + L \frac{d}{dt} [I_0 \cos(\omega t + \varphi)] = R \cdot I_0 \cos(\omega t + \varphi) - \omega L [I_0 \sin(\omega t + \varphi)]$$

Se particulariza para $t = 0$ y para $t = \frac{\pi}{2}$

6. Régimen estacionario sinusoidal

$$E_o = R \cdot I_o \cos \varphi - \omega L I_o \sin \varphi$$

$$0 = R \cdot I_o \cos \left(\frac{p}{2} + \varphi \right) - \omega L I_o \sin \left(\frac{p}{2} + \varphi \right)$$

De la última ecuación se obtiene el valor de $\text{tg} \varphi$

$$\text{tg} \varphi = - \frac{\omega L}{R} \quad (6.9)$$

El valor del $\text{sen} \varphi$ y del $\text{cos} \varphi$ que se corresponde con esta tangente es:

$$\text{sen} \varphi = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 \cdot L^2}{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}} \quad \text{cos} \varphi = \mp \sqrt{\frac{R^2}{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}}$$

para que en la primera fórmula siempre $I_o > 0$ se tiene que cumplir que $\text{sen} \varphi < 0$ y $\text{cos} \varphi > 0$, por lo que $-\frac{p}{2} < \varphi < 0$.

El valor de la corriente será, sustituyendo en la primera ecuación:

$$I_o = \frac{E_o}{\sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}} \quad (6.10)$$

Esta relación se cumple igualmente entre los valores eficaces de la tensión y de la corriente.

Lo laborioso de este método impide su empleo en circuitos con una cierta complicación, por lo que se han desarrollado técnicas especiales de análisis de circuitos en alterna, que se explican a continuación.

6.3 Números complejos: notación y algunas propiedades

Sea un número complejo z . Este número se puede escribir de la siguiente forma:

$$z = x + j \cdot y = z \angle \varphi = z \cdot (\cos \varphi + j \cdot \text{sen} \varphi) = z \cdot e^{j \cdot \varphi}$$

En esta expresión

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad j = \sqrt{-1} \quad \varphi = \text{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)$$

6. Régimen estacionario sinusoidal

el conjugado de \mathbf{z} , \mathbf{z}^* será

$$\mathbf{z}^* = x - j \cdot y = z \underline{-\varphi} = z \cdot (\cos\varphi - j \cdot \text{sen}\varphi) = z \cdot e^{-j\varphi}$$

Se definen los operadores $\text{Re}\{\cdot\}$ (parte real) e $\text{Im}\{\cdot\}$ (parte imaginaria) de un número complejo de forma que:

$$\text{Re}\{\mathbf{z}\} = x = z \cdot \cos\varphi$$

$$\text{Im}\{\mathbf{z}\} = y = z \cdot \text{sen}\varphi$$

Sea una función $u(t) = U_o \cos(\omega t + \varphi)$. Esta función se puede expresar de la forma siguiente:

$$u(t) = \text{Re}\{U_o e^{j(\omega t + \varphi)}\} = \text{Re}\{U_o e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{\mathbf{U}_o \cdot e^{j\omega t}\}$$

en donde

$$\mathbf{U}_o = U_o e^{j\varphi}$$

A este número se le denomina fasor, y es un número complejo. Los operadores $\text{Re}\{\cdot\}$ e $\text{Im}\{\cdot\}$ cumplen las siguientes propiedades cuando se les aplican a fasores.

Propiedad 1

Los operadores $\text{Re}\{\cdot\}$ e $\text{Im}\{\cdot\}$ son aditivos y homogéneos, esto es,

$$\text{Re}\{\mathbf{U}_1 \cdot e^{j\omega t} + \mathbf{U}_2 \cdot e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{\mathbf{U}_1 \cdot e^{j\omega t}\} + \text{Re}\{\mathbf{U}_2 \cdot e^{j\omega t}\}$$

$$\text{Re}\{k \cdot \mathbf{U}_o \cdot e^{j\omega t}\} = k \cdot \text{Re}\{\mathbf{U}_o \cdot e^{j\omega t}\} \quad (k \text{ real})$$

Propiedad 2

$$\frac{d}{dt} \text{Re}\{\mathbf{U}_o \cdot e^{j\omega t}\} = \text{Re}\left\{\frac{d}{dt} \mathbf{U}_o \cdot e^{j\omega t}\right\} = \text{Re}\{j\omega \cdot \mathbf{U}_o \cdot e^{j\omega t}\}$$

$$\text{Re}\{k \cdot \mathbf{U}_o \cdot e^{j\omega t}\} = k \cdot \text{Re}\{\mathbf{U}_o \cdot e^{j\omega t}\} \quad (k \text{ real})$$

Propiedad 3

$$\text{Re}\{\mathbf{U}_1 \cdot e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{\mathbf{U}_2 \cdot e^{j\omega t}\} \quad \text{para todo valor de } t$$

$$\text{si y sólo si} \quad \mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$$

6. Régimen estacionario sinusoidal

A través de estas propiedades se ha relacionado biunívocamente un número complejo a una función sinusoidal, supuesta conocida la frecuencia.

$$u(t) = U_o \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \mathbf{U}_o = U_o e^{j\varphi}$$

6.4 Resolución de circuitos de alterna mediante fasores

La ecuación diferencial que describía el comportamiento del circuito R-L serie que se analizó anteriormente es

$$e(t) = R \cdot i + L \frac{di}{dt}$$

Las expresiones de la fuente y de la corriente se pueden escribir según se muestra en (6.11) y (6.12):

$$e(t) = E_o \cos \omega t = \operatorname{Re}\{E_o e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{E_o \cdot e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\mathbf{E}_o \cdot e^{j\omega t}\} \quad (6.11)$$

$$i(t) = I_o \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}\{I_o e^{j(\omega t + \varphi)}\} = \operatorname{Re}\{I_o e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\mathbf{I}_o \cdot e^{j\omega t}\} \quad (6.12)$$

Se sustituyen estas ecuaciones en la ecuación diferencial

$$\operatorname{Re}\{\mathbf{E}_o \cdot e^{j\omega t}\} = R \cdot \operatorname{Re}\{\mathbf{I}_o \cdot e^{j\omega t}\} + L \frac{d}{dt} \cdot \operatorname{Re}\{\mathbf{I}_o \cdot e^{j\omega t}\}$$

Se aplican las propiedades 1 y 2 a la ecuación anterior y se obtiene:

$$\operatorname{Re}\{\mathbf{E}_o \cdot e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{R \cdot \mathbf{I}_o \cdot e^{j\omega t} + j\omega L \mathbf{I}_o \cdot e^{j\omega t}\}$$

$$\operatorname{Re}\{\mathbf{E}_o \cdot e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{(R + j\omega L) \cdot \mathbf{I}_o \cdot e^{j\omega t}\}$$

Por la Propiedad 3, esta expresión se cumple para todo t si y sólo si

$$\mathbf{E}_o = (R + j\omega L) \cdot \mathbf{I}_o$$

De esta ecuación con números complejos se puede obtener el valor de \mathbf{I}_o :

$$\mathbf{I}_o = \frac{\mathbf{E}_o}{R + j\omega L} \Leftrightarrow \mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{R + j\omega L} \quad (6.13)$$

6. Régimen estacionario sinusoidal

De esta ecuación se obtiene el módulo y argumento de la corriente

$$I_o = \frac{E_o}{\sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}} \quad (6.14)$$

$$\varphi = - \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R} \quad (6.15)$$

Este resultado es idéntico al obtenido mediante el método de coeficientes indeterminados.

Los números complejos E_o e I_o se pueden representar en el plano complejo, obteniéndose el *diagrama vectorial del circuito*, que en este caso sería:

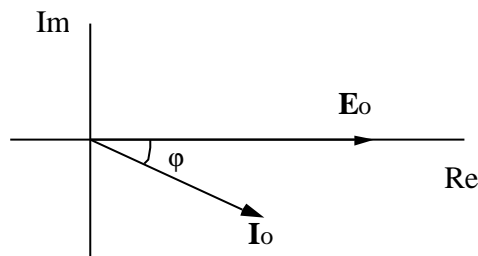


Figura 6.3

6.5 Respuesta de los elementos pasivos básicos.

Ya se ha visto que cada magnitud de alterna, tensiones y corrientes, pueden representarse por su correspondiente fasor, en el cual se especifican u obtienen, el módulo y argumento, con los cuales, a una frecuencia dada, se puede representar inequívocamente la forma de onda de dicha excitación.

Dada la importancia que tiene el valor eficaz de una magnitud, se expresarán las tensiones y corrientes que circulan por los elementos de la siguiente manera:

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos \omega t$$

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi)$$

En esta expresión se ha supuesto, con el fin de simplificar las expresiones, pero sin pérdida de generalidad, que el desfase de la tensión es nulo.

En este apartado se va a estudiar la respuesta de cada uno de los tres elementos pasivos básicos, resistencia, bobinas, acopladas o no, y condensadores ante excitaciones sinusoidales, utilizando los

6. Régimen estacionario sinusoidal

fasores. De esta forma, en un circuito de alterna bastará sustituir cada elemento por su modelo en corriente alterna y utilizar las técnicas de análisis de circuitos, generalizadas a circuitos de alterna, que permitirán hallar los parámetros (módulo y argumento) de las tensiones y corrientes desconocidas en el circuito

6.5.1 Respuesta de una resistencia

En una resistencia, la expresión que liga la tensión y la corriente en todo instante es:

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

Se sustituyen en esta ecuación las expresiones de la tensión y de la corriente, mediante fasores:

$$\operatorname{Re}\{\sqrt{2} \mathbf{U} \cdot e^{j\omega t}\} = R \cdot \operatorname{Re}\{\sqrt{2} \mathbf{I} \cdot e^{j\omega t}\}$$

Esta ecuación se cumple si y sólo si:

$$\mathbf{U} = R \cdot \mathbf{I}$$

por tanto, conocida la tensión, la corriente se puede calcular de la manera siguiente:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}}{R} \quad (6.16)$$

$$I = \frac{U}{R} \quad \varphi = 0$$

Esto significa que los módulos de tensión y corriente de una resistencia son proporcionales, y que sus argumentos son los mismos, es decir que están en fase. Esto se puede ver en el diagrama vectorial de la Figura 6.4, y en las expresiones temporales de la tensión y de la corriente, que son:

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos \omega t$$

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos \omega t$$

6. Régimen estacionario sinusoidal

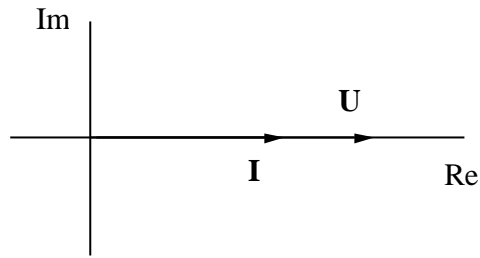


Figura 6.4

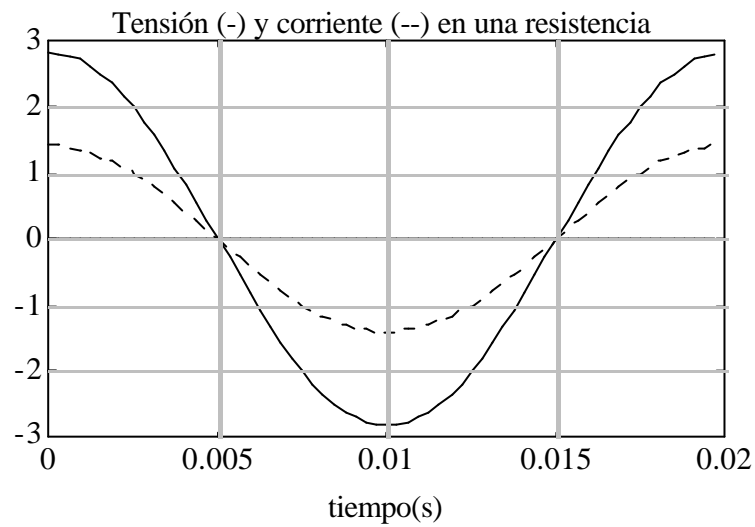


Figura 6.5

Por tanto, en un circuito de alterna, las resistencias se representarán como un número real cuyo valor es la propia resistencia

6.5.2 Respuesta de un condensador

La ecuación de definición de un condensador lineal es:

$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

6. Régimen estacionario sinusoidal

Se sustituyen las expresiones de tensión y corriente y se tiene

$$\operatorname{Re}\{\sqrt{2} \mathbf{I} \cdot e^{j\omega t}\} = C \cdot \frac{d}{dt} \operatorname{Re}\{\sqrt{2} \mathbf{U} \cdot e^{j\omega t}\}$$

$$\operatorname{Re}\{\mathbf{I} \cdot e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{j\omega C \mathbf{U} \cdot e^{j\omega t}\}$$

Esta igualdad se cumple si y sólo si

$$\mathbf{I} = j\omega C \mathbf{U} \quad (6.17)$$

Por lo que la relación entre módulos y argumentos de la tensión y corriente de un condensador es:

$$I = \omega C U \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

El diagrama vectorial y las expresiones temporales de tensión y de corriente son:



Figura 6.6

En los circuitos de alterna se sustituirán los condensadores por el número complejo, imaginario puro $j\omega C$, y la relación entre tensión e intensidad vendrá dada por la ecuación (6.17). Las expresiones temporales de la tensión y de la corriente son:

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos \omega t$$

$$i(t) = \sqrt{2} I \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{2} I \cdot \sin \omega t$$

6. Régimen estacionario sinusoidal

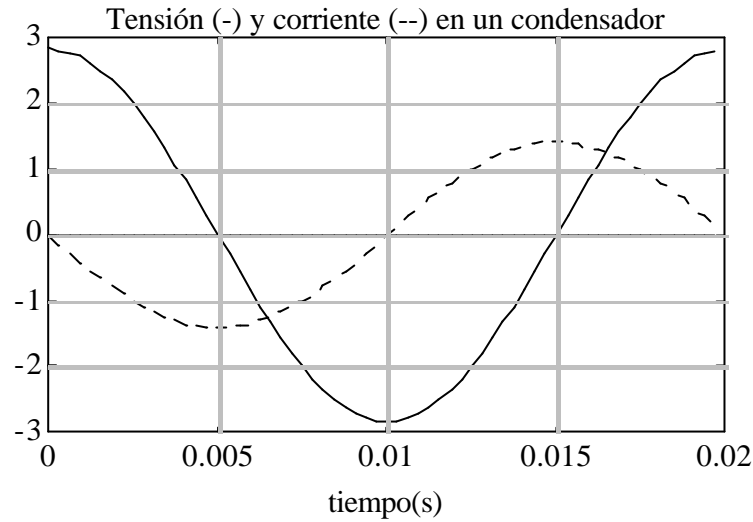


Figura 6.7

6.5.3 Respuesta de las bobinas y bobinas acopladas

La tensión y corriente en una bobina están relacionadas por la ecuación

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Se sustituyen las expresiones de tensión y corriente y se tiene

$$\operatorname{Re}\{\sqrt{2} \mathbf{U} \cdot e^{j\omega t}\} = L \cdot \frac{d}{dt} \operatorname{Re}\{\sqrt{2} \mathbf{I} \cdot e^{j\omega t}\}$$

$$\operatorname{Re}\{\mathbf{U} \cdot e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{j\omega \mathbf{L} \mathbf{I} \cdot e^{j\omega t}\}$$

Esta igualdad se cumple si y sólo si

$$\mathbf{U} = j\omega \mathbf{L} \mathbf{I} \quad (6.18)$$

Por lo que la relación entre módulos y argumentos de la tensión y corriente de una bobina es:

$$U = \omega L I \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

6. Régimen estacionario sinusoidal

El diagrama vectorial se muestra en la Figura 6.8 y las evoluciones temporales de la tensión y la corriente en la Figura 6.9.

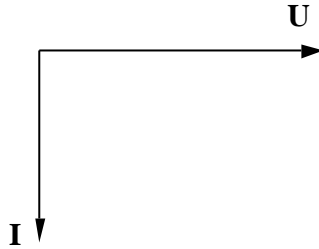


Figura 6.8

Las expresiones temporales de la tensión y de la corriente son:

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos \omega t$$

$$i(t) = \sqrt{2} I \cdot \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{2} I \cdot \sin \omega t$$

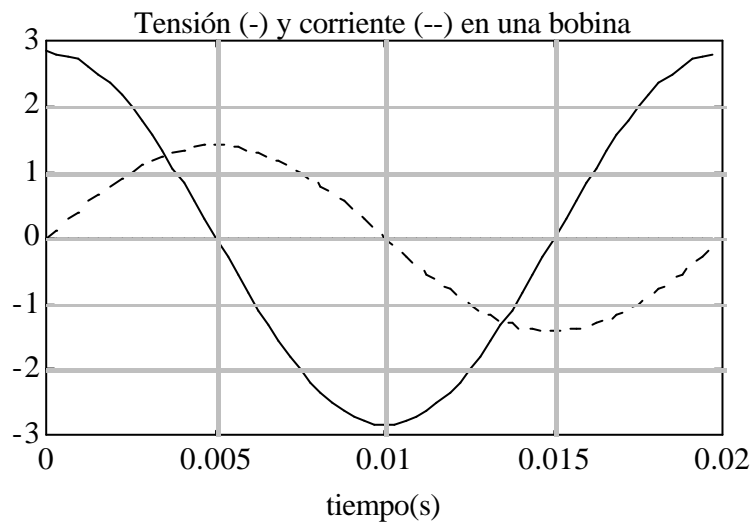


Figura 6.9

Una bobina, por tanto, deberá ser sustituida en un circuito de alterna por la expresión $j\omega L$, que mantendrá, en el campo complejo, la relación entre la corriente y la tensión.

6. Régimen estacionario sinusoidal

- **Bobinas acopladas**

Unas bobinas acopladas tienen, con las referencias indicadas en la Figura 6.10, las relaciones entre tensiones y corrientes de las ecuaciones (6.19) y (6.20)

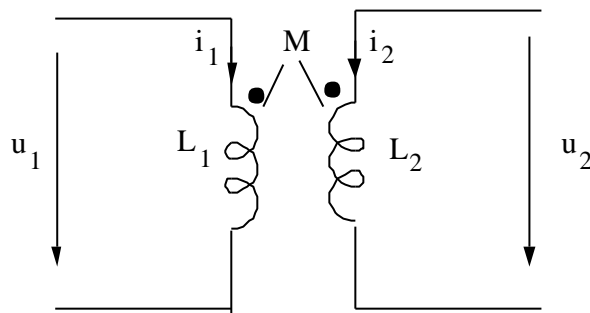


Figura 6.10

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (6.19)$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (6.20)$$

Si se sustituyen las tensiones y corrientes por las correspondientes a estado estacionario sinusoidal, utilizando los fasores se obtiene

$$\operatorname{Re}\{\sqrt{2} U_1 \cdot e^{j\omega t}\} = L_1 \frac{d}{dt} \cdot \operatorname{Re}\{\sqrt{2} I_1 \cdot e^{j\omega t}\} + M \frac{d}{dt} \operatorname{Re}\{\sqrt{2} I_2 \cdot e^{j\omega t}\}$$

$$\operatorname{Re}\{\sqrt{2} U_2 \cdot e^{j\omega t}\} = L_2 \frac{d}{dt} \cdot \operatorname{Re}\{\sqrt{2} I_2 \cdot e^{j\omega t}\} + M \frac{d}{dt} \operatorname{Re}\{\sqrt{2} I_1 \cdot e^{j\omega t}\}$$

Para que se cumplan estas expresiones se tienen que cumplir las siguientes:

$$U_1 = j\omega L_1 \cdot I_1 + j\omega M \cdot I_2$$

6. Régimen estacionario sinusoidal

$$U_2 = j\omega M \cdot I_1 + j\omega L_2 \cdot I_2$$

Por tanto, en los circuitos de alterna hay que tratar de esta forma a las bobinas acopladas, teniendo en cuenta que se aplican los mismos criterios de signos que los que se explicaron en el capítulo 2.

6.6 Concepto de impedancia.

Las ecuaciones (6.13), (6.16), (6.17) y (6.18) son semejantes a la ley de Ohm que se definió para circuitos resistivos, puesto que relacionan fasores de tensión y corrientes a través de un término proporcional. En los circuitos de alterna, al contrario de lo que ocurre en continua en régimen permanente, intervienen los elementos dinámicos, bobinas y condensadores. En general, la relación entre tensiones y corrientes de dipolos de alterna vendrá dada por una relación de la forma:

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$$

El término complejo \mathbf{Z} que relaciona corrientes con tensiones es una generalización de una resistencia y se denomina *impedancia del circuito*, que si se expresa en parte real e imaginaria queda:

$$\mathbf{Z} = R + j \cdot X$$

La parte real, R , de la impedancia se denomina *resistencia* del circuito, y la imaginaria, X , *reactancia*. Todos los términos se miden en ohmios (Ω), por coherencia dimensional.

En los dipolos pasivos básicos la impedancia vale:

- Resistencia

$$\mathbf{U} = R \cdot \mathbf{I}$$

$$\mathbf{Z} = R$$

- Condensador

$$\mathbf{U} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \mathbf{I}$$

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{j\omega C}$$

6. Régimen estacionario sinusoidal

- Bobina

$$U = j\omega L \cdot I$$

$$Z = j\omega L$$

La relación entre el módulo de la impedancia y sus partes real e imaginaria viene dada por:

$$Z^2 = R^2 + X^2$$

al ser esta una expresión análoga a la que liga los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, se pueden dibujar como un triángulo de este tipo. Este triángulo se denomina *triángulo de impedancias*, que se representa en la Figura 6.11.

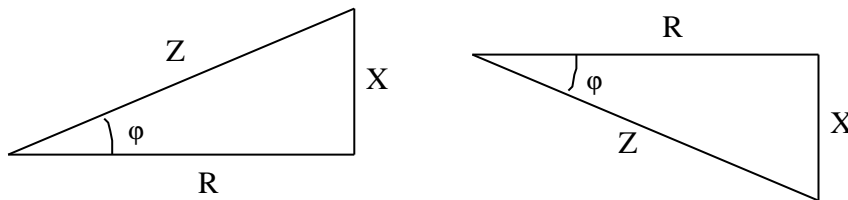


Figura 6.11

El cateto correspondiente a la reactancia puede ser positivo (reactancia inductiva) o negativo (reactancia capacitiva).

La inversa de la impedancia se denomina *admitancia* y se denota mediante la letra **Y**. Esta magnitud se puede descomponer en parte real y imaginaria.

$$Y = \frac{1}{Z} = G + j \cdot B = \frac{1}{R + j \cdot X} = \frac{R^2}{R^2 + X^2} - j \cdot \frac{X^2}{R^2 + X^2}$$

La parte real de la admitancia, **G**, se denomina conductancia, y la imaginaria, susceptancia. Tanto la admitancia, como la conductancia y la susceptancia se miden en Siemens (S). La admitancia de los dipolos pasivos básicos es la siguiente:

- Resistencia

$$I = R \cdot U$$

$$Y = \frac{1}{R}$$

- Condensador

6. Régimen estacionario sinusoidal

$$\mathbf{I} = j\omega\mathbf{C} \cdot \mathbf{U}$$

$$\mathbf{Y} = j\omega\mathbf{C}$$

- Bobina

$$\mathbf{I} = \frac{1}{j\omega\mathbf{L}} \cdot \mathbf{U}$$

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{j\omega\mathbf{L}}$$

6.7 El transformador ideal como adaptador de impedancias

Sea un transformador ideal en cuyo lado secundario hay colocada una impedancia \mathbf{Z}_2 , tal como se indica en la Figura 6.12.

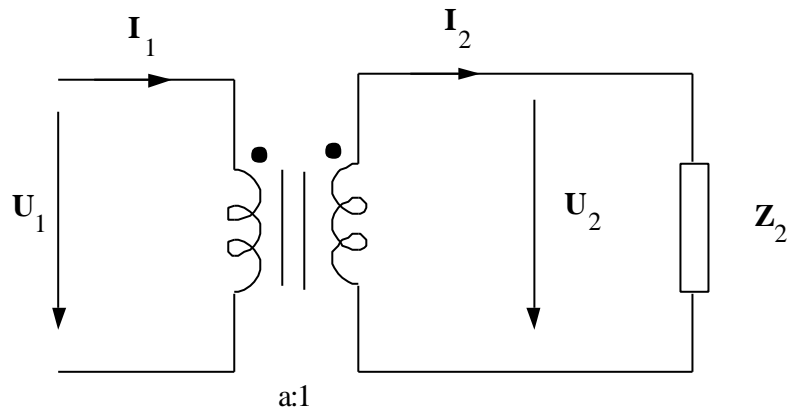


Figura 6.12

El cociente entre la tensión y la corriente en el primario del transformador será:

$$\frac{\mathbf{U}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{a \cdot \mathbf{U}_2}{\frac{1}{a} \cdot \mathbf{I}_2} = a^2 \cdot \frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{I}_2} = a^2 \mathbf{Z}_2 \quad (6.21)$$

6. Régimen estacionario sinusoidal

Por tanto, el circuito de la Figura 6.12 es equivalente a una impedancia de valor $Z_1 = a^2 Z_2$. a la impedancia Z_1 se la denomina *impedancia referida al primario*.

Mediante un transformador ideal se pueden transformar las impedancias en otras de distinto valor. Este proceso se denomina *adaptación de impedancias*.

7. TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN CORRIENTE ALTERNA.

7.1 Las leyes de Kirchhoff en corriente alterna

Sean n corrientes concurrentes en un nudo de la misma pulsación ω , cuyas expresiones son:

$$i_1 = \sqrt{2} I_1 \cos (\omega t + \varphi_1)$$

$$i_2 = \sqrt{2} I_2 \cos (\omega t + \varphi_2)$$

...

$$i_n = \sqrt{2} I_n \cos (\omega t + \varphi_n)$$

La primera ley de Kirchhoff garantiza que en todo instante la suma de las corrientes será cero.

$$i_1 + i_2 + \dots + i_n = \sqrt{2} I_1 \cos (\omega t + \varphi_1) + \sqrt{2} I_2 \cos (\omega t + \varphi_2) + \dots + \sqrt{2} I_n \cos (\omega t + \varphi_n) = 0$$

Esta ecuación se puede escribir de la forma siguiente:

$$\operatorname{Re}\{\mathbf{I}_1 \cdot e^{j\omega t} + \mathbf{I}_2 \cdot e^{j\omega t} + \dots + \mathbf{I}_n \cdot e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\mathbf{I}_1 \cdot e^{j\omega t}\} + \operatorname{Re}\{\mathbf{I}_2 \cdot e^{j\omega t}\} + \dots + \operatorname{Re}\{\mathbf{I}_n \cdot e^{j\omega t}\} = 0$$

Esta ecuación sólo se cumple, según la propiedad 3 del apartado 7.3 cuando

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \dots + \mathbf{I}_n = 0$$

Es decir, que la primera ley de Kirchhoff se cumple si y sólo si la suma algebraica de los fasores asociados a cada corriente concurrente en un nudo es igual a cero.

Se podría hacer la misma deducción para la segunda ley de Kirchhoff, en la que se demostraría que se cumple si y sólo si la suma algebraica de los fasores asociados a las tensiones en un circuito cerrado es igual a cero.

7. Técnicas de análisis de circuitos en corriente alterna.

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n = 0$$

Por tanto, todas las conclusiones que se han obtenido en circuitos de corriente continua podrán aplicarse a circuitos de corriente alterna.

7.2 Asociaciones de elementos pasivos en corriente alterna

7.2.1 Asociación en serie

Cuando se aplica la segunda ley de Kirchhoff a un conjunto de impedancias en serie (es decir, por las que circula la misma corriente, se obtiene la siguiente relación.

$$U = Z_1 \cdot I + Z_2 \cdot I + \dots + Z_n \cdot I = (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n) \cdot I = Z_{eq} \cdot I$$

En donde $Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$, que es la expresión de la impedancia equivalente de un conjunto de impedancias en serie.

Un conjunto de impedancias conectadas en serie forma un divisor de tensión en alterna. La tensión en una impedancia k , U_k vendrá dada por:

$$U_k = Z_k \cdot I = \frac{Z_k}{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n} \cdot U$$

esta es la que se conoce como fórmula del divisor de tensión.

7.2.2 Asociación en paralelo

Análogamente, cuando se aplica la segunda ley de Kirchhoff a un conjunto de impedancias o admitancias en paralelo, se llega a la siguiente ecuación

$$I = Y_1 \cdot U + Y_2 \cdot U + \dots + Y_n \cdot U = (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) \cdot U = Y_{eq} \cdot U$$

La admitancia equivalente del conjunto, Y_{eq} , tiene el valor $Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$. Si esta expresión se pone en función de las impedancias queda:

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n}$$

7. Técnicas de análisis de circuitos en corriente alterna.

Y en el caso particular de dos impedancias:

$$Z_{eq} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Este dispositivo se denomina divisor de corriente. La corriente que circularía por una admitancia k , I_k , sería

$$I_k = Y_k \cdot U = \frac{Y_k}{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n} \cdot I$$

Esta es la fórmula del divisor de corriente, que para el caso particular de dos impedancias queda de la forma siguiente, en función de las impedancias:

$$I_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot I \qquad I_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \cdot I$$

7.2.3 Conversión triángulo estrella y estrella - triángulo.

Las fórmulas son semejantes a las indicadas en el capítulo 4, sólo que con impedancias. Se escriben a continuación

$$Z_a = \frac{Z_{ab} \cdot Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}$$

$$Z_b = \frac{Z_{bc} \cdot Z_{ab}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}$$

$$Z_c = \frac{Z_{ca} \cdot Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}$$

$$Z_{ab} = Z_a + Z_b + \frac{Z_a Z_b}{Z_c}$$

$$Z_{bc} = Z_b + Z_c + \frac{Z_b Z_c}{Z_a}$$

$$Z_{ca} = Z_a + Z_c + \frac{Z_a Z_c}{Z_b}$$

7. Técnicas de análisis de circuitos en corriente alterna.

La deducción de estas expresiones es análoga a su deducción en corriente continua con resistencias, y no se repetirá aquí

7.3 Resolución de un circuito R–L–C serie

Sea el circuito representado en la Figura 7.1, del cual se desean conocer sus tensiones y corrientes en régimen estacionario sinusoidal.

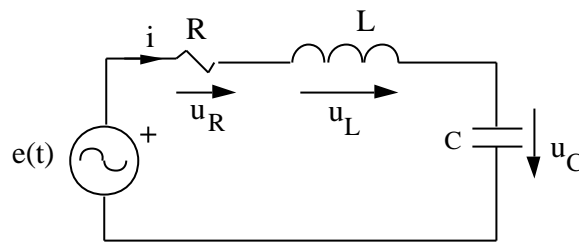


Figura 7.1

Para estudiar este circuito en régimen permanente con excitación sinusoidal, se sustituirán en primer término sus tensiones y corrientes por los fasores asociados con ellas, y los elementos pasivos por sus impedancias. Una vez realizada esta sustitución el circuito de alterna queda la Figura 7.2.

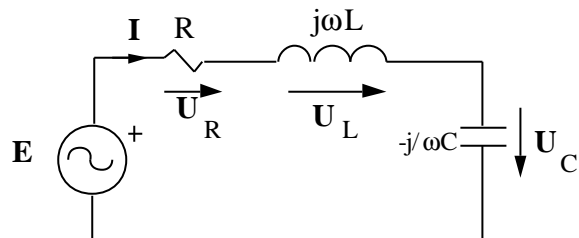


Figura 7.2

Para hallar la corriente se aplica la segunda ley de Ohm, con lo que se obtiene

$$\mathbf{E} = \left(R + j\omega L - j \cdot \frac{1}{\omega C} \right) \mathbf{I} \quad (7.1)$$

Esta expresión se puede escribir en función de la impedancia del circuito

$$\mathbf{E} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$$

7. Técnicas de análisis de circuitos en corriente alterna.

$$\mathbf{Z} = R + j \cdot X = R + j\omega L - j \cdot \frac{1}{\omega C} = Z \angle \varphi$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

De aquí se despeja el valor de la corriente

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{E}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (7.2)$$

Por tanto, el módulo y el argumento de la corriente serán

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad \varphi_i = -\varphi$$

En donde φ_i es el argumento de la corriente, que es el opuesto al de la impedancia.

Las tensiones en cada uno de los elementos son:

$$\begin{aligned} U_R &= R \cdot \mathbf{I} = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \mathbf{E} \\ U_L &= j\omega L \cdot \mathbf{I} = \frac{j\omega L}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \mathbf{E} \\ U_C &= -j \frac{1}{\omega C} \cdot \mathbf{I} = \frac{-j \frac{1}{\omega C}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \mathbf{E} \end{aligned}$$

En este circuito se pueden distinguir dos casos

- $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ (reactancia inductiva) $\varphi > 0$ $\varphi_i = -\varphi < 0$

7. Técnicas de análisis de circuitos en corriente alterna.

En este caso, la corriente está retrasada con respecto a la tensión de la fuente. El diagrama vectorial del circuito y el triángulo de impedancias en este caso se muestran en la Figura 7.3.

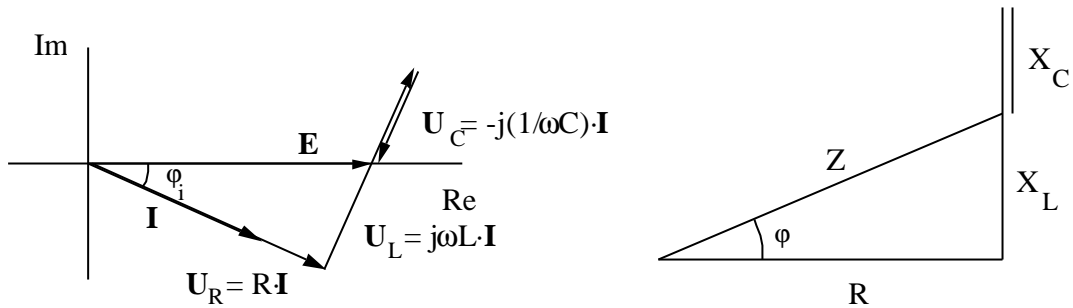


Figura 7.3

En la Figura 7.4 se ven las evoluciones temporales de las tensiones y corrientes en el circuito. Las líneas continuas son la tensión en la fuente (de mayor amplitud) y la corriente, que está retrasada con respecto a ella. Las magnitudes con línea discontinua serán: la tensión en la resistencia (en fase con la corriente), la tensión en la bobina, adelantada 90 grados respecto a la corriente, y la tensión en el condensador, en contrafase con esta última.

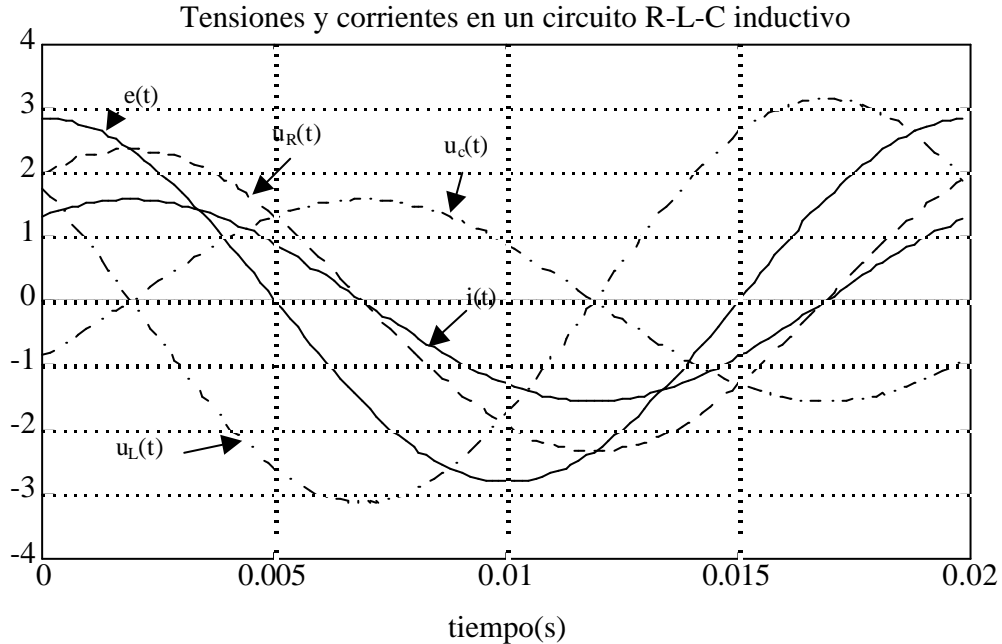


Figura 7.4

7. Técnicas de análisis de circuitos en corriente alterna.

- $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ (reactancia capacitiva) $\varphi < 0$ $\varphi_i = -\varphi > 0$

En este caso, la corriente está adelantada con respecto a la tensión de la fuente. El diagrama vectorial del circuito y el triángulo de impedancias en este caso se muestra en la Figura 7.5.

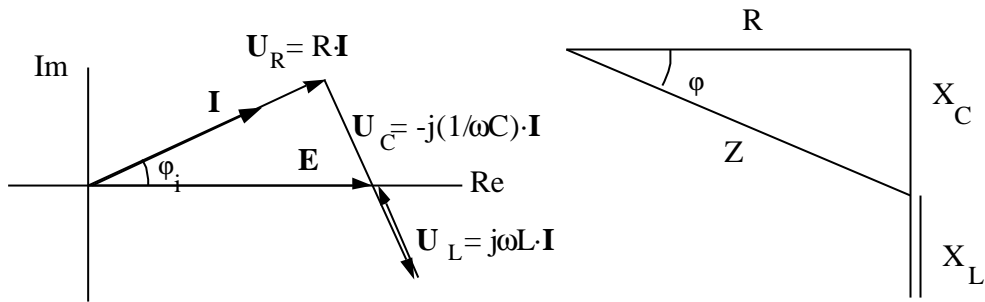


Figura 7.5

En la Figura 7.6 se muestran las tensiones y corrientes de un circuito con carácter capacitivo, las magnitudes representadas son las mismas que en el circuito inductivo, pero en esta ocasión, la corriente está adelantada con respecto a la tensión.

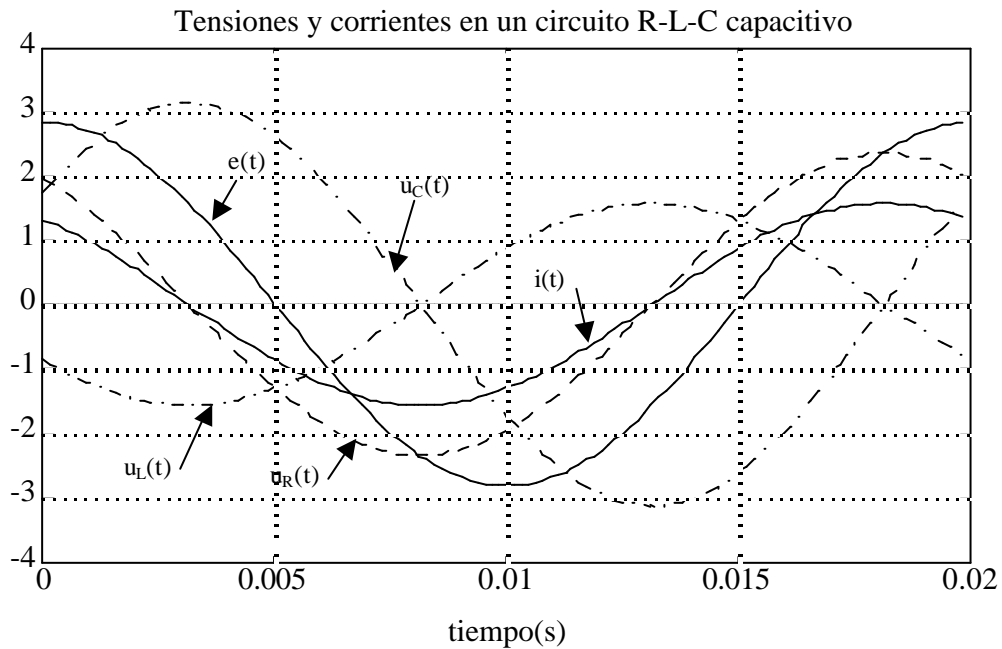


Figura 7.6

7.4 Circuito R-L-C paralelo.

Sea el circuito R-L-C de la Figura 7.7. La fuente de corriente es una fuente sinusoidal, y se desea hallar el estado estacionario del circuito

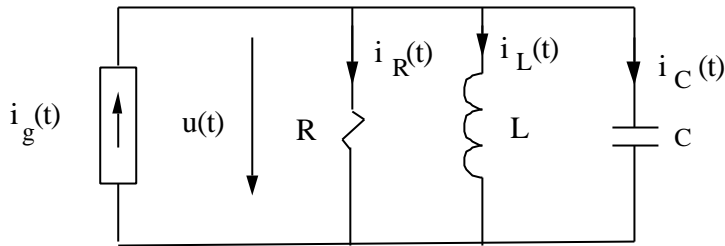


Figura 7.7

La expresión temporal de la corriente de la fuente es:

$$i_g(t) = \sqrt{2} I \cdot \cos \omega t$$

Para resolver el circuito en régimen estacionario sinusoidal, hay que formar el circuito de alterna. Para ello hay que sustituir corrientes y tensiones por sus fasores asociados, y los elementos pasivos se sustituirán por las admitancias correspondientes. Al hacer esto se obtiene circuito de la Figura 7.8:

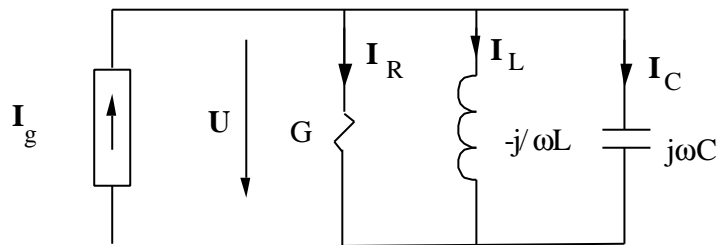


Figura 7.8

Las corrientes que circulan por los elementos del circuito son:

$$I_R = G \cdot U \qquad I_L = -j \frac{1}{\omega L} \cdot U \qquad I_C = j\omega C \cdot U$$

Se aplica la primera ley de Kirchoff

$$I_g = I_R + I_L + I_C = (G - j \frac{1}{\omega L} + j\omega C) \cdot U = Y_{eq} \cdot U$$

7. Técnicas de análisis de circuitos en corriente alterna.

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{I}_g}{\mathbf{Y}_{eq}} = \frac{\mathbf{I}_g}{G + j \cdot \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)}$$

Si se expresa la tensión en módulo y argumento $\mathbf{U} = U \angle \theta$ las expresiones de estos últimos son

$$U = \frac{I_g}{\sqrt{G^2 + j \cdot \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}} \quad \varphi = -\arctg \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}$$

La admitancia del circuito será

$$\mathbf{Y}_{eq} = G + j \cdot \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$

El módulo y argumento serán

$$Y_{eq} = \sqrt{G^2 + j \cdot \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} \quad \psi = \arctg \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}$$

De donde $\varphi = -\psi$. Las corrientes que circulan por cada uno de los elementos son:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_R &= G \cdot \mathbf{U} = \frac{G}{G + j \cdot \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)} \cdot \mathbf{I}_g \\ \mathbf{I}_L &= -j \frac{1}{\omega L} \cdot \mathbf{U} = \frac{-\frac{j}{\omega L}}{G + j \cdot \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)} \cdot \mathbf{I}_g \\ \mathbf{I}_C &= j\omega C \cdot \mathbf{U} = \frac{j\omega C}{G + j \cdot \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)} \cdot \mathbf{I}_g \end{aligned}$$

Estas fórmulas son análogas a las de un divisor de corriente en corriente alterna. En el circuito se pueden presentar dos casos:

- $\omega C > \frac{1}{\omega L}$ (reactancia capacitiva) $\psi > 0$ $\theta = -\psi < 0$

7. Técnicas de análisis de circuitos en corriente alterna.

En este caso, la corriente está adelantada con respecto a la tensión. El diagrama vectorial del circuito y el triángulo de impedancias se muestran en la Figura 7.9

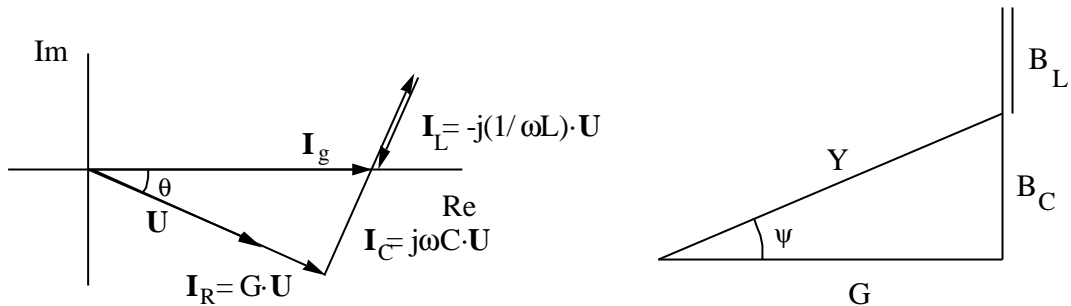


Figura 7.9

- $\omega C < \frac{1}{\omega L}$ (reactancia inductiva) $\psi < 0$ $\theta = -\psi > 0$

El diagrama vectorial del circuito y el triángulo de admitancias se muestran en la Figura 7.10.

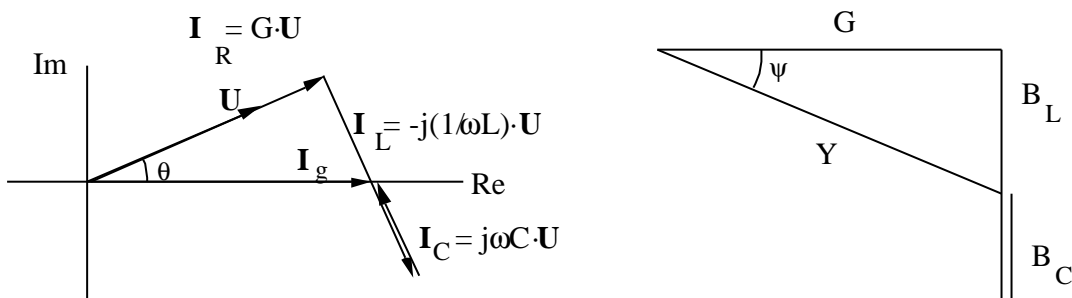


Figura 7.10

7.5 Análisis de circuitos en corriente alterna.

Una vez que se ha verificado la validez de las leyes de Kirchoff en circuitos de alterna, y que se conocen las relaciones entre tensiones y corrientes de los elementos, se pueden aplicar los mismos métodos de análisis que en circuitos en corriente continua. Puesto que los que se describieron en el capítulo 6 son los métodos de mallas y de nudos, estos mismos métodos pueden aplicarse a la resolución de circuitos de alterna. Las ecuaciones resultantes tendrían coeficientes, términos independientes y resultados complejos, esto es, impedancias y fasores.

7. Técnicas de análisis de circuitos en corriente alterna.

Sin embargo, hay un efecto que no se contemplaba en los circuitos resistivos y que son los acoplamientos entre bobinas, por lo que se explicarán aparte.

7.5.1 Método de nudos.

En este método será necesario también elegir un nudo de referencia, que se denotará con el subíndice 'o', y aplicar a todos, menos a este, la primera ley de Kirchhoff. Las incógnitas del sistema de ecuaciones resultante serán las tensiones nodales, esta vez números complejos, en tanto que el término independiente del sistema de ecuaciones serán las inyecciones de corriente en los nudos

Sea un circuito con $n+1$ nudos. El sistema de ecuaciones resultante de aplicar el método de nudos será el de la ecuación (7.3)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{n1,1} & \mathbf{Y}_{n1,2} & \dots & \mathbf{Y}_{n1,n} \\ \mathbf{Y}_{n2,1} & \mathbf{Y}_{n2,2} & \dots & \mathbf{Y}_{n2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{Y}_{nn,1} & \mathbf{Y}_{nn,2} & \dots & \mathbf{Y}_{nn,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \dots \\ \mathbf{U}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \dots \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

De forma abreviada se puede escribir:

$$[\mathbf{Y}] \cdot [\mathbf{U}_n] = [\mathbf{I}] \quad (7.4)$$

$[\mathbf{Y}]$ es una matriz de coeficientes denominada *matriz de admitancias nodales*. Sus términos tienen el siguiente valor:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{ni,i} &= \sum_j \mathbf{Y}_{ij} \\ \mathbf{Y}_{ni,j} &= -\mathbf{Y}_{ij} \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

De forma semejante a los circuitos resistivos, la matriz $[\mathbf{Y}]$ es una matriz simétrica, siempre y cuando no haya fuentes dependientes; el vector $[\mathbf{U}]$ es el vector de tensiones de nudo; $[\mathbf{I}]$ es el vector de corrientes de nudo, que está formado por las corrientes entrantes en un nudo provenientes de fuentes de corriente. La expresión de los elementos de $[\mathbf{I}]$ es:

$$\mathbf{I}_k = \sum_j \mathbf{I}_{ij}$$

7. Técnicas de análisis de circuitos en corriente alterna.

7.5.2 Método de mallas

Sea un circuito con 'm' mallas, a las que se le aplica la segunda ley de Kirchhoff, creándose un sistema de ecuaciones de orden m, con las mismas referencias que en los sistemas resistivos. Las incógnitas del sistema formado serán las corrientes de malla, que serán también magnitudes complejas. El sistema resultante será

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{m1,1} & \mathbf{Z}_{m1,2} & \dots & \mathbf{Z}_{m1,n} \\ \mathbf{Z}_{m2,1} & \mathbf{Z}_{m2,2} & \dots & \mathbf{Z}_{m2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{Z}_{mn,1} & \mathbf{Z}_{mn,2} & \dots & \mathbf{Z}_{mn,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m1} \\ \mathbf{I}_{m2} \\ \dots \\ \mathbf{I}_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \dots \\ \mathbf{E}_n \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

Esta ecuación se puede escribir, de forma abreviada:

$$[\mathbf{Z}] \cdot [\mathbf{I}_m] = [\mathbf{E}] \quad (7.6)$$

Los términos de $[\mathbf{Z}]$, llamada *matriz de impedancias de malla* tienen el siguiente valor:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{mi,i} &= \sum_j \mathbf{Z}_{ij} \\ \mathbf{Z}_{mi,j} &= -\mathbf{Z}_{ij} \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

La matriz $[\mathbf{Z}]$ es una matriz simétrica, siempre y cuando no haya fuentes dependientes; el vector $[\mathbf{I}_m]$ es el vector de corrientes de malla; $[\mathbf{E}]$ es el vector de fuentes de tensión de malla, que está formado por las fuentes de tensión con sentidos opuestos al de referencia dentro de una malla. Las componentes de este vector, con el criterio de signos empleado en los circuitos resistivos se obtienen de la siguiente manera

$$\mathbf{E}_k = \sum_j \mathbf{E}_{ij}$$

7.5.3 Fuentes dependientes e impropias

Tanto las fuentes dependientes como las impropias reciben un tratamiento enteramente análogo al de los circuitos resistivos, por lo que se omite su repetición en este capítulo.

7. Técnicas de análisis de circuitos en corriente alterna.

7.5.4 Tratamiento de los acoplamientos magnéticos.

La diferencia más importante entre las técnicas de análisis de alterna y de continua consiste en que en las primeras se deben analizar circuitos con bobinas acopladas. El tratamiento es similar en ambos casos, sólo que, puesto que las incógnitas en ambos métodos (mallas y nudos) son diferentes, la manipulación de las relaciones constitutivas de las bobinas también lo será. Puesto que es más sencillo el tratamiento con el método de mallas, se presentará este en primer lugar.

7.5.4.1 Método de mallas.

Sea un conjunto de 'q' bobinas acopladas en las que las relaciones entre tensiones y corrientes vienen dadas por:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_q \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} \pm L_1 & \pm M_{12} \dots \pm M_{1q} \\ \pm M_{21} & \pm L_2 \dots \pm M_{2q} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \pm M_{q1} \pm M_{q2} \dots \pm L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_q \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

Los signos + ó - de los coeficientes de inducción dependerán de las referencias de tensión y corriente y de los terminales correspondientes. Cada una de las tensiones U_1, \dots, U_q entrará a formar parte de una o dos mallas. Pues bien, cuando se aplique la segunda ley de Kirchhoff a cada una de las mallas en las que hay una bobina 'k' acoplada con otras, se puede sustituir la tensión correspondiente a dicha bobina por su valor en función de las corrientes que circulan por las q bobinas.

$$U_k = \sum_{j=1}^q \pm j\omega M_{kj} I_j \quad (7.8)$$

Una vez introducidas estas expresiones en las ecuaciones resultantes, se pueden expresar las corrientes de rama en función de las corrientes de malla; estas corrientes serán dos, si la rama pertenece a dos mallas, o solamente una, sólo pertenece a una

$$I_j = I_{mi} - I_{ml}$$

Una vez efectuada esta sustitución, el sistema de ecuaciones está en su forma habitual, y se resuelve normalmente.

7. Técnicas de análisis de circuitos en corriente alterna.

7.5.4.2 Método de nudos

Puesto que en este método se aplica la primera ley de Kirchoff a cada nudo, la relación (7.7) entre tensiones y corrientes de las bobinas acopladas no se puede aplicar directamente, sino que hay que invertirla:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \dots \\ \mathbf{I}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm j\omega L_1 & \pm j\omega M_{12} & \dots & \pm j\omega M_{1q} \\ \pm j\omega M_{21} & \pm j\omega L_2 & \dots & \pm j\omega M_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pm j\omega M_{q1} & \pm j\omega M_{q2} & \dots & \pm j\omega L_q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \dots \\ \mathbf{U}_q \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

Las corrientes circulantes por cada bobina hay que incluirlas, con su signo adecuado, en el balance de corrientes de cada nudo, por lo que aparecerán entre las incógnitas las tensiones aplicadas a cada bobina. A fin de que las incógnitas sean las tensiones de nudo únicamente, se ponen aquellas en función de las tensiones de nudo y se resuelve el circuito de la forma habitual

7.6 Teoremas en corriente alterna

Los teoremas en corriente alterna tiene una expresión completamente análoga a la de los circuitos de continua, por lo que aquí sólo se repetirá su enunciado.

- **Teorema de superposición. Linealidad.**

Enunciado

1. La respuesta de un circuito lineal a varias fuentes de excitación actuando simultáneamente es igual a la suma de las respuestas que se tendrían cuando actuase cada una de ellas por separado (Principio de superposición).
2. Si todas las excitaciones de un circuito lineal se multiplican por una constante, todas las respuestas de dicho circuito vienen multiplicadas por esa misma constante.

- **Teorema de sustitución.**

7. Técnicas de análisis de circuitos en corriente alterna.

El enunciado de este teorema es como sigue:

Si en un circuito se sustituye un elemento cualquiera por una fuente de corriente del valor de la corriente circulante en la rama, las magnitudes del circuito no varían. Lo mismo sucede si se sustituye el elemento por una fuente de tensión del valor de la tensión en bornes de este elemento.

- **Teorema de Thévenin.**

El enunciado del teorema de Thévenin, en corriente alterna, es como sigue:

Sea una carga conectada a un dipolo. La carga no está acoplada con el dipolo a través de fuentes dependientes ni acoplamientos magnéticos, el dipolo no contiene más que impedancias lineales y fuentes dependientes e independientes. Pues bien, dicho dipolo se puede representar como una fuente de tensión y una impedancia en serie con ella. El valor de la fuente es la tensión a circuito abierto del dipolo entre los terminales, en tanto que la impedancia es la impedancia de entrada del dipolo con todas las fuentes independientes anuladas.

El enunciado del teorema de Norton sería el siguiente

Sea una carga conectada a un dipolo. La carga no está acoplada con el dipolo a través de fuentes dependientes ni acoplamientos magnéticos, y el dipolo no contiene más que impedancias lineales y fuentes dependientes e independientes. Pues bien, dicho dipolo se puede representar como una fuente de corriente y una impedancia en paralelo con ella. El valor de la fuente es la corriente de que circula entre los terminales del dipolo cuando estos están, en tanto que la impedancia es la impedancia de entrada del dipolo con todas las fuentes independientes anuladas.

Una vez conocido el equivalente Thévenin se puede determinar el equivalente Norton por la simple transformación de fuentes reales, tal como se indica a continuación.

$$Z_{th} = Z_N$$

$$E_{th} = Z_{th} \cdot I_N$$

- **Teorema de Tellegen.**

El enunciado del teorema es como sigue:

7. Técnicas de análisis de circuitos en corriente alterna.

En un circuito arbitrario de parámetros concentrados en el que se cumplen las leyes de Kirchoff con unas referencias dadas, la suma de los productos de las tensiones de rama por las corrientes de rama, con los sentidos coincidentes, es igual a cero.

Esto se resume en la expresión

$$\sum_{k=1}^b \mathbf{U}_k \cdot \mathbf{I}_k = 0$$

en donde b es el número de ramas, y \mathbf{U} e \mathbf{I} son las tensiones y corrientes, respectivamente, de cada rama.

Hay que hacer notar que el conjunto de tensiones de rama elegido no tiene por qué estar relacionado con el de intensidades de rama para que se cumpla este teorema. Se pueden imaginar dos circuitos distintos, con el mismo grafo, y el teorema se cumple si se eligen las tensiones de uno de ellos y las intensidades del otro.

• **Fórmula de Millman**

El circuito al que se puede aplicar la fórmula es como el de la Figura 5.4.

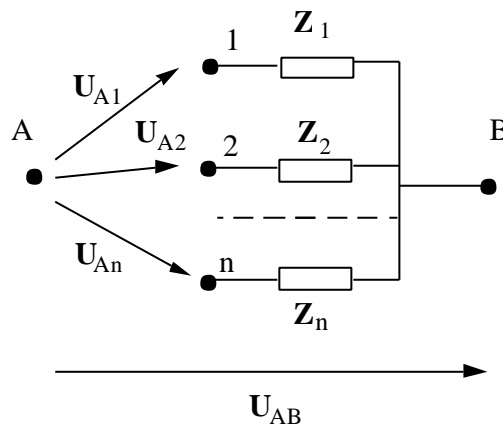


Figura 7.11

De forma análoga a como se hizo en el capítulo 5 se obtiene la fórmula de Millman:

$$\mathbf{U}_{AB} = \frac{\mathbf{Y}_1 \mathbf{U}_{A1} + \mathbf{Y}_2 \mathbf{U}_{A2} + \dots + \mathbf{Y}_n \mathbf{U}_{An}}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \dots + \mathbf{Y}_n} \quad (7.10)$$

7. Técnicas de análisis de circuitos en corriente alterna.

• Teorema de reciprocidad

Los dos enunciados del teorema, en este caso, son:

1. La tensión U que aparece entre dos nudos (p,q) de un circuito lineal y pasivo cuando se aplica una fuente de intensidad i entre otro par de nudos (m,n), es igual a la tensión U que origina la misma fuente trasladada al par de nudos (p,q).
2. La intensidad I que circula por una rama de un circuito lineal y pasivo, cuando se intercala una fuente de tensión en otra rama, es la misma que circularía por esta última si la fuente de tensión se intercalase en la primera.

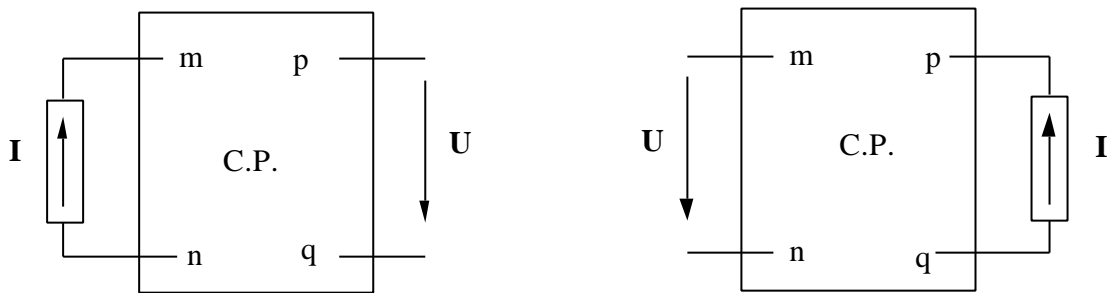


Figura 7.12

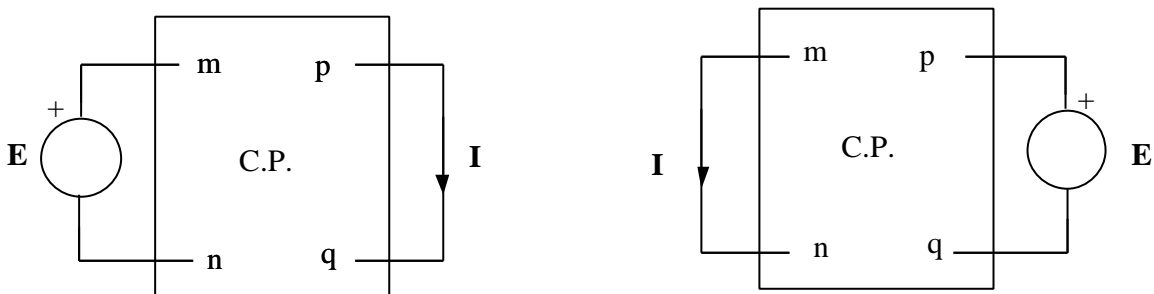


Figura 7.13

La demostración del teorema es análoga a la que se dio en el capítulo 5.

8. POTENCIA Y ENERGÍA EN EL RÉGIMEN ESTACIONARIO SINUSOIDAL.

8.1 Potencia y energía consumidas por los elementos pasivos.

8.1.1 Resistencias.

Sea una resistencia a la que se aplica la tensión siguiente:

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cos \omega t$$

La corriente se halla de la forma siguiente:

$$I = \frac{U}{R}$$

cuya expresión temporal es:

$$i(t) = \sqrt{2} \frac{U}{R} \cos \omega t = \sqrt{2} \cdot I \cos \omega t$$

La potencia instantánea, entendida como la evolución temporal del producto de la tensión por la corriente será:

$$p(t) = 2 \cdot UI \cos^2 \omega t = UI (1 + \cos 2\omega t) \quad (8.1)$$

Esta es una onda sinusoidal de frecuencia doble que la de la tensión y de valor medio UI . Es decir, al cabo de un ciclo, la potencia media consumida será

$$P = UI \quad (8.2)$$

Si se representan todas estas magnitudes, las gráficas resultantes se representan en la Figura 8.1:

8. Potencia y energía en el régimen estacionario sinusoidal

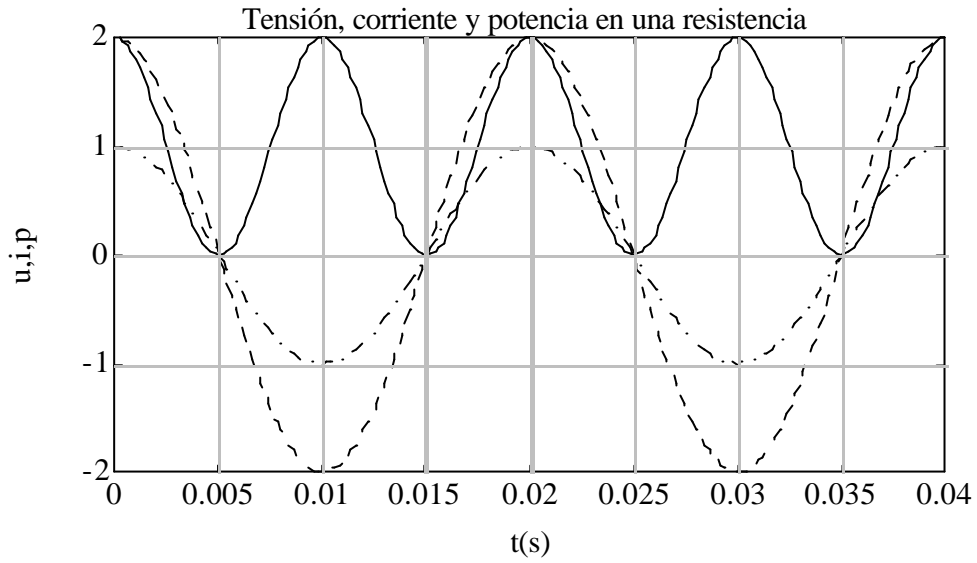


Figura 8.1

La energía consumida por la resistencia será:

$$w(t) = w(0) + \int_0^t UI(1 + \cos 2\omega\tau) d\tau = w(0) + \frac{UI}{\omega} \left(\omega t + \frac{1}{2} \text{sen} 2\omega t \right) \quad (8.3)$$

y si se representa gráficamente esta magnitud en función del tiempo se obtiene:

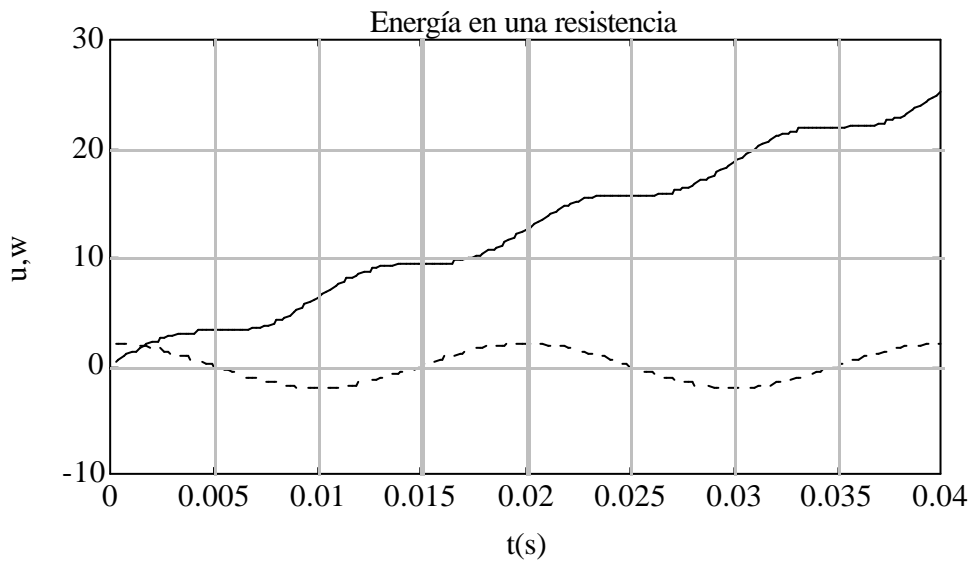


Figura 8.2

8. Potencia y energía en el régimen estacionario sinusoidal

8.1.2 Condensadores.

Sea esta vez un condensador que se somete a la siguiente tensión:

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cos \omega t$$

La corriente que circula por él será:

$$\mathbf{I} = j\omega C \cdot \mathbf{U}$$

cuya expresión temporal es:

$$i(t) = \sqrt{2} \omega C U \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot I \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{2} \cdot I \sin \omega t$$

Y la potencia instantánea consumida:

$$p(t) = -2 \cdot UI \cos \omega t \cdot \sin \omega t = -UI \sin 2\omega t \quad (8.4)$$

Esta onda es sinusoidal de valor medio cero, amplitud UI y frecuencia doble de la frecuencia de la tensión. Al representar todas estas magnitudes se obtiene la Figura 8.3.

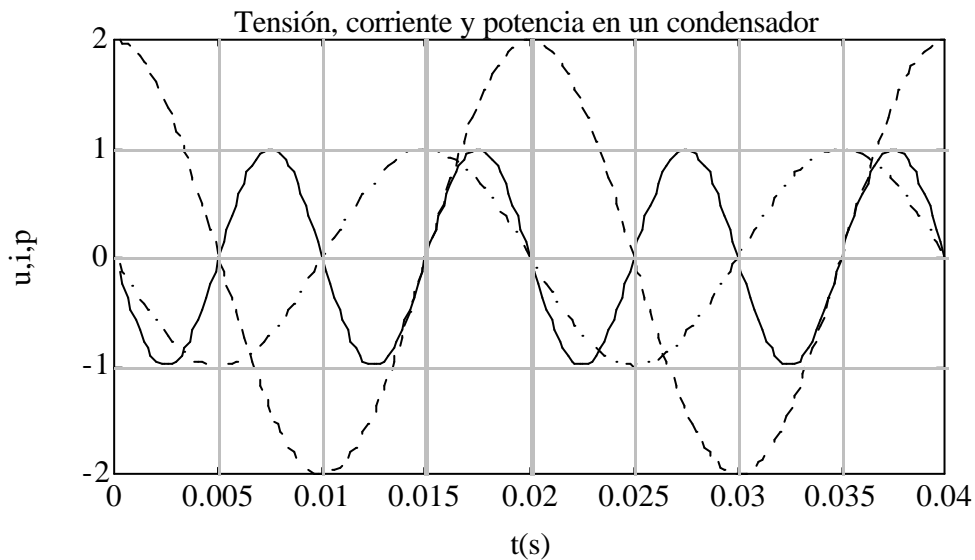


Figura 8.3

8. Potencia y energía en el régimen estacionario sinusoidal

La expresión de la energía consumida por el condensador será:

$$w(t) = \frac{1}{2} C \cdot u^2(t) = CU^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} CU^2 (1 + \cos 2\omega t) \quad (8.5)$$

de valor medio $1/2CU^2$. Esta expresión en función del tiempo está en la Figura 8.4.

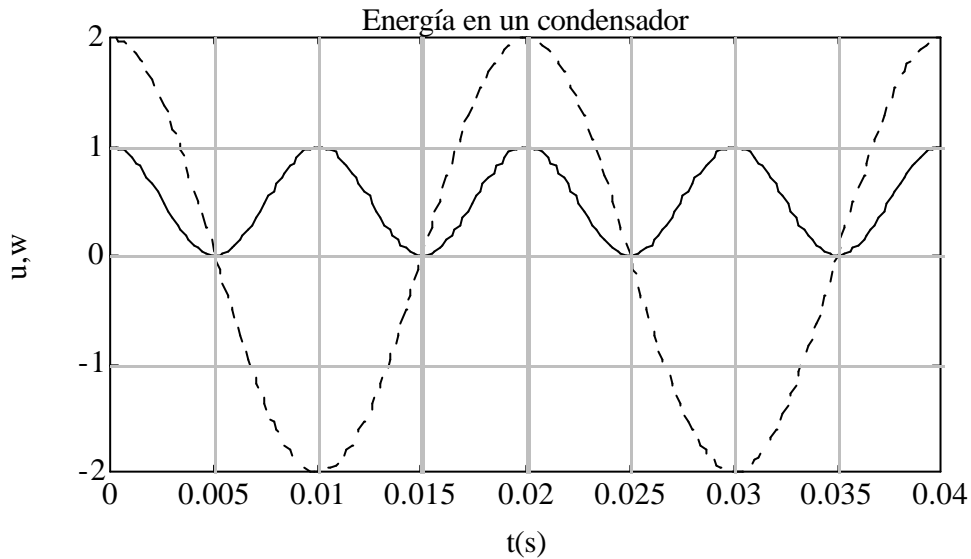


Figura 8.4

8.1.3 Bobinas y bobinas acopladas.

Sea una bobina que se somete a la siguiente tensión:

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos \omega t$$

La corriente que circula por él será:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}}{j\omega L}$$

cuya expresión temporal es:

$$i(t) = \sqrt{2} \frac{U}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot I \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot I \sin \omega t$$

8. Potencia y energía en el régimen estacionario sinusoidal

Y la potencia instantánea consumida:

$$p(t) = 2 \cdot UI \cos \omega t \cdot \text{sen} \omega t = UI \text{sen} 2 \omega t \quad (8.6)$$

Esta onda es sinusoidal de valor medio cero, amplitud UI y frecuencia doble de la de la tensión, como la del condensador pero desfasada con respecto a esta π radianes. Al representar todas estas magnitudes se obtiene la Figura 8.5.

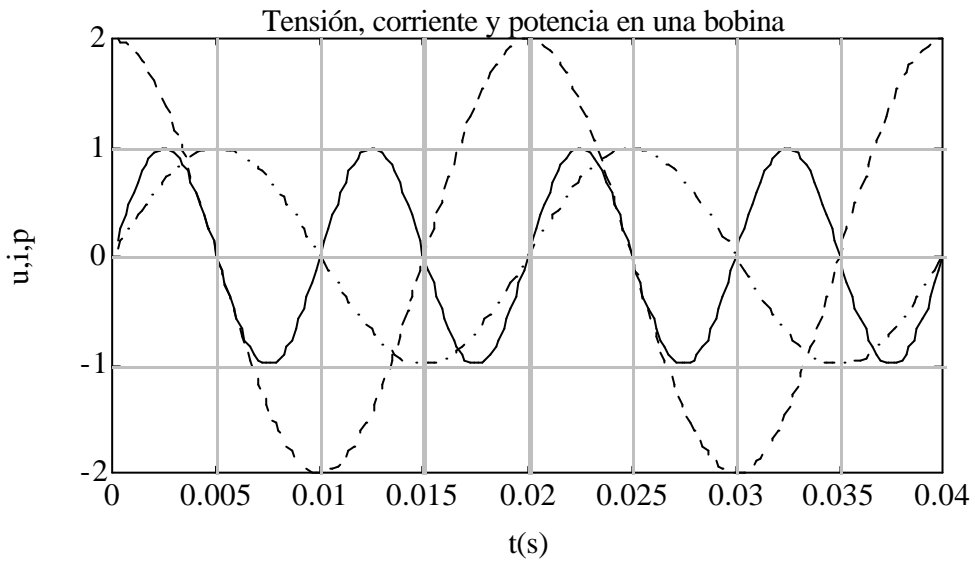


Figura 8.5

La expresión de la energía consumida por la bobina será:

$$w(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) = LI^2 \text{sen}^2 \omega t = \frac{1}{2} LI^2(1 - \cos 2\omega t) \quad (8.7)$$

de valor medio $(1/2)LI^2$. Si se representa esta expresión en función del tiempo se obtiene la Figura 8.6.

8. Potencia y energía en el régimen estacionario sinusoidal

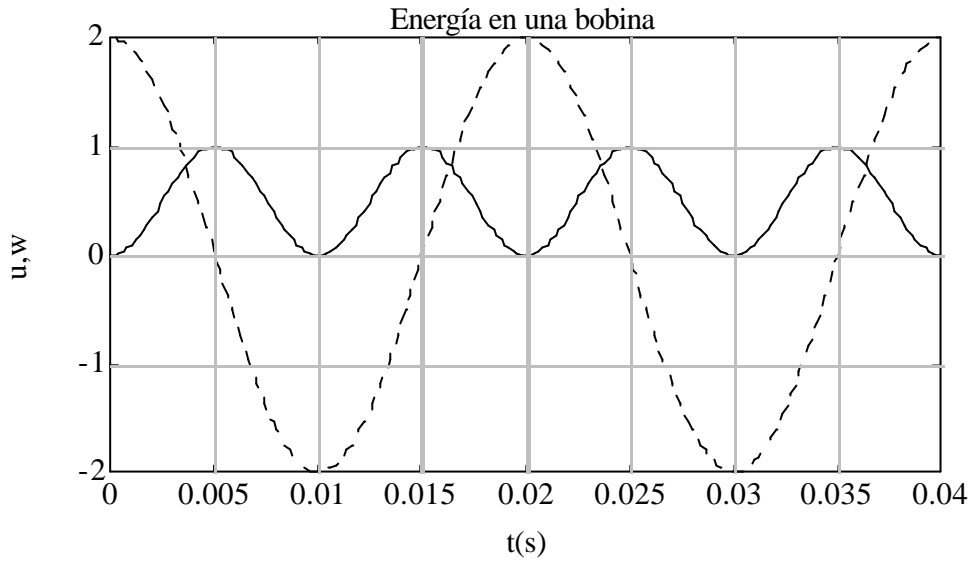


Figura 8.6

8.2 Potencia consumida por un dipolo: potencia activa, reactiva y aparente.

Sea el dipolo representado en la Figura 8.7, en la cual se han puesto referencias de potencia entrante.

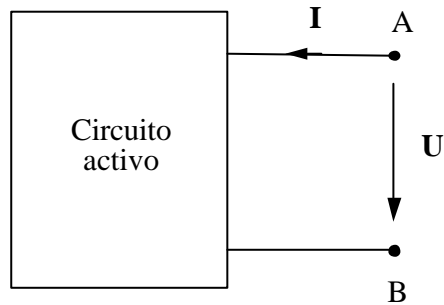


Figura 8.7

La tensión y la corriente tendrán la expresión siguiente:

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos \omega t$$

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t - \varphi)$$

8. Potencia y energía en el régimen estacionario sinusoidal

La tensión y la corriente vendrán representadas por los fasores $\mathbf{U} = U \angle 0$ y $\mathbf{I} = I \angle -\phi$. El desfase negativo de la corriente se toma así porque la mayor parte de los consumidores son inductivos y de esta forma se opera la mayor parte de las veces con ángulo ϕ positivo, que será el ángulo de potencia.

La potencia *instantánea* consumida por el dipolo será:

$$\begin{aligned} p(t) = u(t) \cdot i(t) &= 2 \cdot UI \cos \omega t \cdot \cos(\omega t - \phi) = 2UI \cos \omega t (\cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi) = \\ &= 2 UI \cos \phi \cos^2 \omega t + 2 UI \sin \phi \cos \omega t \sin \omega t = \\ &= UI \cos \phi (1 + \cos 2\omega t) + UI \sin \phi \sin 2\omega t \end{aligned} \quad (8.8)$$

$$= UI \cos \phi + UI \cos \phi \cos 2\omega t + UI \sin \phi \sin 2\omega t \quad (8.9)$$

La potencia instantánea, como se ve, es una oscilación de potencia cuyo valor medio es $UI \cos \phi$; este término se denomina *potencia fija*. El resto de la potencia se denomina *potencia fluctuante*.

En la descomposición de la potencia instantánea que se presenta en (8.8), el primer término, esto es

$$UI \cos \phi (1 + \cos 2\omega t)$$

se asemeja a la potencia consumida por una resistencia, como la de la ecuación (8.1) es una potencia de tipo "resistivo", es decir, una potencia oscilante a una frecuencia doble a la de la red y con un valor medio no nulo. El segundo término,

$$UI \sin \phi \sin 2\omega t$$

es una oscilación de potencia de valor medio nulo y de frecuencia doble que la de la red, semejante a (8.6), y podría ser una potencia de tipo "reactivo" (inductivo o capacitivo).

La cantidad de uno y otro tipos de potencia definen el carácter de un circuito. Para saber de qué tipo es un dipolo, se definen los siguientes términos:

$$P = UI \cos \phi \quad \text{Potencia activa} \quad (8.10)$$

$$Q = UI \sin \phi \quad \text{Potencia reactiva} \quad (8.11)$$

hay una gran diferencia entre P y Q . La primera es el valor medio de una oscilación de potencia. Por esta razón tiene un claro sentido físico y se mide en vatios (W). la potencia reactiva es la amplitud de

8. Potencia y energía en el régimen estacionario sinusoidal

una oscilación de potencia. Tiene un significado físico menos claro y por eso se mide en voltamperios reactivos (VAr), una unidad con dimensiones de vatios, pero que se denomina así para subrayar el carácter de amplitud de oscilación de potencia.

A partir de las potencias activa y reactiva se define la potencia aparente, S , que se mide en voltamperios (VA), también una unidad de carácter ficticio.

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (\text{VA}) \quad (8.12)$$

También se define el número complejo \mathbf{S} o potencia aparente compleja

$$\mathbf{S} = P + jQ = UI(\cos\varphi + j \operatorname{sen}\varphi) = UI e^{j\varphi} = S e^{j\varphi} \quad (8.13)$$

El módulo de la potencia aparente compleja es la potencia aparente.

8.3 Distintas expresiones de la potencia en alterna.

Sean los fasores asociados con la corriente y tensión

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= U \underline{\mathbf{0}} \\ \mathbf{I} &= I \underline{-\varphi} = I \cdot \cos\varphi - j \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi \\ \mathbf{S} &= UI \cdot (\cos\varphi + j \cdot \operatorname{sen}\varphi) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{I}^* \end{aligned} \quad (8.14)$$

En una impedancia

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} \\ \mathbf{S} &= \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{I}^* = \mathbf{Z} \cdot I^2 = (R + j \cdot X) \cdot I^2 = R \cdot I^2 + j \cdot X \cdot I^2 \\ P &= R \cdot I^2 \end{aligned} \quad (8.15)$$

$$Q = X \cdot I^2 \quad (8.16)$$

En una admitancia

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{U}$$

8. Potencia y energía en el régimen estacionario sinusoidal

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}\mathbf{Y}^*\mathbf{U}^* = \mathbf{Y}^*\mathbf{U}^2 = (\mathbf{G} - j\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{U}^2 = \mathbf{G}\cdot\mathbf{U}^2 - j\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{U}^2$$

$$P = \mathbf{G}\cdot\mathbf{U}^2 \quad (8.17)$$

$$Q = -\mathbf{B}\cdot\mathbf{U}^2 \quad (8.18)$$

Se puede definir un triángulo de potencias análogo al de impedancias, que se muestra en la Figura 8.8.

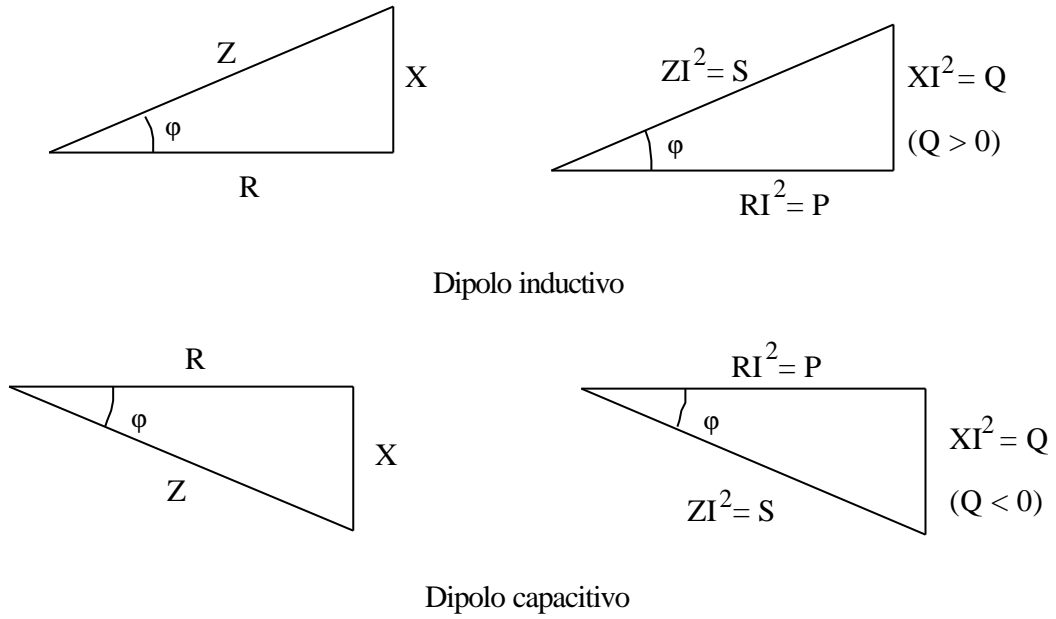


Figura 8.8

8.4 Carácter de un dipolo

Sea un dipolo en el cual las referencias son de potencia entrante

8. Potencia y energía en el régimen estacionario sinusoidal

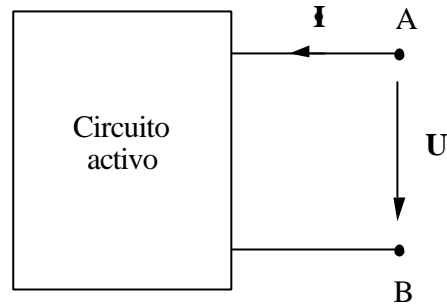


Figura 8.9

$$\underline{U} = U \underline{0}$$

$$\underline{I} = I \underline{\angle -\varphi} = I \cdot \cos\varphi - j \cdot I \cdot \sin\varphi = I_R + j \cdot I_X$$

$$I_R = I \cdot \cos\varphi$$

$$I_X = -I \cdot \sin\varphi$$

La potencia aparente compleja será:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = UI \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi) = U \cdot I_R - U \cdot I_X$$

$$P = UI_R = UI \cdot \cos\varphi \quad (8.19)$$

$$Q = -UI_X = UI \cdot \sin\varphi \quad (8.20)$$

Cuando la potencia activa sea positiva el dipolo estará recibiendo potencia activa de la red a la que está conectado. A estos dipolos consumidores se les denomina *carga*. Si la potencia activa es negativa, esto significa que la red está recibiendo potencia activa del dipolo; será por tanto, un dipolo generador.

En cuanto a la potencia reactiva, si la potencia reactiva es mayor que cero, el carácter de un dipolo será *inductivo*. Por analogía con la potencia activa, se dice que está recibiendo potencia reactiva de la red, aunque esto es poco preciso e inexacto. Cuando la potencia reactiva es negativa, el dipolo es de carácter capacitivo, y se dice que el dipolo está entregando potencia reactiva a la red, o que la está generando.

Al representar en el plano complejo los fasores de tensión e intensidad, y dado que el fasor \underline{U} estará situado en el eje de abscisas, la posición en cualquiera de los cuadrantes de la corriente dará el

8. Potencia y energía en el régimen estacionario sinusoidal

carácter generador, carga, inductivo o capacitivo del dipolo. La representación de las distintas posibilidades se expresa en la Figura 8.10.

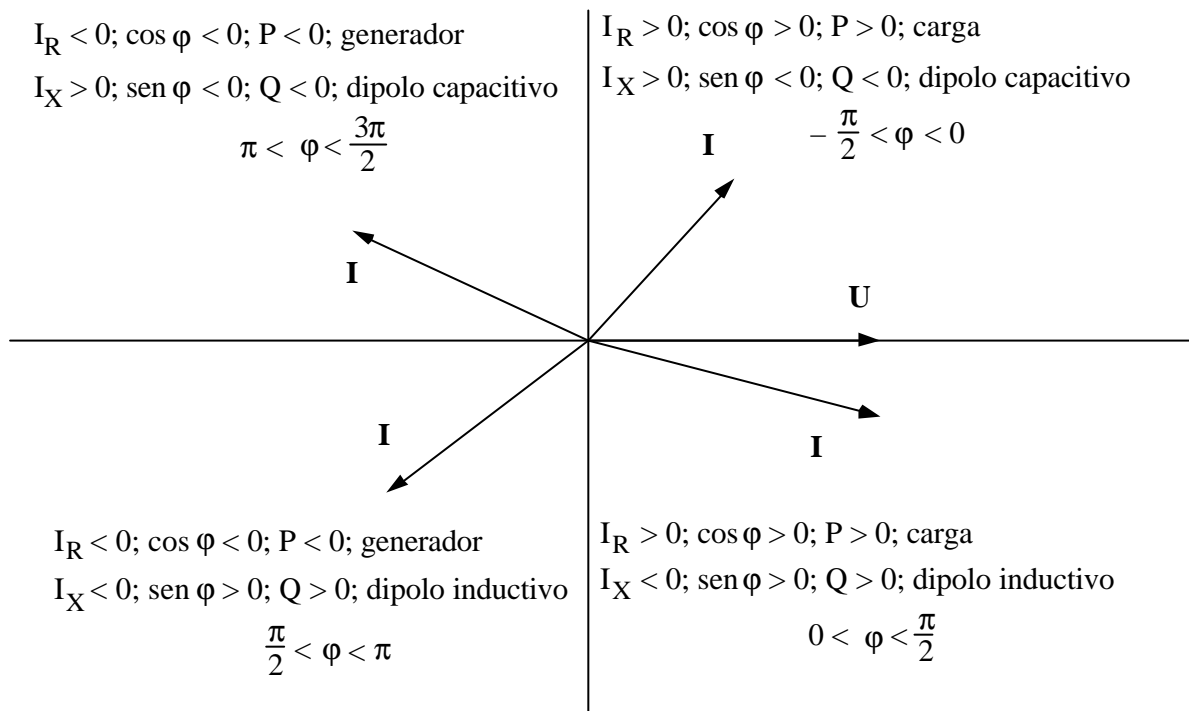


Figura 8.10

8.5 Teorema de Boucherot

Este teorema es una formulación del teorema de conservación de la energía, y su aplicación es una generalización del balance de potencias que se realiza en los circuitos de continua. su enunciado es el siguiente:

"En un circuito lineal, para una frecuencia constante, hay conservación de la potencia activa, por una parte, y de la potencia reactiva, por otra."

8.6 Factor de potencia y su importancia en el suministro de energía eléctrica

Normalmente, una carga está conectada a una tensión que puede considerarse constante, y demanda la potencia activa dada. El carácter de la carga, considerada como un dipolo, vendrá dado por el desfase entre la corriente y la tensión. Este desfase es difícil de medir, aunque es fácilmente calculable de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} S &= U \cdot I \\ P &= UI \cos\varphi \\ \cos\varphi &= \frac{P}{S} = \frac{P}{U \cdot I} \end{aligned} \quad (8.21)$$

El término $\cos\varphi$ se denomina *factor de potencia* de una carga, y es una manera de medir su aprovechamiento energético.

De esta forma una carga queda perfectamente caracterizada por la tensión a la que va conectada, la potencia activa que consume, y su factor de potencia. Puesto que el coseno es una función par no se puede distinguir si φ es positivo (carga inductiva) o negativo (carga capacitiva), por lo que habrá que indicar si su factor de potencia es inductivo o capacitivo. No obstante, en la mayor parte de las cargas industriales el factor de potencia es inductivo, por lo que a veces se omite esta indicación, resultando implícito, por tanto, el carácter inductivo de la carga.

En la expresión de la potencia activa se observa que a una tensión constante, la demanda de potencia activa se puede satisfacer con distintas combinaciones de I y de $\cos\varphi$. Para una potencia dada, cuando el factor de potencia sea bajo, la corriente será alta, y viceversa, con el límite de que el valor máximo del factor de potencia es la unidad; en este caso, la corriente demandada por la carga será mínima.

Pues bien, dado que las cargas están unidas a los centros de distribución de energía eléctrica a través de líneas y cables de un valor no nulo de resistencia, se producirán pérdidas de potencia activa en estas líneas cuyo valor será:

$$P = R \cdot I^2$$

8. Potencia y energía en el régimen estacionario sinusoidal

Por consiguiente, cuanto mayor sea la corriente demandada por la carga, mayores serán las pérdidas de potencia activa en las líneas. Y por esta razón conviene que el factor de potencia sea lo más alto posible. Para poder conseguir esto hay que corregirlo. Dado que las cargas son normalmente inductivas, habrá que conectar a la carga un dispositivo que consuma potencia reactiva de distinto signo, esto es, que genere potencia reactiva. Estos dispositivos son los condensadores.

Para calcular el valor del condensador que hay que conectar en paralelo con la carga para corregir su factor de potencia hasta el valor deseado, se realiza lo siguiente. La potencia reactiva que se necesita compensar será:

$$Q = P (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi') \quad (8.22)$$

siendo $\operatorname{tg}\varphi$ la tangente del ángulo del factor de potencia antiguo, y $\operatorname{tg}\varphi'$ la del ángulo de potencia nuevo o deseado.

La potencia reactiva la deberá producir un condensador, o varios conectados entre sí y formando lo que se denomina *batería de condensadores*.

$$Q = -(-B \cdot U^2) = \omega C \cdot U^2 \quad (8.23)$$

En la fórmula (8.23), el signo menos se debe a que la potencia es generada, y por tanto, habrá que cambiarle el signo con respecto a la deducida en (8.18), que se obtuvo con criterio de potencia entrante en el dipolo.

Si se igualan ambas expresiones se tiene

$$\omega C \cdot U^2 = P (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')$$

De donde se puede despejar el valor del condensador

$$C = \frac{P (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')}{\omega U^2} \quad (8.24)$$

9. SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS

9.1 Introducción. Definiciones.

La configuración más habitual de un sistema eléctrico elemental de una cierta potencia es la representada en la Figura 9.1.

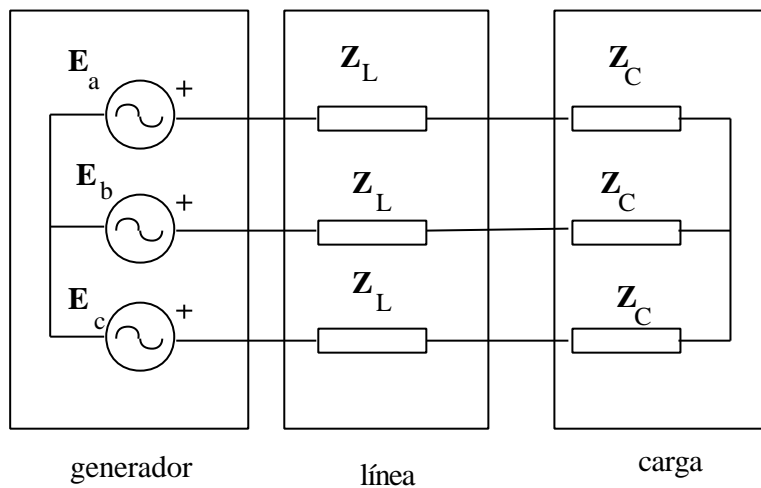


Figura 9.1

Estos sistemas se denominan *trifásicos*, porque tienen tres *fases*. Una fase es "cada una de las partes de un circuito en que se genera, se transmite, o se utiliza una de las tensiones del sistema".

En los sistemas trifásicos en condiciones ideales, las fuentes del sistema generador tienen el valor indicado en (9.1). El diagrama vectorial se representa en la Figura 9.2.

$$\mathbf{E}_a = E \underline{/0} \qquad \mathbf{E}_b = E \underline{/-2p/3} \qquad \mathbf{E}_c = E \underline{/2p/3} \qquad (9.1)$$

9. Sistemas trifásicos equilibrados.

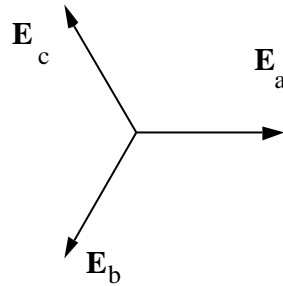


Figura 9.2. Secuencia directa

Obsérvese que la suma de las tres tensiones es nula. Con estos valores de fuentes, se dice que el sistema de tensiones está equilibrado. En este tema sólo se considerarán estos sistemas.

El sistema está igualmente equilibrado si el orden de las fases es distinto, esto es, si las tensiones de fase están dispuestas como en la Figura 9.3.

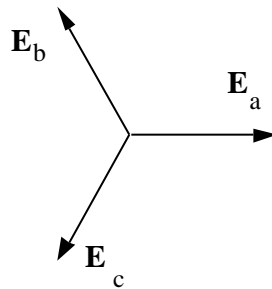


Figura 9.3. Secuencia inversa

En este caso, las tensiones tienen el valor

$$\mathbf{E}_a = E \angle 0 \qquad \mathbf{E}_b = E \angle 2\pi/3 \qquad \mathbf{E}_c = E \angle -2\pi/3 \qquad (9.2)$$

En la Figura 9.2 las tensiones están en *secuencia directa*, en tanto que en la Figura 9.3, se dice que las tensiones están en *secuencia inversa*. La elección de una u otra secuencia es arbitraria, pero una vez determinada es de gran importancia, puesto que determina, entre otras cosas, el sentido de giro de las máquinas eléctricas. Normalmente se trabaja en *secuencia directa*, y en lo sucesivo se considerará así mientras no se indique lo contrario.

Las razones por las que se emplean sistemas trifásicos son fundamentalmente dos:

1. Las máquinas eléctricas, especialmente las rotativas, son más sencillas y eficaces

9. Sistemas trifásicos equilibrados.

2. La potencia transmitida es constante, por lo que no se presentan oscilaciones de potencia, y esto hace el funcionamiento de las máquinas más suave y continuo.

9.2 Diagrama vectorial de tensiones

En los sistemas trifásicos hay al menos tres terminales o hilos que son accesibles. A veces, hay cuatro, y al cuarto se le denomina *neutro*. Por tanto, siempre se tendrá acceso a las tensiones que hay entre los hilos, y no siempre a la tensión de la propia fuente. Por esta razón es conveniente estudiar dichas tensiones, U_{ab} , U_{bc} , U_{ca} , tal como se representan en la Figura 9.4.

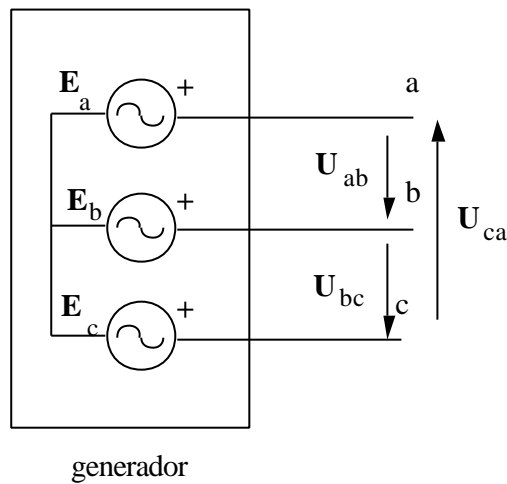


Figura 9.4

Por simple aplicación de la segunda ley de Kirchhoff, se puede deducir que en un sistema a tres hilos,

$$U_{ab} + U_{bc} + U_{ca} = 0 \tag{9.3}$$

Los valores de estas tensiones serán

$$U_{ab} = E_a - E_b = \sqrt{3} \cdot E \cdot \underline{p/6} \tag{9.4}$$

$$U_{bc} = E_b - E_c = \sqrt{3} \cdot E \cdot \underline{p/6 - 2p/3} \tag{9.5}$$

$$U_{ca} = E_c - E_a = \sqrt{3} \cdot E \cdot \underline{p/6 + 2p/3} \tag{9.6}$$

El diagrama vectorial que las representa es el de la Figura 9.5.

9. Sistemas trifásicos equilibrados.

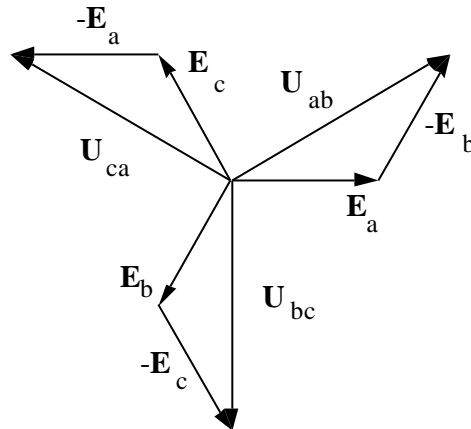


Figura 9.5

Los diagramas vectoriales a veces se representan en una de las formas indicadas en las Figura 9.6.

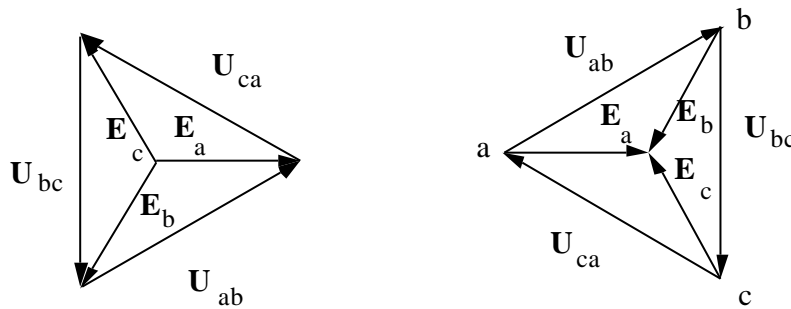


Figura 9.6

Las tensiones U_{ab} , U_{bc} y U_{ca} se pueden obtener, bien de la manera indicada, a través de tres fuentes de tensión conectadas en estrella, o bien a través de tres fuentes conectadas en triángulo. Para que las tensiones entre hilos sean iguales en ambos casos, el valor de estas fuentes conectadas en triángulo deberá ser

$$E_{ab} = \sqrt{3} \cdot E_{\underline{p/6}} \quad (9.7)$$

$$E_{bc} = \sqrt{3} \cdot E_{\underline{p/6-2p/3}} \quad (9.8)$$

$$E_{ca} = \sqrt{3} \cdot E_{\underline{p/6-2p/3}} \quad (9.9)$$

Si el sistema es equilibrado se pueden reconstruir las tensiones E_a , E_b y E_c a partir de E_{ab} , E_{bc} y E_{ca} , por lo que resulta indiferente el tipo de conexión de las fuentes para la determinación de las restantes magnitudes del circuito.

9. Sistemas trifásicos equilibrados.

9.3 Corrientes en los sistemas trifásicos.

Un conjunto de tres impedancias conectadas, bien en estrella, bien en triángulo, configuran una carga trifásica. Si las tres impedancias tienen el mismo valor, la carga es equilibrada. La aplicación de un sistema trifásico equilibrado de tensiones a una carga trifásica equilibrada produce la circulación de corrientes por las fases del sistema.

Si las tensiones que hay en cada una de las fases son U_a, U_b, U_c y cada una de las impedancias es $Z_Y = Z_Y / \varphi$, las corrientes que circulan por ella serán

$$I_a = \frac{U_a}{Z_Y} = \frac{U}{Z_Y} \angle -\varphi = I \angle -\varphi \quad (9.10)$$

$$I_b = \frac{U_b}{Z_Y} = \frac{U}{Z_Y} \angle -\varphi - 2\pi/3 = I \angle -\varphi - 2\pi/3 \quad (9.11)$$

$$I_c = \frac{U_c}{Z_Y} = \frac{U}{Z_Y} \angle -\varphi + 2\pi/3 = I \angle -\varphi + 2\pi/3 \quad (9.12)$$

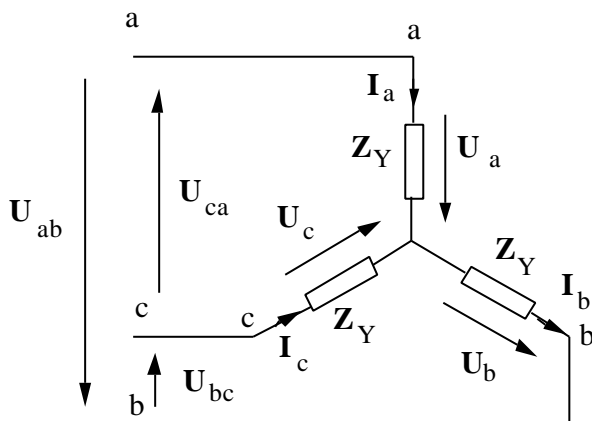


Figura 9.7

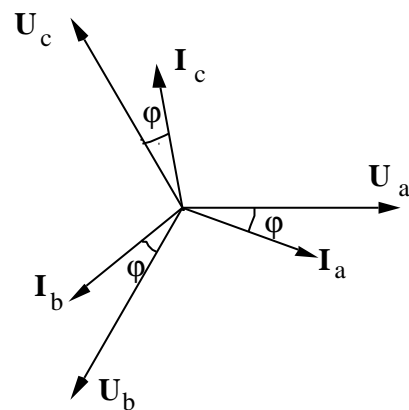


Figura 9.8

Si ahora se conectan en triángulo tres impedancias iguales Z_Δ tales que formen un sistema en triángulo equivalente al previo en estrella ($Z_\Delta = 3 \cdot Z_Y$), las corrientes que circularán por cada una de las impedancias serán

9. Sistemas trifásicos equilibrados.

$$I_{ab} = \frac{U_{ab}}{Z_l} = \frac{\sqrt{3}U}{3 \cdot Z_Y} \frac{p/6 - \varphi}{\sqrt{3}} = \frac{I}{\sqrt{3}} \frac{p/6 - \varphi}{\sqrt{3}} \quad (9.13)$$

$$I_{bc} = \frac{U_{bc}}{Z_l} = \frac{\sqrt{3}U}{3 \cdot Z_Y} \frac{p/6 - \varphi - 2p/3}{\sqrt{3}} = \frac{I}{\sqrt{3}} \frac{p/6 - \varphi - 2p/3}{\sqrt{3}} \quad (9.14)$$

$$I_{ca} = \frac{U_{ca}}{Z_l} = \frac{\sqrt{3}U}{3 \cdot Z_Y} \frac{p/6 - \varphi + 2p/3}{\sqrt{3}} = \frac{I}{\sqrt{3}} \frac{p/6 - \varphi + 2p/3}{\sqrt{3}} \quad (9.15)$$

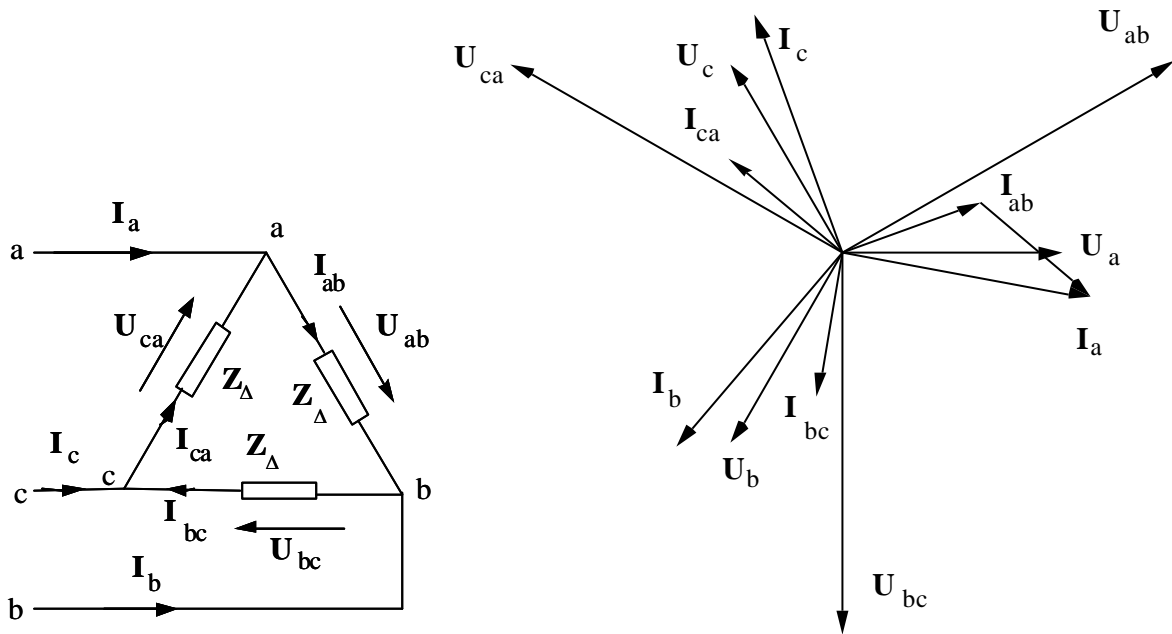


Figura 9.9

Las corrientes I_a , I_b , I_c , se obtienen de la manera siguiente

$$I_a = I_{ab} - I_{ca} = I / -\varphi \quad (9.16)$$

$$I_b = I_{bc} - I_{ab} = I / -\varphi - 2p/3 \quad (9.17)$$

$$I_c = I_{ca} - I_{cb} = I / -\varphi + 2p/3 \quad (9.18)$$

Hay que observar que en un sistema contres hilos, la aplicación de la primera ley de Kirchoff implica que

$$I_a + I_b + I_c = 0 \quad (9.19)$$

9. Sistemas trifásicos equilibrados.

9.4 Magnitudes de fase y de línea

Sean dos sistemas trifásicos formados por dos conjuntos de impedancias, conectadas en estrella y en triángulo, y equivalentes, es decir $Z_{\Delta} = 3 \cdot Z_Y$. Las tensiones y corrientes existentes en ambos sistemas serán las indicadas en la Figura 9.10.

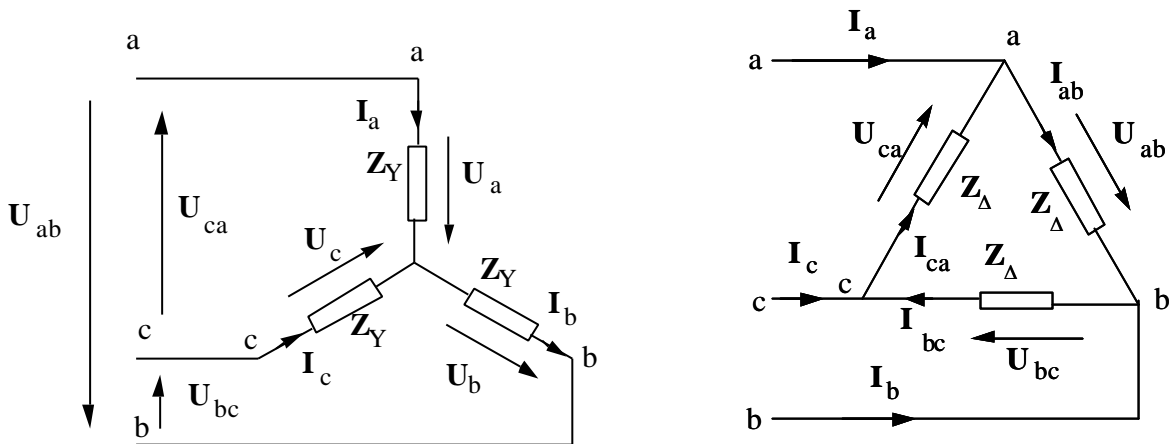


Figura 9.10

Las magnitudes que aparecen en las dos conexiones son U_{ab} , U_{bc} y U_{ca} , en las tensiones, e I_a , I_b , e I_c en las corrientes. Estas son las denominadas magnitudes *de línea*. Se denominan también magnitudes *compuestas*, puesto que se forman a partir de las restantes en cada configuración, es decir,

$$\begin{aligned} I_a &= I_{ab} - I_{ca} & U_{ab} &= U_a - U_b \\ I_b &= I_{bc} - I_{ab} & U_{bc} &= U_b - U_c \\ I_c &= I_{ca} - I_{cb} & U_{ca} &= U_c - U_a \end{aligned}$$

Las tensiones y corrientes de línea aparecen en un sistema trifásicos independientemente de su configuración, por esta razón se utilizarán preferentemente cuando se definan las magnitudes de un sistema trifásico.

El resto de las magnitudes se denominan *magnitudes simples*, puesto que son las magnitudes elementales a partir de las cuales se obtienen las compuestas o de línea.

9. Sistemas trifásicos equilibrados.

Por otra parte, en cada impedancia, o fase, hay una caída de tensión, y por cada una de ellas circula una corriente. Estas son las magnitudes de *fase*. Estas magnitudes de fase dependen de la configuración que adopten las impedancias que forman el sistema trifásico. En el caso de sistemas en estrella, las magnitudes de fase serán las tensiones simples y las corrientes de línea. En los sistemas en triángulo, las magnitudes de fase serán las tensiones de línea y las corrientes simples. Es decir, las corrientes de línea coinciden con las de fase en los sistemas en estrella, y las tensiones de línea coinciden con las tensiones de fase en los sistemas en triángulo.

Si, como se ha indicado, los dos sistemas son equivalentes, y se toma como valor base para el módulo los de las magnitudes de línea, y como origen de fases U_a , los valores de todas las tensiones y corrientes serán

$$I_a = I \angle -\varphi \qquad U_{ab} = U \angle \varphi/6 \qquad (9.20)$$

$$I_b = I \angle -\varphi - 2\pi/3 \qquad U_{bc} = U \angle \varphi/6 - 2\pi/3 \qquad (9.21)$$

$$I_c = I \angle -\varphi + 2\pi/3 \qquad U_{ca} = U \angle \varphi/6 + 2\pi/3 \qquad (9.22)$$

$$I_{ab} = \frac{I}{\sqrt{3}} \angle \varphi/6 - \varphi \qquad U_a = \frac{U}{\sqrt{3}} \angle 0 \qquad (9.23)$$

$$I_{bc} = \frac{I}{\sqrt{3}} \angle \varphi/6 - \varphi - 2\pi/3 \qquad U_b = \frac{U}{\sqrt{3}} \angle -2\pi/3 \qquad (9.24)$$

$$I_{ca} = \frac{I}{\sqrt{3}} \angle \varphi/6 - \varphi + 2\pi/3 \qquad U_c = \frac{U}{\sqrt{3}} \angle 2\pi/3 \qquad (9.25)$$

9.5 Conversión de fuentes reales de estrella a triángulo y viceversa.

Tanto las tensiones como las corrientes de fase pueden obtenerse a partir de las magnitudes de línea y viceversa, con lo que las fuentes de tensión y de corriente ideales seguirán las mismas reglas, y se pueden pasar, mediante las fórmulas (9.20) a (9.25). A continuación se van a deducir las reglas para pasar fuentes reales de configuración estrella a triángulo y viceversa. En el primer caso se verá sólo la

9. Sistemas trifásicos equilibrados.

conversión de fuentes de tensión; en el segundo se darán también implícitamente las normas para el paso de fuentes de corriente.

• Paso de Y a ?

Sea una fuente real trifásica como la representada en la Figura 10.13, o Figura 10.14, que es equivalente. Se realiza una transformación estrella-triángulo, con lo que se obtiene la Figura 9.13.

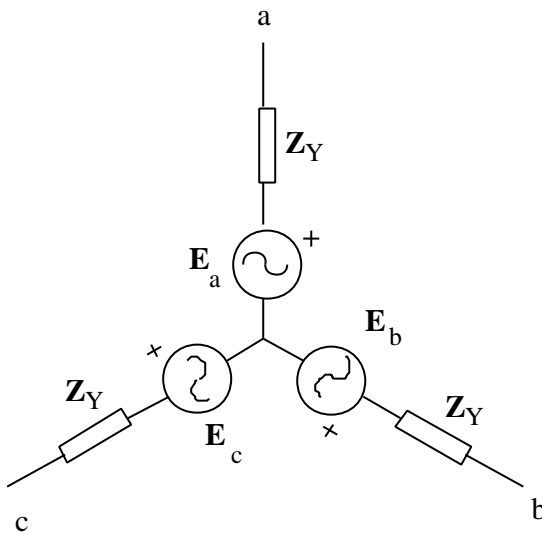


Figura 9.11

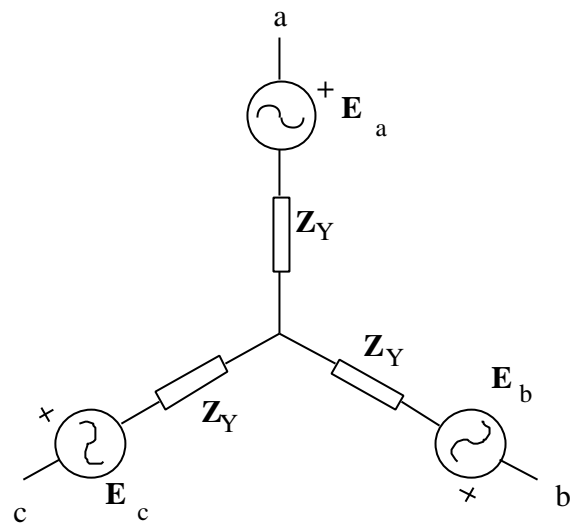


Figura 9.12

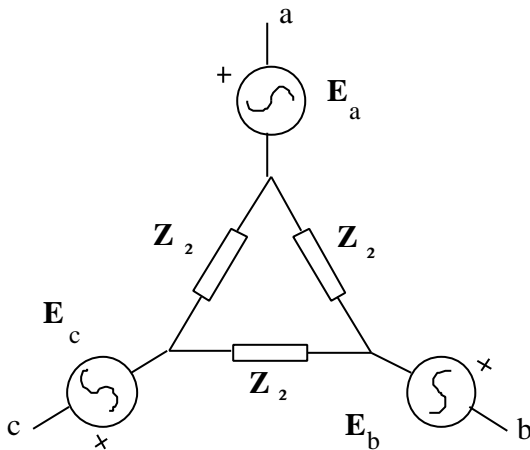


Figura 9.13

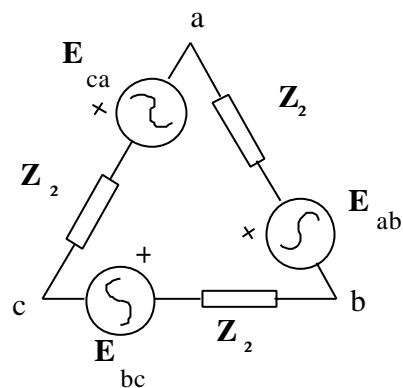


Figura 9.14

Al introducir las fuentes en el triángulo de impedancias queda la Figura 10.15, que será equivalente al original (Figura 10.13), siempre que

9. Sistemas trifásicos equilibrados.

$$Z_L = 3 \cdot Z_Y \qquad \mathbf{E}_{ab} = \mathbf{E}_a - \mathbf{E}_b \qquad (9.26)$$

• Paso de Δ a Y

Si bien la transformación anterior es suficiente para obtener fuentes reales conectadas en triángulo equivalentes a otras dadas conectadas en estrella, se va a ofrecer un algoritmo alternativo, puesto que en él aparece también la transformación de fuentes de corriente, de Y a Δ y viceversa.

Sean las tres fuentes conectadas en triángulo de la Figura 9.15. Estas fuentes se pueden convertir en fuentes equivalentes de corriente como las de la Figura 10.18.

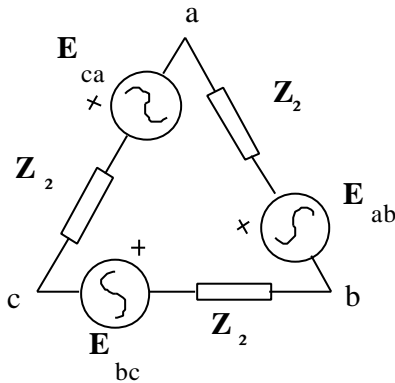


Figura 9.15

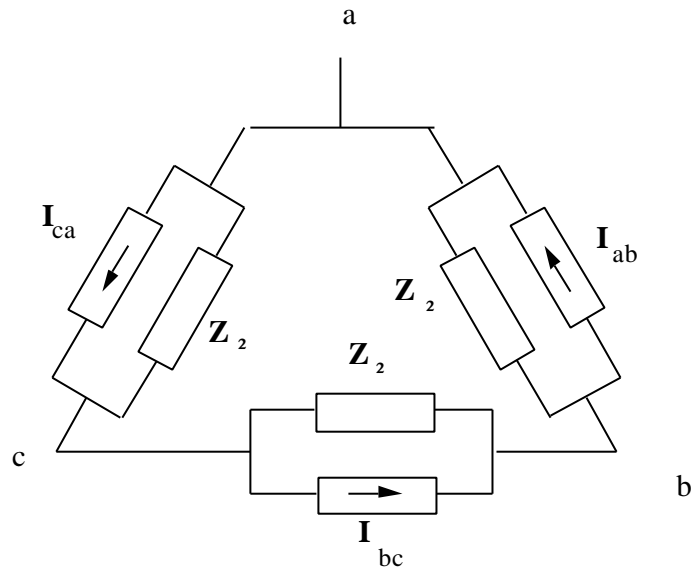


Figura 9.16

Los valores de las fuentes de corriente serán

$$\mathbf{I}_{ab} = \frac{\mathbf{E}_{ab}}{Z_L} \qquad \mathbf{I}_{bc} = \frac{\mathbf{E}_{bc}}{Z_L} \qquad \mathbf{I}_{ca} = \frac{\mathbf{E}_{ca}}{Z_L}$$

Dicha combinación de fuentes puede reducirse a una forma equivalente, como la de la Figura 9.17.

9. Sistemas trifásicos equilibrados.

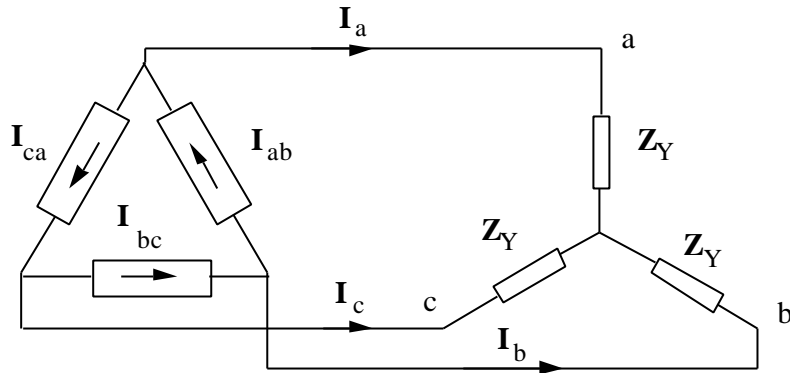


Figura 9.17

Las impedancias Z_Δ se han transformado en su equivalente en estrella ($Z_Y = Z_\Delta/3$) A su vez, las fuentes en triángulo se pueden sustituir por otras equivalentes tales que suministren las corrientes I_a , I_b , I_c . El resultado de esta transformación se muestra en la Figura 9.18

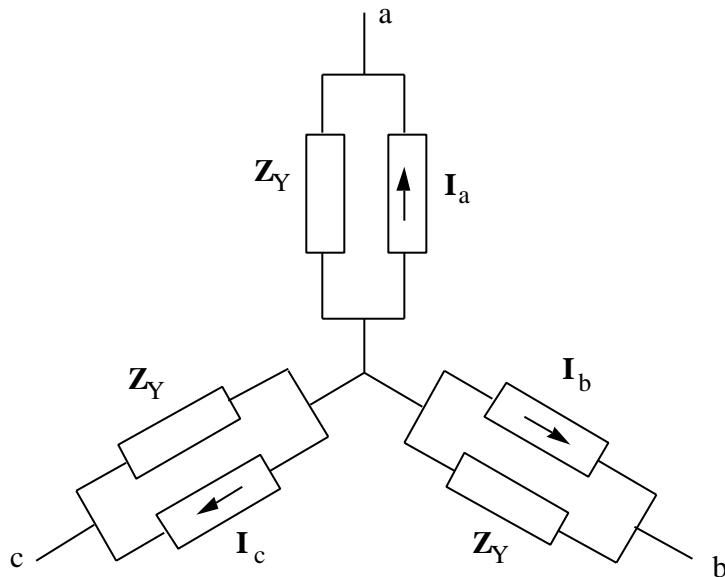


Figura 9.18

De aquí es inmediato pasar a fuentes reales de tensión, como las de la Figura 10.13. El valor de la fuente de tensión de la fase a será

$$E_a = Z_Y \cdot I_a = Z_Y \cdot (I_{ab} - I_{ca}) = Z_Y \cdot \left(\frac{E_{ab}}{Z_\Delta} - \frac{E_{ca}}{Z_\Delta} \right) = \frac{E_{ab} - E_{ca}}{3} \quad (9.27)$$

9. Sistemas trifásicos equilibrados.

Y el de las otras fases

$$\mathbf{E}_b = \frac{\mathbf{E}_{bc} - \mathbf{E}_{ab}}{3} \qquad \mathbf{E}_c = \frac{\mathbf{E}_{ca} - \mathbf{E}_{bc}}{3} \qquad (9.28)$$

9.6 Circuitos monofásicos equivalentes

La realización de cálculos en circuitos trifásicos tal como se ha hecho hasta ahora es bastante laboriosa, puesto que se necesita repetir los cálculos para cada fase. Los sistemas que se han manejado hasta ahora son muy pequeños, por lo que puede imaginarse la complejidad del análisis de sistemas trifásicos cuando estos, como ocurre en la práctica, tienen una gran cantidad de nudos.

Sin embargo, se habrá observado que estos cálculos son muy repetitivos puesto que en cada fase son los mismos. Por esta razón, se va a deducir un circuito equivalente en el que sólo se representen las magnitudes de una fase, pudiéndose obtener fácilmente los valores de las magnitudes en las otras dos en los casos de circuitos equilibrados. Este es el que se denomina *circuito monofásico equivalente*. Se pueden obtener dos circuitos monofásicos equivalentes: el circuito monofásico fase-neutro y el fase-fase. En realidad, sólo se usa el primero.

- **Circuito equivalente fase-neutro**

Sea un sistema trifásico equilibrado como el representado en la Figura 9.19 en la que tanto el receptor como el generador están conectados en estrella, y ambos están enlazados por una línea trifásica.

9. Sistemas trifásicos equilibrados.

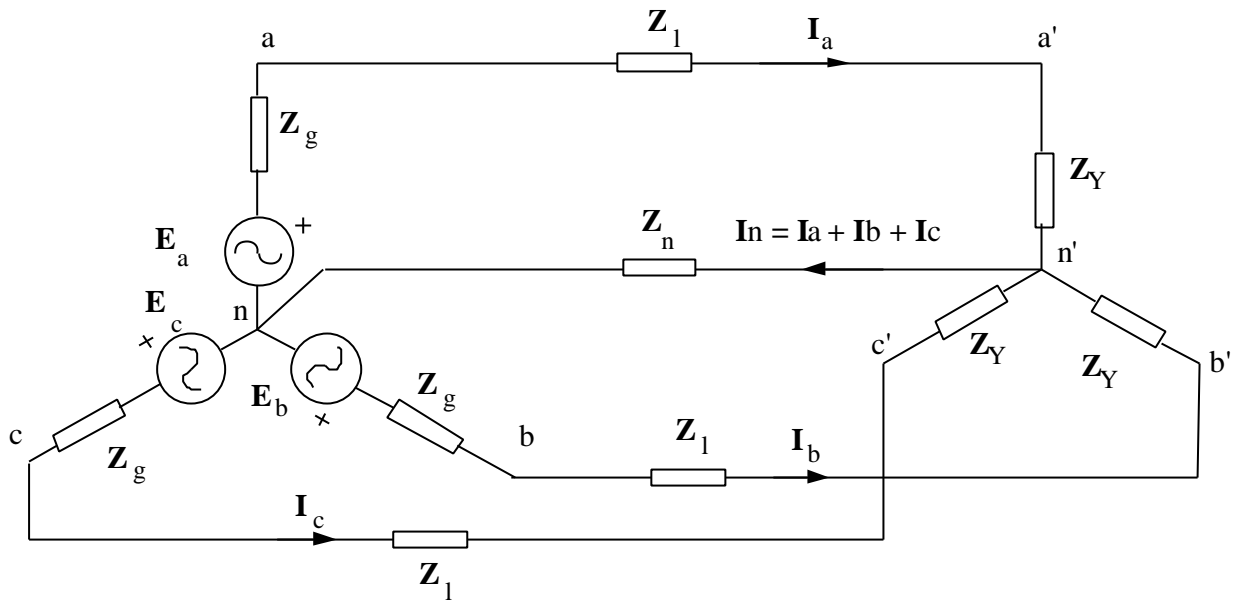


Figura 9.19

Los puntos neutros de las estrellas, n y n' respectivamente, están enlazados por una impedancia de valor Z_n . Por este conductor circula la suma de las corrientes de fase, es decir

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c$$

Si se aplica la segunda ley de Kirchhoff al camino cerrado formado por cada fase y el neutro se obtiene

$$\mathbf{E}_a = (\mathbf{Z}_g + \mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_Y) \cdot \mathbf{I}_a + (\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c) \cdot \mathbf{Z}_n$$

$$\mathbf{E}_b = (\mathbf{Z}_g + \mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_Y) \cdot \mathbf{I}_b + (\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c) \cdot \mathbf{Z}_n$$

$$\mathbf{E}_c = (\mathbf{Z}_g + \mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_Y) \cdot \mathbf{I}_c + (\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c) \cdot \mathbf{Z}_n$$

Al sumar estas tres ecuaciones se obtiene

$$\mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b + \mathbf{E}_c = (\mathbf{Z}_g + \mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_Y + 3 \cdot \mathbf{Z}_n) \cdot (\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c)$$

Si la alimentación es un sistema trifásico equilibrado

$$\mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b + \mathbf{E}_c = 0$$

y por tanto

9. *Sistemas trifásicos equilibrados.*

$$\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c = 0 \quad (9.29)$$

Además, la tensión entre los neutros n y n' será

$$\mathbf{U}_{nn'} = (\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c) \cdot \mathbf{Z}_n = 0 \quad (9.30)$$

Si no hubiese hilo de neutro, la aplicación de la segunda ley de Kirchhoff daría lugar a las siguientes expresiones:

$$\mathbf{E}_a = (\mathbf{Z}_g + \mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_Y) \cdot \mathbf{I}_a + \mathbf{U}_{n'n}$$

$$\mathbf{E}_b = (\mathbf{Z}_g + \mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_Y) \cdot \mathbf{I}_b + \mathbf{U}_{n'n}$$

$$\mathbf{E}_c = (\mathbf{Z}_g + \mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_Y) \cdot \mathbf{I}_c + \mathbf{U}_{n'n}$$

La suma de las tres ecuaciones es

$$\mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b + \mathbf{E}_c = (\mathbf{Z}_g + \mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_Y) \cdot (\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c) + 3 \cdot \mathbf{U}_{n'n}$$

Puesto que, por aplicación de la primera ley de Kirchhoff

$$\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c = 0$$

se tiene que cumplir que

$$\mathbf{U}_{nn'} = 0$$

Por tanto, la tensión entre los neutros de los sistemas equilibrados conectados en estrella es siempre nula, independientemente de que estén conectados o no entre sí. Por esta razón, a fin de simplificar el análisis, se hará nula la impedancia que une los neutros de la Figura 9.19.

Si se aplica la segunda ley de Kirchhoff a la malla n - a - a' - n' - n , la ecuación resultante será

$$\mathbf{E}_a = (\mathbf{Z}_g + \mathbf{Z}_l + \mathbf{Z}_Y) \cdot \mathbf{I}_a \quad (9.31)$$

Un circuito equivalente que tuviera esta misma ecuación que ligase la tensión en la fuente y la corriente sería el representado en la Figura 9.20.

9. Sistemas trifásicos equilibrados.

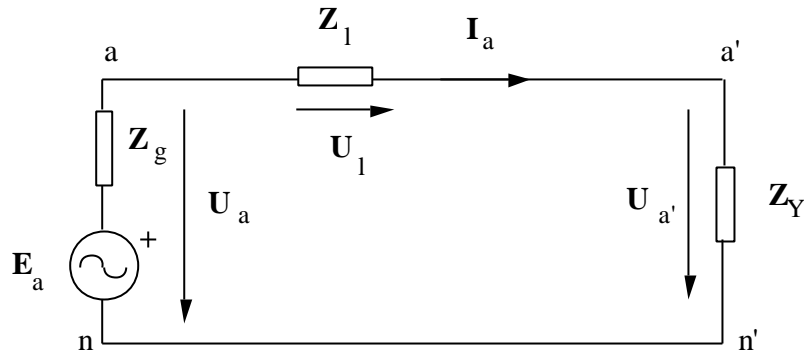


Figura 9.20

La corriente I_a se puede obtener a partir de la ecuación (9.31) mediante la expresión

$$I_a = \frac{E_a}{Z_g + Z_l + Z_Y} \quad (9.32)$$

Las tensiones U_a , U_l y $U_{a'}$ se obtendrán de la forma siguiente

$$U_a = Z_Y \cdot I_a \quad U_l = Z_l \cdot I_a \quad U_a = E_a - Z_g \cdot I_a$$

A partir de estas magnitudes en la fase a se pueden obtener las magnitudes en las fases b y c, siempre y cuando el sistema sea equilibrado.

Si las fuentes no estuvieran conectadas en estrella, sino en triángulo, podrían transformarse en fuentes conectadas en estrella, de acuerdo con las ecuaciones dadas en el apartado 9.5. Lo mismo sucede con las cargas: un sistema de impedancias conectadas en triángulo siempre puede convertirse en otro de impedancias conectadas en estrella mediante una transformación estrella triángulo.

Por consiguiente, todos los sistemas trifásicos podrán representarse mediante su equivalente monofásico fase-neutro, que es el que realmente se utiliza.

- **Circuito equivalente fase-fase**

Antes de comenzar con el desarrollo de las ecuaciones, hay que advertir que este circuito equivalente apenas se usa, y que por tanto este apartado se debe entender más como un ejercicio que como la deducción de algo que se vaya a utilizar realmente.

Sean dos sistemas conectados en triángulo a través de una línea trifásica, uno de ellos generador, y el otro receptor, tal como se muestra en la Figura 9.21.

9. Sistemas trifásicos equilibrados.

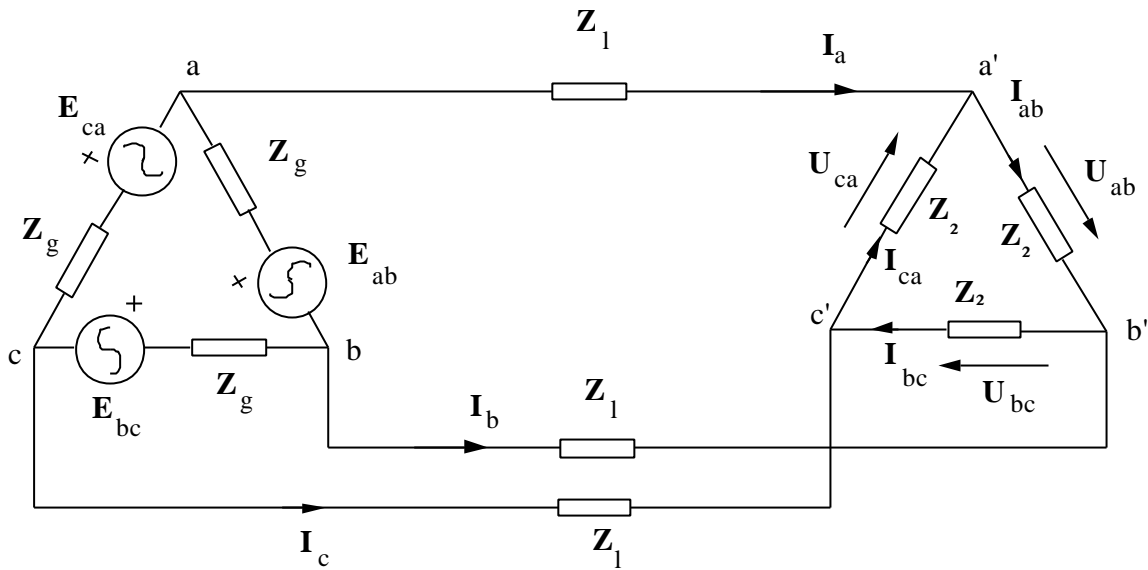


Figura 9.21

Este circuito se puede analizar por mallas; se escogerán como corrientes de mallas las tres corrientes de fase I_{ab} , I_{bc} , I_{ca} . Si se aplica la segunda ley de Kirchhoff a la malla a-a'-b'-b-a, resulta la ecuación siguiente

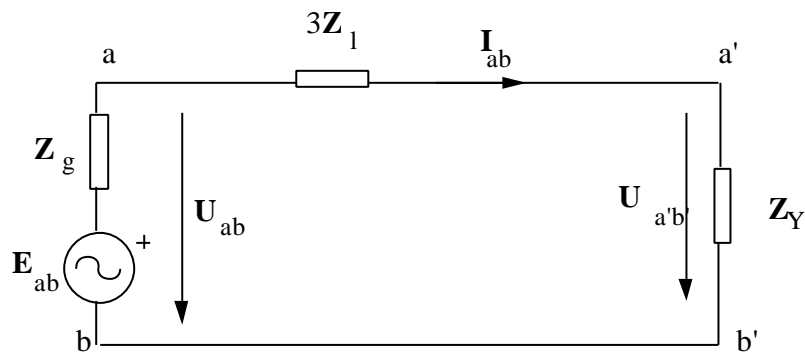
$$E_{ab} = (Z_g + Z_1 + Z_2 + Z_1) \cdot I_{ab} - Z_1 \cdot I_{ca} - Z_1 \cdot I_{bc}$$

$$E_{ab} = (Z_g + Z_2 + 2 \cdot Z_1) \cdot I_{ab} - Z_1 \cdot (I_{ca} + I_{bc})$$

Ahora bien, como $I_{ab} + I_{bc} + I_{ca} = 0$ en los sistemas equilibrados, $I_{ab} = - (I_{bc} + I_{ca})$, y por tanto

$$E_{ab} = (Z_g + Z_2 + 3 \cdot Z_1) \cdot I_{ab} \quad (9.33)$$

El circuito equivalente al que corresponde la ecuación (9.33) sería el de la Figura 9.22, que es el equivalente fase-fase de un circuito trifásico.



9. Sistemas trifásicos equilibrados.

Figura 9.22

Este equivalente es más complicado que el equivalente fase-neutro, por el hecho de que la impedancia de la línea debe multiplicarse por tres, y además no se obtienen directamente las corrientes de línea, si bien se obtienen las tensiones de fase. Como ya se ha indicado, este equivalente no se usa prácticamente.

10. POTENCIA EN LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS

10.1 Potencias activa, reactiva y aparente.

10.1.1 Potencia activa.

La potencia activa consumida por un sistema trifásico es la suma de las potencias activas consumidas por cada una de las fases. En el caso de sistemas equilibrados, será el triple de lo consumido en cada una de las fases, esto es

$$P = P_a + P_b + P_c = 3 \cdot P_F = 3 U_F \cdot I_F \cdot \cos \varphi \quad (10.1)$$

La expresión (10.1) está en función de las magnitudes de fase, y por tanto depende de la conexión de la carga trifásica. A fin de hacerla independiente del tipo de conexión, se pondrá a continuación en función de las magnitudes de línea

- Carga en estrella

El módulo de la tensión de fase es $\sqrt{3}$ veces inferior al de la tensión de línea, en tanto que la corriente de fase coincide con la corriente de línea

$$P = 3 \cdot \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot I \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} U \cdot I \cos \varphi$$

- Carga en triángulo

El módulo de la corriente de fase es $\sqrt{3}$ veces inferior al de la corriente de línea, en tanto que la tensión de fase coincide con la tensión de línea

$$P = 3 \cdot U \cdot \frac{I}{\sqrt{3}} \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} U \cdot I \cos \varphi$$

En los dos casos, la expresión de la potencia activa es

$$P = \sqrt{3} U \cdot I \cos \varphi \quad (10.2)$$

10. Potencia en los sistemas trifásicos equilibrados.

10.1.2 Potencias reactiva y aparente. Factor de potencia.

La potencia reactiva se define de manera análoga a la potencia activa, esto es, la suma de las potencias reactivas consumidas en cada fase.

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c = 3 \cdot Q_F = 3 U_F \cdot I_F \cdot \text{sen}\varphi \quad (10.3)$$

En las cargas en estrella, la potencia reactiva en función de las magnitudes de línea es

$$Q = 3 \cdot \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot I \cdot \text{sen}\varphi = \sqrt{3} U \cdot I \text{ sen}\varphi$$

Y en las cargas en triángulo

$$Q = 3 \cdot U \cdot \frac{I}{\sqrt{3}} \cdot \text{sen}\varphi = \sqrt{3} U \cdot I \text{ sen } \varphi$$

Por tanto, la expresión de la potencia reactiva de un sistema trifásico en función de las magnitudes de línea será

$$Q = \sqrt{3} U \cdot I \text{ sen } \varphi \quad (10.4)$$

Hay que hacer notar que el ángulo φ es el desfase entre las tensiones y corrientes *defase*, tal como se observa en la fórmula (10.1). El desfase entre la tensión y la corriente de línea será 30° mayor, y por tanto el resultado obtenido al utilizar este ángulo es incorrecto. La corriente y la tensión de línea no son nunca magnitudes de fase simultáneamente, y por tanto su desfase no corresponde con el ángulo de potencia.

La potencia aparente se define de forma semejante a como se hizo en los sistemas monofásicos:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3} U \cdot I \quad (10.5)$$

Y la potencia aparente compleja, por su parte, se define de la forma siguiente

$$\mathbf{S} = P + j \cdot Q = \sqrt{3} U \cdot I (\cos\varphi + j \cdot \text{sen}\varphi) \quad (10.6)$$

El factor de potencia es el cociente entre la potencia activa y la potencia aparente

10. Potencia en los sistemas trifásicos equilibrados.

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{3}U \cdot I} \quad (10.7)$$

10.2 Potencia instantánea en los sistemas trifásicos equilibrados.

De la misma manera que la potencia activa, la potencia instantánea consumida por un sistema trifásico es la suma de las potencias de cada una de las fases; esta última tiene como expresión

$$p_a(t) = U_F I_F \cos\varphi (1 + \cos 2\omega t) + U_F I_F \sin\varphi \sin 2\omega t$$

Por tanto, las potencias de cada una de las fases serán

$$p_a(t) = U_F I_F \cos\varphi (1 + \cos 2\omega t) + U_F I_F \sin\varphi \sin 2\omega t$$

$$p_b(t) = U_F I_F \cos\varphi (1 + \cos (2\omega t - 2\pi/3)) + U_F I_F \sin\varphi \sin (2\omega t - 2\pi/3)$$

$$p_c(t) = U_F I_F \cos\varphi (1 + \cos (2\omega t + 2\pi/3)) + U_F I_F \sin\varphi \sin (2\omega t + 2\pi/3)$$

La potencia trifásica, es como se ha indicado, la suma de las de las tres fases

$$p(t) = p_a(t) + p_b(t) + p_c(t) = U_F I_F \cos\varphi (1 + \cos 2\omega t) + U_F I_F \sin\varphi \sin 2\omega t + U_F I_F \cos\varphi (1 + \cos (2\omega t - 2\pi/3)) + U_F I_F \sin\varphi \sin (2\omega t - 2\pi/3) + U_F I_F \cos\varphi (1 + \cos (2\omega t + 2\pi/3)) + U_F I_F \sin\varphi \sin (2\omega t + 2\pi/3)$$

Realizando operaciones trigonométricas elementales se obtiene

$$p(t) = 3 \cdot U_F I_F \cos\varphi$$

Es decir, la potencia instantánea absorbida por un sistema trifásico equilibrado es constante, e igual al valor de la potencia activa. Esto representa una ventaja sustancial en el comportamiento de ciertas cargas, como las máquinas rotativas, que para una velocidad de giro dada proporcionan un par constante, por lo que no se producen oscilaciones mecánicas, que dan lugar a ruido y mayor fatiga del material.

La potencia reactiva de un sistema trifásico es una magnitud equivalente a la suma de las tres potencias reactivas de cada fase. Puesto que la potencia reactiva de cada fase es la magnitud de una oscilación de potencia entre la fuente y la carga, y esta oscilación de potencias produce pérdidas en las

10. Potencia en los sistemas trifásicos equilibrados.

líneas, la potencia reactiva trifásica da una medida de la oscilación de potencia total, esto es, la producida en cada fase, multiplicada por tres en los sistemas equilibrados.

El factor de potencia, por su parte, representa el aprovechamiento energético de la carga, es decir, las pérdidas producidas en la red para suministrar una potencia activa dada a una tensión dada.

10.3 Compensación del factor de potencia en los sistemas trifásicos.

Sea un sistema trifásico con un potencia P y un factor de potencia $\cos\phi$ al que se conecta en paralelo una batería de condensadores para aumentar su factor de potencia a $\cos\phi'$.

La potencia reactiva consumida por la carga será

$$Q = P \operatorname{tg}\phi$$

Y la potencia consumida por el conjunto condensador + carga será

$$Q' = P \operatorname{tg}\phi'$$

Por tanto, la potencia reactiva que deberá suministrar la batería de condensadores será

$$?Q = Q - Q' = P \cdot (\operatorname{tg}\phi - \operatorname{tg}\phi')$$

La potencia reactiva que suministran los condensadores será

$$?Q = 3\omega C U_F^2$$

donde U_F es la tensión de fase. Tanto el valor de esta tensión como el de los condensadores dependerá de si la batería está conectada en estrella o en triángulo

- Batería conectada en estrella

En este caso, $U = \sqrt{3} U_F$.

$$3\omega C_Y \left(\frac{U}{\sqrt{3}} \right)^2 = P \cdot (\operatorname{tg}\phi - \operatorname{tg}\phi')$$

10. Potencia en los sistemas trifásicos equilibrados.

El valor de la batería de condensadores será por tanto

$$C_Y = \frac{P \cdot (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')}{\omega U^2} \quad (10.8)$$

- Batería conectada en triángulo

En este caso, $U = U_F$.

$$3\omega C_Y U^2 = P \cdot (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')$$

El valor de la batería de condensadores será por tanto

$$C_Y = \frac{P \cdot (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')}{3\omega U^2} \quad (10.9)$$

Las baterías de condensadores conectadas en triángulo necesitan, pues, una capacidad tres veces menor que las conectadas en estrella para suministrar una misma potencia reactiva.

10.4 Determinación de la secuencia de fases.

Ya se ha indicado que la secuencia de fases es el orden en que se suceden las tensiones del sistema. La determinación de la secuencia de fases de un sistema trifásico dado es importante porque determina, por ejemplo, el sentido de giro de las máquinas rotativas. El diagrama vectorial de las tensiones de fase será el representado en la Figura 10.1.

Secuencia directa

$$\begin{aligned} e_a(t) &= \sqrt{2} E \cdot \cos \omega t \\ e_b(t) &= \sqrt{2} E \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ e_c(t) &= \sqrt{2} E \cdot \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Secuencia inversa

$$\begin{aligned} e_a(t) &= \sqrt{2} E \cdot \cos \omega t \\ e_b(t) &= \sqrt{2} E \cdot \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \\ e_c(t) &= \sqrt{2} E \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

10. Potencia en los sistemas trifásicos equilibrados.

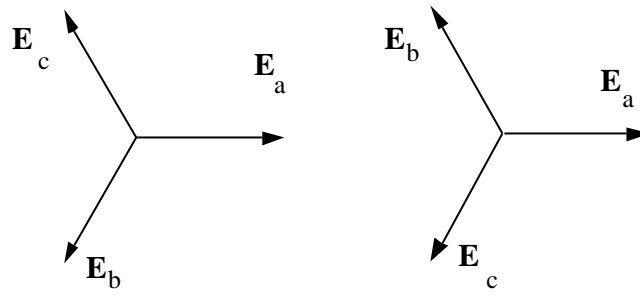


Figura 10.1

Una forma de determinar si el sistema es de secuencia directa o inversa es a partir del circuito de la Figura 10.2.

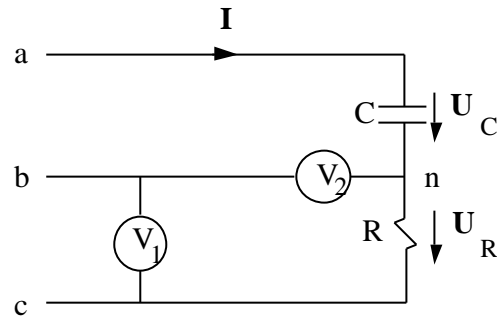


Figura 10.2

Según sea la secuencia, directa o inversa, el diagrama vectorial será bien el de la Figura 11.3, o bien el de la Figura 11.4:

10. Potencia en los sistemas trifásicos equilibrados.

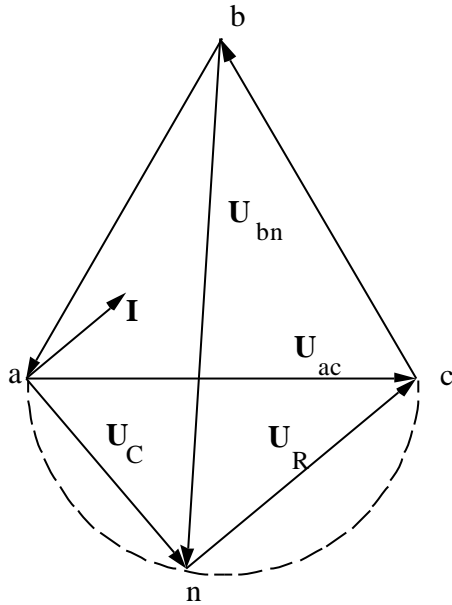


Figura 10.3. Secuencia directa

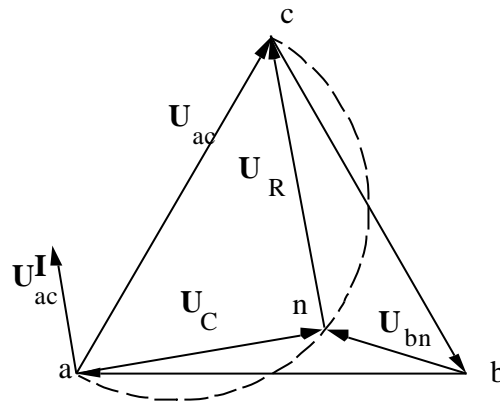


Figura 10.4. Secuencia inversa

En el caso de secuencia directa, el voltímetro V_2 marcará una tensión mayor que la de línea, que refleja el voltímetro V_1 . Si es secuencia inversa, el voltímetro V_2 señalará una tensión inferior a la de línea marcada por el voltímetro V_1 .

10.5 Medida de potencia en los sistemas trifásicos

10.5.1 Medida de potencia activa.

- Fases accesibles

El circuito de la Figura 10.5 representa un sistema trifásico equilibrado en Y con neutro accesible. El vatímetro W indica la potencia consumida por un a fase (P_{1F}). La potencia activa que consume el circuito trifásico será el triple de la potencia señalada por el vatímetro:

$$P = 3 \cdot P_{1F}$$

10. Potencia en los sistemas trifásicos equilibrados.

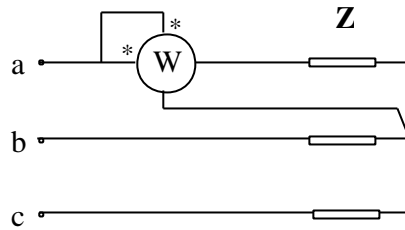


Figura 10.5

Cuando el sistema está conectado en triángulo, la potencia consumida por una fase se medirá como se indica en la Figura 10.6.

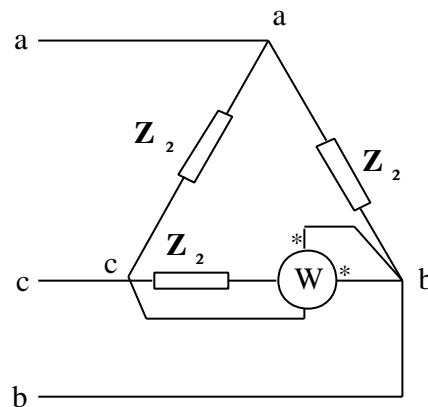


Figura 10.6

En este caso la potencia también es $P = 3 \cdot P_{1F}$.

- **Fases no accesibles**

En este caso se supone, bien que las cargas están conectadas en triángulo, pero no se puede acceder a las fases, o que están conectadas en estrella y el neutro no está accesible.

Sin embargo, en un sistema equilibrado todos los neutros están a la misma tensión, por lo que se puede formar un neutro con tres vatímetros iguales (o al menos que sean iguales sus bobinas voltimétricas), de forma que se puede crear un neutro que estará a la misma tensión que el neutro de la estrella equivalente del sistema cuya potencia consumida se desea medir. La representación de este montaje se muestra en la Figura 10.7.

10. Potencia en los sistemas trifásicos equilibrados.

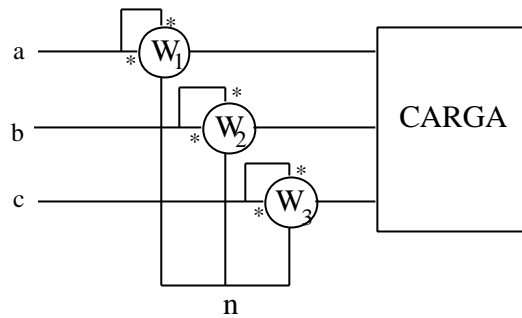


Figura 10.7

La potencia activa consumida por la carga es la suma de las lecturas de los vatímetros.

Este método se puede simplificar. Cuando el sistema cuya potencia se desea medir es un sistema equilibrado, las lecturas de los tres vatímetros son iguales, y por tanto, en realidad, basta con una lectura. Sin embargo, la tensión debe medirse con respecto a una referencia, el punto n, y esta referencia debe ser el neutro de un sistema equilibrado. Dado que la bobina voltimétrica del vatímetro tiene una impedancia, el neutro deberá formarse añadiendo dos impedancias que, conectadas en estrella con la bobina voltimétrica del vatímetro, formarán este neutro de una estrella equilibrada. El esquema de este método se muestra en la Figura 10.8.

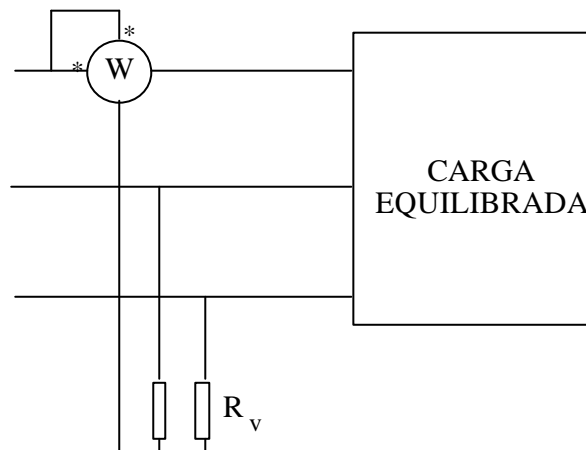


Figura 10.8

Existe otra forma de simplificar el proceso anterior. La lectura de un vatímetro da el valor medio por periodo T del producto de la tensión por la corriente instantáneas (esto es, la potencia activa), que se puede expresar de la siguiente forma

10. Potencia en los sistemas trifásicos equilibrados.

$$W = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} u_w i_w dt$$

La lectura de los tres vatímetros de la Figura 10.7, por tanto, será

$$W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} ((u_a - u_n) i_a + (u_b - u_n) i_b + (u_c - u_n) i_c) dt$$

donde u_n es la tensión en el punto neutro, y u_a , u_b y u_c las tensiones imples de las fases. Al desarrollar los paréntesis se obtiene

$$W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} (u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c) dt - \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} u_n (i_a + i_b + i_c) dt$$

Puesto que en los sistemas equilibrados, o en los sistemas desequilibrados sin hilo de neutro, la suma de las corrientes es nula, el segundo término de la ecuación anterior es cero. Esto quiere decir que no importa la tensión de la referencia (en el caso anterior el neutro), y por tanto se puede escoger como referencia una de las fases, por ejemplo, la fase c. En este caso, la lectura de este vatímetro sería nula (las lecturas de los tres vatímetros en un sistema equilibrado no tienen por qué ser iguales si la referencia no es un neutro equilibrado), y por tanto se puede eliminar. Este es el fundamento del método de los dos vatímetros, que se describe en el apartado siguiente para sistemas equilibrados, pero que, como se ha indicado, es válido también para sistemas desequilibrados sin hilo de neutro.

10.5.2 Método de los dos vatímetros.

En el método de los dos vatímetros estos se conectan como se muestra en la Figura 10.9.

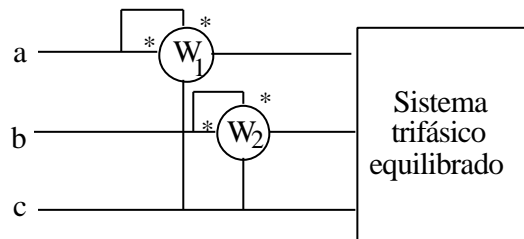


Figura 10.9

La lectura de cada uno de los dos vatímetros será, de acuerdo con la Figura 10.10:

10. Potencia en los sistemas trifásicos equilibrados.

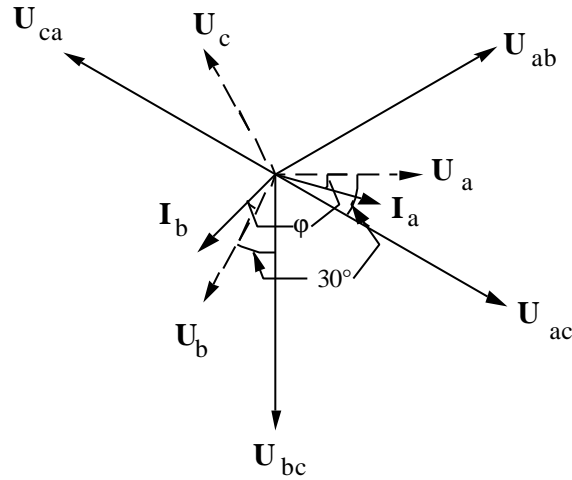


Figura 10.10

$$W_1 = U \cdot I \cdot \cos(\mathbf{U}_{ac}, \mathbf{I}_a) = U \cdot I \cos\left(\frac{\rho}{6} - \varphi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} U \cdot I \cdot \cos \varphi + \frac{1}{2} U \cdot I \cdot \sin \varphi \quad (10.10)$$

$$W_2 = U \cdot I \cdot \cos(\mathbf{U}_{bc}, \mathbf{I}_b) = U \cdot I \cos\left(\frac{\rho}{6} + \varphi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} U \cdot I \cdot \cos \varphi - \frac{1}{2} U \cdot I \cdot \sin \varphi \quad (10.11)$$

Al sumar las dos expresiones se obtienen las siguientes igualdades:

$$W_1 + W_2 = P \quad (10.12)$$

$$W_1 - W_2 = \frac{Q}{\sqrt{3}} \quad (10.13)$$

El método sólo calcula la potencia reactiva en sistemas equilibrados, y su expresión es la indicada en la ecuación anterior cuando las tensiones de alimentación son de secuencia directa. Sin embargo, la expresión de la potencia activa es válida para sistemas equilibrados y desequilibrados.

Las lecturas de los vatímetros pueden ser tanto positivas como negativas. Puesto que los vatímetros sólo pueden señalar magnitudes positivas, en caso de que uno de ellos tienda a marcar una magnitud menor que cero, habrá que cambiar las conexiones, bien de la bobina voltimétrica, bien de la amperimétrica, y considerar la lectura de este vatímetro negativa.

Los desfases entre tensión y corriente para los cuales la lectura de los vatímetros es negativa se pueden hallar de la forma indicada a continuación.

10. Potencia en los sistemas trifásicos equilibrados.

- Vatímetro W_1

La lectura del vatímetro W_1 será positiva cuando el coseno de la fórmula (10.10) lo sea, esto es, cuando su argumento esté comprendido entre -90° y 90° .

$$-90^\circ < 30 - \varphi < 90^\circ$$

lo que es equivalente a

$$-60^\circ < \varphi < 120^\circ$$

Esto es, cuando el sistema es muy capacitivo ($\varphi < -60^\circ$), o bien un generador inductivo ($\varphi > 120^\circ$), el vatímetro W_1 señalará una magnitud negativa. Si se trata de un vatímetro de cuadro en el que sólo haya parte positiva del cuadro, habrá que cambiar la polaridad de una bobina (normalmente la voltimétrica). En ese caso, se deberá cambiar de signo la lectura W_1 en las fórmulas (10.12) y (10.13).

- Vatímetro W_2

El argumento del coseno de la fórmula (10.11) deberá estar comprendido entre -90° y 90° .

$$-90^\circ < 30 + \varphi < 90^\circ \qquad \text{o bien} \qquad -120^\circ < \varphi < 60^\circ$$

La polaridad de una de las bobinas del vatímetro deberá cambiarse cuando el sistema tenga un desfase de más de 60° (muy inductivo), o de menos de -120° (generador capacitivo).

10.5.3 Medida de la potencia reactiva.

Mediante el empleo de un solo vatímetro se puede obtener la potencia reactiva consumida por una carga trifásica equilibrada, si el sistema de tensiones es equilibrado y de secuencia directa. Para ello, basta con conectar el aparato de medida tal como se muestra en la Figura 10.11.

10. Potencia en los sistemas trifásicos equilibrados.

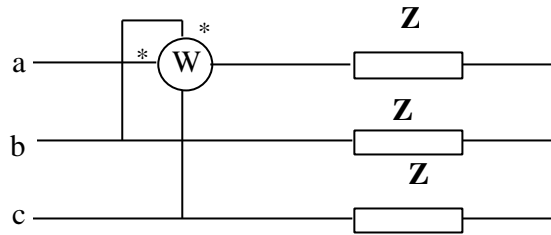


Figura 10.11

El diagrama vectorial de las magnitudes del sistema es el de la Figura 10.12.

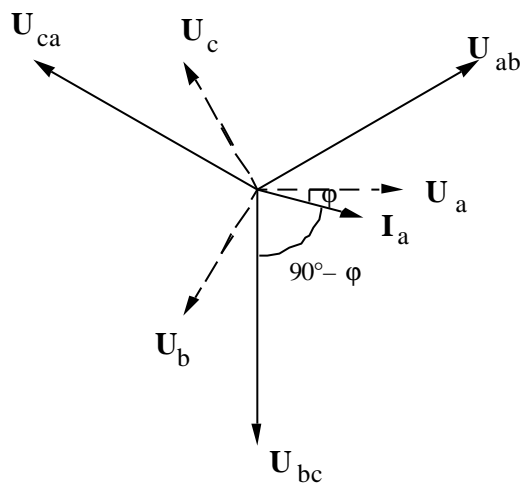


Figura 10.12

La lectura del aparato de medida será:

$$W = U \cdot I \cdot \cos(\angle U_{bc}, I_a) = U \cdot I \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = U \cdot I \cdot \text{sen } \varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

si el ángulo φ es capacitivo habrá que cambiar polaridades en el vatímetro.

10.6 Comparación entre sistemas monofásicos y trifásicos.

Sea un sistema monofásico que consume una potencia P con un factor de potencia $\cos\varphi$, a una tensión U . El transporte de energía eléctrica se realiza por medio de dos conductores, que supondremos que tienen una resistencia R_{IF} . Las pérdidas de potencia en el conductor serán

10. Potencia en los sistemas trifásicos equilibrados.

$$P_{1F} = 2 \cdot R_{1F} I_{1F}^2 = 2 \cdot R_{1F} \frac{P^2}{U^2 \cos^2 \phi} \quad (10.14)$$

Sea ahora un sistema con la misma demanda de potencia, misma tensión (de línea en este caso), e idéntico $\cos \phi$. La carga será alimentada mediante tres conductores cuya resistencia será R_{3F} . Las pérdidas producidas en la línea de transporte serán:

$$\Delta P_{3F} = 3 \cdot R_{3F} I_{3F}^2 = R_{3F} \frac{P^2}{U^2 \cos^2 \phi} \quad (10.15)$$

Al comparar las relaciones (10.14) y (10.15), se obtiene la relación entre las pérdidas y las resistencias de las líneas:

$$\frac{\Delta P_{1F}}{\Delta P_{3F}} = 2 \frac{R_{1F}}{R_{3F}} \quad (10.16)$$

En la ecuación (10.16) se puede comprobar que para un mismo conductor, las pérdidas son dobles en el sistema monofásico que en el trifásico.

Si se pretende que las pérdidas sean iguales, la resistencia del conductor de la línea monofásica deberá ser la mitad de la resistencia de la línea trifásica, es decir,

$$R_{3F} = 2 \cdot R_{1F} \qquad \rho \frac{1}{s_{3F}} = 2 \cdot \rho \frac{1}{s_{1F}}$$

Esto significa que, para una misma longitud de línea, l , y un mismo material (igual ρ), las secciones de los conductores deberán guardar entre sí la relación siguiente

$$s_{1F} = 2 \cdot s_{3F}$$

Sin embargo, esto no es suficientemente significativo, puesto que las líneas trifásicas tienen tres conductores, y las monofásicas, dos. Por esta razón, hay que relacionar los volúmenes de material necesarios entre sí:

$$V_{3F} = 3 \cdot l \cdot s_{3F} = \frac{3}{2} \cdot l \cdot s_{1F}$$

$$V_{1F} = 2 \cdot l \cdot s_{1F} = 2 \cdot l \cdot s_{1F}$$

La relación entre volúmenes será

10. Potencia en los sistemas trifásicos equilibrados.

$$\frac{V_{3F}}{V_{1F}} = \frac{3}{4}$$

La línea trifásica necesitará un 25 % menos de material que la línea monofásica para que ambas tengan las mismas pérdidas, lo que supone un ahorro considerable.

Sin embargo, para comparar adecuadamente ambas formas de transmitir la energía eléctrica hay que comparar otros factores, como los apoyos necesarios en ambos casos, los transformadores utilizados, etc. El estudio final es complejo y después de realizado no se llega a una conclusión clara sobre qué sistema es más rentable. Las ventajas de los sistemas trifásicos sobre los monofásicos son mas bien relativas a las máquinas productoras y utilizadoras de la energía eléctrica.

11. RÉGIMEN TRANSITORIO EN CIRCUITOS DE PRIMER ORDEN

11.1 Introducción. Circuito R-L serie.

En este tema se va a tratar el régimen transitorio de circuitos de primer orden. Este régimen transitorio se establece cuando se produce alguna variación en el circuito: conexión, desconexión, o en general, cualquier maniobra. Los circuitos que se estudien serán de primer orden, es decir, que sólo incluirán un elemento dinámico: bobina o condensador. El resto de los elementos serán resistencias o fuentes, de tensión o intensidad.

En el Capítulo 6 se ha estudiado el circuito que se recoge en la Figura 6.2, que consta de una resistencia en serie con una bobina, alimentadas por una fuente de tensión, en general variable con el tiempo. Este circuito, es en realidad la generalización de cualquiera que incluya una sola bobina y ningún condensador, sin más que considerar que la fuente y la resistencia son los términos del equivalente Thévenin en bornes de la bobina.

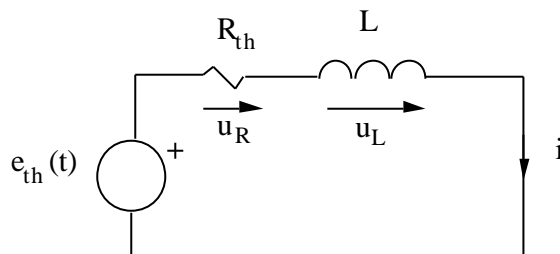


Figura 11.1

La ecuación diferencial resultante de aplicar la segunda ley de Kirchhoff al circuito es:

$$e_{th}(t) = R_{th} \cdot i + L \frac{di}{dt} \quad (11.1)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes. Su solución consta de dos términos, la solución de la ecuación homogénea $i_h(t)$ y una solución particular, $i_p(t)$, esto es:

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) \quad (11.2)$$

11. Régimen transitorio en sistemas de primer orden.

La solución de la ecuación homogénea es:

$$i_h(t) = K \cdot e^{-(R_{th}/L)t} \quad (11.3)$$

En donde K es una constante de integración. Esta parte de la solución decae exponencialmente con el tiempo, de forma que para $t \rightarrow \infty$ su valor es nulo. Al inverso del término que multiplica al tiempo se le denomina constante de tiempo, τ , y en este caso su valor es:

$$\tau = \frac{L}{R_{th}} \quad (11.4)$$

La solución particular depende de la expresión de $e(t)$, y será la que permanezca cuando $t \rightarrow \infty$. Por esta razón se la denomina $i_g(t)$.

La constante de integración K se obtiene al imponer unas determinadas condiciones particulares, es decir, un estado dado del circuito en un instante determinado que normalmente es el origen de tiempo ($t = 0$). Por consiguiente, si se denomina $i(0)$ a la corriente que circula por la bobina en el instante $t = 0$, la ecuación (11.2) particularizada para $t = 0$ queda

$$i(0) = i_g(0) + K$$

Donde $i_g(0)$ es el valor de la solución particular de la ecuación diferencial, en el instante $t = 0$. Así pues:

$$K = i(0) - i_g(0)$$

La solución completa será

$$i(t) = i_g(t) + (i(0) - i_g(0)) \cdot e^{-(t/\tau)} \quad (11.5)$$

La ecuación (11.5) se puede generalizar a cualquier circuito inductivo de primer orden, puesto que por muy complejo que sea este, el teorema de Thévenin permite reducirlo a una fuente de tensión en serie con una resistencia, como en la Figura 6.2. Por supuesto, si se conoce la corriente en el instante $t = t_0$, la solución se puede obtener de una manera semejante, y la expresión resultante es:

$$i(t) = i_g(t) + (i(t_0) - i_g(t_0)) \cdot e^{-(t-t_0)/\tau} \quad (11.6)$$

La corriente que circula por la bobina es la que describe el comportamiento del circuito, y a partir de la cual se pueden obtener las restantes magnitudes. Se denomina *variable de estado* del circuito.

11. Régimen transitorio en sistemas de primer orden.

11.2 Circuito R-C paralelo

Sea ahora un circuito como el de la Figura 11.2 en el que se representa el equivalente Norton de un circuito resistivo, en bornes de un condensador.

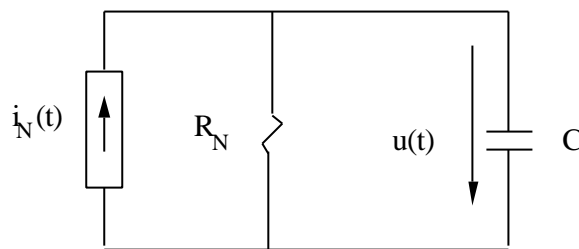


Figura 11.2

La ecuación diferencial que describe el comportamiento de este circuito será

$$i_N(t) = \frac{u}{R_N} + C \frac{du}{dt} \quad (11.7)$$

La solución de esta ecuación diferencial también es la suma de la solución de la ecuación homogénea y de una solución particular, es decir:

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) \quad (11.8)$$

La solución de la ecuación homogénea será en esta ocasión

$$u_h(t) = K \cdot e^{-t/R_N C} \quad (11.9)$$

El valor de la constante de tiempo será

$$\tau = R_N C \quad (11.10)$$

Suponiendo conocida la tensión para un instante t_0 , la expresión temporal de la misma será

$$u(t) = u_p(t) + (u(t_0) - u_p(t_0)) \cdot e^{-(t-t_0)/\tau} \quad (11.11)$$

11. Régimen transitorio en sistemas de primer orden.

Que en el caso particular de $t_0 = 0$, queda convertida en.

$$u(t) = u_g(t) + (u(0) - u_g(0)) \cdot e^{-t/\tau} \quad (11.12)$$

En este caso es la tensión la variable de estado del circuito.

Tanto la ecuación (11.6), como la (11.11) se pueden escribir de forma general, que cuando se conoce el valor de la función en $t = 0$, toma la expresión:

$$f(t) = f_g(t) + (f(0) - f_g(0)) \cdot e^{-t/\tau} \quad (11.13)$$

En donde f es la tensión en los circuitos R-C de primer orden, o la corriente en los circuitos R-L de primer orden.

11.3 Análisis sistemático de los transitorios de primer orden.

La fórmula (11.13) indica que el valor de la solución de la ecuación homogénea decrece con el tiempo de forma exponencial, y que, después de transcurrido un tiempo infinito, el comportamiento del circuito viene dado por la solución particular.

Cuando el valor de la solución de la ecuación homogénea se considera despreciable, se dice que el circuito se encuentra en régimen permanente, que se denomina igualmente estado estacionario. En caso contrario, se dice que el circuito se encuentra en régimen transitorio. La rapidez con la que se alcanza el régimen permanente depende de la constante de tiempo que afecta a la exponencial de la solución de la homogénea; cuanto menor sea dicha constante, más rápidamente decaerá la solución de la homogénea, y por lo tanto se estará antes más cerca del régimen permanente.

En los circuitos eléctricos las constantes de tiempo son pequeñas (del orden de los ms), y por tanto, la mayor parte del tiempo el circuito se considera que se está en régimen permanente. El régimen transitorio sólo será importante en los instantes siguientes a algún cambio. Este cambio puede ser una modificación de la topología del circuito (por ejemplo, debido a un accidente), o bien una maniobra como la conexión o la desconexión de un circuito. Suponiendo que esta maniobra o cambio en el circuito se efectúe en el instante $t = 0$, el instante previo a la maniobra se denominará $t = 0^-$, en tanto que el inmediatamente posterior se llamará $t = 0^+$.

11. Régimen transitorio en sistemas de primer orden.

A partir de la fórmula (11.13) se deduce que para conocer el comportamiento de los circuitos de primer orden se necesita determinar una serie de parámetros.

1. Constantes de tiempo: Su determinación es muy sencilla, pues basta hallar el equivalente Thévenin del circuito con respecto al elemento dinámico correspondiente, y aplicar la fórmula adecuada, (11.4) o (11.10).
2. Solución particular: En una gran parte de los casos las excitaciones son fuentes de corriente continua o de corriente alterna, en cuyo caso se puede determinar el estado estacionario mediante técnicas ya conocidas.
3. Condiciones iniciales: En ocasiones no se conocen directamente, sino que es necesario deducirlas a partir de otros valores del circuito.

La forma de determinar la solución particular en el caso de excitaciones de corriente continua, y las condiciones iniciales se expone en los siguientes apartados.

11.3.1 Cálculo del régimen permanente en circuitos con fuentes de corriente continua

La ecuación que define el comportamiento de una bobina es

$$u = L \frac{di}{dt}$$

Y la de un condensador

$$i = C \frac{du}{dt}$$

En ambos casos, en el régimen permanente, las tensiones y corrientes son constantes, y por tanto, sus variaciones en el tiempo son nulas. Por esta razón, la tensión en una bobina en un circuito de corriente continua y en régimen permanente será nula, al igual que la corriente en el condensador.

Esto significa que, en régimen permanente y en corriente continua, una bobina se comporta como un cortocircuito, en tanto que un condensador se comporta como un circuito abierto. Por tanto, en las condiciones indicadas, se pueden sustituir ambos elementos por cortocircuitos y circuitos abiertos, y se resuelve el circuito de esta forma.

11. Régimen transitorio en sistemas de primer orden.

11.3.2 Cálculo de condiciones iniciales.

Las ecuaciones que definen el comportamiento de la bobina y del condensador son.

$$u = L \frac{di}{dt} \qquad i = C \frac{du}{dt}$$

La corriente en las bobinas, y la tensión en los condensadores no pueden variar bruscamente, puesto que esto produciría, respectivamente, una tensión y corriente infinitos. Esto se puede comprobar observando que la corriente en las bobinas, y la tensión en los condensadores en el instante posterior a una modificación del circuito, $t = 0^+$, vienen dadas por:

$$i(0^+) = i(0^-) + \frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} u(t) dt \qquad u(0^+) = u(0^-) + \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} i(t) dt$$

En la ecuación anterior, las integrales son nulas, salvo que las tensiones y corrientes sean un impulso de Dirac.

Por tanto, se puede establecer que:

1. La tensión en un condensador no varía bruscamente en un circuito en el que no se producen impulsos de Dirac.
2. La corriente en una bobina no varía bruscamente en un circuito en el que no se producen impulsos de Dirac.

Sin embargo, tanto la corriente en los condensadores, como la tensión en las bobinas sí pueden variar bruscamente.

Una vez conocidas las condiciones iniciales en bobinas y condensadores, las condiciones iniciales del resto del circuito se obtendrán sustituyendo los condensadores por fuentes de tensión, y las bobinas por fuentes de corriente, cuyos valores serán las condiciones iniciales de tensión y de corriente.

La ecuación (11.13) será válida también para obtener cualquier magnitud en el circuito, si bien hay que tener en cuenta dos cosas:

11. Régimen transitorio en sistemas de primer orden.

1. Las condiciones iniciales deben ser las de $t = 0^+$, puesto que en las resistencias las corrientes y tensiones sí pueden variar bruscamente.
2. La constante de tiempo es la del elemento dinámico que produzca el transitorio

Teniendo en cuenta estas salvedades, la ecuación (11.13) se puede reescribir de la forma siguiente, más general.

$$f(t) = f_{\text{g}}(t) + (f(0^+) - f_{\text{g}}(0)) \cdot e^{-t/\tau} \quad (11.14)$$